МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Мещерина Е.В.

Методическое пособие по математике

для студентов ветеринарного факультета заочной формы обучения

Оренбург
Издательство ОГАУ
2010

УДК 51
М 56

Одобрено и рекомендовано к печати редакционно-издательским советом ФГОУ ВПО «Оренбургский государственный аграрный университет» (председатель – профессор В.В. Каракулев).

Рецензент: Ю.А. Ушаков – заведующий кафедрой математики и теоретической механики, кандидат технических наук

М 56 Мещерина Е.В. Методическое пособие по математике для студентов ветеринарного факультета заочной формы обучения / Е.В. Мещерина. – Оренбург: Издательский центр ОГАУ, 2011. – 42 с.

Содержание

Введение

В современной науке и технике все большую роль приобретает математическое образование, поскольку в производстве и управлении хозяйством непрерывно возрастает роль математических методов моделирования, проектирования, исследования, планирования. Законы математики – неизменное руководство к безошибочному действию в современной практике ведения хозяйства и изучение их служит подготовке студентов к последующему изучению родственных и специальных курсов.

Данное пособие предназначено для студентов ветеринарного факультета заочной формы обучения. В нем представлен теоретический материал по следующим темам: предел функции, производная и дифференциал функции, исследование функции, интеграл. К каждой теме подобраны задачи и представлено их подробное решение. Так же пособие содержит варианты контрольных работ и список вопросов к экзамену по математике.

Целью пособия является раскрытие основных методов решения задач по представленным темам.

Пособие будет полезно студентам при решении контрольных работ и подготовке к экзамену по математике.

§1. Предел функции

Определение предела

Пусть a – точка числовой прямой, $a \in (b; c)$. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $E = \{x|\ x \in (b; c) \backslash \{a\}\}$.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a (обозначается $A = \lim_{x\to a} f(x)$), если для любого положительного числа ε ($\forall \varepsilon > 0$) существует такое положительное число δ ($\exists \delta > 0$) что для любого x ($\forall x$) такого, что $0 < |x - a| < \delta, x \in E$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A_1 называется *пределом функции* $f(x)$ *слева* в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a - \delta; a)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Число A_2 называется *пределом функции* $f(x)$ *справа* в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a; a + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Предел слева обозначается $A = \lim_{x\to a-0} f(x)$ предел справа – $A = \lim_{x\to a+0} f(x)$.

Эти пределы характеризуют поведение функции слева и справа от точки a. Их часто называют односторонними пределами.

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность точки a, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке a бесконечный предел: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) – A| < \varepsilon$, то говорят, что предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к плюс бесконечности, равен A: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Аналогично формулируется определение предела при x, стремящемся к минус бесконечности: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Пример 1. а) $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$;

б) $\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$;

в) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$;

г) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Свойства пределов

Если существует $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и существует $\lim_{x\to a} g(x) = B$, то:

1) $\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B$;
2) $\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = A - B$;
3) $\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$;
4) $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

Теорема: Если в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $g(x) < f(x) < h(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$, то $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Пример 2. Найти $\lim_{x\to 2}(x^3+3x^2+4x-5)$.

Решение. Пользуясь свойствами пределов получаем, что

$$\lim_{x\to 2}(x^3+3x^2+4x-5)=2^3+3\cdot 2^2+4\cdot 2-5=23.$$

Пример 3. Найти $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-1}{x^3-2x+1}$.

Решение. Пользуясь свойствами пределов получаем, что

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-1}{x^3-2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^3-2x+1)}=\frac{(-2)^2-1}{(-2)^3-2\cdot(-2)+1}=\frac{3}{-3}=-1.$$

Замечание. В дальнейшем будем пользоваться тем, что для любой элементарной функции $f(x)$ и любой точки a из ее области определения справедливо соотношение $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Бесконечно большая функция

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если для любого положительного числа C существует окрестность точки a такая, что $|f(x)|>C$ для любого x из выбранной окрестности точки a и принадлежащего области определения функции $f(x)$. Обозначение

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad (\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a} f(x)=-\infty).$$

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если для любого положительного числа C существует окрестность точки a такая, что $|f(x)|<C$ для любого x из выбранной окрестности точки a и принадлежащего области определения функции $f(x)$. Обозначение

$$\lim_{x\to a} f(x)=0.$$

Сформулируем основные соотношения для бесконечно больших и бесконечно малых функций.

