Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

А.Н. Павленко

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность и по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Оренбург
2019

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я73
П 12

Рецензент - кандидат физико-математических наук М.В. Завалий

Павленко, А.Н.
П12 Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие [Электронный ресурс] / А. Н. Павленко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 189 с.
ISBN 978-5-7410-2298-6

В учебном пособии изложены основные сведения теоретического характера по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Данная работа предназначена для студентов, обучающихся по образовательным программам высшего образования по специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность и по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии.

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я73

ISBN 978-5-7410-2298-6

Содержание

Введение

Важность курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения» для специалистов в области естественнонаучных и инженерных специальностей обусловлена чрезвычайной широтой приложений данного математического раздела. Еще Исаак Ньютон (1642-1727) писал, что законы природы выражаются дифференциальными уравнениями [1, с. 7], а в настоящее время теория обыкновенных дифференциальных уравнений прочно укоренилась в физике, химии, биологии, экономике, радиотехнике, теории автоматического регулирования и других областях. Причем следует отметить, что сфера приложений дифференциальных уравнений постоянно расширяется с развитием естественных наук.

Не смотря на наличие обширного перечня [1-15] прекрасно зарекомендовавших себя учебников, опубликование данного учебного пособия является целесообразным в силу следующих причин:

1) учебное пособие должно отвечать ныне действующим регламентирующим документам Министерства науки и высшего образования Российской Федерации;

2) изложение материала должно соответствовать рабочим программам дисциплины «Дифференциальные уравнения» для специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность и направления бакалавриата 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии.

3) при изложении теории обыкновенных дифференциальных уравнений весьма важна доступность и наглядность подачи материала, а также прослеживание межпредметных связей (особенно с физикой), которые часто позволяют сделать прозрачным смысл абстрактных понятий и теорем.

Кроме вышеперечисленных направлений и специальности данное учебное пособие может быть применено на других информационных, естественнонаучных и технических специальностях и направлениях как очной, так и заочной форм обучения. Следует отметить возможность применения пособия и в том случае, когда обыкновенные дифференциальные уравнения изучаются не как самостоятельная дисциплина, а являются разделом курсов «Математика» и «Высшая математика».

1 Обзор приложений теории обыкновенных дифференциальных уравнений

1.1 Примеры задач, приводящих к понятию обыкновенного дифференциального уравнения

1.1.1 Задача о вынужденных колебаниях пружинного маятника

Пусть имеется пружинный маятник (рисунок 1), состоящий из груза массой m и пружины с жесткостью k. На груз действует сила трения, которая прямо пропорциональна скорости движения груза с коэффициентом c и внешняя сила $\overline{F} = \overline{F}(t)$ (при наличии внешней силы колебания маятника называются вынужденными), зависящая от времени. Требуется получить зависимость координаты центра груза от времени, то есть функцию $x = x(t)$.

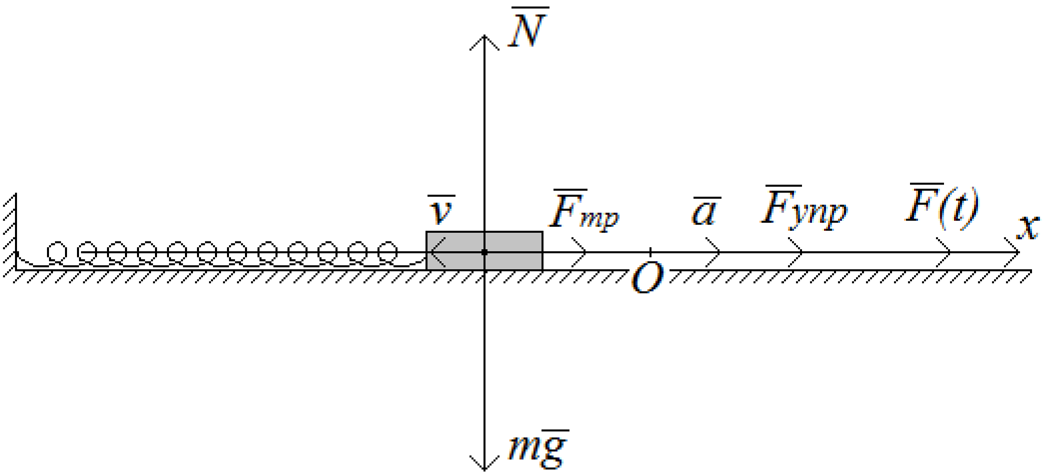

Рисунок 1

Решение.

Используем второй закон Ньютона в векторной форме [16]

$$m\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \ .$$

В данном случае будем иметь

$$m\bar{a}(t) = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{уп}}(t) + \bar{F}_{\text{тр}}(t) + \bar{F}(t).$$

Направим ось x горизонтально вправо. За начало отсчета (точка O) возьмем центр груза, когда пружина недеформирована (рисунок 1). Перейдя к проекциям на ось x, получим

$$ma_x(t) = F_{\text{уп}_x}(t) + F_{\text{тр}_x}(t) + F_x(t)$$

Используем механический смысл [16] первой и второй производной:

$$v_x(t) = x'(t),\ a_x(t) = x''(t).$$

По закону Гука [16] имеем

$$F_{\text{уп}_x}(t) = -kx(t).$$

Кроме того, по условию задачи, сила трения прямо пропорциональна скорости движения груза

$$F_{\text{тр}_x}(t) = -cv_x(t) = -cx'(t).$$

Тогда получим уравнение, описывающее движение груза

$$mx''(t) = -kx(t) - cx'(t) + F_x(t).$$

Преобразуем его:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F_x(t),\ x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F_x(t)}{m}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{c}{m} = 2\alpha \, , \; \frac{k}{m} = \omega_0^2 \, , \; \frac{F_x(t)}{m} = f(t) \, .$$

Таким образом, уравнение, описывающее вынужденные колебания пружинного маятника при учете силы трения, имеет вид

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t).$$

Если внешняя сила на маятник не действует, то тогда колебания маятника называются свободными. Уравнение в этом случае будет иметь вид

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \, .$$

Замечание 1. Из данного уравнения требуется найти не число, а неизвестную функцию $x = x(t)$. Так как в уравнение входят производные неизвестной функции, то такие уравнения естественно называть дифференциальными уравнениями. Если неизвестная функция является функцией одной переменной, то уравнение будем называть обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ), а если функцией нескольких переменных, то такое уравнение будем называть дифференциальным уравнением с частными производными (УЧП).

Замечание 2. Как правило, в дифференциальном уравнении не указывается аргумент у неизвестной функции, поэтому полученное ОДУ можно записать в виде

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = f(t).$$

1.1.2 Задача о радиоактивном распаде

Известно, что изменение массы Δm радиоактивного вещества за малый промежуток времени Δt прямо пропорционально его массе m и продолжительности промежутка Δt с коэффициентом k [16]. Требуется получить уравнение для зависимости массы радиоактивного вещества от времени.

Решение.

Из условия задачи имеем

$$\Delta m = -km\Delta t.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -km.$$

Так как промежуток времени Δt мал, то отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ примерно совпадает с производной $\frac{dm}{dt} = m'$.

Таким образом, мы получили уравнение радиоактивного распада

$$m' = -km.$$

1.1.3 Задача о зарядке конденсатора

Пусть конденсатор ёмкостью C заряжается от источника постоянного тока с ЭДС E через резистор с сопротивлением R (рисунок 2).

Требуется найти зависимость напряжения на конденсаторе от времени, то есть функцию $U = U(t)$.

Используя второе правило Кирхгофа [16], получим

$$RI(t) = E - U(t).$$

Как известно [16], ток, текущий через конденсатор, пропорционален скорости изменения напряжения

$$I(t) = CU'(t).$$

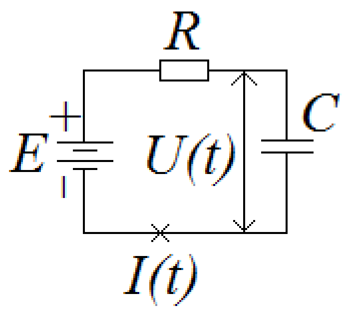

Рисунок 2

Получим ОДУ, описывающее зарядку конденсатора

$$RCU' = E - U\,.$$

1.2 Применение теории обыкновенных дифференциальных уравнений в естествознании и технике

1.2.1 Колебания

Уже в школьном курсе физики происходит первое знакомство с применением обыкновенных дифференциальных уравнений к изучению математического маятника (рисунок 3) и колебательного контура (рисунок 4)

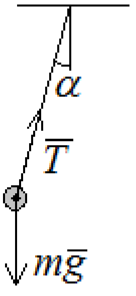

Рисунок 3

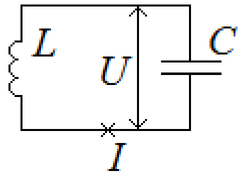

Рисунок 4

Рассматриваются свободные колебания при отсутствии потерь энергии. В обоих случаях приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

В реальных системах всегда существуют потери энергии, поэтому для получения незатухающих колебаний необходимо компенсировать эти потери. Например, при изготовлении генераторов для различных радиотехнических устройств, потери энергии в колебательном контуре компенсируются с помощью усилителей, выполненных на транзисторах или электронных лампах (рисунок 5).

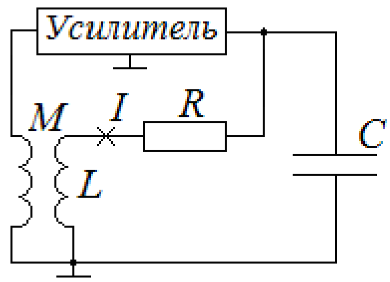

Рисунок 5

В данном случае [3] работа генератора будет описываться обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = \frac{1}{C} f(MI').$$

Здесь $i = f(u)$ - функция, характеризующая работу усилителя.

1.2.2 Теория космических полетов

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений широко применяется для расчета траекторий космических аппаратов. Особенно интересен так называемый гравитационный маневр [17], позволяющий изменить скорость космического аппарата при пролете вблизи крупного небесного тела.

После первого применения в 1959 году (советская автоматическая межпланетная станция «Луна-3» (рисунок 6)) гравитационные маневры стали широко применяться в межпланетных полетах.

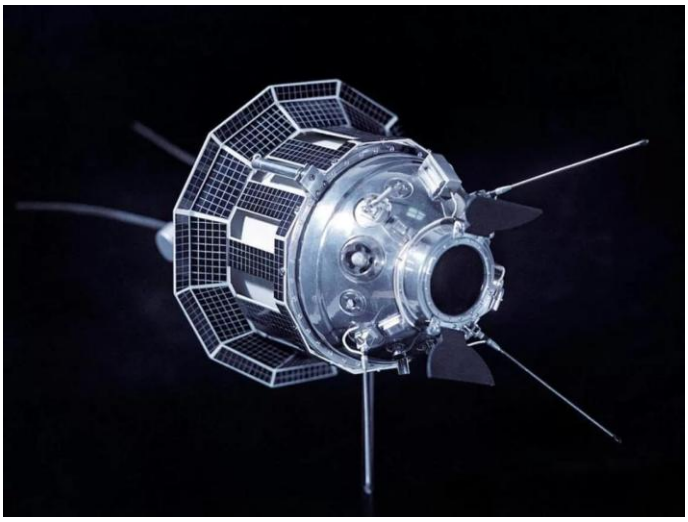

Рисунок 6

1.2.3 Моделирование динамики популяций

Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ выражают зависимость числа жертв и хищников от времени. Оценить динамику численности последних позволяет система обыкновенных дифференциальных уравнений (модель Лотки-Вольтерры [14])

$$\begin{cases} x' = (\alpha - \beta y)x, \\ y' = (\gamma x - \delta)y. \end{cases}$$

Анализ данной системы позволил объяснить, почему отстрел хищников иногда приводил к росту их численности.

1.2.4 Аналитическая геометрия

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений часто применяется, когда требуется получить уравнение линии (поверхности), удовлетворяющей некоторому свойству. В качестве примера можно рассмотреть задачу [7] о получении уравнения линии, собирающей в начале координат (рисунок 7) все лучи, параллельные оси x.

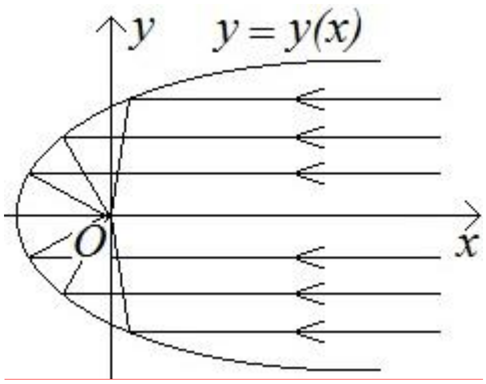

Рисунок 7

Данная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}.$$

Решив которое, получим, что искомой кривой является парабола. Вращая последнюю вокруг ее оси, получим параболоид вращения, в форме которого делают собирающие антенны (рисунок 8) и зеркала (рисунок 9).

Рисунок 8 Рисунок 9

1.2.5 Теория автоматического управления

В настоящее время устройства автоматического управления [18] чрезвычайно широко распространены в различных отраслях науки и техники. В качестве примера можно привести применяемый в авиации автопилот. На рисунке 10 представлен пульт управления вертолётного автопилота АП-34.

Рисунок 10

Очевидно, что для любого устройства автоматического управления одним из важнейших требований к нему является устойчивость работы в условиях, возникающих в процессе эксплуатации.

Одним из основоположников теории автоматического управления является русский инженер, математик и государственный деятель Вышнеградский И.А.

(1831/32-1895). С помощью применения теории ОДУ он решил вопрос об устойчивой работе центробежного регулятора (рисунок 11) паровой машины.

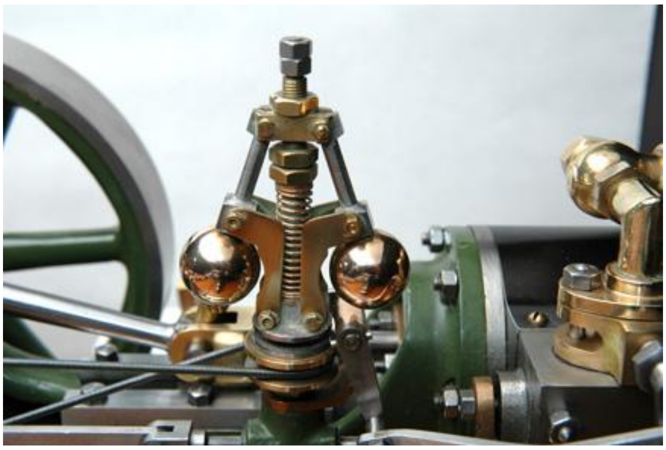

Рисунок 11

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений также широко применяется и в других отраслях [15]: химии, экономике, теории оптимального управления и т.д.

2 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

2.1 Основные определения

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) первого порядка называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$.

Замечание. ОДУ первого порядка обязательно в явном виде содержит y' и может не содержать в явном виде x и y.

Примеры ОДУ первого порядка:

$$y' - xy = 0,\ (y')^2 - \sqrt{x} = y,\ xy = (x + y')y,$$

$$y' - y = 3,\ x(y')^2 - \sqrt{x} = x + 1,\ y' = 0.$$

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать ОДУ первого порядка, разрешенные относительно производной неизвестной функции, то есть ОДУ вида $y' = f(x, y)$. Предполагается, что функция $f(x, y)$ является непрерывной.

Определение. Непрерывно дифференцируемую функцию $y = y(x)$ будем называть решением ОДУ $y' = f(x, y)$ на промежутке I, если при подстановке функции $y = y(x)$ в уравнение $y' = f(x, y)$ получается верное тождество на I.

Замечание. Промежуток I может являться замкнутым с одного или с обоих концов. В этом случае под производной на конце промежутка будем понимать соответствующую одностороннюю производную.

Очевидно, что ОДУ $y' = \cos x$ имеет бесконечно много решений:

1) $y = \sin x$;

2) $y = \sin x + 3$;

3) $y = \sin x - 2$ и т. д.

Вообще при любой постоянной $C \in R$ функция $y = \sin x + C$ является решением ОДУ $y' = \cos x$.

Замечание. Как правило, ОДУ имеет бесконечно много решений.

Определение. График решения ОДУ будем называть интегральной кривой ОДУ.

Задача. Показать, что функции $y = (x + C)^3$ (C - произвольная действительная постоянная) и $y = 0$ являются на R решениями ОДУ $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.

Решение.

Подставив непрерывно дифференцируемую функцию $y = (x + C)^3$ в ОДУ $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, будем иметь тождество $3(x + C)^2 \equiv 3\left[(x + C)^3\right]^{\frac{2}{3}}$, верное всюду на R.

Таким образом, функция $y = (x + C)^3$ при любом значении $C \in R$ является решением ОДУ $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ всюду на R.

Совершенно аналогично можно показать, что решением ОДУ $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ будет являться и функция $y = 0$.

Определение. Точку M будем называть обыкновенной точкой ОДУ $y' = f(x, y)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой через точку M проходит единственная интегральная кривая ОДУ $y' = f(x, y)$.

Определение. Пусть область $D \subset R^2$ состоит только из обыкновенных точек ОДУ $y' = f(x, y)$.

Функция двух переменных $y = \varphi(x, C)$ называется общим решением ОДУ $y' = f(x, y)$ в области D, если:

1) при любом фиксированном значении C функция $y = \varphi(x, C)$ является интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$, лежащей в области D;

2) для любой точки $M \in D$ можно указать такое значение C, что интегральная кривая $y = \varphi(x, C)$ будет проходить через точку M.

Таким образом, интегральные кривые $y=\varphi(x,C)$, не пересекаясь, целиком заполняют область D. (рисунок 1).

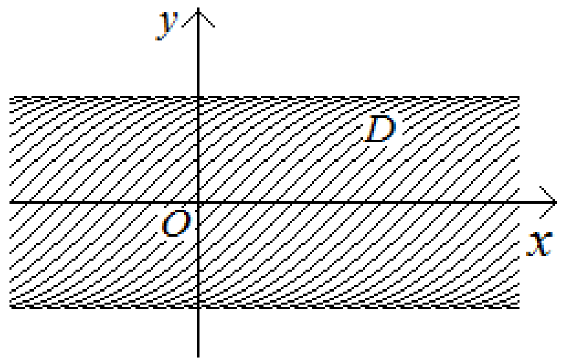

Рисунок 1

Замечание. Множество обыкновенных точек ОДУ $y' = f(x,y)$ может распадаться на несколько областей. Тогда для каждой области существует отдельное общее решение ОДУ $y' = f(x,y)$.

Пример. Как показано в предыдущей задаче функции $y=(x+C)^3$ (C - произвольная действительная постоянная) и $y=0$ являются на R решениями ОДУ $y'=3y^{\frac{2}{3}}$.

Сразу отметим, что через каждую точку оси абсцисс проходит более одной интегральной кривой: сама ось абсцисс $y=0$ и одна из кривых вида $y=(x+C)^3$ (рисунок 11). Таким образом, все точки оси абсцисс не являются обыкновенными точками ОДУ $y'=3y^{\frac{2}{3}}$. Тогда вся плоскость разбивается на две области $D_1=\{(x,y)|\ y<0\}$ и $D_2=\{(x,y)|\ y>0\}$.

Функция двух переменных $y=(x+C)^3$ является общим решением ОДУ $y'=3y^{\frac{2}{3}}$ в областях $D_1=\{(x,y)|\ y<0\}$ и $D_2=\{(x,y)|\ y>0\}$ так как:

1) области D_1 и D_2 состоят только из обыкновенных точек ОДУ $y=(x+C)^3$, так как через каждую точку этой области проходит единственная интегральная кривая данного ОДУ (рисунок 2);

2) при любом фиксированном значении C из множества R функция $y=(x+C)^3$ (отдельно при $y<0$ и $y>0$) является интегральной кривой уравнения $y'=3y^{\frac{2}{3}}$, лежащей в областях D_1 и D_2 соответственно;

3) для любой точки M каждой из областей D_1 и D_2 можно указать такое значение $C\in R$, что интегральная кривая $y=(x+C)^3$ будет проходить через точку M, то есть данные интегральные кривые заполняют обе области D_1 и D_2 (рисунок 2).

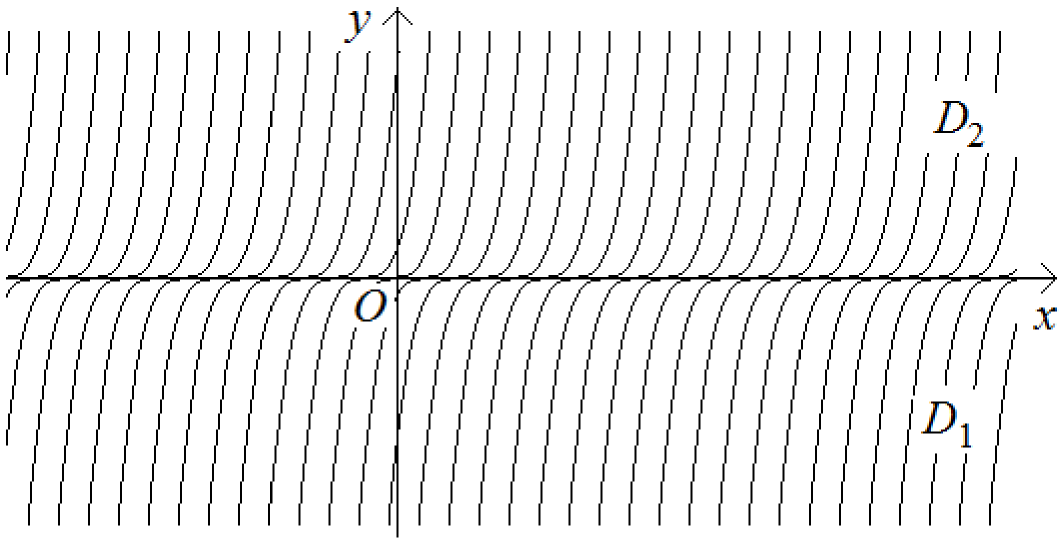

Рисунок 2

Определение. Пусть $y=\varphi(x,C)$ - общее решение некоторого ОДУ первого порядка. Функция одной переменной $y=\varphi(x,\tilde{C})$ ($\tilde{C}$ - фиксированное значение) называется частным решением данного ОДУ.

Пример. Если в общем решении $y=(x+C)^3$ ($C\in R$) ОДУ $y'=3y^{\frac{2}{3}}$ мы положим, например, $C=1$, то получим частное решение $y=(x+1)^3$.

Меняя C, мы будем получать различные частные решения, которых бесконечно много: $y=(x-3)^3$, $y=(x+5)^3$, $y=(x+9)^3$ и т.д.

Определение. Решение ОДУ первого порядка называется особым решением, если через каждую точку графика этого решения проходит более одной интегральной кривой.

Как нам уже известно, $y = 0$ является решением ОДУ $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, и через каждую точку графика этого решения проходит более одной интегральной кривой (рисунок 2). Отсюда следует, что решение $y = 0$ является особым решением данного ОДУ.

Замечание. Произвольная постоянная C может принимать и бесконечные значения.

Пример. Рассмотрим ОДУ $y' = -y^2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $y = \frac{1}{x + C}$ является решением ОДУ $y' = -y^2$ при любом $C \in R$. Отметим, что $y = 0$, очевидно, также является решением данного ОДУ. Его можно получить, условно положив в $y = \frac{1}{x + C}$ значение C равным ∞.

Таким образом, ОДУ $y' = -y^2$ имеет общее решение $y = \frac{1}{x + C}$ $(C \in R \bigcup \{\infty\})$ на плоскости R^2 (рисунок 3).

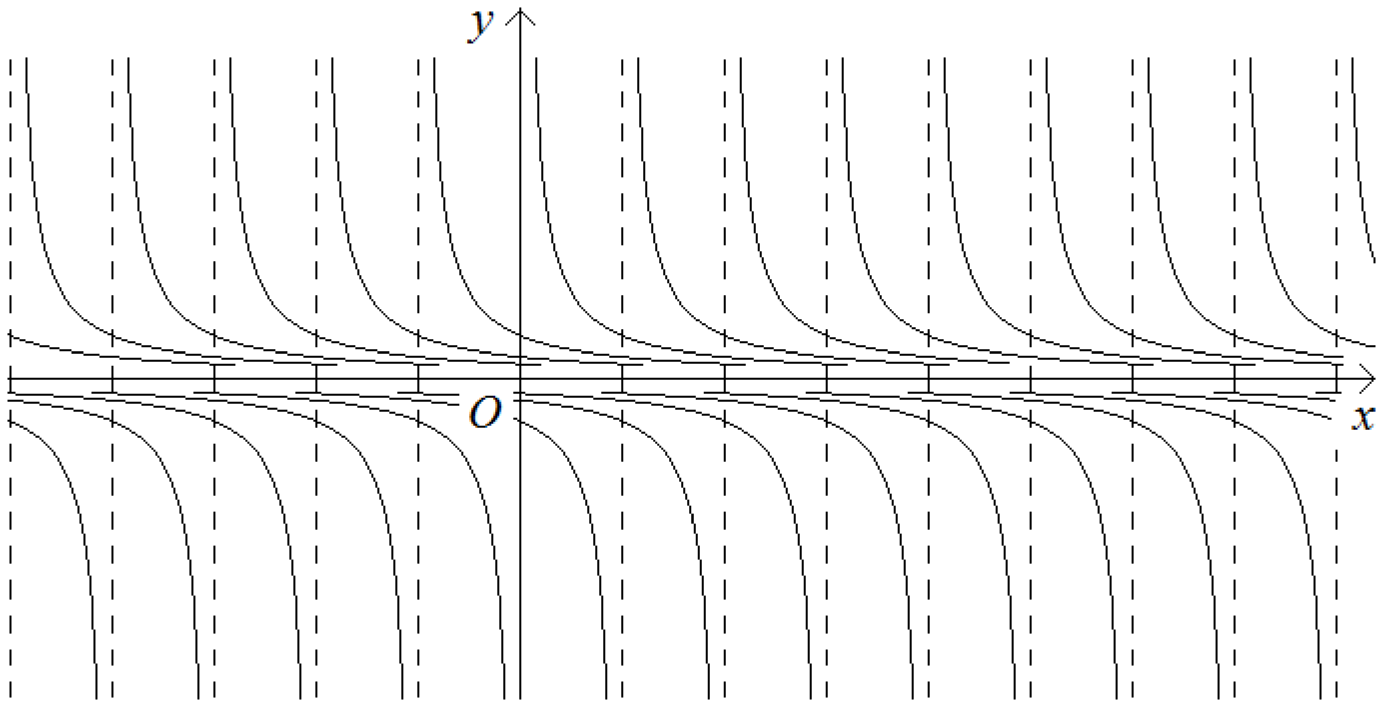

Рисунок 3

Определение. Огибающей семейства кривых называется кривая, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой из семейства кривых, причем двум различным точкам огибающей соответствуют разные кривые.

Ось x является огибающей семейства кривых $y=(x+C)^3$.

Замечание. Следует отметить, что ОДУ может иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми. Например, решение

$$y=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ (x-2)^3, & x>2\end{cases}$$

ОДУ $y'=3y^{\frac{2}{3}}$ не является ни частным, ни особым (рисунок 4).

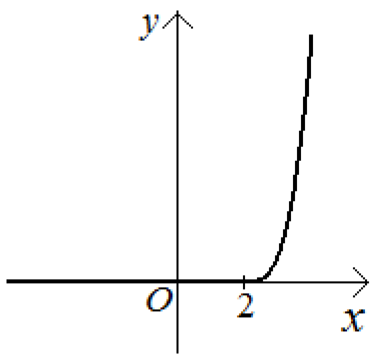

Рисунок 4

Если общее решение $y=y(x,C)$ ОДУ первого порядка получено в неявном виде, то есть в виде уравнения $F(x,y,C)=0$, то это уравнение $F(x,y,C)=0$ будем называть общим интегралом данного ОДУ.

Совершенно аналогично, вводятся понятия частного и особого интегралов.

2.2 Задача Коши для ОДУ первого порядка

Мы уже знаем, что ОДУ имеет, как правило, бесконечно много решений, поэтому для выделения решения, описывающего реальный процесс, требуется дополнительное условие.

Рассмотрим ОДУ $m' = -km$, описывающее радиоактивный распад. Оно имеет бесконечно много решений $m = Ce^{-kt}$. Тогда для выделения одного решения, описывающего реальную зависимость массы делящегося вещества от времени нам нужно задать количество этого вещества в какой-нибудь момент времени.