Если $\lim_{x\to a} f(x)=0, f(x)\neq 0$, то $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty$, и обратно, если $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, то $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.

Если $\lim_{x\to a} f_1(x)=\infty$ и $\lim_{x\to a} f_2(x)=A$, то $\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=\infty$.

Если $\lim_{x\to a} f_1(x)=+\infty$ и $\lim_{x\to a} f_2(x)=+\infty$, то $\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=+\infty$.

Если $\lim_{x\to a} f_1(x)=\infty$ и $\lim_{x\to a} f_2(x)=A\neq 0$, то $\lim_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\infty$.

Если $\lim_{x\to a} f_1(x)=A\neq 0,\ f_2(x)\neq 0$ и $\lim_{x\to a} f_2(x)=0$, то $\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty$.

Если $\lim_{x\to a} f_1(x)=A$ и $\lim_{x\to a} f_2(x)=\infty$, то $\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$.

Пример 4. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^3+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}$.

Решение. Пользуясь свойствами пределов, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^3+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}=\lim_{x\to 0}\ln(x^3+4x+2)\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^{10}+x^3+x^2)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^{10}+x^3+x^2)=\infty$, то $\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^{10}+x^3+x^2)}=0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\ln(x^3+4x+2)\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^{10}+x^3+x^2)}=\ln 2\cdot 0=0.$$

Вычисление предела в случае неопределенности

При вычислении пределов могут возникнуть ситуации, когда непосредственное применение теорем о свойствах пределов, бесконечно больших и бесконечно малых функций не дает возможность их вычислить. Такое положение возможно в следующих случаях:

1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$:

а) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$(символически обозначается $\left[\frac{0}{0}\right]$);

б) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$(символически обозначается $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

2) $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$:

$\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=\infty$(символически обозначается $[0\cdot\infty]$).

3) $\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)$:

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ (символически обозначается $[\infty-\infty]$).

В том случае, когда имеет место неопределенность, для вычисления предела – “ раскрытия неопределенности” – преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить. Для таких преобразований используются или тождественные соотношения или сравнения поведения функций при стремлении $x\to a$ (соотношения эквивалентностей).

Функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x\to a$ ($f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$) , если существует такая функция $\alpha(x)$, что $f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)\to 1$ при $x\to 0$.

Основные эквивалентности при $\boldsymbol{x\to 0}$

$$\sin x\sim x$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x\sim x$$

$$\arcsin x\sim x$$

$$\operatorname{arctg} x\sim x$$

$$e^x-1\sim x$$

$$a^x-1\sim x\ln a$$

$$\ln(1+x)\sim x$$

$$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$$

$$(1+x)^m-1\sim mx$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2x^2-4}{6x^2+8x+9}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2x^2-4}{6x^2+8x+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{6x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{6}=\infty.$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3-3x+2}{8x^4-6x^3+5x+1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3-3x+2}{8x^4-6x^3+5x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3}{8x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{8x}=0.$$

Пример 7. Вычислить предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+6x^2-7x+2}{8x^3-12x+9}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+6x^2-7x+2}{8x^3-12x+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{8x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{8}=\frac{5}{8}.$$

Пример 8. Вычислить предел $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Умножим и разделим выражение $\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$ на выражение ему сопряженное, то есть на $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-(x-1)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=0.$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$.

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-4)}{(x-3)}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 10. Вычислить предел $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Пользуясь соотношениями эквивалентности, получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Пример 11. Вычислить предел $\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{3x-1}{3x-6}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. Рассмотрим функцию $y=\ln\frac{3x-1}{3x-6}$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{3x-6}=1$, то представим выражение, стоящее под знаком логарифма, в виде

$$\frac{3x-1}{3x-6}=1+\left(\frac{3x-1}{3x-6}-1\right)=1+\frac{5}{3x-6},\ \lim_{x\to\infty}\frac{5}{3x-6}=0.$$

$$\ln\frac{3x-1}{3x-6}=\ln\left(1+\frac{5}{3x-6}\right)\sim\frac{5}{3x-6}.$$

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{3x-1}{3x-6}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{5}{3x-6}=\frac{5}{3}.$$

§2. Производная

Определение производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на некотором интервале $(a; b)$.

Определение. Разность $x - x_0 = \Delta x$ $\big(x, x_0 \in (a; b)\big)$ называют *приращением аргумента* x в точке x_0.

Определение. Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ называют *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0.