Пусть в момент времени $t = t_0$ радиоактивное вещество имеет массу $m = m_0$, то есть, другими словами, $m(t_0) = m_0$. Тогда, подставив в уравнение $m = Ce^{-kt}$ значения $t = t_0$ и $m = m_0$, мы сможем найти C:

$$m_0 = Ce^{-kt_0},\ C = m_0 e^{kt_0}.$$

Тогда получим одно решение, которое будет описывать реальный процесс распада радиоактивного вещества:

$$m = m_0 e^{kt_0} e^{-kt},\ m = m_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Определение. Задачей Коши называется задача вида

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

состоящая из ОДУ $y' = f(x, y)$ и начального условия $y(x_0) = y_0$.

Решить задачу Коши означает: найти решение (решения) ОДУ $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее (удовлетворяющие) начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка. Пусть задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

удовлетворяет требованиям:

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$;

2) частная производная $f'_y(x,y)$ ограничена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Тогда в некоторой окрестности точки $x = x_0$ будет существовать **единственное** решение $y = y(x)$ задачи Коши.

Замечание. Единственность решения задачи Коши понимается здесь следующим образом. Если задача Коши имеет два решения $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, то всегда можно указать такую окрестность точки $x = x_0$, в которой будет выполняться тождество $y_1(x) \equiv y_2(x)$.

Замечание. Выполнение только первого условия теоремы гарантирует существование хотя бы одного решения задачи Коши, а выполнение только второго условия – не более одного решения.

С геометрической точки зрения, решить задачу Коши означает найти интегральную кривую ОДУ $y' = f(x,y)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рисунок 5). Её координаты x_0 и y_0 берутся из начального условия $y(x_0) = y_0$.

Замечание. Из того что функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ определены и непрерывны на всей плоскости не следует, что решение задачи Коши будет определено на всей числовой оси. В качестве примера можно рассмотреть ОДУ $y' = -y^2$ с общим решением $y = \dfrac{1}{x+C}$.

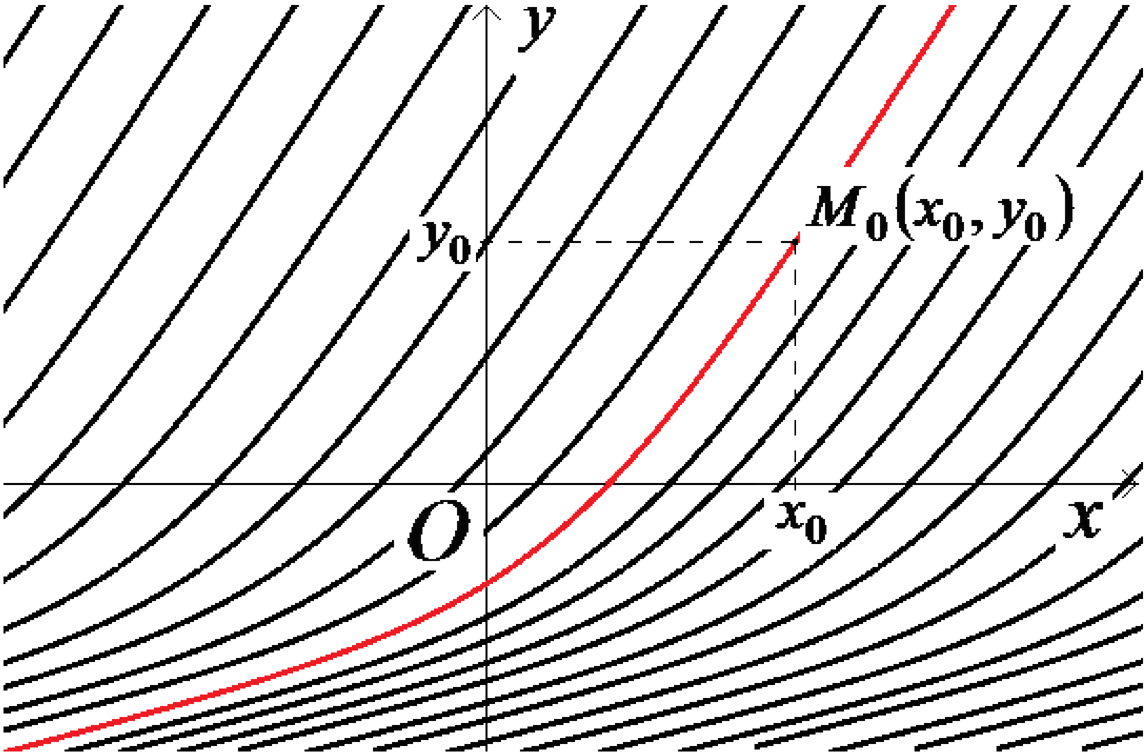

Рисунок 5

Задачу Коши легко решить, если известно общее решение входящего в нее ОДУ.

Задача. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y' = x - y + 1, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

зная, что общее решение ОДУ $y' = x - y + 1$ имеет вид $y = x + Ce^{-x}$.

Решение.

Взятые из начального условия значения $x = 0$ и $y = 2$ подставим в общее решение:

$$2 = 0 + Ce^{0},\ C = 2.$$

Отсюда, $y = x + 2e^{-x}$ - решение данной задачи Коши.

Функция $f(x, y)$ и начальное условие $y(x_0) = y_0$ задачи Коши, описывающей реальный физический (химический, биологический и т. д.) процесс, могут быть известны лишь с некоторой погрешностью. Отсюда следует, что для того, чтобы решение задачи Коши имело практическое применение, необходимо, чтобы это решение непрерывно зависело от функции $f(x,y)$ и начального условия $y(x_0)=y_0$, то есть, чтобы малым изменениям этих параметров соответствовало малое изменение решения задачи Коши. Верна следующая теорема [2].

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и ограничена в области G $(M_0(x_0,y_0)\in G)$ и через каждую внутреннюю точку этой области проходит единственная интегральная кривая ОДУ $y'=f(x,y)$.

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

непрерывно зависит от функции $f(x,y)$ и начального условия $y(x_0)=y_0$.

Доказательство теоремы, приведено в [2].

Конкретизируем понятие непрерывной зависимости.

Пусть данная задача Коши имеет решение $y=\varphi(x)$, определенное на отрезке $[\alpha,\beta]$ $(\alpha < x_0 < \beta)$.

Рассмотрим задачу Коши с измененной правой частью ОДУ и измененным начальным условием

$$\begin{cases} y' = \tilde{f}(x,y), \\ y(\tilde{x}_0)=\tilde{y}_0. \end{cases} \tag{1}$$

Функция $\tilde{f}(x,y)$ предполагается непрерывной в области G.

Непрерывная зависимость от функции $f(x,y)$ и начального условия $y(x_0)=y_0$ понимается следующим образом.

Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что при

$$|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta(\varepsilon),\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta(\varepsilon),\ \left|\tilde{f}(x, y) - f(x, y)\right| < \delta(\varepsilon)\ \ (\text{в } G)$$

задача Коши (1) будет иметь решение $y = \tilde{\varphi}(x)$, определенное на отрезке $[\alpha, \beta]$, для которого выполняется неравенство

$$|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon\ \ (x \in [\alpha, \beta]).$$

2.3 Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

2.3.1 Метод изоклин

Рассмотрим, например, интегральную кривую ОДУ $y' = x^2 + y^2$, проходящую, через точку $M_0(1; 2)$.

Подставив значения $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ в правую часть ОДУ, получим $y'|_{x=1} = 1^2 + 2^2 = 5$. Используя геометрический смысл производной, можно сделать вывод, что тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой, проходящей через точку $M_0(1; 2)$ равен 5. Тогда сам угол (рисунок 6) наклона касательной будет равен $\operatorname{arctg} 5$.

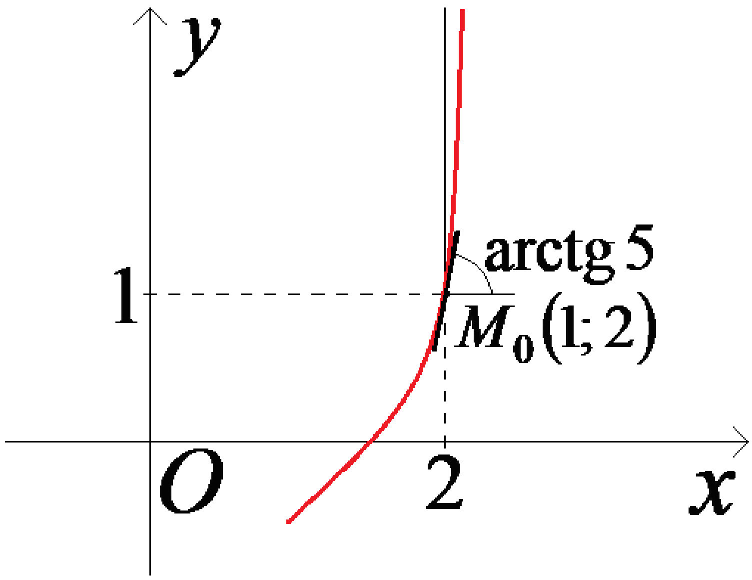

Рисунок 6

Таким образом, значение функции $f(x, y)$ в каждой точке $M_0(x_0, y_0)$ задает направление касательной (рисунок 7) к интегральной кривой ОДУ $y' = f(x, y)$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. В свою очередь по направлению касательной мы можем сделать вывод, как выглядит интегральная кривая в достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

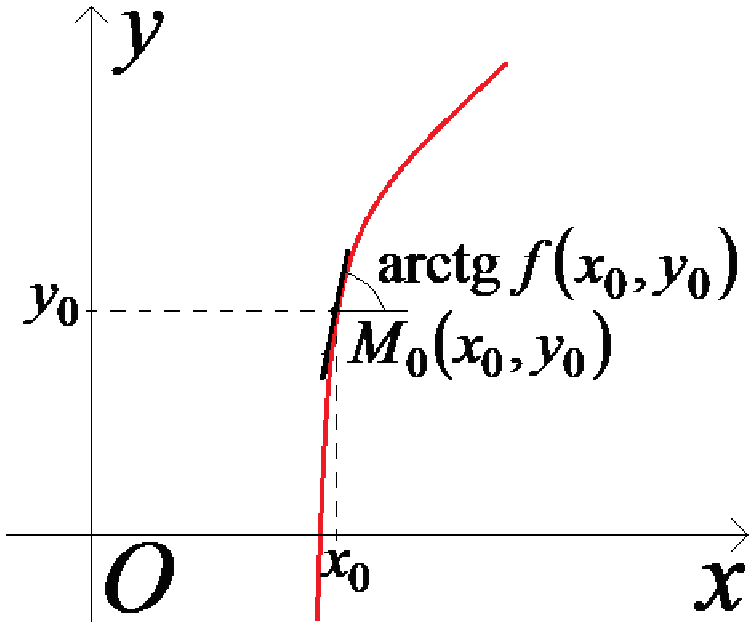

Рисунок 7

Получаем, что функция $f(x, y)$ задает поле направлений касательных к интегральным кривым. С помощью поля направлений можно примерно оценить вид (рисунок 8) семейства интегральных кривых данного ОДУ.

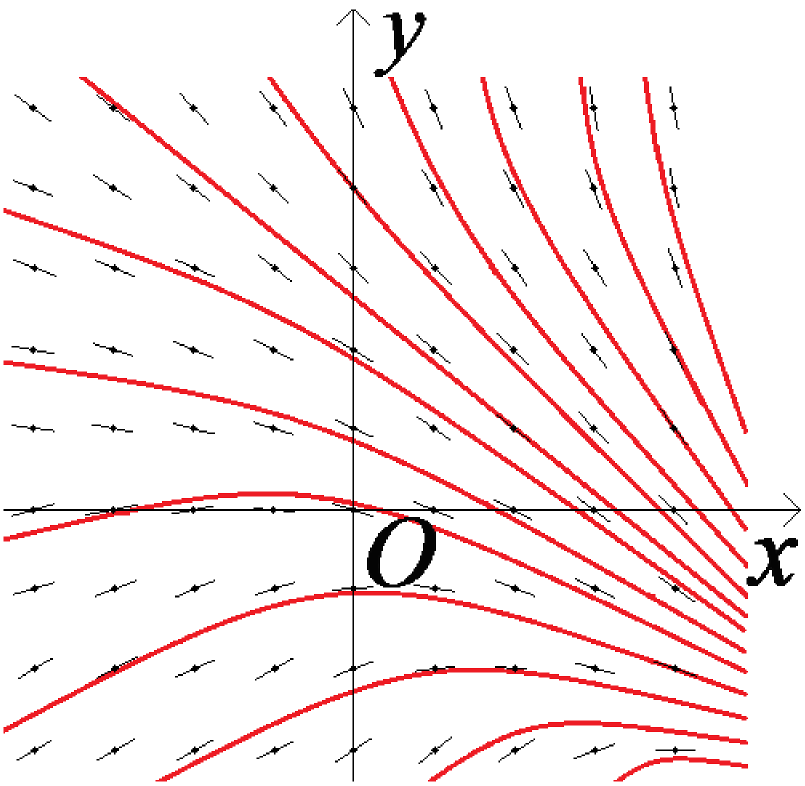

Рисунок 8

Для построения поля направлений и интегральных кривых по нему, часто используется метод изоклин.

Определение. Изоклиной ОДУ $y' = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости, задаваемое уравнением $f(x, y) = C$.

Изучим метод изоклин на конкретном примере.

Задача. С помощью метода изоклин решить графически (получить примерный чертеж интегральной) кривой задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Решение.

Построим семейство изоклин $\sqrt{x^2 + y^2} = C$. Очевидно, что в данном случае при $C > 0$ изоклиной является окружность $x^2 + y^2 = C^2$ с центром в начале координат и радиусом C, а при $C = 0$ изоклиной будет являться точка – начало координат.

Будем строить изоклины при C, равным последовательно: 0, 1, 2, 3 (рисунок 9):

При $C = 0$ изоклиной является точка $O(0;0)$, в ней $y' = 0$, тангенс угла наклона касательной равен 0, и сам угол наклона касательной тоже будет равен $0°$.

При $C > 0$ изоклиной является окружность с центром в начале координат и радиусом C, на ней выполняется $y' = C$, тангенс угла наклона касательной равен C, а сам угол наклона касательной будет равен $\operatorname{arctg} C$.

Процесс построения семейства изоклин приведем в таблице 1. Построим изоклины вместе с отрезками касательных (рисунок 9).

Через точку $M_0(1;0)$ (ее координаты берем из начального условия задачи Коши) проведем интегральную кривую таким образом, чтобы она «вписывалась» в отрезки касательных.

Таблица 1

C	Изоклина	Угол наклона касательных на изоклине $\alpha = \operatorname{arctg} C$
0	Точка $O(0;0)$	0°
1	Окружность с центром в начале координат и радиусом 1	45°
2	Окружность с центром в начале координат и радиусом 2	$\approx 63^\circ$
3	Окружность с центром в начале координат и радиусом 3	$\approx 72^\circ$
4	Окружность с центром в начале координат и радиусом 4	$\approx 76^\circ$

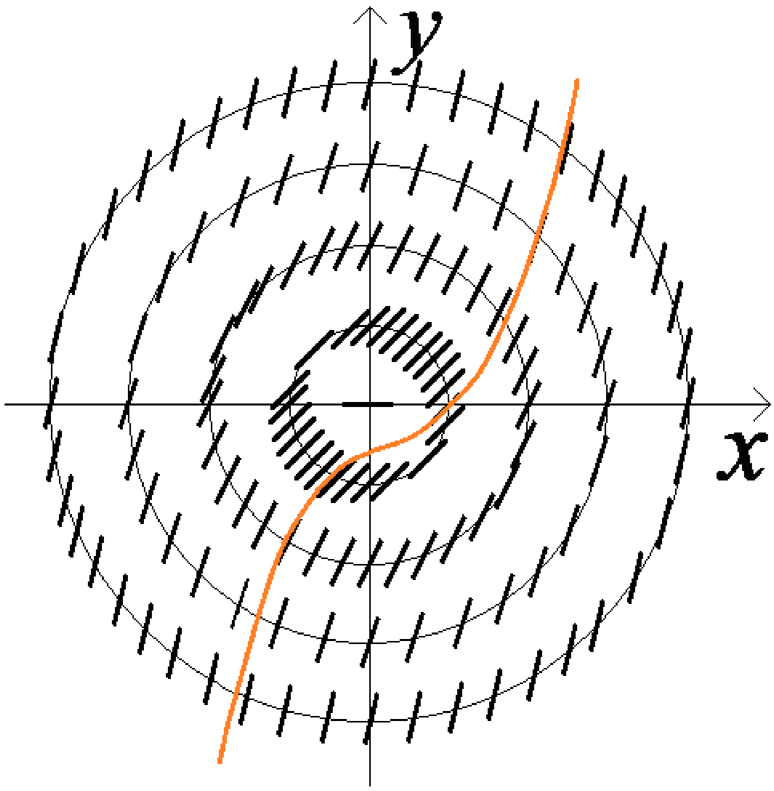

Рисунок 9

2.3.2 Метод последовательных приближений

Пусть нам дана задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

удовлетворяющая всем условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка (пункт 2.2).

Тогда

$$y(x) = y(x) - y(x_0) + y_0 = \int_{x_0}^{x} y'(\tau) d\tau + y_0 = \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau + y_0 .$$

Получили интегральное уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau ,$$

в котором неизвестная функция $y = y(x)$ стоит под знаком интеграла. Можно показать [2], что полученное интегральное уравнение эквивалентно задачи Коши.
Если исходная задача Коши удовлетворяет всем условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка (пункт 2.2), то она имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений [2]:

$$y_0(x) = y_0;$$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_n(\tau)) d\tau \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Решим методом последовательных приближений задачу Коши

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Приведенная задача имеет очевидное решение $y = e^x$.

Для рассматриваемой задачи Коши выполняются все условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, следовательно, она имеет единственное решение.

Данная задача Коши эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(\tau)d\tau .$$

Получим последовательные приближения, используя соотношения:

$$y_0(x) = 1,\ y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(\tau)d\tau :$$

0) $y_0(x) = 1$;

1) $y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0(\tau)d\tau = 1 + \int_0^x 1 \cdot d\tau = 1 + \tau\Big|_0^x = 1 + x$;

2) $y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(\tau)d\tau = 1 + \int_0^x (1+\tau)d\tau = 1 + \left(\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\Bigg|_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$;

3) $y_3(x)=1+\int\limits_0^x y_2(\tau)d\tau=1+\int\limits_0^x\left(1+\tau+\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau=1+\left.\left(\tau+\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau^3}{6}\right)\right|_0^x=1+x+$

$+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6};$

4) $y_4(x)=1+\int\limits_0^x y_3(\tau)d\tau=1+\int\limits_0^x\left(1+\tau+\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau^3}{6}\right)d\tau=1+$

$+\left.\left(\tau+\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau^3}{6}+\frac{\tau^4}{24}\right)\right|_0^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24};$

…………………………………………………………

Продолжая данный процесс, мы будем находить последовательные приближения точного решения с все большей и большей точностью. На практике данный процесс прекращают, когда на нужном промежутке будет выполняться приближенное равенство $y_{n+1}(x)\approx y_n(x)$ с необходимой точностью или применяют специальные оценки [2, 19] для точности данного приближения.

На рисунках 10-14 показано как последовательное приближение $y=y_n(x)$ стремится к точному решению $y=y(x)$ с ростом n.

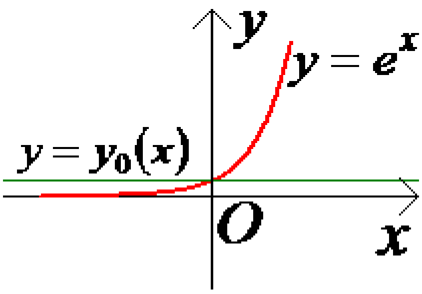

Рисунок 10

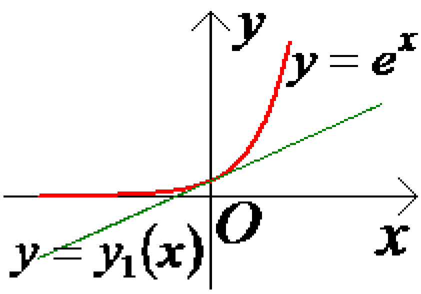

Рисунок 11

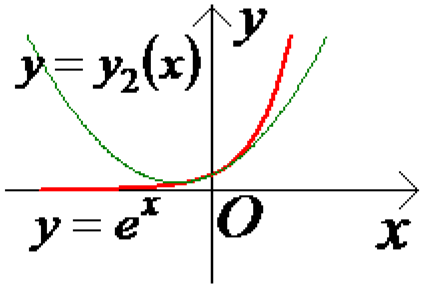

Рисунок 12

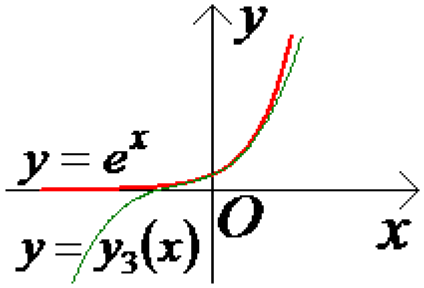

Рисунок 13

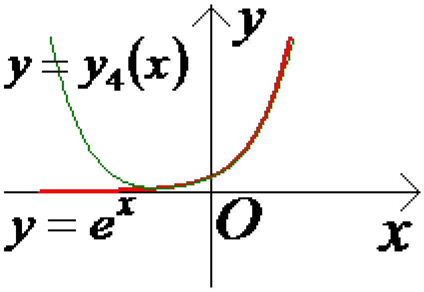

Рисунок 14

2.3.3 Метод ломанных Эйлера

Пусть нам дана задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

удовлетворяющая всем условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка.

Предположим, что нам требуется получить ее приближенное решение в виде таблицы 2.

Таблица 2

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n	$\dots$

Предполагается, что аргумент меняется с некоторым шагом h:

$$x_{n+1} = x_n + h \ \left(n = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

Допустим, что нам уже известно значение y_n. Найдем по нему следующее табличное значение y_{n+1} (рисунок 15).

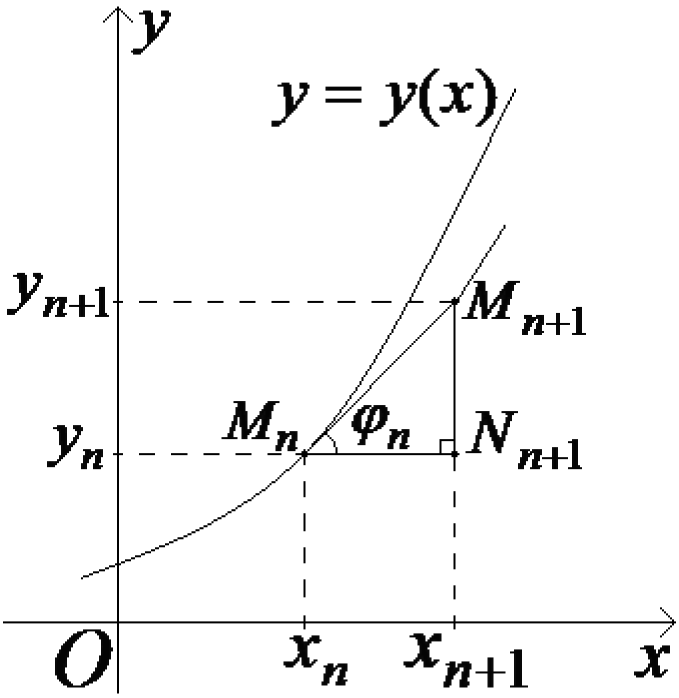

Рисунок 15

Пусть $y = y(x)$ - это уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $M_n(x_n, y_n)$. В пределах отрезка $[x_n, x_{n+1}]$ заменим интегральную кривую отрезком касательной, проведенной к интегральной кривой в точке $M_n(x_n, y_n)$.

Из уравнения $y' = f(x, y)$ следует, что $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$. Тогда, используя геометрический смысл производной, будем иметь

$$\operatorname{tg} \varphi_n = f(x_n, y_n).$$

Из прямоугольного треугольника $M_n M_{n+1} N_{n+1}$ получим

$$|M_{n+1}, N_{n+1}| = |M_n, M_{n+1}| \cdot \operatorname{tg} \varphi_n = hf(x_n, y_n),$$

и тогда

$$y_{n+1} = y_n + |M_{n+1}, N_{n+1}| = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Найденную таким образом ординату касательной будем приближенно принимать за значение решения данной задачи Коши в точке x_n.

Так как искомая интегральная кривая заменяется отрезками касательных, то данный метод носит название «метода ломанных».

Таким образом, данный метод заключается в заполнении таблицы по реккурентным формулам:

$$x_{n+1} = x_n + h \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Значения x_0 и y_0 берутся из начального условия $y(x_0) = y_0$ задачи Коши.

Задача. Получить приближенное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \cos x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

при $x \in [0; 2]$ методом ломанных Эйлера, взяв значение шага $h = 0{,}2$. Сравнить полученное приближенное решение с точным решением $y = \sin x$, указав для каждого значения y_n абсолютную погрешность

$$\Delta_n = |y_n - \bar{y}_n|,$$

где $\bar{y}_n = \sin x_n$ - точное решение задачи Коши в точке x_n.

Решение.

Очевидно, что данная задача Коши удовлетворяет всем условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка (пункт 2.2). Тогда применим метод ломанных Эйлера.

Из начального условия задачи Коши имеем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, а остальные значения приближенного решения найдем по реккурентным формулам

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}5 \ \left(n = 0, 1, 2, \ldots\right);$$

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}5 \cos x_n \ \left(n = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

Полученные данные приведем в таблице 3.

Таблица 3

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_n	0	0,200	0,396	0,580	0,745	0,885	0,993	1,065	1,099	1,093	1,048
$\bar{y}_n$	0	0,199	0,389	0,565	0,717	0,841	0,932	0,985	1,000	0,974	0,909
Δ_n		0,001	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14

Из таблицы 3 имеем, что найденное приближенное решение задачи Коши имеет на данном отрезке максимальную абсолютную погрешность, равную 0,14. Если точность результата недостаточна, то следует уменьшить шаг h или применять более точные методы [19] приближенного решения дифференциальных уравнений.

Замечание. При практическом использовании приближенных методов решения задач Коши, их точное решение не известно, поэтому применяют другие способы оценки погрешностей результата [19].

2.4 Некоторые ОДУ первого порядка, разрешимые в квадратурах

В случае возможности представления решения ОДУ с помощью интегралов от известных функций, будем говорить, что данное ОДУ разрешимо в квадратурах.

2.4.1 Уравнение с разделяющимися переменными

Определение. ОДУ первого порядка вида $y' = f(x)g(y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения ОДУ данного типа следует разделить переменные, то есть так преобразовать уравнение, чтобы одна часть уравнения содержала только переменную x, а другая – только переменную y. Перепишем исходное ОДУ $y' = f(x)g(y)$, представив производную y' как отношение двух дифференциалов по формуле $y' = \frac{dy}{dx}$.

Получим:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Умножим уравнение на dx:

$$dy = f(x)g(y)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $g(y)$, считая пока, что $g(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Мы разделили переменные, так как в этом уравнении левая часть зависит только от y, а правая только от x. Полученное уравнение будем называть уравнением с разделенными переменными.

Проинтегрируем его:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Получили равенство двух неопределенных интегралов, которое, как известно, понимается с точностью до произвольной постоянной. Тогда после нахождения неопределенных интегралов мы получим уравнение вида $G(y) = F(x) + C$, содержащие x, y и C - общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными.

Рассмотрим теперь случай $g(y) = 0$. Пусть y_* - какой-нибудь корень этого уравнения. Очевидно, что $y = y_*$ - решение ОДУ $y' = f(x)g(y)$. Это решение может, как входить в общий интеграл (общее решение) при некотором C ($y = y_*$ - частное решение) так и не входить ($y = y_*$ - особое решение). Следует отметить, что C может равняться бесконечности.

Задача. Проинтегрировать (найти все решения) ОДУ $y' = -2xy^2$.

Решение.

Данное ОДУ имеет вид $y' = f(x)g(y)$, следовательно, оно является уравнением с разделяющимися переменными. Проведем разделение переменных.