Определение. Если существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к 0, то его называют *производной функции в точке* x_0 и обозначают $f'(x_0)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Нахождение производной называется дифференцированием функции.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке x_0; ***физический смысл*** – в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении $s = s(t)$ в момент времени t_0; ***биологический смысл***: если зависимость между числом особей популяции микроорганизмов y и временем t ее размножения задана уравнением $y = p(t)$, то $p'(t)$ – производительность жизнедеятельности популяции микроорганизмов в момент времени t.

Производные основных элементарных функций

$(c)' = 0;$

$(x^n)' = nx^{n-1};$

частные случаи: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$

$(a^x)' = a^x \ln a;$

частный случай: $(e^x)' = e^x;$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$

частный случай: $(\ln x)' = \frac{1}{x};$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Правила дифференцирования

1. $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$;
2. $\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$;
3. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$;
4. $\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$, где c – число;
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}, g(x)\neq 0.$

Пример 1. Найти производную функции $f(x)=\frac{1}{x^3}-5\ln x$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{x^3}-\right)' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' - (5\ln x)' = (x^{-3})' - 5(\ln x)' = -3x^{-4} - 5\frac{1}{x} = -\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x} =$$
$$= -\frac{3+5x^3}{x^4}.$$

Пример 2. Найти производную функции $f(x)=(x^2+x)\cos x$.

Решение.

$$\left((x^2+x)\cos x\right)' = (x^2+x)'\cos x + (x^2+x)(\cos x)' = (2x+1)\cos x +$$
$$+(x^2+x)(-\sin x).$$

Пример 3. Найти производную функции $f(x)=\frac{x^2-2x}{2x-1}$.

Решение.

$$f'(x) = \frac{(x^2-2x)'(2x-1)-(x^2-2x)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{(2x-2)(2x-1)-(x^2-2x)2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2-6x+2-2x^2+4x}{(2x-1)^2} =$$
$$= \frac{2x^2-2x+2}{(2x-1)^2}.$$

Пример 4. Найти производную функции $f(x)=\frac{(x^2+7)\sin x}{5x}$.

Решение.

$$f'(x) = \frac{\left((x^2+7)\sin x\right)' 5x-(x^2+7)\sin x(5x)'}{(5x)^2} = \frac{((x^2+7)'\sin x+(x^2+7)(\sin x)')5x-(x^2+7)\sin x5}{25x^2} =$$
$$= \frac{(2x\sin x+(x^2+7)\cos x)5x-5(x^2+7)\sin x}{25x^2}.$$

Производная сложной функции

Пусть функция $u=g(x)$ имеет производную в некоторой точке $x=x_0$, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u_0=g(x_0)$. Тогда, сложная функция $f\left(g(x)\right)$ имеет производную в точке $x=x_0$, которая вычисляется по формуле

$$(f\left(g(x)\right)' = f'(u_0)\cdot g'(x_0).$$

Таким образом, производная сложной функции равна произведению производных функций ее составляющих $f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)$.

Пример 5. Найти производную функции $f(x)=\ln\sin x$.

Решение. Обозначим $y=\ln u, u=\sin x$, тогда $y=\ln\sin x$. По правилу нахождения производной сложной функции $f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)$. Находим:

$$f'(u)=(\ln u)'=\frac{1}{u}, \quad u'(x)=(\sin x)'=\cos x,$$

откуда

$$f'(x) = (\ln \sin x)' = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

Пример 6. Найти производную функции $f(x) = e^{x^2}$.

Решение. Обозначим $u = x^2$, тогда $f(u) = e^u$. По правилу нахождения производной сложной функции $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$. Находим:

$$f'(u) = (e^u)' = e^u, \qquad u'(x) = (x^2)' = 2x.$$

$$f'(x) = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Определение. *Производной второго порядка* функции $y = f(x)$ называется производная от производной данной функции

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x).$$

Определение. *Производной n-го порядка* функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n – 1)$-го порядка данной функции

$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x).$$

Дифференциал функции

Определение. Линейную функцию $y = f'(x_0)\Delta x$ называют *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначают df. Для функции x производная в каждой точке равна 1, то есть $dx = \Delta x$. Поэтому пишут: $df = f'(x_0)dx$. Отсюда

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}.$$

Дифференциал функции используют в приближенных вычислениях:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал функции $y = f(x)$ есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции в точку с абсциссой x_0.

Пример 7. Вычислить дифференциал функции $y = x^2$.

Решение.

$$dy = dx^2 = (x^2)'dx = 2xdx.$$

Правила вычисления дифференциала

$d(u + v) = du + dv$;

$d(u - v) = du - dv$;

$d(uv) = vdu + udv$;

$d(cx) = cdx$, где c – число.

Пример 8. Вычислить дифференциал функции $y = xe^x$.

Решение.

$$dy = (xe^x)'dx = (x'e^x + x(e^x)')dx = (e^x + xe^x)dx = e^x(1 + x)dx$$

или

$$dy = e^x dx + xd(e^x) = e^x dx + xe^x dx = e^x(1 + x)dx.$$

§3. Исследование функции и построение ее графика

Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Определить поведение функции на границах области определения.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти промежутки знакопостоянства.
5. Исследовать функцию на четность и периодичность.
6. Найти промежутки монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции.
9. Исследовать функцию на существование вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот.
10. Построить график функции.

Определение. *Областью определения* $D(y)$ функции $y = f(x)$ (если это не оговорено особо) называют множество всех значений независимой переменной x, при которых выполнимы все операции, указанные формулой.

Определение. Известно, что под *множеством значений* функции E_f понимают множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых существует число $x_0 \in D(f)$ такое, что $f(x_0) = y_0$.

Свойства функции

Четность, нечетность.

Определение. *Множество* D называют *симметричным* относительно начала координат, если для любого $x \in D$ противоположное ему число $(-x)$ также принадлежит D.

Определение. Функцию $f(x)$, заданную на множестве $D(f)$, называют *четной* (*нечетной*), если:

1) множество $D(f)$ симметрично относительно начала координат;

2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство: $\boldsymbol{f(-x) = f(x), (f(-x) = -f(x))}$.

Функцию, которая не является ни четной, ни нечетной, называют *функцией общего вида*.

Пример 1. Исследуем на четность функцию $y = \frac{x^4}{x+1}$.

Решение. Сразу можно сделать вывод, что имеем функцию общего вида, так как ее область определения $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ не симметрична относительно начала координат.

Пример 2. Исследуем на четность функцию $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$.

Решение.

1) $D_f = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ – симметричное множество относительно точки O (0; 0).

2) Составим выражение для $f(-x)$ и сравним его с выражением для $f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} + \frac{1}{(-x)^4} = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = f(x)$$

Вывод: Так как $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D_f$, то $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$ – четная функция.

Периодичность.

Определение. Функцию $y = f(x)$, заданную на множестве $D(f)$, называют *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что:

1) для любого числа x, принадлежащего области определения функции D_f, числа $x \pm T$ также принадлежат области определения.

$$(\forall x \in D_f) \Rightarrow (x \pm T \in D_f)$$

(отсюда следует неограниченность области определения)

2) для всякого числа x из области определения справедливо равенство

$$f(x \pm T) = f(x).$$

Число T называют *периодом* функции.

Например, $f(x) = \cos x$, $T = 2\pi$.

Возрастание и убывание.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на множестве $D(f)$. Пусть x_1 и x_2 – любые две *различные* точки множества (например, $x_1 < x_2$), содержащегося во множестве $D(f)$.

Определение. Функцию $y = f(x)$ называют на множестве X

– *возрастающей*, если $f(x_1) < f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует *меньшее* значение функции);

– *убывающей*, если $f(x_1) > f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует *большее* значение функции);

– *невозрастающе**й***, если $f(x_1) \geq f(x_2)$;

– *неубывающей*, если $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Во всех четырех случаях функцию называют *монотонной* на множестве X.

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ была возрастающей (убывающей) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ выполнялось условие $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Пример 3. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Решение. Найдем производную данной функции

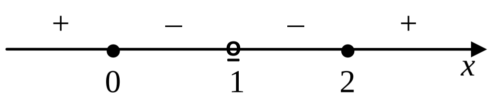
$$y'(x) = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Найдем точки, в которых производная равна 0 и не существует, то есть решим уравнение

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ (x-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Следовательно, производная равна 0 при $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$, а не существует при $x = 1$.

Наносим эти точки на координатную прямую и расставляем знаки производной в каждом полученном интервале



Пользуясь предыдущей теоремой, получаем: функция возрастает на промежутках, где производная положительна, то есть на промежутках $(-\infty; 0), (2; +\infty)$ и убывает на промежутках, где производная отрицательна, то есть на промежутках $(0; 1), (1; 2)$.