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2,\ dy = -2xy^2dx.$$

Разделим обе части уравнения на $\left(-y^2\right)$, пока считая, что $y \neq 0$.

$$-\frac{1}{y^2}dy = 2xdx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрировав его, будем иметь:

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx,\ \frac{1}{y} = x^2 + C\ .$$

Получили общий интеграл данного ОДУ. Выразив y, будем иметь общее решение $y = \dfrac{1}{x^2 + C}$.

При разделении переменных, мы делили уравнение на $\left(-y^2\right)$, поэтому было потеряно решение $y = 0$. Данное решение входит в общее решение при $C = \infty$.

Таким образом, общее решение данного ОДУ

$$y = \frac{1}{x^2 + C}\ \ (C \in R \cup \{\infty\}).$$

Иногда уравнение с разделяющимися переменными записывают в виде, специально не выделяющем какая переменная (x или y) является функцией, а какая аргументом.

Определение. ОДУ первого порядка вида

$$M(x)P(y)dx + N(x)Q(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

В этом случае разделение переменных происходим аналогичным образом.

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$2xydx - (x^2 + 1)dy = 0\ .$$

Решение.

Данное ОДУ имеет вид

$$M(x)P(y)dx + N(x)Q(y)dy = 0,$$

следовательно, оно является уравнением с разделяющимися переменными. Проведем разделение переменных.

$$2xydx = (x^2 + 1)dy.$$

Разделим уравнение на $y(x^2 + 1)$ ($y \neq 0$).

$$\frac{2x}{x^2 + 1}dx = \frac{dy}{y}.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрировав его, будем иметь:

$$\int \frac{2xdx}{x^2 + 1} = \int \frac{dy}{y}.$$

Замечание. Если полученные при интегрировании выражения содержат логарифмы, то для дальнейших преобразований часто бывает удобно вместо произвольной постоянной C использовать произвольную постоянную $\ln|C|$ ($C \neq 0$).

$$\ln(x^2 + 1) + \ln|C| = \ln|y|, \ \ln|C|(x^2 + 1) = \ln|y|, \ |C|(x^2 + 1) = |y|, \ y = \pm C(x^2 + 1).$$

Учитывая, что постоянная C может быть любого знака, получим общее решение данного ОДУ

$$y = C(x^2 + 1) \ (C \neq 0).$$

Так как при разделении переменных мы делили уравнение на $y(x^2+1)$, то было потеряно решение $y=0$. Это решение входит в общее решение при $C=0$.

Таким образом, общее решение данного ОДУ имеет вид

$$y=C\left(x^2+1\right)\ (C\in R).$$

2.4.2 Однородные уравнения

Определение. Функция $f(x,y)$ называется однородной степени n ($n=0,1,2,\ldots$), если для всех $t>0$ выполняется $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

Пример. Функция $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x+2y}$ является однородной функцией второй степени, так как для всех $t>0$ выполняется

$$f(tx,ty)=\frac{tx(ty)^2}{tx+2ty}=\frac{t^3xy^2}{t(x+2y)}=t^2\frac{xy^2}{x+2y}=t^2 f(x,y).$$

Определение. ОДУ первого порядка $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ является однородной функцией нулевой степени.

Часто бывает удобнее применять другое определение.

Определение. Однородным ОДУ называется уравнение вида $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Для решения однородных уравнений используется подстановка $y=ux$, где u - некоторая неизвестная функция.

Подставив $y=ux$ и $y'=u'x+ux'=u'x+u$ в данное уравнение, получим:

$$u'x+u=f(x,ux).$$

Так как $f(x,y)$ является однородной функцией нулевой степени, то тогда

$$f(x,ux) = f(1,u).$$

Теперь мы получили уравнение с разделяющимися переменными

$$u'x + u = f(1,u).$$

Решение уравнения с разделяющимися переменными приведено в п. 2.4.1.

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right).$$

Решение.

Так как правая часть уравнения, очевидно, имеет вид $f\left(\frac{y}{x}\right)$, то данное ОДУ является однородным уравнением.

Введя замену $y = ux$, $y' = u'x + u$, получим:

$$u'x + u = u(1 + \ln u),\ u'x + u = u + u\ln u,\ u'x = u\ln u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Проведем разделение переменных. Заменим u' на $\frac{du}{dx}$:

$$\frac{du}{dx}\cdot x = u\ln u.$$

Умножим полученное уравнение на dx:

$$xdu = u\ln u dx.$$

Разделив уравнение на x и на $u\ln u$, будем иметь уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем его:

$$\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x},\ \ln|\ln u|=\ln|x|+\ln|C|\ \ (C\neq 0),$$

$$\ln|\ln u|=\ln|Cx|\ \ (C\neq 0),\ |\ln u|=|Cx|\ \ (C\neq 0),\ \ln u=\pm Cx\ (C\neq 0).$$

Так как произвольная постоянная C может быть как положительной, так и отрицательной, то знак «$\pm$» можно опустить.

$$\ln u=Cx\ \ (C\neq 0),\ u=e^{Cx}\ \ (C\neq 0).$$

Заменив u на $\frac{y}{x}$, получим общее решение данного ОДУ:

$$\frac{y}{x}=e^{Cx}\ \ (C\neq 0),\ y=xe^{Cx}\ (x\neq 0, C\neq 0).$$

При разделении переменных, мы делили ОДУ на $u\ln u$, поэтому было потеряно решение $u=1$; $y=x\ \ (x\neq 0)$. Потерянное решение входит в общее решение при $C=0$.

Таким образом, общее решение данного ОДУ имеет вид

$$y=xe^{Cx}\ (x\neq 0).$$

Иногда однородное уравнение записывают в виде, специально не выделяющем какая переменная (x или y) является функцией, а какая аргументом.

Определение. ОДУ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется однородным, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ является однородными функциями с одинаковой степенью однородности.

Здесь также для решения используется подстановка $y = ux$, где u - некоторая неизвестная функция.

Подставив $y = ux$ и $dy = d(ux) = udx + xdu$ в данное уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменными (решение ОДУ такого типа приведено в п. 2.4.1).

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$\left(x^2 - y^2\right)dx + 2xydy = 0.$$

Решение.

Так как функции $P(x,y) = x^2 - y^2$ и $Q(x,y) = 2xy$ являются однородными функциями одинаковой (второй) степени, то данное ОДУ является однородным уравнением.

Введя замену $y = ux$, $dy = udx + xdu$, получим:

$$\left(x^2 - u^2x^2\right)dx + 2x^2u(udx + xdu) = 0.$$

Очевидно, что уравнение $x = 0$ является интегралом данного ОДУ. Рассмотрим теперь случай $x \neq 0$. Разделив уравнение на x^2, будем иметь:

$$\left(1 - u^2\right)dx - 2u(udx + xdu) = 0,\ dx - u^2dx + 2u^2dx + 2xudu = 0,$$

$$\left(u^2 + 1\right)dx + 2xudu = 0,\ 2xudu = -\left(u^2 + 1\right)dx,\ \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его.

$$\int \frac{2udu}{u^2+1} = -\int \frac{dx}{x},\ \ln\left(u^2+1\right) = \ln|C| - \ln|x|\ (C \neq 0), \ln\left(u^2+1\right) = \ln\left|\frac{C}{x}\right|\ (C \neq 0).$$

Учитывая, что C может принимать как положительные, так и отрицательные значения, знак модуля можно опустить.

$$u^2 + 1 = \frac{C}{x}\ (C \neq 0).$$

Вернемся к $y = ux$:

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x}\ (C \neq 0),\ x^2 + y^2 = Cx\ (C \neq 0),$$

$$x^2 - Cx + y^2 = 0\ (C \neq 0), \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2\ (C \neq 0)$$

Для упрощения уравнения переобозначим произвольную постоянную.

Таким образом, общий интеграл данного ОДУ имеет вид

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2\ (x \neq 0,\ C \neq 0)$$

Любой частный интеграл задает окружность без одной точки и с центром в точке $A(C, 0)$ и радиусом $|C|$.

Интеграл $x = 0$ $(y \neq 0)$ не является особым интегралом, он входит в общий интеграл при $C = \infty$.

На рисунке 16 приведены интегральные кривые решенного ОДУ.

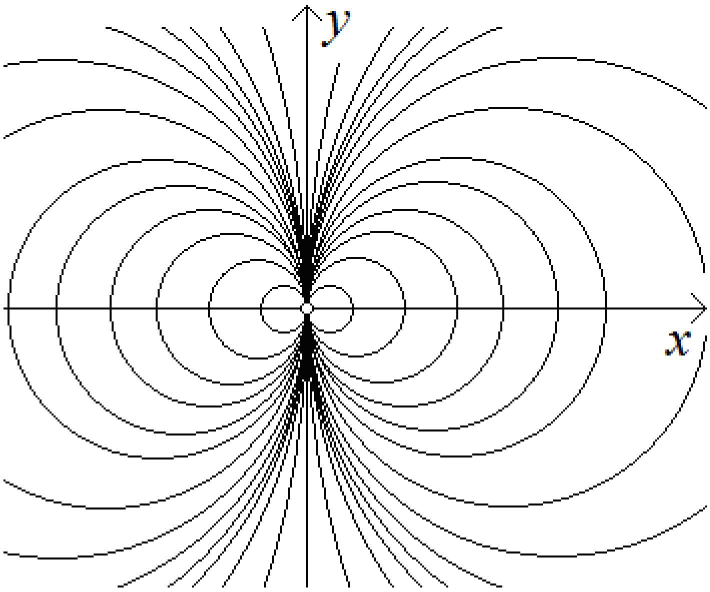

Рисунок 16

Заметим, что интегральные кривые, соответствующие общему интегралу, гомотетичны с центром в начале координат.

Таким свойством обладают интегральные кривые любого однородного уравнения. Действительно, пусть ОДУ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ является однородным. Заменим x и y на tx и ty (t - константа) соответственно:

$$\frac{d(ty)}{d(tx)} = f(tx, ty), \ \frac{t \cdot dy}{t \cdot dx} = f(x, y), \ \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Отсюда следует, что если $F(x, y) = 0$ - частный интеграл однородного ОДУ, то и уравнение $F(tx, ty) = 0$ также будет являться частным интегралом рассматриваемого уравнения. Таким образом, интегральные кривые, образующие общее решение, однородного уравнения гомотетичны с центром в начале координат.

2.4.3 Уравнение в полных дифференциалах

Определение. ОДУ вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть уравнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ представляет собой дифференциал некоторой функции двух переменных $u(x,y)$:

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

В этом случае данное ОДУ можно записать в виде

$$du(x,y)=0.$$

Так как только дифференциал константы равен нулю, то тогда общий интеграл уравнения в полных дифференциалах будет иметь вид

$$u(x,y)=C \quad (C\in R).$$

Выясним, при каких условиях выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ будет являться дифференциалом некоторой функции двух переменных в данной области $D\subset R^2$. В дальнейшем нам потребуется понятие открытой односвязной области.

Определение. Открытой односвязной областью на плоскости будем называть множество точек $D\subset R^2$, удовлетворяющее требованиям:

1) множество D состоит только из внутренних точек, то есть если точка M принадлежит множеству D, то можно указать окрестность точки M, целиком принадлежащую D (граничные точки не принадлежат множеству D);

2) две любые точки множества D можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей D (множество D является связным, то есть состоит из одного «куска»);

3) любая замкнутая кривая, принадлежащая D, ограничивает внутри себя только точки множества D (множество D не имеет «отверстий», даже точечных).

На рисунках 17-19 приведены примеры односвязных открытых областей. Следует отметить, что границы областей самим областям не принадлежат.

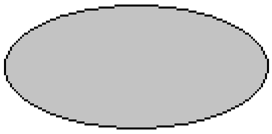
Рисунок 17

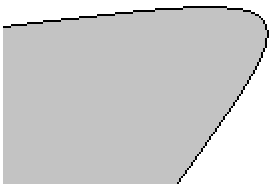
Рисунок 18

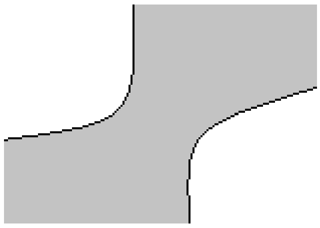
Рисунок 19

Приведенные на рисунках 20 и 21 области не является односвязными областями: область на рисунке 20 имеет внутри себя «отверстие», а область на рисунке 21 не является связной, так как она состоит из двух «кусков».

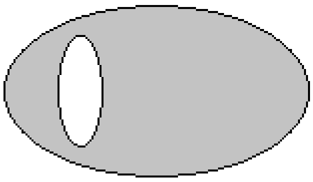
Рисунок 20

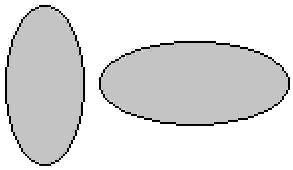
Рисунок 21

Из курса математического анализа [19] известна следующая теорема.

Теорема. Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ являются непрерывными функциями в открытой связной области $D \subset R^2$.

Для того чтобы в области D выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ являлось дифференциалом некоторой функции двух переменных необходимо и достаточно, чтобы в области D выполнялось тождество

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Доказательство теоремы приведено в [20].

Для нахождения функции $u(x,y)$ используем формулу для дифференциала функции двух переменных

$$du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy.$$

Так как

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

то

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y),$$

и тогда

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx, \ u(x,y) = Q(x,y)dy.$$

При нахождении неопределенных интегралов будут получены произвольные постоянные. Так как интегрирование в первом интеграле происходит по переменной x, то произвольная постоянная для первого интеграла не должна зависеть от x, но от переменной y она зависеть может. Таким образом, в первом интеграле произвольная постоянная будет иметь вид $C_1(y)$, а во втором - $C_2(x)$.

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$\left(3x^2 - 2xy^3\right)dx + (4y - 3x^2y^2)dy = 0.$$

Решение.

1. Проверим, является ли данное ОДУ уравнением в полных дифференциалах. В данном случае $P(x, y) = 3x^2 - 2xy^3$, $Q(x, y) = 4y - 3x^2y^2$.

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \left(3x^2 - 2xy^3\right)_y' = -6xy^2;$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \left(4y - 3x^2y^2\right)_x' = -6xy^2.$$

Получили выполнимость тождества

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

всюду на плоскости – односвязном множестве. Таким образом, данное ОДУ является уравнением в полных дифференциалах всюду на плоскости.

2. Найдем функцию $u(x, y)$, дифференциал которой представляет собой левую часть данного ОДУ:

1) $u(x, y) = \int P(x, y)dx = \int \left(3x^2 - 2xy^3\right)dx = x^3 - x^2y^3 + C_1(y)$;

2) $u(x, y) = \int Q(x, y)dx = \int \left(4y - 3x^2y^2\right)dy = 2y^2 - x^2y^3 + C_2(x)$.

Отсюда следует, что с точностью до произвольной постоянной искомая функция имеет вид

$$u(x, y) = x^3 - x^2y^3 + 2y^2.$$

Тогда общий интеграл данного ОДУ

$$x^3 - x^2y^3 + 2y^2 = C \ \ (C \in R).$$

Если ОДУ

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

не является уравнением в полных дифференциалах, то умножив его на некоторую функцию двух переменных $\mu(x, y)$, из него можно получить уравнение в полных дифференциалах. Функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем.

Так как ОДУ

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах, то тогда должно выполняться тождество

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Найти из такого уравнения функцию $\mu(x, y)$ в общем случае – весьма сложная задача. Способы нахождения интегрирующего множителя для некоторых частных случаев приведены в [11].

2.4.4 Линейное ОДУ первого порядка

Определение. Линейным ОДУ первого порядка будем называть уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Если $q(x) \equiv 0$, то такое уравнение будем называть однородным, а в противном случае – неоднородным.

Рассмотрим однородное уравнение

$$y' + p(x)y = 0.$$

Если y_1 - любое ненулевое решение данного уравнения, то тогда функция Cy_1 также будет являться его решением. Здесь C - произвольная постоянная. Таким образом, структура общего решения линейного однородного ОДУ первого порядка имеет вид

$$y = Cy_1.$$

Рассматриваемое ОДУ является частным случаем уравнения с разделяющимися переменными. Проведем разделение переменных.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \ \frac{dy}{dx} = -p(x)y, \ dy = -p(x)ydx.$$

Разделим уравнение на $y \neq 0$.

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx, \ \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \ \ (C \neq 0).$$

Замечание. Так как произвольная постоянная $\ln|C|$ входим в уравнение в явном виде, то будем считать, что в неопределенный интеграл $\int p(x)dx$ не входит еще одна произвольная постоянная, то есть он равен одной конкретной первообразной подынтегральной функции.

$$\ln|y| - \ln|C| = -\int p(x)dx \ (C \neq 0), \ \ln\frac{|y|}{|C|} = -\int p(x)dx \ (C \neq 0),$$

$$\frac{|y|}{|C|} = e^{-\int p(x)dx} \ (C \neq 0), \ |y| = |C|e^{-\int p(x)dx} \ (C \neq 0), \ y = \pm Ce^{-\int p(x)dx} \ (C \neq 0).$$

Так как произвольная постоянная C может быть как положительной, так и отрицательной, то знак «$\pm$» можно опустить.

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \ (C \neq 0).$$

Потерянное при разделении переменных решение $y = 0$ входит в общее решение при $C = 0$.

Таким образом, общее решение линейного однородного ОДУ первого порядка имеет вид

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \ (C \in R).$$

Полученный результат согласуется с определенной ранее структурой общего решения $y = Cy_1$.

Теперь рассмотрим линейное неоднородное ОДУ первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Из свойств производной следует, что структура его общего решения имеет вид

$$y = y_0 + Cy_1 .$$

Здесь y_0 - любое частное решение неоднородного уравнения, а y_1 - любое ненулевое частное решение соответствующего однородного уравнения.

Действительно, подставив предполагаемое общее решение $y = y_0 + Cy_1$ в неоднородное уравнение, получим:

$$(y_0 + Cy_1)' + p(x)(y_0 + Cy_1) = q(x), \; y_0' + Cy_1' + p(x)y_0 + Cp(x)y_1 = q(x),$$

$$\left(y_0' + p(x)y_0\right) + C\left(y_1' + p(x)y_1\right) = q(x).$$

Так как y_0 - решение неоднородного уравнения, то выражение, находящееся в первых скобках, тождественно равно $q(x)$. y_1 - решение однородного уравнения, тогда выражение, находящееся во вторых скобках, тождественно равно нулю.

Получили верное тождество

$$q(x) + C \cdot 0 = q(x).$$

Найдем общее решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной. Для этого в общем решении соответствующего однородного ОДУ

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

заменим произвольную постоянную C на пока неизвестную функцию $C(x)$:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Для нахождения неизвестной функции $C(x)$, подставим предполагаемое решение в исходное неоднородное уравнение.

$$\left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-\int p(x)dx\right)' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),\; C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},\; C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\,.$$

Тогда общее решение линейного неоднородного ОДУ первого порядка имеет вид

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Раскрыв скобки, получим, что найденный результат согласуется с определенной ранее структурой общего решения $y = y_0 + Cy_1$.

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$y' + \frac{y}{x} = 3x\,.$$

Решение.

Так как данное уравнение имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x),$$

то она является линейным неоднородное ОДУ первого порядка. Решим его методом вариации произвольной постоянной.

Найдем сначала общее решение соответствующего линейного однородного ОДУ первого порядка

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Проведем разделение переменных.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0, \ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \ dy = -\frac{y}{x}dx.$$

Разделим обе части полученного уравнения на y ($y \neq 0$).

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}, \ \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \ (C \neq 0), \ \ln|y| = \ln\frac{|C|}{|x|} \ (C \neq 0),$$

$$|y| = \frac{|C|}{|x|} (C \neq 0), \ y = \pm\frac{C}{x} (C \neq 0).$$

Так как произвольная постоянная C может быть как положительной, так и отрицательной, то знак «$\pm$» можно опустить.

$$y = \frac{C}{x} (C \neq 0).$$

Потерянное при разделении переменных решение $y=0$ входит в общее решение при $C=0$.

Таким образом, общее решение линейного однородного ОДУ имеет вид

$$y=\frac{C}{x}\ (C\in R).$$

Будем искать общее решение данного неоднородного ОДУ первого порядка в виде

$$y=\frac{C(x)}{x},$$

где $C(x)$ - неизвестная функция.

Тогда

$$y'=\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}.$$

Подставим предполагаемое решение и его производную в данное ОДУ.

$$\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}+\frac{\frac{C(x)}{x}}{x}=3x,\ \frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=3x,$$

$$\frac{C'(x)}{x}=3x,\ C'(x)=3x^2,\ C(x)=\int 3x^2dx=x^3+C\ \ (C\in R).$$

Теперь получим общее решение данного ОДУ:

$$y=\frac{C(x)}{x},\ y=\frac{x^3+C}{x}\ \ (C\in R),\ y=x^2+\frac{C}{x}\ \ (C\in R).$$

Линейное неоднородное ОДУ первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x)$$

можно решить и другим способом, применив подстановку Бернулли $y = uv$, где u и v – неизвестные функции.

Тогда получим

$$y' = (uv)' = u'v + uv'.$$

Подставив выражения для y и y' в данное ОДУ, будем иметь:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \qquad (2)$$

Подберем ненулевую функцию v так, чтобы выражение в скобках тождественно равнялось нулю. Для этого найдем любое ненулевое частное решение ОДУ

$$v' + p(x)v = 0.$$

Проведем разделение переменных.

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0, \ \frac{dv}{dx} = -p(x)v, \ dv = -p(x)v dx.$$

Разделим обе части уравнения на v $(v \neq 0)$.

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его.

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx .$$

Так как нам нужно *одно* ненулевое решение, то произвольную постоянную можно не вводить.

$$\ln v = -\int p(x)dx , \ v = e^{-\int p(x)dx} .$$

При найденной функции v, уравнение (2) будет иметь вид:

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Найдем функцию u:

$$u' = q(x)e^{\int p(x)dx} , \ u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \ \ (C \in R).$$

Тогда общее решение линейного неоднородного ОДУ первого порядка будет являться функция

$$y = uv , \ y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx} \ \ (C \in R).$$

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$y' + \frac{y}{x} = 3x .$$

Решение.

Так как данное уравнение имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x),$$

то она является линейным неоднородное ОДУ первого порядка.

Используя подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = 3x,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = 3x. \quad (3)$$

Подберем ненулевую функцию v так, чтобы выражение в скобках тождественно равнялось нулю. Для этого найдем любое ненулевое частное решение ОДУ

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

Проведем разделение переменных.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0, \ \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \ dv = -\frac{v}{x}dx.$$

Разделим обе части уравнения на v $(v \neq 0)$.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его.

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Так как нам нужно *одно* ненулевое решение, то произвольную постоянную можно не вводить.

$$\ln|v| = -\ln|x|,\ \ln|v| = \ln|x|^{-1},\ |v| = |x|^{-1},\ v = \pm x^{-1},\ v = x^{-1}.$$

При найденной функции v, уравнение (3) будет иметь вид:

$$u' x^{-1} = 3x.$$

Найдем функцию u.

$$u' = 3x^2,\ u = \int 3x^2 dx = x^3 + C\ \ (C \in R).$$

Тогда общее решение линейного неоднородного ОДУ первого порядка будет являться функция

$$y = uv,\ y = \left(x^3 + C\right)x^{-1}\ \ (C \in R),\ y = x^2 + \frac{C}{x}\ \ (C \in R).$$

2.4.5 Уравнение Бернулли

Определение. Уравнением Бернулли называется ОДУ вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^a\ \ (a \neq 0, a \neq 1).$$

Очевидно, что уравнение Бернулли имеет решение $y = 0$ при положительных значениях a.

С помощью замены $z = y^{1-a}$ уравнение Бернулли сводится к линейному ОДУ первого порядка, которое в свою очередь можно решить с помощью метода вариации произвольной постоянной или с помощью подстановки Бернулли (п. 2.4.4).

Уравнение Бернулли можно также сразу решить помощью метода вариации произвольной постоянной или с помощью подстановки Бернулли. В обоих случаях будет получено уравнение с разделяющимися переменными (п. 2.4.1).

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{3y^2}{x^3}.$$

Решение.

Так как ОДУ имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^a \quad (a \neq 0, a \neq 1),$$

то оно является уравнением Бернулли. В данном случае $a = 2$.

Данное уравнение имеет очевидное решение $y = 0$ $(x \neq 0)$.

Рассмотрим случай $y \neq 0$. Введем замену $z = y^{1-a}$, $z = y^{-1}$. Тогда, используя формулу для производной сложной функции, будем иметь $z' = -y^{-2}y'$.

Разделим уравнение на $\left(-y^2\right)$ ($y \neq 0$).

$$-y^{-2}y' - \frac{y^{-1}}{x} = -\frac{3}{x^3}.$$

Используя, что $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$, получим линейное ОДУ первого порядка

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{3}{x^3}.$$

Введем подстановку $z = uv$, $z' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -\frac{3}{x^3},$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -\frac{3}{x^3} \qquad (4)$$

Подберем ненулевую функцию v так, чтобы выражение в скобках тождественно равнялось нулю. Для этого найдем любое ненулевое частное решение ОДУ

$$v' - \frac{v}{x} = 0.$$

Проведем разделение переменных.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0, \ \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \ dv = \frac{v}{x}dx.$$

Разделим обе части уравнения на v $(v \neq 0)$.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его.

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}.$$

Так как нам нужно *одно* ненулевое решение, то произвольную постоянную можно не вводить.

$$\ln|v| = \ln|x|,\ |y| = |x|,\ y = \pm x,\ y = x.$$

При найденной функции v, уравнение (4) будет иметь вид:

$$u'x = -\frac{3}{x^3}.$$

Найдем функцию u.

$$u' = -\frac{3}{x^4},\ u' = -3x^{-4},\ u = \int\left(-3x^{-4}\right)dx = x^{-3} + C\ \ (C \in R).$$

Тогда общее решение линейного неоднородного ОДУ первого порядка будет являться функция

$$z = uv = \left(x^{-3} + C\right)x = x^{-2} + Cx,\ y = z^{-1} = \frac{1}{x^{-2} + Cx}\ \ (C \in R),$$

$$y = \frac{x^2}{1 + Cx^3}\ \ (x \neq 0, C \in R).$$

Решение $y = 0\ \ (x \neq 0)$ входит в общее решение при $C = \infty$.

Таким образом, общее решение данного ОДУ имеет вид

$$y = \frac{x^2}{1 + Cx^3}\ \ \left(x \neq 0, C \in R \cup \{\infty\}\right).$$

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{3y^2}{x^3}.$$

Решение.

Так как ОДУ имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^a \ \ (a \neq 0, a \neq 1),$$

то оно является уравнением Бернулли.

Данное уравнение имеет очевидное решение $y = 0 \ \ (x \neq 0)$.

Решим его методом вариации произвольной постоянной.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного ОДУ первого порядка

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Проведем разделение переменных.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0, \ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \ dy = -\frac{y}{x}dx.$$

Разделим обе части полученного уравнения на y ($y \neq 0$).

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}, \ \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \ \ (C \neq 0), \ \ln|y| = \ln\frac{|C|}{|x|} \ \ (C \neq 0),$$

$$|y| = \frac{|C|}{|x|}\,(C \neq 0),\; y = \pm\frac{C}{x}\,(C \neq 0).$$

Так как произвольная постоянная C может быть как положительной, так и отрицательной, то знак «$\pm$» можно опустить.

$$y = \frac{C}{x}\,(C \neq 0).$$

Потерянное при разделении переменных решение $y = 0$ входит в общее решение при $C = 0$.

Таким образом, общее решение линейного однородного ОДУ имеет вид

$$y = \frac{C}{x}\,(C \in R).$$

Будем искать общее решение данного уравнения Бернулли в виде

$$y = \frac{C(x)}{x},$$

где $C(x)$ - неизвестная функция.

Тогда

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.$$

Подставим предполагаемое решение и его производную в данное ОДУ:

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{\frac{C(x)}{x}}{x} = \frac{3\left(\frac{C(x)}{x}\right)^2}{x^3},\; C'(x)x - C(x) + C(x) = \frac{3C^2(x)}{x^3},$$

$$C'(x)x = \frac{3C^2(x)}{x^3}.$$

Получили ОДУ с разделяющимися переменными. Разделим их.

$$\frac{dC(x)}{dx}x = \frac{3C^2(x)}{x^3},\ dC(x) = 3C^2(x)x^{-4}dx,\ \frac{dC(x)}{C^2(x)} = 3x^{-4}dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его:

$$\int\frac{dC(x)}{C^2(x)} = \int 3x^{-4}dx,\ -\frac{1}{C(x)} = -x^{-3} - C,\ \frac{1}{C(x)} = x^{-3} + C,\ C(x) = \frac{1}{x^{-3} + C}.$$

Так как при разделении переменных, мы делили уравнение на $C^2(x)$, то решение $C(x) = 0$ было потеряно. Потерянное решение входит в общее решение при $C = \infty$.

Найдем теперь общее решение данного ОДУ:

$$y = \frac{C(x)}{x},\ y = \frac{1}{x\left(x^{-3} + C\right)},\ y = \frac{x^2}{1 + Cx^3}\ \left(x \neq 0, C \in R \cup \{\infty\}\right).$$

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{3y^2}{x^3}.$$

Решение.

Так как ОДУ имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^a\ \ (a \neq 0, a \neq 1),$$

то оно является уравнением Бернулли.

Данное уравнение имеет очевидное решение $y = 0$ $(x \neq 0)$.

Используя подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{3u^2v^2}{x^3},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{3u^2v^2}{x^3}. \tag{5}$$

Подберем ненулевую функцию v так, чтобы выражение в скобках тождественно равнялось нулю. Для этого найдем любое ненулевое частное решение ОДУ

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

Проведем разделение переменных.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0, \ \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \ dv = -\frac{v}{x}dx.$$

Разделим обе части уравнения на v $(v \neq 0)$.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его.

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Так как нам нужно *одно* ненулевое решение, то произвольную постоянную можно не вводить.

$$\ln|v| = -\ln|x|,\ \ln|v| = \ln|x|^{-1},\ |v| = |x|^{-1},\ v = \pm x^{-1},\ v = x^{-1}.$$

При найденной функции v, уравнение (5) будет иметь вид:

$$u'v = \frac{3u^2v^2}{x^3},\ u'x^{-1} = \frac{3u^2x^{-2}}{x^3},\ u' = 3u^2x^{-4}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим их:

$$\frac{du}{dx} = 3u^2x^{-4},\ \frac{du}{u^2} = 3x^{-4}dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его:

$$\int\frac{du}{u^2} = \int 3x^{-4}dx,\ -\frac{1}{u} = -x^{-3} - C,\ \frac{1}{u} = x^{-3} + C,\ u = \frac{1}{x^{-3} + C}.$$

Так как при разделении переменных, мы делили уравнение на u^2, то решение $u = 0$ было потеряно. Потерянное решение входит в общее решение при $C = \infty$.

Найдем теперь общее решение данного ОДУ:

$$y = uv,\ u = \frac{1}{x^{-3} + C}\cdot x^{-1},\ y = \frac{1}{x\left(x^{-3} + C\right)},\ y = \frac{x^2}{1 + Cx^3}\ \ \left(x \neq 0, C \in R \cup \{\infty\}\right).$$

2.4.6 Уравнение Клеро

Определение. Уравнением Клеро будем называть ОДУ вида

$$y = xy' + \varphi(y').$$

Для решения данного ОДУ введем замену $p = y'$. Тогда получим уравнение

$$y = xp + \varphi(p). \tag{6}$$

Найдем производную от обеих частей данного уравнения. При этом используем формулу для производной произведения и формулу для производной сложной функции.

$$y' = x'p + xp' + \varphi'(p)p', \; p = p + xp' + \varphi'(p)p', \; xp' + \varphi'(p)p' = 0, \; p'(x + \varphi'(p)) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$p' = 0 \text{ или } x + \varphi'(p) = 0.$$

Пусть $p' = 0$, тогда $p = C$. Тогда используя (6), получим общее решение данного ОДУ

$$y = Cx + \varphi(C).$$

Полученное общее решение представляет собой семейство линейных функций, которому отвечает семейство прямых.

Пусть теперь $x + \varphi'(p) = 0$. Тогда

$$x=-\varphi'(p).$$

Объединив полученное уравнение с (6), будем иметь

$$\begin{cases} x=-\varphi'(p), \\ y=xp+\varphi(p), \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\varphi'(p), \\ y=-p\varphi'(p)+\varphi(p). \end{cases}$$

Получили параметрически заданное особое решение данного ОДУ. Особое решение представляет собой огибающую семейства прямых, образующих общее решение, а, с другой стороны, общее решение состоит из касательных к особому решению (рисунок 22).

Задача. Проинтегрировать ОДУ

$$y=xy'-\frac{(y')^2}{4}$$

Решение.

Так как данное ОДУ имеет вид

$$y=xy'+\varphi(y'),$$

то оно является уравнением Клеро.

Введя замену $p=y'$, получим уравнение

$$y=xp-\frac{p^2}{4}. \tag{7}$$

Найдем производные от обеих частей данного уравнения.

$$y'=x'p+xp'-\frac{2pp'}{4}, \; p=p+xp'-\frac{pp'}{2}, \; xp'-\frac{pp'}{2}=0, \; p'\left(x-\frac{p}{2}\right)=0.$$

Отсюда следует

$$p' = 0 \text{ или } x - \frac{p}{2} = 0.$$

Если $p' = 0$, то $p = C$. Тогда подставив это равенство в (7) получим общее решение данного ОДУ

$$y = Cx - \frac{C^2}{4}.$$

Оно определяет на плоскости семейство прямых (рисунок 22).

Если же $x - \frac{p}{2} = 0$, $x = \frac{p}{2}$, то объединив полученный результат с (7), будем иметь параметрически заданное особое решение

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2}, \\ y = xp - \frac{p^2}{4}, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{p}{2}, \\ y = \frac{p}{2} \cdot p - \frac{p^2}{4}, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{p}{2}, \\ y = \frac{p^2}{4}. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения p через x:

$$p = 2x,$$

и подставив результат во второе уравнение, получим особое решение данного ОДУ в явном виде

$$y = \frac{(2x)^2}{4}, \; y = x^2.$$

Заметим, что интегральные кривые, соответствующие общему решению (прямые $y = Cx - \frac{C^2}{4}$) являются касательными к интегральной кривой, отвечающей особому решению (парабола $y = x^2$). Эта парабола в свою очередь является огибающей данному семейству прямых (рисунок 22).

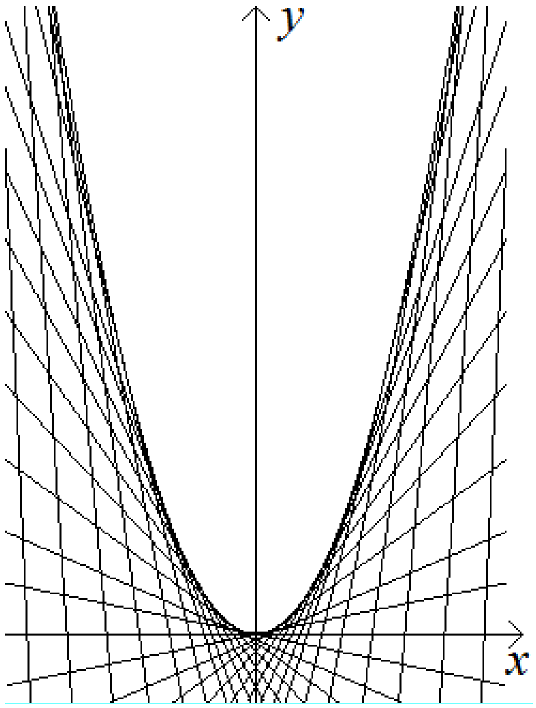

Рисунок 22

2.4.7 Применение справочников по ОДУ для решения уравнений первого порядка

Рассмотренными в пунктах 2.4.1-2.4.6 типами ОДУ не исчерпываются виды дифференциальных уравнений, разрешимые в квадратурах. С помощью справочных изданий (например, [21-23]) можно попытаться определить тип данного ОДУ и найти метод его решения. В качестве примера рассмотрим следующее уравнение.

Задача. Свести данное ОДУ

$$y' = \frac{3x + y + 1}{4x + 3y - 2}$$

к одному из типов, изученных в пунктах 2.4.1-2.4.6.

Решение.

Данное ОДУ не относится ни к одному из видов, рассмотренных в пунктах 2.4.1-2.4.6, поэтому используем, например, справочник [22] (раздел «Решения обыкновенных дифференциальных уравнений»). В нем (пункт 23) можно найти ОДУ вида

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right).$$

Очевидно, что заданное ОДУ относится к этому типу. Воспользуемся приведенным решением таких уравнений.

Найдем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 1\cdot 4 = 5 \neq 0\,.$$

Так как данный определитель не равен 0, то решим систему уравнений

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0, \end{cases} \begin{cases} 3x+y+1=0, \\ 4x+3y-2=0, \end{cases} \begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$$

Введем замены $x=\xi-1,\ y=\eta+2$. Тогда данное ОДУ

$$y' = \frac{3x+y+1}{4x+3y-2}$$

примет вид

$$(\eta+2)' = \frac{3(\xi-1)+\eta+2+1}{4(\xi-1)+3(\eta+2)-2},\ \eta' = \frac{3\xi+\eta}{4\xi+3\eta}.$$

Так как в правой части находится однородная функция нулевой степени, то полученное ОДУ является однородным (п. 2.4.2).

После решения его методом, приведенным в п. 2.4.2, вернемся к старым переменным с помощью равенств $\xi = x + 1$ и $\eta = y - 2$.

3 Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка

3.1 Основные определения

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка называется уравнение вида $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$. Порядок ОДУ – это порядок самой старшей производной, входящей в уравнение.

Замечание. ОДУ n-го порядка обязательно в явном виде содержит $y^{(n)}$ и может не содержать в явном виде x, y,…, $y^{(n-1)}$. Порядок ОДУ – это порядок самой старшей производной.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать ОДУ n-го порядка, разрешенные относительно самой старшей производной неизвестной функции, то есть ОДУ вида $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$. Предполагается, что функция $f\left(x, y, y_1, ..., y_{n-1}\right)$ является непрерывной.

Определение. n раз непрерывно дифференцируемую функцию $y = y(x)$ будем называть решением ОДУ $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ на промежутке $I \subset R$, если при подстановке функции $y = y(x)$ в уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ получается верное тождество на I.

Очевидно, что ОДУ второго порядка $y'' = 2$ имеет бесконечно много решений: $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + x$, $y = x^2 + 3x - 5$ т. д. Вообще при любых $C_1, C_2 \in R$ функция $y = x^2 + C_1 x + C_2$ является решением ОДУ $y'' = 2$.

Замечание. Как правило, ОДУ n-го порядка имеет бесконечно много решений, и его общее решение будет содержать n произвольных постоянных:

$$y = y\left(x, C_1, C_2, ...C_n\right).$$

Если в общем решении $y = y\left(x, C_1, C_2, ...C_n\right)$ вместо произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n подставить конкретные действительные числа, то мы получим частное решение.

Если общее решение $y=\varphi(x,C_1,C_2,...C_n)$ ОДУ n-го порядка получено в неявном виде, то есть в виде уравнения $F(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$, то это уравнение $F(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$ будем называть общим интегралом данного ОДУ.

Если частное решение $y=y(x)$ ОДУ n-го порядка получено в неявном виде, то есть в виде уравнения $F(x,y)=0$, то это уравнение $F(x,y)=0$ будем называть частным интегралом данного ОДУ.

3.2 Задача Коши для ОДУ n-го порядка

Для выделения единственного решения, описывающего реальный процесс, нам надо найти значения n произвольных постоянных. Для этого нам уже будет необходимо n дополнительных условий.

Определение. Задачей Коши для ОДУ n-го порядка будем называть задачу вида

$$\begin{cases} y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right), \\ y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_1, \\ y''(x_0)=y_2, \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}, \end{cases}$$

состоящая из ОДУ $y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ и так называемых начальных условий $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1,\ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$.

Здесь x_0, y_0, y_1, …, y_{n-1} - конкретные действительные числа.

Решить задачу Коши означает: найти решение (решения) ОДУ $y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$, удовлетворяющее (удовлетворяющие) начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1,\ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ n-го порядка. Пусть задача Коши

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2, \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

удовлетворяет требованиям:

1) функция $f(x, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1})$;

2) частные производные $f'_{\xi_0}(x, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$, $f'_{\xi_1}(x, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}), \ldots,$ $f'_{\xi_{n-1}}(x, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ ограничены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1})$.

Тогда в некоторой окрестности точки $x = x_0$ будет существовать **единственное** решение $y = y(x)$ задачи Коши.

3.3 Некоторые дифференциальные уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка

3.3.1 ОДУ вида $y^{(n)} = f(x)$

ОДУ данного типа решается последовательным интегрированием его обеих частей:

1) $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$;

2) $y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx+C_2=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2$;

3) $y^{(n-3)}=\int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2\right)dx+C_3=\int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx+$

$+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$.

Проведя интегрирование еще $n-3$ раза и переобозначив произвольные постоянные, получим общее решение данного ОДУ

$$y=\underbrace{\int\left(\int\ldots\left(\int f(x)dx\right)\ldots dx\right)dx}_{n\text{ интегралов}}+C_{n-1}x^{n-1}+\ldots+C_2x^2+C_1x+C_0.$$

Задача. Найти общее решение ОДУ

$$y'''=x.$$

Решение.

Проинтегрируем последовательно три раза данное ОДУ:

1) $y''=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C_1$;

2) $y'=\int\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$;

3) $y=\int\left(\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{x^4}{24}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$.

Переобозначим произвольные постоянные для упрощения обозначений. Итак, общее решение данного ОДУ имеет вид

$$y = \frac{x^4}{24} + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 .$$

3.3.2 ОДУ вида $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$

Если ОДУ не содержит в явном виде неизвестной функции и ее производных до порядка k включительно, то порядок данного ОДУ можно понизить на k единиц с помощью замены $z = y^{(k)}$. Тогда будет получено ОДУ $n-k$ порядка:

$$F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0 .$$

Задача. Проинтегрировать уравнение цепной линии [21]

$$y'' = a\sqrt{(y')^2 + 1} .$$

Решение.

Так как данное ОДУ не содержит в явном виде неизвестную функцию, то понизим его порядок на единицу с помощью введения замены $z = y'$. Получим ОДУ первого порядка

$$z' = a\sqrt{z^2 + 1} .$$

Полученное уравнение является ОДУ с разделяющимися переменными. Разделим их:

$$\frac{dz}{dx} = a\sqrt{z^2 + 1}, \quad \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = a dx .$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \int a dx, \text{ Arsh } z = ax + C_1, \ z = \text{sh}(ax + C_1).$$

Вернемся к старой переменной.

$$y' = \text{sh}(ax + C_1), \ y = \int \text{sh}(ax + C_1) dx = \frac{1}{a} \text{ch}(ax + C_1) + C_2 .$$

Итак, общее решение данного ОДУ имеет вид

$$y = \frac{1}{a} \text{ch}(ax + C_1) + C_2 .$$

Замечание. Полученное общее решение описывает форму провисания тяжелой цепи при различных точках подвеса. Коэффициент a определяется линейной плотностью цепи и ее натяжением.

3.3.3 ОДУ вида $F\left(y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$

Если ОДУ не содержит независимую переменную в явном виде, то порядок уравнения можно понизить на единицу с помощью замены $y'(x) = p(y)$. При такой замене получим ОДУ относительно неизвестной функции p, а переменная y будет ее аргументом. Получим выражения для производных:

1) $y' = p$;

2) $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p = p'p$;

3) $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(p'p)}{dy} \cdot p = (p'p)' \, p = (p''p + p'p')p = p''p + (p')^2 \, p$.

Выражения для производных более высокого порядка можно найти совершенно аналогично.

Задача. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{(y')^2}{2y}, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 2. \end{cases}$$

Решение.

Данное ОДУ не содержит независимую переменную в явном виде, поэтому введем замену $y'(x) = p(y)$, $y'' = p'p$.

Тогда получим:

$$p'p = \frac{p^2}{2y}, \; p'p - \frac{p^2}{2y} = 0, \; p\left(p' - \frac{p}{2y}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $p = 0$ или $p' - \dfrac{p}{2y} = 0$.

Рассмотрим случай $p = 0$. Тогда

$$y' = 0, \; y = C.$$

Используя начальное условие $y(1) = 1$, получим

$$y = 1.$$

Найденное решение не удовлетворяет условию $y'(1)=2$.

Рассмотрим случай $p'-\frac{p}{2y}=0$. Имеем ОДУ с разделяющимися переменные. Разделим их.

$$p'=\frac{p}{2y},\ \frac{dp}{dy}=\frac{p}{2y}.$$

Умножив уравнение на dy, получим:

$$dp=\frac{p}{2y}dy.$$

Так как $y'(1)=2$, то $p\neq 0$ и тогда разделим уравнение на $2p$.

$$\frac{2dp}{p}=\frac{dy}{y},\ 2\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y},\ 2\ln|p|=\ln|y|+\ln|C|\ \ (C\neq 0),$$

$$\ln|p|^2=\ln|C||y|\ (C\neq 0),\ p^2=|Cy|.$$

Так как C может принимать такой же знак, что и y, то тогда знак модуля можно опустить:

$$p^2=Cy.$$

Используя начальные условия $y(1)=1$ и $y'(1)=2$, получим, что при $x=1$ выполняется $y=1$ и $p=2$. Тогда найдем C, подставив $y=1$ и $p=2$ в уравнение $p^2=Cy$. Будем иметь:

$$2^2=C\cdot 1,\ C=4.$$

Тогда

$$p^2=4y,\ p=2\sqrt{y} \text{ или } p=-2\sqrt{y}.$$

Так как при $y=1$ и $p=2$ должно получаться верное равенство, то второй случай невозможен.

Рассмотрим

$$p=2\sqrt{y},\ y'=2\sqrt{y}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим их:

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y},\ dy=2\sqrt{y}dx.$$

Из условия $y(1)=1$ следует, что $y\neq 0$, и тогда уравнение можно разделить на $2\sqrt{y}$.

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}}=dx,\ \int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int dx,\ \sqrt{y}=x+C.$$

Найдем C, используя начальное условие $y(1)=1$:

$$\sqrt{1}=1+C.$$

Тогда:

$$C=0,\ \sqrt{y}=x.$$

И решение данной задачи Коши имеет вид

$$y = x^2 \quad (x > 0).$$

3.4 Линейное ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами

3.4.1 Основные определения

Определение. Линейным ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами будем называть уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Здесь $a_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ и $f(x)$ – известные функции, непрерывные на некотором промежутке I. Если на этом промежутке $f(x) \equiv 0$, то такое уравнение будем называть однородным, а в противном случае – неоднородным. Функции $a_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ называются коэффициентами данного ОДУ.

Левую часть рассматриваемого уравнения можно рассматривать как оператор $L_n(y)$, отображающий $C^n(I)$ (множество n-раз непрерывно дифференцируемых функций на промежутке I) в $C(I)$ (множество непрерывных функций на промежутке I).

Определение. Линейным дифференциальным оператором n-го порядка с переменными коэффициентами будем называть оператор вида

$$L_n(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

Из свойств производной и вида данного оператора следует его линейность, то есть выполнимость следующих свойств.

1. Для всех $y_1, y_2 \in C^n(I)$ выполняется $L_n(y_1 + y_2) = L_n(y_1) + L_n(y_2)$.

2. Для всех $y \in C^n(I)$ и $C \in R$ выполняется $L_n(Cy) = CL_n(y)$.

В дальнейшем линейное неоднородное однородное ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами будем иногда обозначать в виде

$$L_n(y) = f(x),$$

а однородное в виде

$$L_n(y) = 0.$$

3.4.2 Задача Коши для линейного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами

Определение. Задачей Коши для линейного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами будем называть задачу вида

$$\begin{cases} L_n(y) = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

состоящую из линейного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами и начальных условий.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами. Пусть $a_i(x)$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ и $f(x)$ – непрерывные функции на промежутке I $(x_0 \in I)$, тогда на этом промежутке задача Коши будет иметь единственное решение.

Замечание. В отличие от уже рассмотренных аналогичных теорем (пункты 2.2 и 3.2) данная теорема гарантирует существование и единственность решения не в некоторой окрестности точки x_0, а на всем промежутке непрерывности функций $a_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ и $f(x)$.

3.4.3 Свойства решений линейного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами

1. Если функции y_1 и y_2 – решения однородного ОДУ $L_n(y) = 0$, то функции $y_1 \pm y_2$ также будут являться решениями данного ОДУ.

2. Если функция y – решение однородного ОДУ $L_n(y) = 0$, а C – произвольная постоянная, то функция Cy также будет являться решением данного ОДУ.

3. Если функция y_1 – решение неоднородного ОДУ $L_n(y) = f(x)$, а функция y_2 – решение соответствующего однородного ОДУ $L_n(y) = 0$, то функция $y_1 + y_2$ будет являться решением неоднородного ОДУ $L_n(y) = f(x)$.

4. Если функция y_1 – решение неоднородного ОДУ $L_n(y) = f_1(x)$, а функция y_2 – решение неоднородного ОДУ $L_n(y) = f_2(x)$, то функция $y_1 + y_2$ будет являться решением неоднородного ОДУ $L_n(y) = f_1(x) + f_2(x)$.

Свойство 4 называется принципом суперпозиции.

Доказательство данных свойств непосредственно следует из линейности оператора $L_n(y)$. В качестве примера докажем свойство 4.

Доказательство.

Покажем, что функция $y_1 + y_2$ является решением ОДУ $L_n(y) = f_1(x) + f_2(x)$. Для этого подставим ее в данное ОДУ:

$$L_n(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x).$$

Так как оператор $L_n(y)$ является линейным, то тогда получим:

$$L_n(y_1)+L_n(y_2)=f_1(x)+f_2(x). \qquad (1)$$

Так как функция y_1 – решение неоднородного ОДУ $L_n(y)=f_1(x)$, а функция y_2 – решение неоднородного ОДУ $L_n(y)=f_2(x)$, то тогда получаем верные тождества

$$L_n(y_1)\equiv f_1(x),\ L_n(y_2)\equiv f_2(x).$$

Отсюда следует, что и (1) является тождеством. Таким образом, y_1+y_2 является решением неоднородного ОДУ $L_n(y)=f_1(x)+f_2(x)$. Свойство доказано.

Из свойств 1-2 следует, что если функции $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ являются решениями однородного ОДУ $L_n(y)=0$, то функция

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n \qquad (2)$$

также будет являться решением однородного ОДУ $L_n(y)=0$. Здесь $C_1,\ C_2,\ldots,\ C_n$ - произвольные постоянные.

Решение (2) содержит ровно n произвольных постоянных, однако оно не всегда будет являться общим решением однородного ОДУ $L_n(y)=0$. Действительно, предположим, что, например, решение y_1 линейно выражается через другие решения:

$$y_1=\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n. \qquad (3)$$

Тогда подставив (3) в (2), получим

$$y=C_1(\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n)+C_2y_2+\ldots+C_ny_n.$$

Упростив и переобозначив произвольные постоянные, получим решение однородного ОДУ $L_n(y)=0$ вида

$$y=D_2y_2+...+D_ny_n.$$

Это решение, очевидно, не будет являться общим решением, так как содержит не n, а $n-1$ произвольных постоянных.

Таким образом, чтобы решение (2) являлось общим решением однородного ОДУ $L_n(y)=0$ надо дополнительно потребовать, чтобы решения $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ линейно не выражались друг через друга, то есть были линейно независимыми.

Итак, структура общего решения однородного ОДУ $L_n(y)=0$ имеет вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n,$$

а структура общего решения неоднородного ОДУ $L_n(y)=f(x)$ имеет вид

$$y=y_0+C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n.$$

Здесь $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ - линейно независимые решения однородного ОДУ $L_n(y)=0$, а y_0 - любое решение неоднородного ОДУ $L_n(y)=f(x)$.

Определение. Функции $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ называются линейно зависимыми на промежутке I, если существуют такие постоянные $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ (числа α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ не все равны нулю), что

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n=0\ \ (x\in I).$$

В противном случае – линейно независимыми.

Определение. Если функции $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ являются линейно независимыми решениями однородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами, то их будем называть фундаментальной системой решений данного однородного ОДУ.

Количество функций в фундаментальной системе решений равно порядку ОДУ.

Отсюда следует, что для получения общих решений линейных однородных и неоднородных ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами нам требуется критерий линейной независимости системы функций (пункт 3.4.4).

3.4.4 Определитель Вронского

Пусть функции $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ являются линейно зависимыми на промежутке I, тогда существуют такие постоянные $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ (числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ не все равны нулю), что при всех $x \in I$ выполняется

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0\,.$$

Продифференцируем данное тождество последовательно $n-1$ раз и объединим полученные тождества в однородную систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' = 0, \\ \alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2'' + \ldots + \alpha_n y_n'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим эту систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Так как существуют $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ (не все равные нулю), что при всех $x \in I$ каждое уравнение обращается в тождество, то данная система имеет ненулевое решение.

Отсюда следует [24], что определитель этой системы тождественно равен нулю на промежутке I. Этот определитель называется определителем Вронского.

Определение. Определителем Вронского системы функций y_1, $y_2, \ldots$, y_n будем называть определитель вида

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, нами уже получено следующее свойство определителя Вронского.

1. Пусть функции y_1, $y_2, \ldots$, y_n являются линейно зависимыми на промежутке I. Тогда их определитель Вронского будет на промежутке I тождественно равен нулю.

2. Пусть функции y_1, $y_2, \ldots$, y_n являются решениями некоторого линейного однородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами $L_n(y) = 0$ на промежутке I. Если хотя бы в одной точке $x_0 \in I$ определитель Вронского равен 0, то тогда функции y_1, $y_2, \ldots$, y_n будут являться линейно зависимыми на промежутке I, и на этом промежутке определитель Вронского будет тождественно равен нулю.

Доказательство.

Пусть в некоторой точке $x_0 \in I$ определитель Вронского равен 0:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что столбцы данного определителя будут линейно зависимыми. Таким образом, будет существовать набор чисел $\tilde{\alpha}_1,\ \tilde{\alpha}_2,\ldots,\tilde{\alpha}_n$ (числа $\tilde{\alpha}_1,\ \tilde{\alpha}_2,\ldots,\tilde{\alpha}_n$ не все равны нулю), что будет верно равенство

$$\tilde{\alpha}_1\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}+\tilde{\alpha}_2\begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \ldots \\ y_2^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}+\ldots+\tilde{\alpha}_n\begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \ldots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Рассмотрим функцию $\tilde{y}=\tilde{\alpha}_1 y_1+\tilde{\alpha}_2 y_2+\ldots+\tilde{\alpha}_n y_n$.

Если она тождественно равна нулю на промежутке I, то это означает, что функции $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ будут являться линейно зависимыми на промежутке I. Для данного случая свойство доказано.

Предположим теперь, что функция $\tilde{y}$ не равна тождественно 0 на промежутке I.

Так как функции $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ являются решениями некоторого линейного однородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами $L_n(y)=0$ на промежутке I, то и функция $\tilde{y}$ также будет являться решением данного уравнения на данном промежутке.

Из (4) следует равенства:

$$\tilde{y}(x_0)=\tilde{\alpha}_1 y_1(x_0)+\tilde{\alpha}_2 y_2(x_0)+\ldots+\tilde{\alpha}_n y_n(x_0)=0,$$

$$\tilde{y}'(x_0)=\tilde{\alpha}_1 y_1'(x_0)+\tilde{\alpha}_2 y_2'(x_0)+\ldots+\tilde{\alpha}_n y_n'(x_0)=0,$$

…………………………………………………………………

$$\tilde{y}^{(n-1)}(x_0)=\tilde{\alpha}_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\tilde{\alpha}_2 y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+\tilde{\alpha}_n y_n^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Таким образом, функция $\tilde{y}$ является на промежутке I решением задачи Коши:

$$\begin{cases} L_n(y) = 0, \\ y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0, \\ y''(x_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что это задача имеет еще и нулевое решение.

Получаем, что данная задача Коши имеет хотя бы два решения: ненулевое решение $\tilde{y}$ и нулевое решение. Последнее противоречит теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного однородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами (пункт 3.4.2). Отсюда следует, что предположение о том, что функция $\tilde{y}$ не равна тождественно 0 на промежутке I, является неверным.

Линейная зависимость функций y_1, $y_2, \dots,$ y_n на промежутке I доказана. Последнее (свойство 1 определителя Вронского) влечет тождество $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv 0$ на промежутке I.

Свойство доказано.

3. Пусть функции y_1, $y_2, \dots,$ y_n являются решениями некоторого линейного однородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами на промежутке I. Если хотя бы в одной точке $x_0 \in I$ определитель Вронского не равен 0, то тогда функции y_1, $y_2, \dots,$ y_n будут являться линейно независимыми на промежутке I, и на этом промежутке определитель Вронского будет всюду отличен от нуля.

Доказательство.

Предположим противное, то есть, что функции y_1, $y_2, \dots,$ y_n будут являться линейно зависимыми на промежутке I. Тогда по свойству 1 определителя Вронского имеем тождество $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv 0$ на промежутке I. Получили противоречие с тем, что в точке $x_0 \in I$ определитель Вронского не равен 0. Таким образом, функции y_1, $y_2, \ldots$, y_n будут являться линейно независимыми на промежутке I.

Теперь предположим, что неверно, что на промежутке I определитель Вронского будет всюду отличен от нуля. Тогда должна существовать хотя бы одна точка $x_1 \in I$, в которой определитель Вронского равен 0. Согласно свойству 2 определителя Вронского, последнее влечет тождество $W[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv 0$ на промежутке I. Получили противоречие с тем, что в точке $x_0 \in I$ определитель Вронского не равен 0. Таким образом, определитель Вронского функций y_1, $y_2, \ldots$, y_n будет отличен от нуля всюду на промежутке I.

Свойство доказано.

Замечание. Если не требовать, чтобы функции y_1, $y_2, \ldots$, y_n являлись решениями некоторого линейного однородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами на промежутке I, то тогда определитель Вронского $W[y_1, y_2, ..., y_n]$ может принимать как нулевые, так и ненулевые значения на промежутке I.

В качестве примера можно рассмотреть функции $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$. Тогда определитель Вронского

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \sin x$$

принимает как ненулевые значения (например, при $x = \dfrac{\pi}{2}$ определитель Вронского равен -1), так и значение, равное нулю (например, при $x = 0$).

3.4.5 Фундаментальная система решений

Теорема. Для любого линейного однородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами существует фундаментальная система решений.

Доказательство.

Пусть нам дано линейное однородное ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами $L_n(y)=0$. Его коэффициенты $a_i(x)$ $(i=0,1,...,n-1)$ предполагаются непрерывными на некотором промежутке I.

Возьмем любую точку $x_0 \in I$, и образуем n задач Коши:

$$1)\ \begin{cases} L_n(y)=0, \\ y(x_0)=1, \\ y'(x_0)=0, \\ y''(x_0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} L_n(y)=0, \\ y(x_0)=0, \\ y'(x_0)=1, \\ y''(x_0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} L_n(y)=0, \\ y(x_0)=0, \\ y'(x_0)=0, \\ y''(x_0)=1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0; \end{cases} \quad \ldots\ n)\ \begin{cases} L_n(y)=0, \\ y(x_0)=0, \\ y'(x_0)=0, \\ y''(x_0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=1. \end{cases}$$

Из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами (пункт 3.4.2) следует, что каждая из данных задач Коши на промежутке I имеет единственное решение. Обозначим эти решения $y=y_1(x),\ y=y_2(x),\ y=y_3(x),\ \ldots,\ y=y_n(x)$ соответственно.

$$W[y_1,y_2,y_3...,y_n]_{x=x_0}=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) & ... & y_n''(x_0) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & y_3^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Так как определитель Вронского решений $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $y=y_3(x)$, …, $y=y_n(x)$ в точке $x_0\in I$ не равен нулю, то согласно свойству 3 определителя Вронского (пункт 3.4.4) решения $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $y=y_3(x)$, …, $y=y_n(x)$ будут линейно независимы на промежутке I. Таким образом, они будут образовывать фундаментальную систему решений.

Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательство данной теоремы показывает, как можно получить фундаментальную систему решений для любого линейного однородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами, но в общем случае соответствующие задачи Коши придется решать приближенными методами [19]. Таким образом, в общем виде не решен вопрос о получении фундаментальной системы решений в виде элементарных функций или хотя бы записать решения с помощью интегралов.

Для некоторых частных случаев можно получить фундаментальные системы в виде элементарных функций. Например, для любого линейного однородного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами (пункт 3.5).

Если известно любое ненулевое частное решение $y=y_1(x)$ линейного однородного ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами, то данное уравнение можно разрешить в квадратурах с помощью замены $y=zy_1$.

Действительно, рассмотрим линейное однородное ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0.$$

Используем замену $y = zy_1$. Найдем производные:

$$y' = z'y_1 + zy_1', \; y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''.$$

Подставим замену и ее производные в данное ОДУ:

$$z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' + a_1(x)(z'y_1 + zy_1') + a_0(x)zy_1 = 0,$$

$$z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' + a_1(x)z'y_1 + a_1(x)zy_1' + a_0(x)zy_1 = 0,$$

$$z''y_1 + 2z'y_1' + z(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + a_1(x)z'y_1 = 0. \qquad (5)$$

Так как $y = y_1(x)$ - решение линейного однородного ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

то тогда верно тождество

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0.$$

Таким образом, уравнение (5) примет вид

$$z''y_1 + 2z'y_1' + a_1(x)z'y_1 = 0, \; z''y_1 + (2y_1' + a_1(x)y_1)z' = 0.$$

Используя замену $u = z'$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$u'y_1 + (2y_1' + a_1(x)y_1)u = 0.$$

Задача. Найти общее решение линейного однородного ОДУ

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = 0,$$

зная его частное решение $y_1 = x^2$.

Решение.

Так как известно частное решение $y_1 = x^2$, то введем замену $y = zx^2$.

Тогда:

$$y' = z'x^2 + z \cdot 2x = z'x^2 + 2zx, \; y'' = z''x^2 + z' \cdot 2x + 2z'x + 2z = z''x^2 + 4z'x + 2z.$$

Подставим вторую производную в данное ОДУ:

$$z''x^2 + 4z'x + 2z - \frac{2}{x^2} zx^2 = 0, \; z''x^2 + 4z'x = 0.$$

Введем замену $u = z'$:

$$u'x^2 + 4ux = 0.$$

Полученное ОДУ является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим их:

$$\frac{du}{dx} x^2 + 4ux = 0, \; \frac{du}{dx} x + 4u = 0, \; \frac{du}{dx} x = -4u, \; \frac{du}{u} = -4\frac{dx}{x} \; (u \neq 0).$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его:

$$\int \frac{du}{u} = -4\int \frac{dx}{x}, \; \ln|u| = -4\ln|x| + \ln|C| \; (C \neq 0), \ln|u| = \ln x^{-4} + \ln|C| \; (C \neq 0),$$

$$\ln|u| = \ln\frac{|C|}{x^4} \ (C \neq 0), \ u = \frac{C}{x^4} \ (C \neq 0).$$

Потерянное при разделении переменных решение $u = 0$ входит в общее решение при $C = 0$.

Так как $u = z'$, то тогда

$$z = \int \frac{C}{x^4} dx = -\frac{C}{3x^3} + C_1 .$$

Отсюда будем иметь:

$$y = zx^2, \ y = \left(-\frac{C}{3x^3} + C_1\right)x^2 = -\frac{C}{3x} + C_1 x^2 .$$

Переобозначив произвольные постоянные, получим общее решение данного ОДУ

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 .$$

Замечание 2. С помощью данной замены можно решить в квадратурах и неоднородное ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами.

Замечание 3. С помощью данной замены можно понизить порядок любого линейного однородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами на единицу.

3.4.6 Решение линейного неоднородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных

Предположим, что нам требуется найти общее решение линейного неоднородного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \qquad (6)$$

Причем нам известна фундаментальная система решений $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, …, $y = y_n(x)$ соответствующего однородного ОДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad (7)$$

Как известно (пункт 3.4.3) общее решение однородного ОДУ имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Будем искать решение исходного неоднородного ОДУ (6) в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x). \qquad (8)$$

Здесь $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – неизвестные функции. Для их нахождения подставим предполагаемое решение (8) в исходное неоднородное уравнение (6). Для этого нам потребуется найти производные до порядка n включительно предполагаемого решения (8).

Найдем производную первого порядка:

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(C_i(x) y_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(C_i'(x) y_i(x) + C_i(x) y_i'(x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x).$$

Положив $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) = 0$, будем иметь

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x).$$

Найдем производную второго порядка:

$$y'' = \left(\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(C_i(x) y_i'(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(C_i'(x) y_i'(x) + C_i(x) y_i''(x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i''(x).$$

Положив $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) = 0$, будем иметь

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i''(x).$$

Продолжая процесс нахождения производных, получим производные

$$y^{(m)}=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i^{(m)}(x)\ (m=1,2,...,n-1).$$

При введенных дополнительных ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(m)}(x)=0\ (m=1,2,...,n-2).$$

Производную n-го порядка оставим в виде двух сумм

$$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i^{(n)}(x).$$

Подставим полученные производные в исходное неоднородное уравнение (6):

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i^{(n-1)}(x)+...+$$

$$+a_2(x)\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i''(x)+a_1(x)\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i'(x)+a_0(x)\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i(x)=f(x).$$

Внесем коэффициенты $a_i(x)$ под знаки сумм:

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n}a_{n-1}(x)C_i(x)y_i^{(n-1)}(x)+...+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}a_2(x)C_i(x)y_i''(x)+\sum_{i=1}^{n}a_1(x)C_i(x)y_i'(x)+\sum_{i=1}^{n}a_0(x)C_i(x)y_i(x)=f(x).$$

Объединим все суммы, начиная со второй, в одну сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \Big(C_i(x) y_i^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) C_i(x) y_i^{(n-1)}(x) + \ldots +$$

$$+ a_2(x) C_i(x) y_i''(x) + a_1(x) C_i(x) y_i'(x) + a_0(x) C_i(x) y_i(x) \Big) = f(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \Big(y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x) y_i(x) \Big) = f(x). \qquad (9)$$

Так как функции $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $\ldots$, $y = y_n(x)$ являются решениями однородного ОДУ (7), то тогда верны тождества

$$y_i^{(n)} + a_{n-1}(x) y_i^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) y_i(x) = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

При этом уравнение (9) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Объединив полученное уравнение с введенными ограничениями, получим систему уравнений для нахождения $C_i'(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) = 0, \\
\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0, \\
\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x).
\end{cases}
$$

Очевидно, что определителем полученной системы является определитель Вронского фундаментальной системы решений однородного ОДУ (7). Тогда, используя метод Крамера решения систем линейных уравнений, получим:

$$C_i'(x) = \frac{\Delta_i(x)}{W(x)} \; (i = 1, 2, \dots, n)$$

Определитель i-го неизвестного $\Delta_i(x)$ получается из определителя Вронского с помощью замены его i-го столбца на столбец свободных членов

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Задача. Найти общее решение линейного неоднородного ОДУ

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = \frac{1}{x},$$

зная его фундаментальную систему решений: $y_1 = x^2$, $y_2 = \dfrac{1}{x}$.

Решение.

Будем искать общее решение неоднородного ОДУ в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),\ y = C_1(x)x^2 + \frac{C_2(x)}{x}.$$

Для нахождения функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, составим и решим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \quad \begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2'(x)\dfrac{1}{x} = 0, \\ C_1'(x)2x + C_2'(x)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Крамера:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & \dfrac{1}{x} \\ 2x & -\dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -3 \neq 0,\ \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{x} & -\dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2},\ \Delta_2(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = x;$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1(x)}{W(x)} = \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{-3} = \frac{1}{3x^2},\ C_2'(x) = \frac{\Delta_2(x)}{W(x)} = \frac{x}{-3} = -\frac{x}{3}.$$

Найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

1) $C_1(x) = \int C_1'(x)dx = \int \dfrac{dx}{3x^2} = -\dfrac{1}{3x} + C_1$;

2) $C_2(x) = \int C_2'(x)dx = -\int \dfrac{xdx}{3} = -\dfrac{x^2}{6} + C_2$.

Тогда общее решение данного ОДУ имеет вид:

$$y = C_1(x)x^2 + \frac{C_2(x)}{x},\ y = \left(-\frac{1}{3x} + C_1\right)x^2 + \frac{-\frac{x^2}{6} + C_2}{x},$$

$$y = -\frac{x}{3} + C_1x^2 - \frac{x}{6} + \frac{C_2}{x},\ y = -\frac{x}{2} + C_1x^2 + \frac{C_2}{x}.$$

3.5 Линейное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

3.5.1 Основные определения

Определение. Линейным ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами будем называть уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x).$$

Здесь $a_i \in R$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ – известные числа, а $f(x)$ – известная функция, непрерывная на некотором промежутке I. Если на этом промежутке $f(x) \equiv 0$, то такое уравнение будем называть однородным, а в противном случае – неоднородным. Числа a_i $(i = 0, 1, ..., n-1)$ называются коэффициентами данного ОДУ.

Замечание. Так как линейное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами является частным случаем линейного ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами, то все свойства и методы, приведенные в пункте 3.4, без изменения переносятся на случай линейного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

3.5.2 Нахождение общего решения линейного однородного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Будем искать решение линейного однородного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{10}$$

в виде

$$y = e^{\lambda x},$$

где λ - пока неизвестное комплексное число.

Подставим предполагаемое решение в ОДУ (10):

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + a_2\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Разделим полученное уравнение на $e^{\lambda x} \neq 0$ $(\lambda \in C)$:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) называется характеристическим уравнение линейного ОДУ с постоянными коэффициентами (10).

Таким образом, функция $y = e^{\lambda x}$ является решением ОДУ (10) тогда и только тогда, когда λ будет являться корнем характеристического уравнения (11).

Характеристическое уравнение (11) является алгебраическим уравнением n-ой степени, а такие уравнения имеют ровно n комплексных корней с учетом кратности [24]. Учитывая, что все коэффициенты характеристического уравнения (11) являются действительными числами, получаем [24], что данное уравнение может иметь корни только следующих видов:

1) простые действительные корни;

2) кратные действительные корни;

3) простые комлексно-сопряженные корни;

4) кратные комлексно-сопряженные корни.

Если характеристическое уравнение (11) имеет только простые действительные корни: λ_1, λ_2, …, λ_n, то тогда ОДУ (1) имеет решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, …, $y_n = e^{\lambda_n x}$.

Покажем, что данные решения являются линейно независимыми на R. Для этого найдем для данной системы решений определитель Вронского:

$$W[y_1, y_2, y_3, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & e^{\lambda_3 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \left(e^{\lambda_1 x}\right)' & \left(e^{\lambda_2 x}\right)' & \left(e^{\lambda_3 x}\right)' & \dots & \left(e^{\lambda_n x}\right)' \\ \left(e^{\lambda_1 x}\right)'' & \left(e^{\lambda_2 x}\right)'' & \left(e^{\lambda_3 x}\right)'' & \dots & \left(e^{\lambda_n x}\right)'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(e^{\lambda_1 x}\right)^{(n-1)} & \left(e^{\lambda_2 x}\right)^{(n-1)} & \left(e^{\lambda_3 x}\right)^{(n-1)} & \dots & \left(e^{\lambda_n x}\right)^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & e^{\lambda_3 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3 e^{\lambda_3 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} & \dots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \lambda_3^{n-1} e^{\lambda_3 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$=e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x}e^{\lambda_3 x}\dots e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}=$$

Получили определитель Вандермонда [24]. Используя формулу для его нахождения, получим

$$=e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x}e^{\lambda_3 x}\dots e^{\lambda_n x}\prod_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\neq 0$$

Тогда решения $y_1=e^{\lambda_1 x}$, $y_2=e^{\lambda_2 x}$, …, $y_n=e^{\lambda_n x}$ являются линейно независимыми на R. Отсюда следует, что они образуют фундаментальную систему решений ОДУ (10).

Итак, если характеристическое уравнение (11) имеет только простые действительные корни: λ_1, λ_2, …, λ_n, то тогда общее решение ОДУ (10) имеет вид

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\dots+C_ne^{\lambda_n x}.$$

Таким образом, мы получили, что простой действительный корень λ характеристического уравнения (11) порождает решение $y=e^{\lambda x}$ ОДУ (10), входящее в его фундаментальную систему решений.

Рассмотрев случаи, когда характеристическое уравнение (11) имеет корни других типов, получим таблицу 1.

Таблица 1.

Корень характеристического уравнения	Решение(я) линейного однородного ОДУ, порождаемое(ые) этим корнем
Простой действительный корень λ	$y=e^{\lambda x}$
Действительный корень λ кратности m	$y_0=e^{\lambda x},\ y_1=xe^{\lambda x},\ y_2=x^2e^{\lambda x},\ldots,\ y_{m-1}=x^{m-1}e^{\lambda x}$
Простые комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$
Комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ кратности m	$y_{1,0}=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{1,1}=xe^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_{1,2}=x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ y_{1,m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$ $y_{2,0}=e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{2,1}=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{2,2}=x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,$ $\ldots,\ y_{2,m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Задача. Найти общее решение ОДУ

$$y^V+y'''-86y''+252y'-200y=0.$$

Решение.

Данное уравнение является линейным однородным ОДУ пятого порядка с постоянными коэффициентами.

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^5+\lambda^3-86\lambda^2+252\lambda-200=0.$$

Решим полученное уравнение. Найдем сначала его рациональные корни. Как известно, рациональные корни уравнения с целыми коэффициентами

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

могут быть только вида $\pm\dfrac{p}{q}$, где p - делитель свободного члена a_0, а q - делитель коэффициента a_n.

Тогда будем искать корни характеристического уравнения среди делителей 200. С помощью схемы Горнера [24] убеждаемся, что $\lambda = 2$ является корнем третьей кратности:

	1	0	1	-86	252	-200
2	1	2	5	-76	100	0
2	1	4	13	-50	0	
2	1	6	25	0		

Осталось решить квадратное уравнение

$$\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0 .$$

Оно имеет простые комплексно-сопряженные корни $\lambda = -3 \pm 4i$.

Действительный корень третьей кратности $\lambda = 2$ порождает три решения данного ОДУ: $y = e^{2x}$, $y = xe^{2x}$ и $y = x^2 e^{2x}$.

Простые комплексно-сопряженные корни $\lambda = -3 \pm 4i$ порождают два решения данного ОДУ: $y = e^{-3x} \cos 4x$ и $y = e^{-3x} \sin 4x$.

Полученные решения данного ОДУ образуют его фундаментальную систему решений.

Тогда общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x} + C_4 e^{-3x} \cos 4x + C_5 e^{-3x} \sin 4x,$$

$$y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) e^{2x} + e^{-3x}\left(C_4 \cos 4x + C_5 \sin 4x\right).$$

Задача. Свободные колебания пружинного маятника (пункт 1.1.1) описываются ОДУ

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0 .$$

Для случая, когда трение мало ($\alpha < \omega_0$) получить зависимость координаты центра груза маятника от времени, то есть функцию $x = x(t)$.

Решение.

Уравнение

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0$$

является линейным ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение при $\alpha < \omega_0$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \alpha^2\right)} =$$

$$= -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} .$$

Так как характеристическое уравнение имеет пару простых комплексно сопряженных корней, то общее решение данного ОДУ имеет вид

$$x = e^{-\alpha t}\left(C_1 \cos\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\, t + C_2 \sin\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\, t\right).$$

Случай $C_1 = C_2 = 0$ ($x(t) \equiv 0$) отвечает отсутствию колебаний маятника.

Пусть теперь хотя бы одна из произвольных постоянных отлична от 0. Преобразуем общее решение:

$$x = e^{-\alpha t}\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\; t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\; t\right).$$

Так как

$$\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right)^2 = 1,$$

то положим

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin\varphi_0, \quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos\varphi_0.$$

Тогда получим

$$x = e^{-\alpha t}\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\sin\varphi_0 \cos\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\; t + \cos\varphi_0 \sin\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\; t\right).$$

Введя обозначение $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A$ и используя формулу для синуса суммы, будем иметь

$$x = Ae^{-\alpha t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\; t + \varphi_0\right).$$

Здесь:

1) A – начальная амплитуда колебаний маятника;

2) φ_0 – начальная фаза;

3) ω_0 – циклическая частота колебаний, то есть число колебаний за 2π секунд.

В данном случае, имеем затухающие колебания (рисунок 1).

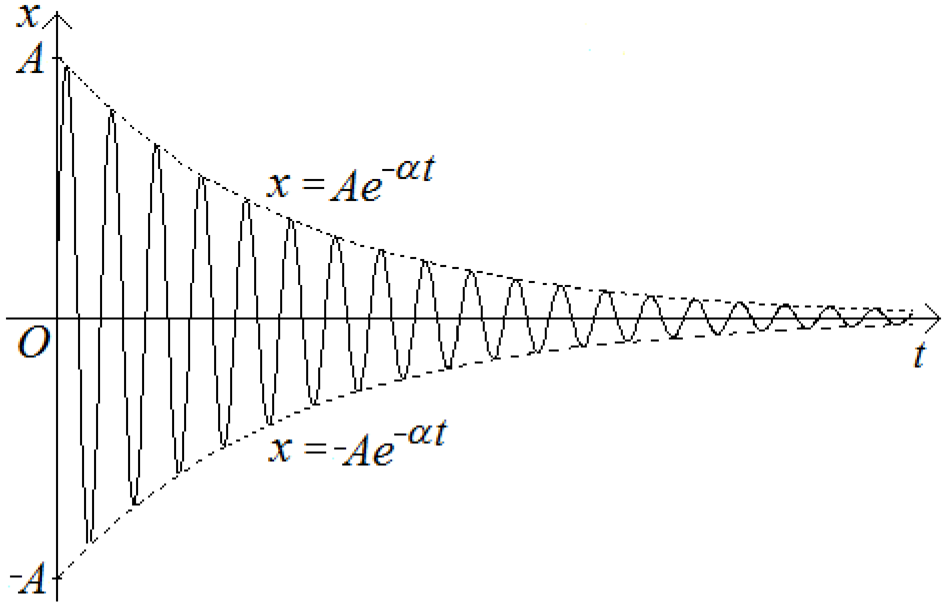

Рисунок 1

При отсутствии трения ($\alpha = 0$) будем иметь незатухающие колебания (рисунок 2)

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \text{ или } x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

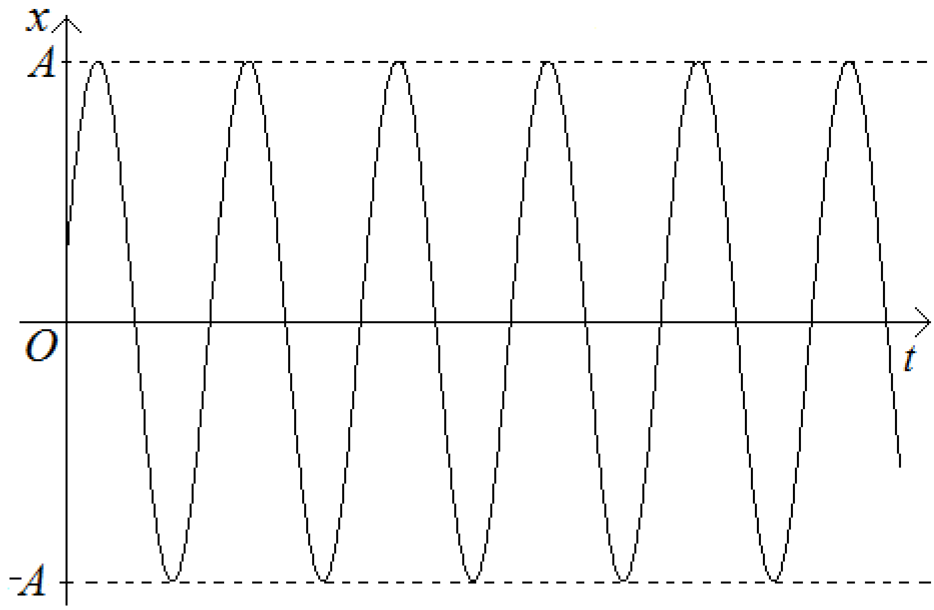

Рисунок 2

Следует отметить, что с помощью теории ОДУ был получен довольно неожиданный результат, что наличие трения уменьшает частоту колебаний маятника

$$\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}<\omega_0 .$$

3.5.3 Нахождение общего решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Так как линейное неоднородное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами является частным случаем линейного неоднородное ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами, то тогда для его решения можно применить метод вариации произвольных постоянных (пункт 3.4.6).

В некоторых частных случаях возможен метод неопределенных коэффициентов.

Определение. Функция вида

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_{k_1}(x)\cos\beta x+Q_{k_2}(x)\sin\beta x\right)$$

называется квазимногочленом. Здесь $P_{k_1}(x)$ – многочлен степени k_1, а $Q_{k_2}(x)$ – многочлен степени k_2.

В том случае, если в правой части линейного неоднородного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами находится квазимногочлен, то частное решение данного ОДУ следует искать в виде

$$y_{\text{ч}}=x^m e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right).$$

Здесь:

1) $m=0$, если $\alpha\pm i\beta$ - не являются корнями характеристического уравнения, а если $\alpha\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения, то m равняется кратности этого корня;

2) $k = \max\{k_1, k_2\}$;

3) $\widetilde{P}_k(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ - общий вид многочлена k-ой степени.

Практически удобнее пользоваться таблицей 2, содержащей различные частные случаи квазимногочлена.

Таблица 2

Правая часть ОДУ $f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$P_k(x)$	0 не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_k(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$
	0 является корнем характеристического уравнения кратности m	$x^m \widetilde{P}_k(x)$
$ce^{\alpha x}$	α не является корнем характеристического уравнения	$Ce^{a x}$
	α является корнем характеристического уравнения кратности m	$Cx^m e^{a x}$
$P_k(x)e^{\alpha x}$	α не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_k(x)e^{a x}$
	α является корнем характеристического уравнения кратности m	$x^m \widetilde{P}_k(x)e^{a x}$
$a\cos\beta x$, $b\sin\beta x$, $a\cos\beta x + b\sin\beta x$	$\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$
	$\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения кратности m	$x^m(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Продолжение таблицы 2

Правая часть ОДУ $f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$P_k(x)\cos\beta x$, $Q_k(x)\sin\beta x$, $P_{k_1}(x)\cos\beta x+Q_{k_2}(x)\sin\beta x$	$\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения	$\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x$ $k=\max\{k_1,k_2\}$
	$\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения кратности m	$x^m(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$ $k=\max\{k_1,k_2\}$
$e^{\alpha x}\left(P_{k_1}(x)\cos\beta x+Q_{k_2}(x)\sin\beta x\right)$	$\alpha\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right)$ $k=\max\{k_1,k_2\}$
	$\alpha\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности m	$x^m e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right)$ $k=\max\{k_1,k_2\}$

Для нахождения общего решения неоднородного ОДУ достаточно сложить любое частное решение неоднородного ОДУ и общее решение соответствующего однородного ОДУ (пункт 3.4.3).

Задача. Найти общее решение ОДУ

$$y''+y'-2y=\sin 3x\,.$$

Решение.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''+y'-2y=0\,.$$

Так как его характеристическое уравнение

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

имеет простые действительные корни $\lambda = -2$ и $\lambda = 1$, то тогда общее решение однородного ОДУ будет иметь вид

$$y_{\text{о}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}.$$

2. Найдем частное решение данного неоднородного ОДУ. Так как числа $\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение будем искать (таблица 2) в виде

$$y_{\text{ч}} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Подставим предполагаемое решение в данное неоднородное уравнение. Для этого найдем производные первого и второго порядка:

$$y'_{\text{ч}} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,\ y''_{\text{ч}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Получим

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x - 2(A\cos 3x + B\sin 3x) = \sin 3x,$$

$$(-11A + 3B)\cos 3x + (-3A - 11B)\sin 3x = \sin 3x.$$

Полученное равенство будет являться тождеством, если будут верны равенства

$$-11A + 3B = 0 \text{ и } -3A - 11B = 1.$$

Тогда будем иметь систему

$$\begin{cases} -11A + 3B = 0, \\ -3A - 11B = 1. \end{cases}$$

Решив которую, получим

$$A = -\frac{3}{130},\ B = -\frac{11}{130}.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y_ч = -\frac{3}{130}\cos 3x - \frac{11}{130}\sin 3x.$$

3. Запишем общее решение данного неоднородного ОДУ

$$y = y_о + y_ч,\ y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - \frac{3}{130}\cos 3x - \frac{11}{130}\sin 3x.$$

Замечание. При использовании таблицы 2 бывает полезен принцип суперпозиции (пункт 3.4.3). Если правая часть неоднородного ОДУ состоит из нескольких слагаемых, то мы можем для каждого слагаемого по таблице 2 подобрать соответствующее выражение, а затем полученные выражения сложить. В качестве примера решим следующую задачу.

Задача. Определить вид частного решения ОДУ

$$y'' + y' - 2y = 5e^{-2x} + 8\sin 3x.$$

Решение.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного ОДУ

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

имеет простые действительные корни $\lambda = -2$ и $\lambda = 1$.

Используя таблицу 2, получим, что первому слагаемому правой части данного неоднородного ОДУ $5e^{-2x}$ будет отвечать выражение Bxe^{-2x}, а второму слагаемому $8\sin 3x$ соответствует выражение $A\cos 3x + C\sin 3x$.

Таким образом, частное решение данного неоднородного ОДУ будем искать в виде

$$y_{ч} = Bxe^{-2x} + A\cos 3x + C\sin 3x.$$

Задача. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x'' + \omega_0^2 x = \sin \omega_0 t, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Замечание. Данная задача Коши имеет следующий физический смысл (пункт 1.1.1). Имеется пружинный маятник с пренебрегаемо малым трением. В начальный момент груз маятника покоится в положении равновесия. Определить закон движения груза (найти функцию $x = x(t)$), если на маятник действует внешняя сила, подчиняющаяся гармоническому закону $f(t) = \sin \omega_0 t$.

Решение.

1. Найдем общее решение однородного уравнения

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

имеет пару простых комплексно-сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$, то тогда общее решение однородного ОДУ будет иметь вид

$$x_{о} = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

2. Найдем частное решение неоднородного ОДУ

$$x'' + \omega_0^2 x = \sin \omega_0 t . \tag{12}$$

Так как числа $\pm \omega_0 i$ являются простыми корнями характеристического уравнения, то частное решение будем искать (таблица 2) в виде

$$x_{ч} = t(A\cos \omega_0 t + B\sin \omega_0 t).$$

Подставим предполагаемое решение в неоднородное уравнение (12). Для этого используем формулу для производной второго порядка произведения двух функций

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'' .$$

Тогда будем иметь

$$2(-A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 x) + t(-A\omega_0^2 \cos \omega_0 t - B\omega_0^2 \sin \omega_0 t) +$$

$$+\omega_0^2 t(A\cos \omega_0 t + B\sin \omega_0 t) = \sin \omega_0 t,\ -2A\omega_0 \sin \omega_0 t + 2B\omega_0 \cos \omega_0 t = \sin \omega_0 t .$$

Полученное равенство будет являться тождеством, если будут верны равенства

$$-2A\omega_0 = 1 \text{ и } 2B\omega_0 = 0 .$$

Тогда будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} -2A\omega_0 = 1, \\ 2B\omega_0 = 0. \end{cases}$$

Решив которую, получим

$$A = -\frac{1}{2\omega_0},\ B = 0 .$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (12) будет иметь вид

$$x_{\text{ч}} = -\frac{t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

3. Получим общее решение неоднородного ОДУ (12)

$$x = x_{\text{о}} + x_{\text{ч}},\ x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t - \frac{t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

4. Найдем решение данной задачи Коши, используя начальные условия.

Подставив в найденное общее решение неоднородного уравнения значение $t=0$, получим $x(0)=C_1$, а так как $x(0)=0$, то $C_1=0$.

Тогда

$$x = C_2\sin\omega_0 t - \frac{t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Для применения начального условия $x'(0)=0$ найдем производную

$$x' = C_2\omega_0\cos\omega_0 t - \frac{1}{2\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{t}{2\omega_0}\omega_0\cos\omega_0 t.$$

Отсюда $x'(0)=C_2\omega_0$, а так как $x'(0)=0$, то $C_2=0$.

Тогда решение задачи Коши имеет вид

$$x = -\frac{t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

График полученного решения приведен на рисунке 3

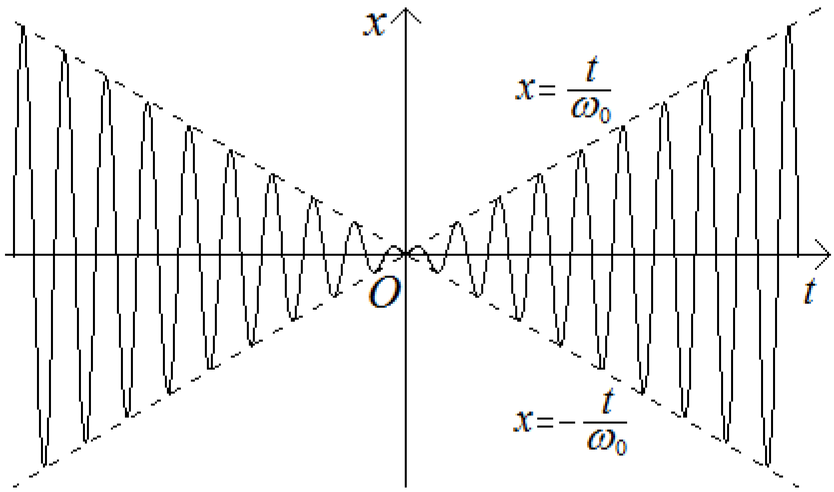

Рисунок 3

Следует заметить, что решение задачи Коши при $t < 0$ не имеет физического смысла.

В рассматриваемом случае амплитуда колебаний маятника неограниченно возрастает с течением времени. Здесь наблюдается явление резонанса [16].

Определение. Резкое возрастание амплитуды вынужденных механических колебаний при приближении частоты возмущающей силы к некоторому значению (частоте резонанса) называется явлением механического резонанса.

В реальных системах амплитуда колебаний не может неограниченно расти, так как всегда имеется сила трения и конструктивные особенности системы. Например, для пружинного маятника (пункт 1.1.1) невозможен уже в силу наличия крепления пружины к вертикальной стенке.

3.6 Применение справочников по ОДУ для решения уравнений n-го порядка

Рассмотренными в пункте 3 типами ОДУ не исчерпываются виды дифференциальных уравнений, допускающие решение в квадратурах. С помощью справочных изданий (например, [21-23]) можно попытаться определить тип данного

ОДУ и найти метод его решения. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача. Найти общее решение ОДУ $xy'' + 2y' + 4xy = 0$.

Решение.

Данное ОДУ не относится ни к одному из типов, рассмотренных в пункте 3, поэтому используем, например, раздел «Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка» справочника [21]. В нем (п. 2.101) можно найти ОДУ вида

$$xy'' + 2y' + axy = 0.$$

Очевидно, что заданное ОДУ относится к этому типу. Воспользуемся приведенным решением таких уравнений.

Введем замену $u(x) = xy$. Тогда $u'' = 2y' + xy''$.

Получаем линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$u'' + 4u = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет пару простых комплексно-сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, то (пункт 3.5.2) его общее решение имеет вид

$$u = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Вернувшись к старой переменной, получим общее решение данного ОДУ

$$y = \frac{C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}{x}.$$

4 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1 Основные определения

Определение. Системой ОДУ первого порядка называется система вида

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь y_1, y_2, …, y_n - неизвестные функции, а x - их аргумент.

Определение. Совокупность n функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x), \\ y_2 = \varphi_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x) \end{cases}$$

будем называть решением системы ОДУ (1) на промежутке I, если при подстановке данных функций систему (1), каждое из ОДУ этой системы обращается в верное тождество на промежутке I.

Замечание. Решение

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x), \\ y_2 = \varphi_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x) \end{cases} \quad (x \in I)$$

можно трактовать как кривую в пространстве R^{n+1}. Ее будем называть интегральной кривой данной системы ОДУ.

Замечание. ОДУ n-го порядка сводится к системе из n ОДУ первого порядка.

Задача. Свести ОДУ

$$y''' - xy'(y'')^2 = \frac{y''}{x}$$

к системе ОДУ первого порядка.

Решение.

Введя дополнительные неизвестные функции $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, получим искомую систему ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' - xy_1y_2^2 = \dfrac{y_2}{x}. \end{cases}$$

Задача. Свести ОДУ второго порядка, описывающее свободные колебания пружинного маятника (пункт 3.5.2), если пренебречь силой трения

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

к системе ОДУ первого порядка.

Решение.

Введя дополнительную неизвестную функцию $v = x'$. Введенная функция выражает зависимость проекции скорости маятника от времени (пункт 1.1.1).

Тогда получим искомую систему ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -\omega_0^2 x. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно общее решение ОДУ (2) имеет вид (пункт 3.5.2)

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t .$$

Тогда

$$v = x' = \left(C_1 \cos \omega_0\, t + C_2 \sin\, \omega_0\, t\right)' = -C_1\omega_0 \sin\, \omega_0 t + C_2\omega_0 \cos \omega_0 t\,.$$

Отсюда получаем, что любое решение данной системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin\, \omega_0 t, \\ v = -C_1\omega_0 \sin\, \omega_0 t + C_2\omega_0 \cos \omega_0 t. \end{cases}$$

Здесь C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Определение. Решение системы ОДУ вида

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}$$

будем называть общим решением данной системы.

Общее решение системы из n ОДУ первого порядка зависит ровно от n произвольных постоянных.

Определение. Если мы вместо произвольных постоянных подставим конкретные числа, то мы получим частное решение данной системы.

Замечание. Система, состоящая из ОДУ произвольного порядка, сводится к системе ОДУ первого порядка. Число уравнений в полученной системе ОДУ первого порядка будет равняться сумме порядков ОДУ, входящих в исходную систему.

Задача. Свести систему ОДУ

$$\begin{cases} (y'')^2 + 3xyz = 0, \\ z''' + 2zy' = 4x^3 \end{cases}$$

к системе ОДУ первого порядка.

Решение.

Введя дополнительные неизвестные функции $y_1 = y'$, $z_1 = z'$, $z_2 = z''$, получим искомую систему ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ (y_1')^2 + 3xyz = 0, \\ z' = z_1, \\ z_1' = z_2, \\ z_2' + 2zy_1 = 4x^3. \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только системы, состоящие из ОДУ первого порядка, разрешенные относительно производных.

Определение. Нормальной системой ОДУ первого порядка называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{4}$$

С целью упрощения обозначений, в дальнейшем будем использовать векторные функции:

$$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(x, \bar{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда нормальная система ОДУ первого порядка (4) будет нами обозначаться в векторном виде

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}).$$

Определение. Нормальная система, все правые части которой явно не зависят от независимой переменной, называется автономной.

Она имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$ или в векторной форме: $\bar{y}' = \bar{f}(\bar{y})$.

Работа устройств, свойства которых не зависят от времени, описывается автономными системами уравнений. Например, система (3), описывающая свободные колебания пружинного маятника, если пренебречь силой трения, является автономной.

4.2 Задача Коши для системы ОДУ n-го порядка

Нам уже известно, что ОДУ (2) имеет бесконечно много решений. Отсюда следует, что бесконечно много решений имеет и система ОДУ (3). Из физического смысла данной системы следует, что для выделения одного решения, описывающего реальный физический процесс колебаний нам достаточно двух условий: начальной координаты $x(t_0) = x_0$ и начальной скорости $v(t_0) = v_0$.

В общем случае, так как система из n ОДУ первого порядка имеет общее решение, имеющее n произвольных постоянных, то для получения одного решения достаточно задать n ограничений: значения всех функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, …, $y = y_n(x)$ в некоторой точке $x = x_0$.

Определение. Задачей Коши для системы (4) называется задача вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_1(x_0) = y_1^0, \\ y_2(x_0) = y_2^0, \\ .... \\ y_n(x_0) = y_n^0, \end{cases} \text{ или в векторной форме: } \begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}), \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0, \end{cases} \qquad (5)$$

состоящая из системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \text{ или в векторной форме: } \bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y})$$

и так называемых начальных условий $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0, \ldots$, $y_1(x_0) = y_n^0$ (начальные условия в векторной форме: $\bar{y}(x_0) = \bar{y}^0$). Здесь x_0, y_1^0, y_2^0, …, y_n^0 - конкретные действительные числа.

Решить задачу Коши (5) означает: найти решение (решения) системы ОДУ $\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y})$, удовлетворяющее (удовлетворяющие) начальному условию $\bar{y}(x_0) = \bar{y}^0$.

Задача Коши (5) имеет следующий геометрический смысл: требуется найти интегральную кривую системы ОДУ $\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y})$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы ОДУ первого порядка. Пусть задача Коши

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_1(x_0) = y_1^0, \\ y_2(x_0) = y_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = y_n^0, \end{cases}$$

удовлетворяет требованиям:

1) функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ непрерывны в некоторой области $G \subset R^{n+1}$; область G содержит точку $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$;

2) частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ ограничены в области G.

Тогда в некоторой окрестности точки $x = x_0$ будет существовать **единственное** решение $\bar{y} = \bar{y}(x)$ данной задачи Коши.

Геометрически это означает, что в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ через нее проходит единственная интегральная кривая данной системы ОДУ.

4.3 Некоторые методы решения систем ОДУ первого порядка

4.3.1 Метод интегрируемых комбинаций

Пусть нам дана система ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Предположим, что с помощью некоторых преобразований из данной системы можно получить ОДУ

$$F(x,u,u')=0. \tag{6}$$

Здесь $u=u(y_1,y_2,...,y_n)$ - некоторая функция от неизвестных функций y_1, y_2, …, y_n.

ОДУ (6) будем называть интегрируемой комбинацией.

Предположим, что мы найдем общий интеграл ОДУ (6). Он будет представлять собой уравнение вида

$$G(x,u,C)=0 \text{ или } H(x,y_1,y_2,...,y_n,C)=0.$$

Если получить n подобных уравнений, то из них иногда можно найти общее решение данной системы.

Задача. Найти общее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = y_1^2 + y_2^2, \\ y_2' = 2y_1y_2. \end{cases}$$

Решение.

Сложив оба ОДУ системы, получим:

$$y_1' + y_2' = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2,\ (y_1+y_2)' = (y_1+y_2)^2.$$

Введем обозначение $u = y_1 + y_2$. Получим ОДУ

$$u' = u^2.$$

Это уравнение является ОДУ с разделяющимися переменными (пункт 2.4.1). Его общее решение имеет вид

$$u = -\frac{1}{x + C_1}, \; y_1 + y_2 = -\frac{1}{x + C_1}.$$

Теперь вычтем из первого ОДУ данной системы ее второе ОДУ. Будем иметь:

$$y_1' - y_2' = y_1^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2, \; (y_1 - y_2)' = (y_1 - y_2)^2.$$

Введем обозначение $v = y_1 - y_2$. Получим ОДУ

$$v' = v^2.$$

Полученное уравнение является ОДУ с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид

$$v = -\frac{1}{x + C_2}, \; y_1 - y_2 = -\frac{1}{x + C_2}.$$

Таким образом, получили систему

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\dfrac{1}{x + C_1}, \\ y_1 - y_2 = -\dfrac{1}{x + C_2}. \end{cases}$$

Сложив оба уравнения, получим:

$$2y_1 = -\left(\frac{1}{x+C_1} + \frac{1}{x+C_2}\right),\; y_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+C_1} + \frac{1}{x+C_2}\right).$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим:

$$2y_2 = \frac{1}{x+C_2} - \frac{1}{x+C_1},\; y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+C_2} - \frac{1}{x+C_1}\right).$$

Общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+C_1} + \dfrac{1}{x+C_2}\right), \\ y_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+C_2} - \dfrac{1}{x+C_1}\right). \end{cases}$$

4.3.2 Метод исключения

Пусть нам дана система ОДУ. Уменьшить число уравнений в системе на единицу можно, выполнив два пункта:

1) выразить из какого-нибудь уравнения системы одну из неизвестных функций через оставшиеся неизвестные функции и их производные;

2) подставим полученное выражение во все оставшиеся уравнения системы.

Последовательно уменьшая число уравнений в системе, мы получим одно ОДУ.

Задача. Найти общее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Решение.

Выразим из первого уравнения системы неизвестную функцию y_2:

$$y_2 = y_1' - 2y_1.$$

Подставим найденное выражение во второе уравнение системы:

$$(y_1' - 2y_1)' = y_1 + 2(y_1' - 2y_1),\ y_1'' - 2y_1' = y_1' + 2y_1' - 4y_1,\ y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0.$$

Получили одно линейное однородное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Из этого уравнения можно найти неизвестную функцию y_1.

Так как характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

имеет два действительных простых корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$, то общее решение полученного уравнения имеет вид

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Найдем неизвестную функцию y_2:

$$y_2 = y_1' - 2y_1,\ y_2 = \left(C_1 e^x + C_2 e^{3x}\right)' - 2\left(C_1 e^x + C_2 e^{3x}\right),$$

$$y_2 = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} - 2C_1 e^x - 2C_2 e^{3x},\ y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}, \\ y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{cases}$$

4.3.3 Метод ломанных Эйлера

В пункте 2.3.3 была рассмотрена возможность применения приближенного метода ломанных Эйлера к решению задач Коши для ОДУ первого порядка. Данный метод аналогично можно применять к решению задач Коши для систем ОДУ первого порядка и к решению задач Коши для ОДУ n-го порядка.

В целях упрощения обозначений будем рассматривать систему, состоящую из двух ОДУ; случай произвольного количества уравнений совершенно аналогичен.

Пусть нам дана задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z), \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0, \end{cases}$$

удовлетворяющая всем условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для систем ОДУ первого порядка.

Пусть, нам требуется получить ее приближенное решение в виде таблицы 1.

Таблица 1

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n	$\dots$
z	z_0	z_1	z_2	$\dots$	z_n	$\dots$

Данный метод заключается в заполнении таблицы по реккурентным формулам:

$$x_{n+1} = x_n + h \ \ (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n, z_n\right) \ (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$z_{n+1} = z_n + hg\left(x_n, y_n, z_n\right) \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Значения x_0, y_0 и z_0 берутся из начальных условий $y(x_0) = y_0$ и $z(x_0) = z_0$ данной задачи Коши.

Для применения метода ломанных к решению задачи Коши для ОДУ n-го порядка следует предварительно ее свести к задаче Коши для системы ОДУ первого порядка. В качестве примера получим приближенное решение задачи Коши для ОДУ второго порядка.

Задача. Получить приближенное решение задачи Коши

$$\begin{cases} 2x^2 y'' + xy' + y = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 0{,}5 \end{cases}$$

при $x \in [1; 2]$ методом ломанных Эйлера, взяв значение шага $h = 0{,}1$.

Решение.

Сведем данную задачу Коши к задаче Коши для системы ОДУ первого порядка.

Преобразуем ОДУ:

$$2x^2 y'' - xy' + y = 0, \ y'' - \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{2x^2} y = 0.$$

Введем новую неизвестную функцию $z = y'$. Тогда получим:

$$z' - \frac{z}{2x} + \frac{y}{2x^2} = 0, \; z' = \frac{z}{2x} - \frac{y}{2x^2}.$$

Отсюда имеем задачу Коши

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \dfrac{z}{2x} - \dfrac{y}{2x^2}, \\ y(1) = 1, \\ z(1) = 0{,}5. \end{cases}$$

Полученная задача Коши удовлетворяет всем условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для системы ОДУ первого порядка (пункт 4.2).

Применим метод ломанных Эйлера.

Из начального условия задачи Коши имеем $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0{,}5$, а остальные значения приближенного решения найдем по реккурентным формулам:

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}1 \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}1 z_n \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

$$z_{n+1} = z_n + 0{,}1\left(\frac{z_n}{2x_n} - \frac{y_n}{2x_n^2} \right) \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Полученные данные приведем в таблице 2. Кроме того, в той же таблице приведем значения для точного решения данной задачи Коши – функции $y^{\text{точн}} = \sqrt{x}$.

Таблица 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_n	1	1,0500	1,0975	1,1428	1,1862	1,2279	1,2681	1,3068	1,3443	1,3806	1,4159
z_n	0,5	0,4750	0,4532	0,4340	0,4169	0,4015	0,3876	0,3749	0,3633	0,3527	0,3429
$y_n^{\text{точн}}$	1	1,0488	1,0954	1,1402	1,1832	1,2247	1,2649	1,3038	1,3416	1,3784	1,4142

Сравнив третью и последнюю строки таблицы, можно сделать вывод, что с помощью метода ломанных Эйлера в данном случае получено приближенное решение данной задачи Коши с максимальной относительной погрешностью менее 0,26%, то есть с вполне достаточной точностью для большинства практических приложений. Если же точность результата недостаточна, то следует уменьшить шаг h или применять более точные методы [19] приближенного решения систем дифференциальных уравнений.

4.4 Линейные системы ОДУ с переменными коэффициентами

4.4.1 Основные определения

Определение. Линейной системой ОДУ с переменными коэффициентами будем называть систему вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $y = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ - неизвестные функции, а $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ и $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ - известные функции, непрерывные на некотором промежутке I. Функции $a_{ij}(x)$ в дальнейшем будем называть коэффициентами системы (7), а функции $f_i(x)$ - ее свободными членами.

Если на промежутке I все свободные члены системы (7) тождественно равны нулю, то такую систему будем называть однородной, а в противном случае – неоднородной.

Линейную систему ОДУ с переменными коэффициентами (7) можно записать в матричной форме

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x).$$

Здесь:

1) $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец (вектор) неизвестных функций;

2) $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы;

3) $\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ - матрица-столбец (вектор) свободных членов.

4.4.2 Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами

Пусть в задаче Коши для линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} \bar{y}' = A(x)y + \bar{f}(x), \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0 \end{cases}$$

функции $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2,..., n)$ и $f_i(x)$ $(i = 1, 2,..., n)$ являются непрерывными на некотором промежутке I, содержащем точку x_0.

Тогда данная задача Коши на всем промежутке I будет иметь единственное решение.

4.4.3 Свойства решений линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами

Свойства решений линейных систем ОДУ с переменными коэффициентами аналогичны соответствующим свойствам решений линейных ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами (пункт 3.4.3). Сформулируем их.

1. Пусть векторные функции $\bar{y}^1$ и $\bar{y}^2$ - решения однородной системы, то тогда и $\bar{y}^1 + \bar{y}^2$ также будет являться решением однородной системы.

2. Пусть векторная функция $\bar{y}$ - решение однородной системы, то тогда и $C\bar{y}$ также будет являться решением однородной системы.

3. Пусть $\bar{y}^1$ – решение неоднородной системы $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x)$, а $\bar{y}^2$ – решение соответствующей однородной системы $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$, то тогда $\bar{y}^1 + \bar{y}^2$ будет являться решением неоднородной системы $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x)$.

4. Пусть $\bar{y}^1$ – решение неоднородной системы $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}_1(x)$, а $\bar{y}^2$ – решение неоднородной системы $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}_2(x)$, то $\bar{y}^1 + \bar{y}^2$ будет являться решением неоднородной системы $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x)$.

Доказательство данных свойств аналогичны соответствующим доказательствам для линейных ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами (пункт 3.4.3).

Как и в случае линейных ОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами, общие решения линейных систем ОДУ с переменными коэффициентами имеют вполне определенную структуру. Можно доказать, что структура общего решения однородной линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами имеет вид

$$\bar{y} = C_1\bar{y}^1 + C_2\bar{y}^2 + \ldots + C_n\bar{y}^n,$$

а структура общего решения неоднородной линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами имеет вид

$$\bar{y} = \bar{y}^0 + C_1\bar{y}^1 + C_2\bar{y}^2 + \ldots + C_n\bar{y}^n.$$

Здесь $\bar{y}^1$, $\bar{y}^2,\ldots,$ $\bar{y}^n$ - линейно независимые решения однородной системы ОДУ $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$, а $\bar{y}^0$ - любое решение неоднородной системы ОДУ $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x)$.

Определение. Векторные функции $\bar{y}^1$, $\bar{y}^2,\ldots,$ $\bar{y}^n$ называются линейно зависимыми на промежутке I, если существуют такие постоянные α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ (числа α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ не все равны нулю), что

$$\alpha_1\bar{y}^1 + \alpha_2\bar{y}^2 + \ldots + \alpha_n\bar{y}^n = \bar{0} \ \ (x \in I).$$

В противном случае – линейно независимыми.

Определение. Если векторные функции $\bar{y}^1$, $\bar{y}^2,\ldots,$ $\bar{y}^n$ являются линейно независимыми решениями однородной линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами, то их будем называть фундаментальной системой решений данной системы ОДУ.

Количество функций в фундаментальной системе решений равно числу уравнений в системе.

Отсюда следует, что для получения общих решений однородных и неоднородных линейных систем ОДУ с переменными коэффициентами нам требуется критерий линейной независимости системы векторных функций (пункт 4.4.4).

4.4.4. Определитель Вронского

Определение. Определителем Вронского системы векторных функций

$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ \dots \\ y_n^1 \end{pmatrix}, \ \bar{y}^2 = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ \dots \\ y_n^2 \end{pmatrix}, \dots, \ \bar{y}^n = \begin{pmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ \dots \\ y_n^n \end{pmatrix}$$

будем называть определитель вида

$$W\left[\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^n\right] = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^n \end{vmatrix}.$$

Свойства (и их доказательства) определителя Вронского для векторных функций аналогичны свойствам определителя Вронского для скалярных функций (пункт 3.4.4).

1. Пусть векторные функции $\bar{y}^1, \ \bar{y}^2, \dots, \ \bar{y}^n$ являются линейно зависимыми на промежутке I. Тогда их определитель Вронского будет на промежутке I тождественно равен нулю.

2. Пусть векторные функции $\bar{y}^1, \ \bar{y}^2, \dots, \ \bar{y}^n$ являются решениями некоторой однородной линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами на

промежутке I. Если хотя бы в одной точке $x_0 \in I$ их определитель Вронского равен 0, то тогда функции $\bar{y}^1,\ \bar{y}^2,\ldots,\ \bar{y}^n$ будут являться линейно зависимыми на промежутке I, и на этом промежутке их определитель Вронского будет тождественно равен нулю.

3. Пусть векторные функции $\bar{y}^1,\ \bar{y}^2,\ldots,\ \bar{y}^n$ являются решениями некоторой однородной линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами на промежутке I. Если хотя бы в одной точке $x_0 \in I$ их определитель Вронского не равен 0, то тогда функции $\bar{y}^1,\ \bar{y}^2,\ldots,\ \bar{y}^n$ будут являться линейно независимыми на промежутке I, и на этом промежутке их определитель Вронского будет всюду отличен от нуля.

Задача. Доказать линейную независимость векторных функций

$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix} \text{ и } \bar{y}^2 = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

на всей числовой оси.

Решение.

Составим и преобразуем определитель Вронского для данной системы векторных функций

$$W\left[\bar{y}^1, \bar{y}^2\right] = \begin{vmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = e^x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = e^x.$$

Так как при всех $x \in R$ выполняется $W\left[\bar{y}^1, \bar{y}^2\right] = e^x \neq 0$, то тогда данные векторные функции являются линейно независимыми на всей числовой оси.

4.4.5 Фундаментальная система решений

Теорема. Для любой однородной системы линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами существует фундаментальная система решений.

Доказательство данной теоремы полностью аналогично доказательству теоремы из пункта 3.4.5.

4.4.6 Решение неоднородной линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных

Пусть для неоднородной линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x) \tag{8}$$

известна заданная на промежутке I фундаментальная система решений

$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ \dots \\ y_n^1 \end{pmatrix},\ \bar{y}^2 = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ \dots \\ y_n^2 \end{pmatrix}, \dots,\ \bar{y}^n = \begin{pmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ \dots \\ y_n^n \end{pmatrix}$$

соответствующей однородной системы

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y}\,. \tag{9}$$

Определение. Матрица, составленная из векторов-столбцов фундаментальной системы решений

$$
Y(x)=\begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^n \end{pmatrix},
$$

называется фундаментальной матрицей решений линейной однородной системы (9).

Так как столбцы данной матрицы являются решениями однородной системы (9), то тогда из определения произведения матриц следует тождество

$$
Y'(x)=A(x)Y(x). \tag{10}
$$

верное на промежутке I.

Будем искать решение данной линейной неоднородной системы (8) в виде

$$
\bar{y}=Y(x)\overline{C}(x). \tag{11}
$$

Здесь $\overline{C}(x)=\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ \dots \\ C_n(x) \end{pmatrix}$ - неизвестная векторная функция. Для ее нахождения, подставим предполагаемое решение (11) в данную неоднородную систему (8):

$$
\left(Y(x)\overline{C}(x)\right)'=A(x)\left(Y(x)\overline{C}(x)\right)+\bar{f}(x).
$$

Используем формулу для производной произведения матриц [25]

$$
(UV)'=U'V+UV'
$$

и ассоциативность умножения матриц

$$(AB)C = A(BC).$$

Тогда получим:

$$Y'(x)\overline{C}(x) + Y(x)\overline{C}'(x) = (A(x)Y(x))\overline{C}(x) + \bar{f}(x).$$

Используя (10), будем иметь:

$$Y'(x)\overline{C}(x) + Y(x)\overline{C}'(x) = Y'(x)\overline{C}(x) + \bar{f}(x),$$

$$Y(x)\overline{C}'(x) = \bar{f}(x) \qquad (12)$$

Так как определитель матрицы $Y(x)$ является определителем Вронского фундаментальной системы решений, заданной на промежутке I, то тогда матрица $Y(x)$ является невырожденной на промежутке I. Отсюда следует, что всюду на этом промежутке существует обратная матрица $Y^{-1}(x)$.

Умножив равенство (12) слева на $Y^{-1}(x)$, получим:

$$Y^{-1}(x)Y(x)\overline{C}'(x) = Y^{-1}(x)\bar{f}(x), \ \overline{C}'(x) = Y^{-1}(x)\bar{f}(x).$$

Тогда

$$\overline{C}(x) = \int Y^{-1}(x)\bar{f}(x)dx + \overline{C}.$$

Здесь $\overline{C}$ - столбец произвольных постоянных.

Подставив найденный результат в (11), получим общее решение неоднородной системы (8)

$$\bar{y} = Y(x)\left(\int Y^{-1}(x)\bar{f}(x)dx + \overline{C}\right).$$

Решением задачи Коши

$$\begin{cases} \bar{y}' = A(x)y + \bar{f}(x), \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0 \end{cases}$$

будет являться векторная функция

$$\bar{y} = Y(x)\left(\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau)d\tau + Y^{-1}(x_0)\bar{y}^0\right).$$

Задача. Найти общее решение линейной неоднородной системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - 1, \\ y_2' = \dfrac{4}{x^2}y_1 - \dfrac{1}{x}y_2 - \dfrac{2}{x}, \end{cases}$$

зная, что соответствующая однородная система имеет фундаментальную систему решений

$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix},\ \bar{y}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x^2} \\ -\dfrac{2}{x^3} \end{pmatrix}.$$

Решение.

Используем формулу для общего решения неоднородной линейной системы с переменными коэффициентами

$$\bar{y} = Y(x)\left(\int Y^{-1}(x)\bar{f}(x)dx + \overline{C}\right).$$

В данном случае:

1) $Y(x)=\begin{pmatrix} x^2 & \dfrac{1}{x^2} \\ 2x & -\dfrac{2}{x^3} \end{pmatrix}$ - фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы;

2) $\bar{f}(x)=\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{2}{x} \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов.

Найдем подынтегральную функцию, используя методы линейной алгебры для нахождения обратной матрицы и произведения матриц или компьютерные математические пакеты:

$$Y^{-1}(x)\bar{f}(x)=\begin{pmatrix} x^2 & \dfrac{1}{x^2} \\ 2x & -\dfrac{2}{x^3} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{2}{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\int Y^{-1}(x)\bar{f}(x)dx=\begin{pmatrix} \int\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)dx \\ \int 0dx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x}+C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем общее решение данной системы:

$$\bar{y}=\begin{pmatrix} x^2 & \dfrac{1}{x^2} \\ 2x & -\dfrac{2}{x^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x}+C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+C_1x^2+\dfrac{C_2}{x^2} \\ 2+2C_2x-\dfrac{2C_2}{x^3} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = x + C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x^2}, \\ y_2 = 2 + 2C_1 x - \dfrac{2C_2}{x^3}. \end{cases}$$

Задача. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - 1, \\ y_2' = \dfrac{4}{x^2} y_1 - \dfrac{1}{x} y_2 - \dfrac{2}{x}, \\ y_1(1) = 2, \\ y_2(1) = 4, \end{cases}$$

зная, что соответствующая однородная система имеет фундаментальную систему решений

$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}, \ \bar{y}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x^2} \\ -\dfrac{2}{x^3} \end{pmatrix}.$$

Решение.

Используем формулу для решения задачи Коши для неоднородной линейной системы с переменными коэффициентами

$$\bar{y} = Y(x)\left(\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\tau) \bar{f}(\tau) d\tau + Y^{-1}(x_0) \bar{y}^0 \right).$$

В данном случае:

1) $Y(x)=\begin{pmatrix} x^2 & \dfrac{1}{x^2} \\ 2x & -\dfrac{2}{x^3} \end{pmatrix}$ - фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы;

2) $\bar{f}(x)=\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{2}{x} \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов,

3) $x_0 = 1,\ \bar{y}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ - данные из начальных условий.

Найдем подынтегральную функцию, используя методы линейной алгебры для нахождения обратной матрицы и произведения матриц или компьютерные математические пакеты:

$$Y^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau)=\begin{pmatrix} \tau^2 & \dfrac{1}{\tau^2} \\ 2\tau & -\dfrac{2}{\tau^3} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{2}{\tau} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\tau^2} & \dfrac{1}{4\tau} \\ \dfrac{\tau^2}{2} & -\dfrac{\tau^3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{2}{\tau} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\tau^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\int_1^x Y^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau)d\tau=\begin{pmatrix} \displaystyle\int_1^x\left(-\dfrac{1}{\tau^2}\right)d\tau \\ \displaystyle\int_1^x 0\,d\tau \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x}-1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$Y^{-1}(x_0)\bar{y}^0=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получим решение задачи Коши:

$$\bar{y}=\begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{x^2} \\ 2x & -\frac{2}{x^3} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{x}-1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right),\ \bar{y}=\begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{x^2} \\ 2x & -\frac{2}{x^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{x}+1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{y}=\begin{pmatrix} x+x^2 \\ 2+2x \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение данной задачи Коши имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = x^2 + x, \\ y_2 = 2x + 2. \end{cases}$$

4.5 Линейные системы ОДУ с постоянными коэффициентами

4.5.1 Основные определения

Определение. Линейной системой ОДУ с постоянными коэффициентами будем называть систему вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $y = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ - неизвестные функции, a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ - известные действительные числа, а $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ - известные функции, непрерывные на некотором промежутке I. Числа a_{ij} в дальнейшем будем называть коэффициентами системы (13), а функции $f_i(x)$ - ее свободными членами.

Если на промежутке I все свободные члены системы (13) тождественно равны нулю, то такую систему будем называть однородной, а в противном случае – неоднородной.

Линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами (13) можно записать в матричной форме

$$\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{f}(x).$$

Здесь:

1) $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец (вектор) неизвестных функций;

2) $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы;

3) $\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ - матрица-столбец (вектор) свободных членов.

Замечание. Так как линейная система ОДУ с постоянными коэффициентами является частным случаем линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами, то все свойства и методы, приведенные в пункте 4.4, без изменения переносятся на случай линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами.

4.5.2 Нахождение общего решения однородной линейной ОДУ с постоянными коэффициентами

Пусть нам дана однородная линейная система ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\bar{y}' = A\bar{y}. \tag{14}$$

Будем искать ее решение в виде

$$\bar{y} = \bar{a}e^{\lambda x}.$$

Здесь:

1) $\bar{a}$ - неизвестный ненулевой n-мерный вектор с постоянными координатами;

2) λ - неизвестное комплексное число.

Подставим предполагаемое решение в данную однородную систему:

$$\left(\bar{a}e^{\lambda x}\right)' = A\left(\bar{a}e^{\lambda x}\right),\ \bar{a}e^{\lambda x}\lambda = e^{\lambda x}A\bar{a},\ \bar{a}\lambda = A\bar{a},\ A\bar{a} = \lambda\bar{a}.$$

Мы получили, что λ является собственным значением [24] матрицы A, а вектор $\bar{a}$ -это собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ. Как известно из линейной алгебры [24], собственный значения матрицы A можно найти, решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

Характеристическое уравнение (15) является алгебраическим уравнением n-ой степени, а такие уравнения имеют ровно n комплексных корней с учетом кратности [24]. Учитывая, что все коэффициенты характеристического уравнения (15) являются действительными числами, получаем [24], что данное уравнение может иметь корни только следующих видов:

1) простые действительные корни;

2) кратные действительные корни;

3) простые комлексно-сопряженные корни;

4) кратные комлексно-сопряженные корни.

Если характеристическое уравнение (15) имеет только простые действительные корни: λ_1, λ_2, …, λ_n, то тогда каждому из этих собственных значений будет отвечать единственный собственный вектор $\bar{a}^1$, $\bar{a}^2$, …, $\bar{a}^n$ [24]. В этом случае однородная линейная система ОДУ (14) будет иметь решения $\bar{y}^1 = \bar{a}^1 e^{\lambda_1 x}$, $\bar{y}^2 = \bar{a}^2 e^{\lambda_2 x}$, …, $\bar{y}^n = \bar{a}^n e^{\lambda_n x}$.

Покажем, что данные решения являются линейно независимыми на R. Для этого найдем для данной системы решений определитель Вронского:

$$W\left[\bar{y}^1, \bar{y}^2, ..., \bar{y}^n\right] = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & ... & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & ... & y_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ y_n^1 & y_n^2 & ... & y_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 e^{\lambda_1 x} & a_1^2 e^{\lambda_2 x} & ... & a_1^n e^{\lambda_n x} \\ a_2^1 e^{\lambda_1 x} & a_2^2 e^{\lambda_2 x} & ... & a_2^n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n^1 e^{\lambda_1 x} & a_n^2 e^{\lambda_2 x} & ... & a_n^n e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} ... e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & ... & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & ... & a_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n^1 & a_n^2 & ... & a_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Полученное произведение отлично от нуля, так как:

1) при всех $z \in C$ выполняется $e^z \neq 0$;

2) собственные вектора $\bar{a}^1$, $\bar{a}^2$, …, $\bar{a}^n$ отвечают различным собственным значениям, тогда они образуют линейно независимую систему векторов [24], и тогда

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & ... & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & ... & a_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n^1 & a_n^2 & ... & a_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как определитель Вронского системы решений $\bar{y}^1 = \bar{a}^1 e^{\lambda_1 x}$, $\bar{y}^2 = \bar{a}^2 e^{\lambda_2 x}$, …, $\bar{y}^n = \bar{a}^n e^{\lambda_n x}$ отличен от нуля, данная система решений является фундаментальной системой решений однородной системы (14) всюду на R.

Итак, если характеристическое уравнение (15) имеет только простые действительные корни: λ_1, λ_2, …, λ_n, то тогда общее решение однородной системы (14) имеет вид

$$\bar{y} = C_1 \bar{a}^1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \bar{a}^2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \bar{a}^n e^{\lambda_n x}.$$

Задача. Найти общее решение однородной линейной системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Решение.

Найдем собственные значения и отвечающие им собственные вектора матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (2-\lambda)^2 - 1 = 0, \ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

имеет два простых действительных корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$.

Найдем собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$, найдя любое ненулевое решение системы уравнений

$$A\bar{a}=\lambda\bar{a}\,,\ A\bar{a}=\bar{a}\,,\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix},\ \begin{cases}2a_1+a_2=a_1,\\ a_1+2a_2=a_2,\end{cases}\ a_1+a_2=0\,.$$

Отсюда следует, что в качестве собственного вектора можно взять вектор

$$\bar{a}^1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2=3$, найдя любое ненулевое решение системы уравнений

$$A\bar{a}=\lambda\bar{a}\,,\ A\bar{a}=3\bar{a}\,,\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix},\ \begin{cases}2a_1+a_2=3a_1,\\ a_1+2a_2=3a_2,\end{cases}\ a_1=a_2\,.$$

Отсюда следует, что в качестве собственного вектора можно взять вектор

$$\bar{a}^2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение данной однородной системы

$$\bar{y}=C_1\bar{a}^1e^{\lambda_1 x}+C_2\bar{a}^2e^{\lambda_2 x}\,,\ \bar{y}=C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^x+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{3x},\ \begin{cases}y_1=C_1e^x+C_2e^{3x},\\ y_2=-C_1e^x+C_2e^{3x}.\end{cases}$$

Случаи, когда характеристическое уравнение (15) имеет кратные действительные или комплексно-сопряженные простые корни, рассмотрим на конкретных примерах.

Задача. Найти общее решение однородной линейной системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Решение.

Найдем собственные значения и отвечающие им собственные вектора матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,\ (3-\lambda)(1-\lambda) - 1\cdot(-1) = 0\,,\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0\,.$$

имеет один действительный корень $\lambda = 2$ второй кратности.

Замечание. Как и в случае линейных ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами, если имеется корень характеристического уравнения кратности m, то появляются дополнительные слагаемые с множителями x, x^2, …, x^{m-1}.

Отсюда следует, что общее решение данной однородной линейной системы ОДУ следует искать в виде

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} C_1 x + C_2 \\ C_3 x + C_4 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Это решение содержит четыре произвольные постоянные, а общее решение данной системы ОДУ должно содержать две произвольные постоянные. Отсюда следует, что какие-то две произвольные постоянные, должны выражаться через оставшиеся произвольные постоянные.

Подставим предполагаемое решение

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 x + C_2)e^{2x}, \\ y_2 = (C_3 x + C_4)e^{2x} \end{cases}$$

в данную систему ОДУ:

$$\begin{cases} \left((C_1x+C_2)e^{2x}\right)' = 3(C_1x+C_2)e^{2x} - (C_3x+C_4)e^{2x}, \\ \left((C_3x+C_4)e^{2x}\right)' = (C_1x+C_2)e^{2x} + (C_3x+C_4)e^{2x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1e^{2x} + 2(C_1x+C_2)e^{2x} = 3(C_1x+C_2)e^{2x} - (C_3x+C_4)e^{2x}, \\ C_3e^{2x} + 2(C_3x+C_4)e^{2x} = (C_1x+C_2)e^{2x} + (C_3x+C_4)e^{2x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + 2(C_1x+C_2) = 3(C_1x+C_2) - (C_3x+C_4), \\ C_3 + 2(C_3x+C_4) = C_1x+C_2+C_3x+C_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C_1x + C_1 + 2C_2 = (3C_1 - C_3)x + 3C_2 - C_4, \\ 2C_3x + C_3 + 2C_4 = (C_1 + C_3)x + C_2 + C_4; \end{cases}$$

Так как оба уравнения в полученной системе должны быть тождествами при $x \in R$, то приравняем коэффициенты при x и приравняем свободные члены.

$$\begin{cases} 2C_1 = 3C_1 - C_3, \\ C_1 + 2C_2 = 3C_2 - C_4, \\ 2C_3 = C_1 + C_3, \\ C_3 + 2C_4 = C_2 + C_4; \end{cases} \begin{cases} C_1 = C_3, \\ C_1 = C_2 - C_4, \\ C_3 = C_1, \\ C_3 + C_4 = C_2; \end{cases} \begin{cases} C_1 = C_3, \\ C_1 = C_2 - C_4, \\ C_3 = C_1, \\ C_3 + C_4 = C_2; \end{cases} \begin{cases} C_3 = C_1, \\ C_1 = C_2 - C_4, \\ C_3 + C_4 = C_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_3 = C_1, \\ C_1 = C_2 - C_4, \\ C_1 + C_4 = C_2; \end{cases} \begin{cases} C_3 = C_1, \\ C_1 = C_2 - C_4, \\ C_1 = C_2 - C_4; \end{cases} \begin{cases} C_3 = C_1, \\ C_1 = C_2 - C_4; \end{cases} \begin{cases} C_3 = C_1, \\ C_4 = C_2 - C_1. \end{cases}$$

Тогда общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 x + C_2)e^{2x}, \\ y_2 = (C_1 x - C_1 + C_2)e^{2x}. \end{cases}$$

Задача. Найти общее решение однородной линейной системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2, \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Решение.

Найдем собственные значения и отвечающие им собственные вектора матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (4-\lambda)(2-\lambda) - (-1)5 = 0,\ \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0.$$

имеет два простых комплексно-сопряженных $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$.

Найдем собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 3 + 2i$, найдя любое ненулевое решение системы уравнений

$$A\overline{a} = \lambda\overline{a},\ A\overline{a} = (3+2i)\overline{a},\ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (3+2i)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \begin{cases} 4a_1 - a_2 = (3+2i)a_1, \\ 5a_1 + 2a_2 = (3+2i)a_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_2 = (-1+2i)a_1, \\ 5a_1 = (1+2i)a_2, \end{cases} \begin{cases} a_2 = (1-2i)a_1, \\ a_2 = \dfrac{5}{1+2i}a_1, \end{cases} a_2 = (1-2i)a_1.$$

Отсюда следует, что решением данной системы является векторная функция

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)x}.$$

Преобразуем найденное решение:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{3x+2xi}, \ \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x),$$

$$\bar{y} = e^{3x}\begin{pmatrix} \cos 2x + i\sin 2x \\ (1-2i)(\cos 2x + i\sin 2x) \end{pmatrix}, \ \bar{y} = e^{3x}\begin{pmatrix} \cos 2x + i\sin 2x \\ \cos 2x + i\sin 2x - 2i\cos 2x + 2\sin 2x \end{pmatrix},$$

$$\bar{y} = e^{3x}\begin{pmatrix} \cos 2x + i\sin 2x \\ \cos 2x + 2\sin 2x + i(\sin 2x - 2\cos 2x) \end{pmatrix},$$

$$\bar{y} = e^{3x}\begin{pmatrix} \cos 2x \\ \cos 2x + 2\sin 2x \end{pmatrix} + ie^{3x}\begin{pmatrix} \sin 2x \\ \sin 2x - 2\cos 2x \end{pmatrix}.$$

Как и в случае однородных линейных ОДУ n-го порядка решением данной системы будет и действительная, и мнимая части полученного решения. Кроме того, эти решения будут линейно независимыми.

Таким образом, общее решение данной однородной системы

$$\bar{y} = C_1 e^{3x}\begin{pmatrix} \cos 2x \\ \cos 2x + 2\sin 2x \end{pmatrix} + C_2 e^{3x}\begin{pmatrix} \sin 2x \\ \sin 2x - 2\cos 2x \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} y_1 = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x), \\ y_2 = e^{3x}(C_1(\cos 2x + 2\sin 2x) + C_2(\sin 2x - 2\cos 2x)). \end{cases}$$

4.5.3 Нахождение общего решения неоднородной линейной ОДУ с постоянными коэффициентами

Так как неоднородное линейная система ОДУ с постоянными коэффициентами является частным случаем неоднородной линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами, то тогда для ее решения можно применить метод вариации произвольных постоянных (пункт 4.5.2).

Если все свободные члены неоднородной системы являются квазимногочленами (пункт 3.5.3), то тогда применим метод неопределенных коэффициентов. Данный метод для неоднородных линейных систем с постоянными коэффициентами применяется аналогично случаю неоднородных линейных ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами (пункт 3.5.3).

Задача. Найти общее решение неоднородной линейной системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + x, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Решение.

1. Найдем общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Данная задача уже решена в пункте 4.5.2.

Характеристическое уравнение в данном случае имеет два простых действительных корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$.

Общее решение однородной системы

$$\begin{cases} y_1^{\text{одн}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}, \\ y_2^{\text{одн}} = -C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}. \end{cases}$$

2. Найдем частное решение данной неоднородной системы. В данном случае свободные члены системы имеют вид $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 0$. Подберем общий вид частного решения, используя таблицу 2 в пункте 3.5.3.

Свободный член $f_1(x) = x$ является многочленом первой степени. Так как 0 не является корнем характеристического уравнения, то в частное решение будет содержать слагаемые вида $Ax + B$.

Таким образом, частное решение данной неоднородной системы будем искать в виде

$$\begin{cases} y_1^{\text{ч}} = Ax + B, \\ y_2^{\text{ч}} = Cx + D. \end{cases}$$

Подставим предполагаемое решение в данную неоднородную систему:

$$\begin{cases} (Ax + B)' = 2(Ax + B) + Cx + D + x, \\ (Cx + D)' = Ax + B + 2(Cx + D), \end{cases} \quad \begin{cases} A = (2A + C + 1)x + 2B + D, \\ C = (A + 2C)x + B + 2D. \end{cases}$$

Приравняв соответствующие коэффициенты, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2A + C + 1 = 0, \\ A = 2B + D, \\ A + 2C = 0, \\ C = B + 2D, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{2}{3}, \\ B = -\dfrac{5}{9}, \\ C = \dfrac{1}{3}, \\ D = \dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

Тогда частное решение данной неоднородной системы

$$\begin{cases} y_1^{\text{ч}} = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{9}, \\ y_2^{\text{ч}} = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

3. Общее решение данной неоднородной системы имеет вид (пункт 4.4.3)

$$\bar{y} = \bar{y}^{\text{ч}} + \bar{y}^{\text{одн}}$$

Тогда искомое общее решение

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{9} + C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}, \\ y_2 = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{9} - C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}. \end{cases}$$

5 Элементы теории устойчивости

5.1 Понятие о приложениях теории устойчивости

Теория устойчивости решений ОДУ и их систем чрезвычайно широкий спектр естественнонаучных и технических приложений [26]. С помощью данного раздела теории ОДУ выясняются условия устойчивости:

1) численности биологических популяций;

2) орбит искусственных спутников;

3) работы генераторов на нелинейных элементах (транзисторах, туннельных диодах, неоновых лампах и т.д.);

4) систем с гироскопами;

5) самолета с автопилотом;

6) работы двигателей с центробежными регуляторами;

7) вихревых структур в аэродинамике и т.д.

Для того, чтобы раскрыть практическое значение устойчивости (и неустойчивости) решений ОДУ рассмотрим вопрос, связанный динамикой изменения запасов рыбы в водоеме.

Пусть функция $u = u(t)$ выражает зависимость запасов рыбы в водоеме от времени. Можно показать, что в условиях реального водоема функция $u = u(t)$ является решением ОДУ

$$u' = (\alpha - \beta u)u.$$

Здесь α и β - некоторые постоянные, зависящие от вида рыбы и условий в водоеме. Приняв для простоты, что $\alpha = \beta = 1$, получим ОДУ

$$u' = (1 - u)u. \tag{1}$$

Очевидно, что данное ОДУ имеет стационарное решение $u = 1$. Ему соответствует случай, когда количество рыбы в водоеме не меняется.

Рассмотрим случай, когда $u > 1$. Тогда правая часть ОДУ (1) будет отрицательной, что влечет $u' < 0$ и убывание функции $u = u(t)$. Получаем, что выше прямой $u = 1$ все расположенные там интегральные кривые будут являться графиками убывающих функций (рисунок 1).

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < u < 1$. Тогда правая часть ОДУ (1) будет положительной, что влечет $u' > 0$ и возрастание функции $u = u(t)$. Получаем, что в полосе $0 < u < 1$ все расположенные там интегральные кривые будут являться графиками возрастающих функций (рисунок 1).

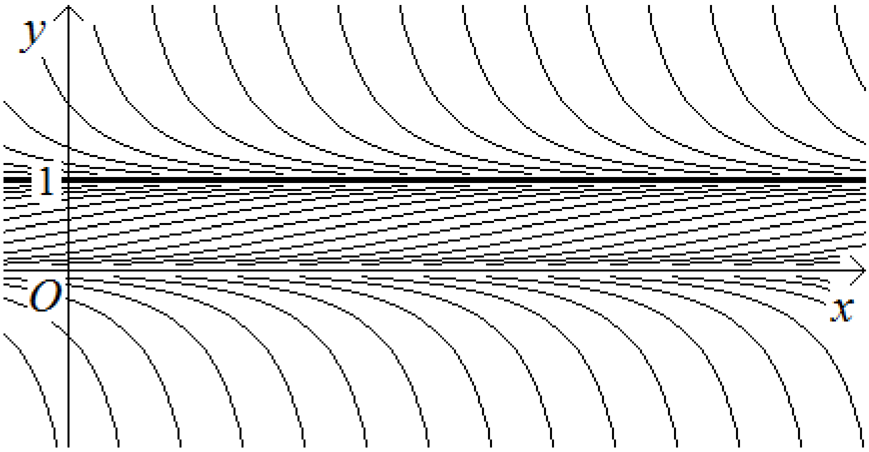

Рисунок 1

Рассмотрим стационарное решение $u = 1$. Если по каким-то причинам рыбы станет больше (миграция рыбы из соседнего водоема), то в этом случае количество рыбы будет убывать со временем, стремясь к 1, а если рыбы станет меньше 1 (замор рыбы в результате болезни), то затем запасы рыбы начнут возрастать, опять стремясь к 1. Таким образом, решение $u = 1$ проявляет устойчивость: случайные отклонения запасов рыбы от 1 со временем быстро исчезают.

Теперь рассмотрим динамику запасов рыбы в условиях ее отлова. Очевидно, следует подобрать квоты на вылов таким образом, чтобы при максимально возможных квотах запасы рыбы были стабильными.

Рассмотрим случай фиксированных квот: каждый год (месяц и т.д.) вылавливаются одинаковые объемы рыбы.

Тогда получим ОДУ

$$u' = (1-u)u - k. \tag{2}$$

Максимальное значение квоты равняется $k = \frac{1}{4}$. Если квоту увеличить, то правая часть уравнения (2) всегда будет отрицательной и функция $u = u(t)$ будет убывающей, что соответствует постоянному сокращению рыбных запасов.

При $k = \frac{1}{4}$ имеем ОДУ

$$u' = (1-u)u - \frac{1}{4},\ u' = -\left(u - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Очевидно, что данное ОДУ имеет стационарное решение $u = \frac{1}{2}$. Ему соответствует случай, когда количество рыбы в водоеме не меняется (рисунок 2).

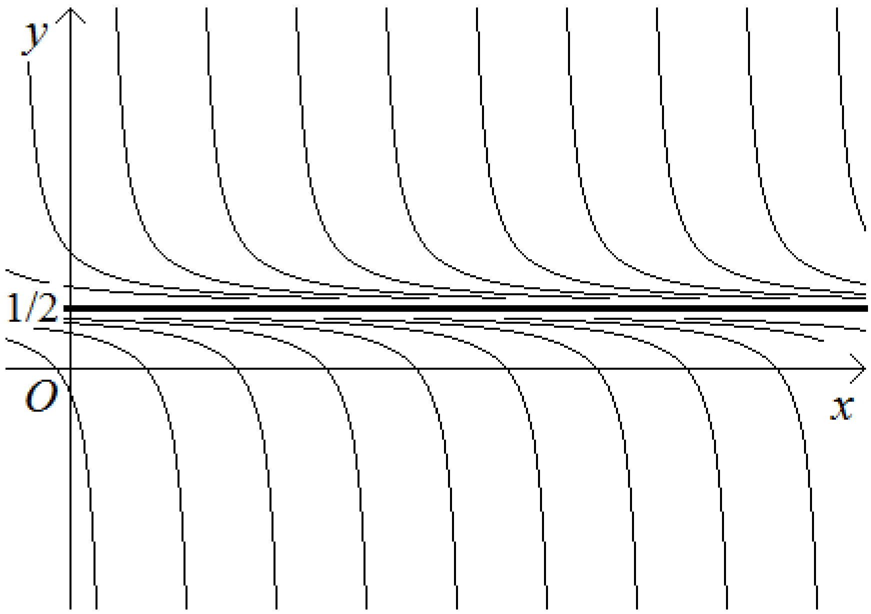

Рисунок 2

Рассмотрим это стационарное решение. Если по каким-то причинам рыбы станет меньше, то затем запасы рыбы начнут быстро убывать и вся рыба вымрет за конечное время (рисунок 2). Таким образом, решение $u = \frac{1}{2}$ не является устойчивым, и использование фиксированной квоты $k = \frac{1}{4}$ из-за случайных отклонений быстро приведет к уничтожению рыбных запасов.

Если производить отлов с пропорциональной квотой $k = \frac{1}{2}u$ (в год отлавливается постоянная доля рыбных запасов), то можно при тех же (в среднем) объемах вылова добиться стабильности рыбных запасов.

Тогда получим ОДУ

$$u' = (1-u)u - \frac{1}{2}u\,,\; u' = \left(\frac{1}{2} - u\right)u\,.$$

Ему отвечает семейство интегральных линий, представленное на рисунке 3.

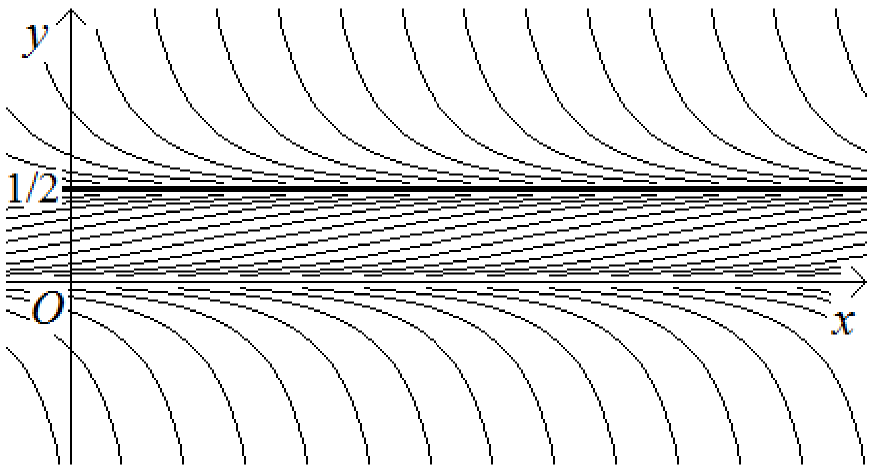

Рисунок 3

Очевидно, стационарное решение $u = \frac{1}{2}$ является устойчивым и ему отвечает среднегодовая квота $k = \frac{1}{4}$.

Таким образом, изменив только способ отлова рыбы, мы добились стабильности рыбных запасов при неуменьшении среднегодовых объемов вылова рыбы.

5.2 Основные определения

Пусть нам даны две векторные функции

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \text{ и } \bar{x} = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix}.$$

Будем трактовать эти вектора, как радиусы векторы точек $M(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$ и $N(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$. Зафиксируем t, положив $t = \hat{t}$. Тогда мы получим фиксированные точки, расстояние между которыми равно

$$\sqrt{(\varphi_1(\hat{t}) - \psi_1(\hat{t}))^2 + (\varphi_2(\hat{t}) - \psi_2(\hat{t}))^2 + (\varphi_3(\hat{t}) - \psi_3(\hat{t}))^2}.$$

Эту величину будем называть расстоянием между векторными функциями

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \text{ и } \bar{x} = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix}$$

при $t = \hat{t}$.

Аналогично можно ввести понятие расстояние между векторными функциями произвольной размерности.

Так как теория устойчивости применяется к исследованию поведения различных систем, то независимую переменную t будем интерпретировать как время.

Определение. Расстоянием между векторными функциями $\bar{x}=\bar{\varphi}(t)$ и $\bar{x}=\bar{\psi}(t)$ в момент времени $t=\hat{t}$ будем называть величину

$$\left\|\bar{\varphi}(\hat{t})-\bar{\psi}(\hat{t})\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(\hat{t})-\psi_i(\hat{t})\right)^2}\ .$$

Определение. Решение $\bar{x}=\bar{\varphi}(t)$ системы ОДУ

$$\bar{x}'=\bar{f}(t,\bar{x}), \tag{3}$$

удовлетворяющее начальному условию $\bar{x}(t_0)=\bar{x}^0$ и определенное на промежутке $[t_0,+\infty)$, называется устойчивым по Ляпунову[1], если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любого решения $\bar{x}=\bar{\psi}(t)$ системы (3), удовлетворяющего условию $\left\|\bar{\psi}(t_0)-\bar{\varphi}(t_0)\right\|<\delta(\varepsilon)$, выполняется $\left\|\bar{\psi}(t)-\bar{\varphi}(t)\right\|<\varepsilon$ при $t>t_0$.

Определение. Решение $\bar{x}=\bar{\psi}(t)$ называется возмущенным решением.

Для данного определения можно дать следующую геометрическую интерпретацию: решение $\bar{x}=\bar{\varphi}(t)$ (выделено синим) называется устойчивым, если какое бы малое $\varepsilon>0$ мы бы не взяли, всегда можно указать настолько малую окрестность (она выделена зеленым) точки $\bar{x}^0$, что все возмущенные решения $\bar{x}=\bar{\psi}(t)$ (одно такое решение выделено красным), начинающиеся в этой окрестности всегда находятся внутри «трубки» радиуса ε вокруг решения $\bar{x}=\bar{\varphi}(t)$.

[1] А.М. Ляпунов (1857-1918) – выдающийся русский математик.

Другими словами, решение $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ системы ОДУ является устойчивым, если при достаточно малых изменениях начального условия, все возмущенные решения всегда при $t > t_0$ «находятся вблизи» решения $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$.

Определение. Решение $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ автономной системы (3) называется асимптотически устойчивым, если оно является устойчивым по Ляпунову и выполняется дополнительное условие

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| \overline{\psi}(t) - \overline{\varphi}(t) \right\| = 0 . \tag{4}$$

Геометрическая интерпретация асимптотической устойчивости представлена на рисунке 5. При стремлении $t \to +\infty$ все возмущенные решения $\overline{x} = \overline{\psi}(t)$ (одно такое решение выделено красным) будут «сливаться» с асимптотически устойчивым решением $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ (выделено синим).

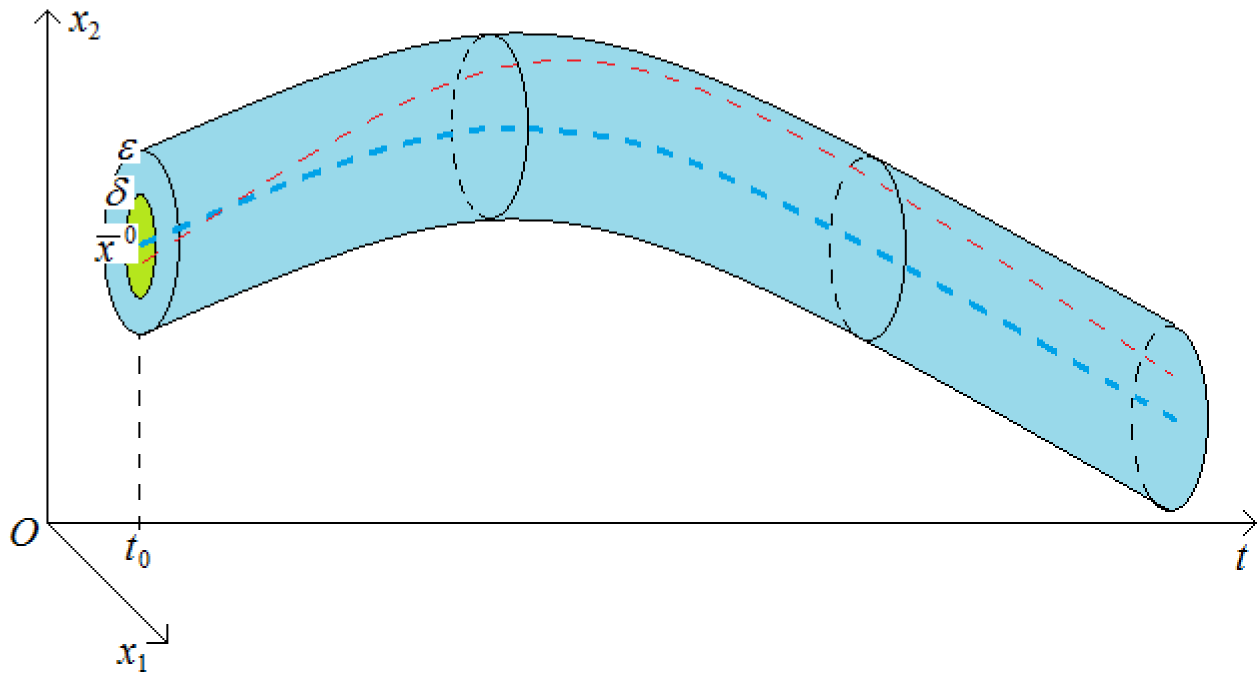

Рисунок 4

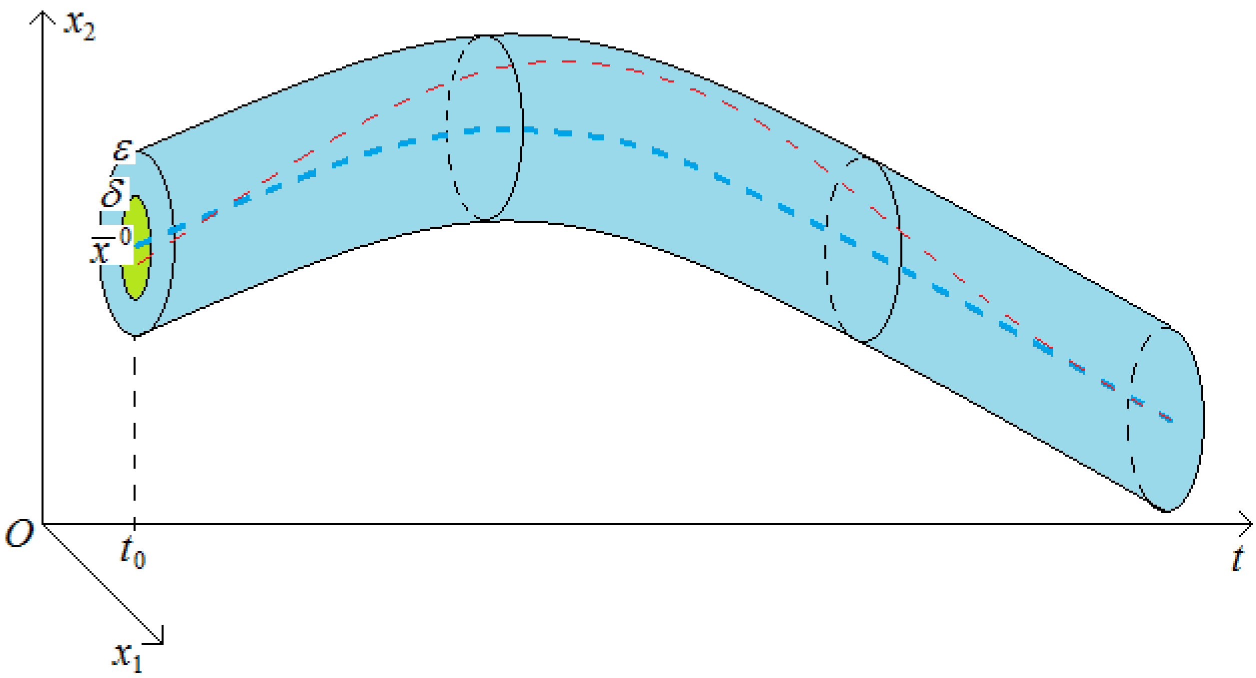

Рисунок 5

Замечание. Из выполнимости только условия (4) не следует устойчивость решения по Ляпунову. Существуют примеры [26], когда условие (4) выполняется, но решение $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ не является устойчивым.

Вводится также понятие устойчивости (асимптотической устойчивости) и для одного ОДУ n-го порядка.

Определение. Решение ОДУ n-го порядка

$$x^{(n)} = f\left(t, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right)$$

называется устойчивым (асимптотически устойчивым), если устойчивым (асимптотически устойчивым) является соответствующее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} x' = x_1, \\ x_1' = x_2, \\ \quad \ldots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = f(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \end{cases}$$

5.3 Устойчивость решений линейных систем ОДУ с постоянными коэффициентами

Пусть нам дана линейная система ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{f}(t) \tag{5}$$

Рассмотрим ее решение $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$, определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$.

Определим условия, при которых данное решение является устойчивым (асимптотически устойчивым) или неустойчивым.

Как известно (пункт 4.4.3) любое возмущенное решение (частное решение) системы (5) в данном случае можно записать в виде

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\varphi}(t) + C_1\bar{x}^1(t) + C_2\bar{x}^2(t) + \ldots + C_n\bar{x}^n(t). \tag{6}$$

Здесь $\bar{x}^1(t)$, $\bar{x}^2(t), \ldots,$ $\bar{x}^n(t)$ - фундаментальная система решений соответствующей однородной системы, а C_1, C_2, …, C_n - фиксированный набор произвольных постоянных.

Решение $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ будет устойчивым тогда и только тогда, когда все векторные функции $\bar{x} = \bar{x}^i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будут ограниченными на промежутке $[t_0, +\infty)$. В этом случае возмущенное решение $\bar{x} = \bar{\psi}(t)$ не будет «дальше уходить» от исходного решения $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ ростом t. Если же дополнительно потребовать, чтобы $\lim\limits_{t\to+\infty} \bar{x}^i(t) = \bar{0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то из (6) будет следовать

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| \bar{\psi}(t) - \bar{\varphi}(t) \right\| = 0,$$

и решение $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ будет асимптотически устойчивым.

Замечание. Так как для выяснения устойчивости решений системы (5) мы вообще не рассматривали $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$, то все решения линейной системы (5) и все решения соответствующей однородной системы одновременно устойчивы (асимптотически устойчивы) или неустойчивы. Отсюда следует, что достаточно исследовать на устойчивость нулевое решение соответствующей однородной системы.

Из пункта 4.5.2 следует, что компоненты векторных функций $\bar{x} = \bar{x}^i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ состоят только из слагаемых вида

$$h(t) = e^{\alpha t}\left(P_k(t)\cos \beta t + Q_m(t)\sin \beta t\right). \qquad (7)$$

Здесь $P_k(t)$ и $Q_m(t)$ - многочлены степени k и m соответственно.

Слагаемое (7) отвечает корню $\lambda = \alpha + \beta i$ кратности $p \geq \max\{k, m\}$ характеристического уравнения (пункт 4.5.2).

Если $\alpha > 0$, то слагаемое (7) будет неограниченным на промежутке $[t_0, +\infty)$.

Если $\alpha < 0$, то тогда $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 0$, так как в данном случае показательная функция будет убывать быстрее, чем будут расти многочлены $P_k(t)$ и $Q_m(t)$ при любых k и m.

Тогда:

1) если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то тогда все решения системы (5) будут асимптотически устойчивыми;

2) если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то тогда все решения системы (5) будут неустойчивыми.

В оставшихся случаях следует исследовать решения системы (5) на устойчивость по общему решению этой системы: если все слагаемые будут ограниченными на промежутке вида $[t_0,+\infty]$, то решение будет устойчивым, а если будет хотя бы одно неограниченное слагаемое, то неустойчивым.

Задача. Исследовать решения системы ОДУ

$$\begin{cases} x' = 2x + 5y + t^2, \\ y' = -5x - 6y - \sin t \end{cases}$$

на устойчивость.

Решение.

В данном случае имеем неоднородную линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами. Нам достаточно рассмотреть только нулевое решение соответствующей однородной системы ОДУ

$$\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = -5x - 6y. \end{cases}$$

Решим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -5 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (2-\lambda)(-6-\lambda) - 5(-5) = 0,\ \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0,\ \lambda_{1,2} = -2 \pm 3i\,.$$

Так как действительные части всех полученных корней отрицательны, то все решения данной системы являются асимптотически устойчивыми.

Задача. Исследовать решения системы ОДУ

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

на устойчивость.

Решение.

В данном случае имеем однородную линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами.

Решим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 2 = 0,\ \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,\ \left[\begin{array}{l} \lambda = -1, \\ \lambda = 3. \end{array}\right.$$

Так как имеется положительный корень, то все решения данной системы являются неустойчивыми.

Задача. Исследовать решения системы ОДУ

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = 0 \end{cases}$$

на устойчивость.

Решение.

В данном случае имеем однородную линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами. Нам достаточно рассмотреть только нулевое решение данной однородной системы ОДУ.

Решим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (-\lambda)(-\lambda) - 0 \cdot 0 = 0,\ \lambda^2 = 0,\ \lambda = 0 \text{ - корень второй кратности.}$$

Так как имеется корень равный 0, то найдем общее решение данной системы ОДУ. Очевидно, что общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1, \\ y = C_2. \end{cases}$$

В общее решение входят только ограниченные функции, следовательно, нулевое решение данной системы являются устойчивым. Так как возмущенное решение не будет стремиться к нулевому решению при $t \to +\infty$, то нулевое решение данной системы не является асимптотически устойчивым.

Таким образом, все решения данной системы являются устойчивыми.

Задача. Исследовать решения системы ОДУ

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = -z \end{cases}$$

на устойчивость.

Решение.

В данном случае имеем однородную линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами.

Решим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) = 0, \ \lambda^2(\lambda+1) = 0.$$

Таким образом, $\lambda = -1$ - простой корень, а $\lambda = 0$ - корень второй кратности.

Так как имеется корень равный 0, то найдем общее решение данной системы ОДУ.

Третье ОДУ системы содержит только неизвестную z. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Проинтегрировав его, получим

$$z = C_1 e^{-t}.$$

Из второго уравнения имеем

$$y = \int z dx = \int C_1 e^{-t} dt = -C_1 e^{-t} + C_2.$$

Из первого уравнения имеем

$$x = \int y dx = \int \left(-C_1 e^{-t} + C_2 \right) dt = C_1 e^{-t} + C_2 t + C_3.$$

Общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 t + C_3, \\ y = -C_1 e^{-t} + C_2, \\ z = C_1 e^{-t}. \end{cases}$$

В общее решение входит слагаемое $C_2 t$, которое при $C_2 \neq 0$ и $t \to +\infty$ является неограниченным. Отсюда следует, что нулевое решение данного ОДУ является неустойчивым.

Таким образом, все решения данной системы являются неустойчивыми.

5.4 Устойчивость решений линейных ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Пусть нам дано линейное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \tag{8}$$

Решения линейных ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами можно исследовать на устойчивость, не сводя их к равносильным системам ОДУ. Достаточно рассмотреть корни его характеристического уравнения и в некоторых случаях общее решение соответствующего однородного уравнения. Как и в случае линейных систем будем использовать следующие утверждения:

1) если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то тогда все решения ОДУ (8) будут асимптотически устойчивыми;

2) если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то тогда все решения ОДУ (8) будут неустойчивыми.

В оставшихся случаях следует исследовать решения ОДУ (8) на устойчивость по общему решению этого ОДУ: если все слагаемые будут ограниченными на промежутке вида $[t_0,+\infty]$, то решение будет устойчивым, а если есть хотя бы одно неограниченное слагаемое, то неустойчивым.

Задача. Исследовать решения ОДУ

$$x''' + 5x'' + 17x' + 13x = t^3$$

на устойчивость.

Решение.

В данном случае имеем неоднородное линейное ОДУ третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 17\lambda + 13 = 0$$

имеет простые корни

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = -2 \pm 3i.$$

Так как действительные части всех корней отрицательны, то все решения данного ОДУ являются асимптотически устойчивыми.

Задача. Исследовать решения ОДУ

$$x''' + x'' = \cos t$$

на устойчивость.

Решение.

В данном случае имеем неоднородное линейное ОДУ третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

имеет простой корень $\lambda_1 = -1$ и корень второй кратности $\lambda_2 = 0$.

Так как имеется корень $\lambda_2 = 0$, то рассмотрим общее решение соответствующего однородного ОДУ

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 t + C_3.$$

В общее решение входит слагаемое $C_2 t$, которое при $C_2 \neq 0$ и $t \to +\infty$ является неограниченным. Отсюда следует, что все решения данного ОДУ являются неустойчивыми.

5.5 Устойчивость решений автономных систем ОДУ

Пусть требуется исследовать на устойчивость решение $\bar{y} = \bar{\varphi}(t)$ автономной системы ОДУ.

С помощью замены $\bar{x} = \bar{y} - \bar{\varphi}(t)$ можно свести данную задачу к исследованию на устойчивость нулевого решения автономной системы

$$\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x}). \qquad (9)$$

Здесь $\bar{f}(\bar{0}) = \bar{0}$.

Пусть функции $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ имеют в некоторой окрестности начала координат все непрерывные частные производные по всем аргументам до второго порядка включительно, тогда для данных функций используем формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа [27]

$$f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{0}) + \frac{\partial f_i(\bar{0})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_i(\bar{0})}{\partial x_2} x_2 + ... + \frac{\partial f_i(\bar{0})}{\partial x_n} x_n + r_i(\bar{x}).$$

Здесь $r_i(\bar{x})$ - остаточный член в форме Лагранжа.

Так как $\bar{f}(\bar{0}) = \bar{0}$, то

$$f_i(\bar{x}) = \frac{\partial f_i(\bar{0})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_i(\bar{0})}{\partial x_2} x_2 + ... + \frac{\partial f_i(\bar{0})}{\partial x_n} x_n + r_i(\bar{x}).$$

Пренебрегая остаточными членами, заменим в автономной системе ОДУ (9) функции $f_i(\bar{x})$ $(i = 1, 2, ..., n)$ на

$$\frac{\partial f_i(\bar{0})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_i(\bar{0})}{\partial x_2} x_2 + ... + \frac{\partial f_i(\bar{0})}{\partial x_n} x_n .$$

Получим однородную линейную систему

$$\bar{x} = A\bar{x}. \tag{10}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\bar{0})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\bar{0})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\bar{0})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\bar{0})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\bar{0})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\bar{0})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n(\bar{0})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\bar{0})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\bar{0})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Линейную систему (10) будем называть линейным (первым) приближением автономной системы (9).

Если в правых частях автономной системы (9) находятся только многочлены, то для получения линейного приближения этой системы достаточно удалить все слагаемые, имеющие степень выше первой.

Приведем теоремы Ляпунова об устойчивости автономных систем по линейному приближению.

Теорема. Если у всех корней характеристического уравнения системы (10) отрицательная действительная часть, то нулевое решение системы (9) является асимптотически устойчивым.

Теорема. Если характеристическое уравнение системы (10) имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью, то нулевое решение системы (9) является неустойчивым.

В остальных случаях метод использования линейного приближения неприменим. Тогда возможно использование метода функций Ляпунова [1-3, 9-11, 26] или другие методы [26].

Задача. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы ОДУ

$$\begin{cases} x' = \sin 2x + 5y - xy, \\ y' = \cos x - 5x - e^{5y}. \end{cases}$$

Решение.

Получим линейное приближение данной системы. Для этого найдем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\overline{0})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(\overline{0})}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(\overline{0})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(\overline{0})}{\partial y} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} (\sin 2x + 5y - xy)'_x & (\sin 2x + 5y - xy)'_y \\ \left(\cos x - 5x - e^{5y}\right)'_x & \left(\cos x - 5x - e^{5y}\right)'_y \end{pmatrix}\right|_{\overline{x}=\overline{0}} =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} 2\cos 2x - y & 5 - x \\ -\sin x - 5 & -5e^{5y} \end{pmatrix}\right|_{\overline{x}=\overline{0}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решим характеристическое уравнение для матрицы A

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -5 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (2-\lambda)(-6-\lambda) - 5(-5) = 0,\ \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0,\ \lambda_{1,2} = -2 \pm 3i.$$

Так как действительные части всех полученных корней отрицательны, то нулевое решение исходной системы является асимптотически устойчивым.

Задача. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы ОДУ

$$\begin{cases} x' = x + 2y - xy, \\ y' = 5x^3 + 2x + y. \end{cases}$$

Решение.

Получим линейное приближение данной системы. Так как в правых частях уравнений системы находятся только многочлены, то для получения линейного приближения достаточно удалить все слагаемые со степенью выше первой. Тогда получим линейную систему

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Решим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \; (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 2 = 0, \; \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0, \; \left[\begin{array}{l} \lambda = -1, \\ \lambda = 3. \end{array} \right.$$

Так как имеется положительный корень, то нулевое решение исходной системы является неустойчивым.

Список использованных источников

1. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. - М.: МЦНМО, 2012. – 344 с.: ил. - ISBN 987-5-94057-907-6.

2. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие для вузов / И.Г. Петровский. - М.: Физматлит, 2009. - 208 с. - (Классика и современность. Математика) - ISBN 978-5-9221-1144-7.

3. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для гос. ун-тов / Л.С. Понтрягин. - 3-е изд., стер. - М.: Наука, 1970. - 332 с. : ил.. - Предм. указ.: с. 329-331.

4. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман; пер. с англ. И.Х. Сабитова, Ю.В. Егорова; под ред. В.М. Алексеева. - М.: Мир, 1970. - 720 с.: ил. - Парал. тит. л. на англ. яз. - Примеч.: с. 647-648. - Указ. к уравнениям: с. 649-684. - Библиогр.: с. 685-709. - Предм. указ.: с. 710-714.

5. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения: учебник / Л.Э. Эльсгольц. - 7-е изд. - М.: ЛКИ, 2008. - 309 с. - (Классический учебник МГУ). - Библиогр.: с. 306. - Предм. указ.: с. 307-309. - ISBN 978-5-382-00638-3.

6. Сансоне, Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. Т. 1. - М.: ИЛ, 1953. - 346 с., Т. 2. - М.: ИЛ, 1954. - 415 с.

7. Виленкин, Н.Я. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие / Н.Я. Виленкин, М.А. Доброхотова, А.Н. Сафонов. – М.: Просвещение, 1984. – 176 с.

8. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учеб. для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский.- 3-е изд., испр. - М.: Наука, 1989. - 464 с.

9. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 5-е изд., доп. - СПб.: Лань, 2003. - 832 с.: ил - ISBN 5-8114-0476-X.

10. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. для вузов / М.В. Федорюк. - 3-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2003. - 448 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 445-447. - ISBN 5-8114-0491-3.

11. Краснов, М.Л. Вся высшая математика: Учебник. Т. 3. Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко и др. - М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 240 с. ISBN 5-8360-0153-7.

12. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений: учеб. для вузов / В.В. Степанов. - 9-е изд., стер. - М. : КомКнига, 2006. - 472 с. - Алф. указ.: с. 466-468. - ISBN 5-484-00459-4.

13. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников - 4-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 256 с. - ISBN 5-9221-0277-X.

14. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения: учеб. для втузов / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - Изд. 5-е, стер. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. - 347 с.: ил. - ISBN 978-5-7038-3537-1 (в пер.)

15. Бурмистрова, Е.Б. Математический анализ и дифференциальные уравнения: учеб. для студ. вузов / Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов. – М.: Академия, 2010. – 368 с. - ISBN: 978-5-7695-6265-5.

16. Детлаф, А.А. Курс физики: учеб. пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Высш. шк., 2000. - 718 с.: ил.

17. Левантовский, В.И. Механика космического полета в элементарном изложении. - 3-е, доп. и перераб. - М.: Наука, 1980. - 512 с.

18. Первозванский, А.А. Курс теории автоматического управления / А.А. Первозванский. - 3-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2015. - 624 с.: ил - ISBN 978-5-8114-0995-2.

19. Пирумов, У.Г. Численные методы: учеб. пособие для студ. втузов / У.Г. Пирумов. – 3-е издание., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 224 с.: ил. - ISBN: 5-7107-8777-9.

20. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. III / Пред. и прим. А.А. Флоринского. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 728 с. - ISBN: 5-9221-0466-7.

21. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке; пер. с нем. С. Ф. Фомина.- 4-е изд., испр. - М.: Наука, 1971. - 576 с.: ил. - предм. указ.: с. 571-576.

22. Универсальный справочник: высшая математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов / А.Д. Полянин [и др.]. – М.: АСТ: Астрель: Профиздат, 2005. - 480 с.: ил. - прил.: с. 407-462. - предм. указ.: с. 463-480. - ISBN 5-17-031871-5. - ISBN 5-271012186-0. - ISBN 5-88283-279-9.

23. Зайцев, В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2001. - 576 с. (Справочная физико-математическая литература). - библиогр.: с. 575-576. - ISBN 5-9221-0102-1.

24. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры: учеб. для вузов / А. Г. Курош. - 14-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2005. - 432 с. - Библиогр.: с. 425-426. - Предм. указ.: с. 427-431. - ISBN 5-8114-0521-9.

25. Векторное, матричное и тензорное исчисление: справочник для технических университетов: учеб. пособие / Г.А. Шаров. - Долгопрудный: Интеллект, 2014. - 368 с.: 60x90 1/16. (обложка). - ISBN 978-5-91559-174-4.

26. Меркин, Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. - 4-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2003. - 304 с.: ил. (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0313-5.

27. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. I / Пред. и прим. А.А. Флоринского. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 680 с. - ISBN: 5-9221-0436-5.