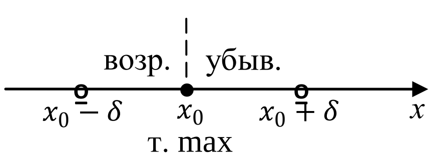
Экстремумы функции.

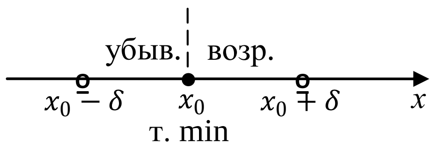
Определение. Точку $x_0 \in D(f)$ называют *точкой максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$, если существует интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, содержащийся в $D(f)$, такой, что для каждого $x \neq x_0$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $\big(f(x) > f(x_0)\big)$.

Другими словами, точка x_0 – точка максимума (минимума), если значение функции в этой точке больше (меньше), чем значение функции во всех других точках интервала $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ с центром в точке x_0, принадлежащего области определения.

Определение. Точки максимума и минимума называют *точками экстремума* функции, а значения функции в этих точках называют *экстремумами функции*.

***Признак экстремума*:** Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором интервале $(x_0 - \delta;\ x_0)$, содержащемся в $D(f)$ и убывает (возрастает) на интервале $(x_0;\ x_0 + \delta)$, содержащемся в $D(f)$, то точка $x_0 \in D(f)$ – точка локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$.





Пример 4. Найдем промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$.

Решение. Функция определена, непрерывна и нечетна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

1. Найдем критические точки, то есть точки, в которых производная $f'(x)$ либо не существует, либо равна 0.

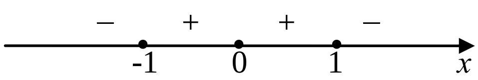
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

а) $\nexists f'(0)$

б) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Точки $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ – критические точки.

2. Установим знак производной в каждом интервале, на которые область определения разбивается критическими точками.



Функция убывает на лучах $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, возрастает на отрезке $[-1; 1]$.

$$\left.\begin{array}{r} x = -1 - \text{точка минимума}, \ f(-1) = -2 \\ x = 1 - \text{точка максимума}, \ f(1) = -f(-1) = 2 \end{array}\right\} \text{экстремумы функции.}$$

Интервалы выпуклости и точки перегиба функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ *выпукла вверх* (*выпукла вниз*) в точке x_0, если существует интервал $(x_0 + \delta; x_0 - \delta), \delta > 0$ такой, что для всех его точек x касательная к графику функции в точке $M(x_0; y_0)$ лежит выше (ниже) графика.

Теорема: Для того чтобы график дважды дифференцируемой на интервале $(a; b)$ функции $y = f(x)$ был выпуклым вверх (выпуклым вниз) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in (a; b)$ выполнялось неравенство

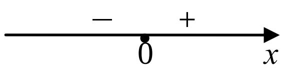
$$f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0).$$

Точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует, называют точками перегиба графика функции $y = f(x)$.

Пример 5. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции $y = x^3$.

Решение. $y'(x) = 3x^2$, $y''(x) = 6x$.

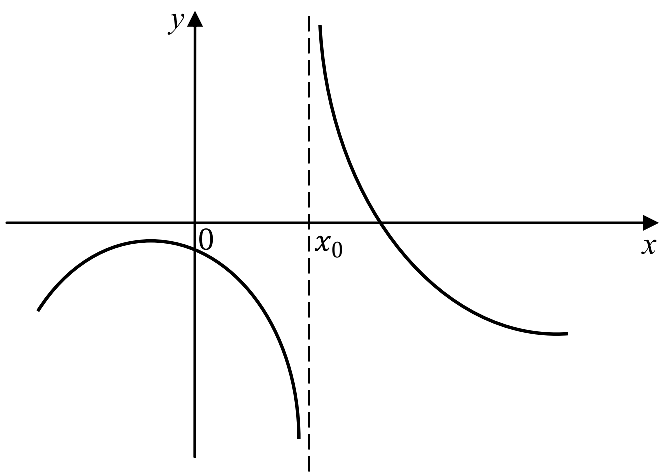
$y''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0$ – точка перегиба.



Пользуясь предыдущей теоремой, получаем, что на промежутке $(-\infty; 0)$ график функции выпуклый вверх, а на промежутке $(0; +\infty)$ график функции выпуклый вниз.

Асимптоты графика функции.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ или $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.



Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $\lim_{x \to \infty}\big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$.

При $k = 0$ наклонная асимптота называется горизонтальной.

Аналогично определяются асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$.

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$.

Пример 6. Найти асимптоты графика функции $y = 4 + \frac{1}{x}$.

Решение. Найдем

$$\lim_{x\to\infty}\left(4 + \frac{1}{x}\right) = 4,$$

поэтому $y = 4$ – горизонтальная асимптота графика данной функции. Функция не определена в точке $x = 0$, то есть $x = 0$ – точка разрыва. Найдем

$$\lim_{x\to0+0}\left(4 + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to0-0}\left(4 + \frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

Таким образом, $x = 0$ – вертикальная асимптота.

Замечание. Асимптота графика функции может пересекать сам график.

Горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ можно находить по следующему алгоритму.

1. Вычислить $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Если этот предел существует и равен некоторому числу c, то $y = c$ – горизонтальная асимптота. Если предел не существует или равен бесконечности, то следует перейти ко второму пункту.

2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$, то следует перейти к третьему шагу.

3. Вычислить $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то следует перейти к четвертому шагу.

4. Записать уравнение наклонной асимптоты: $y = kx + b$.

Пример 7. Исследовать функцию $y = \frac{x^2-1}{x}$ и построить ее график.

Решение. Обратимся к схеме исследования функции.

1. Найдем область определения функции. Так как функция задана дробным выражением, то знаменатель этой дроби должен быть отличен от 0. То есть $x \neq 0$. Значит, $D(f)\colon (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Точка $x = 0$ – точка разрыва графика функции. Найдем $\lim_{x\to0} f(x)$:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{x} = \infty.$$

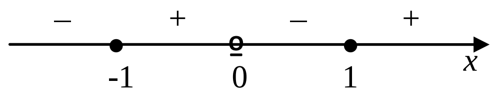
$$\lim_{x\to0-0}\frac{x^2-1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to0+0}\frac{x^2-1}{x} = -\infty.$$

3. Найдем точки пересечения графика функции с осью *Oy*, то есть при $x = 0$. В данной точке функция не определена, значит, график функции не пересекает ось *Oy*.

Найдем точки пересечения графика функции с осью *Ox*, то есть при $y = 0$:

$$\frac{x^2-1}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции



Получили что на промежутках $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$ функция отрицательна, а на промежутках $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$ – положительна.

5. 1) Область определения функции – симметричное относительно начала координат множество.

2) Найдем

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{-x}=\frac{x^2-1}{-x}=-\frac{x^2-1}{x}.$$

Получили что $f(-x)=-f(x)$.

Из 1) и 2) следует, что функция нечетная.

Функция не является периодической.

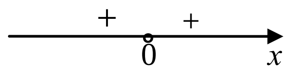
6. Для того чтобы найти промежутки монотонности функции, необходимо найти производную

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)'=\frac{2x\cdot x-(x^2-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2+1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$$

и решить уравнение $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=0 \\ x^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-1 \\ x\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{решений нет.}$$

При $x=0$ производная не существует. Отметим эту точку на координатной прямой и расставим знаки производной на каждом полученном интервале.



Значит, функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.

7. Экстремумов нет, так как производная не обращается в 0.

8. Чтобы определить промежутки выпуклости функции, нужно найти производную второго порядка от этой функции

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)'=\frac{2x\cdot x^2-2x(x^2+1)}{x^4}=\frac{2x^3-2x^3-2x}{x^4}=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}$$

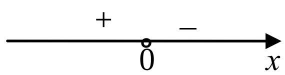
и решить уравнение

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-2}{x^3}=0.$$

Данное уравнение решений не имеет.

Найдем точки, в которых производная второго порядка не существует. Это точка $x=0$, так как в ней дробь теряет смысл.

Нанесем эту точку на координатную прямую и расставим знаки второй производной в каждом полученном интервале



Значит, график функции выпуклый вниз на промежутке $(-\infty;0)$, вверх на $(0;+\infty)$.

9. Найдем асимптоты графика функции.

Точка $x = 0$ – точка разрыва функции, поэтому вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x} = \infty.$$

Значит, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика функции.

Найдем так же

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2-1}{x} = +\infty \text{ и } \lim_{x\to 0+0}\frac{x^2-1}{x} = -\infty.$$

Исследуем функцию на наличие наклонных асимптот. Для этого найдем предел

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{x^2} = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{x} - kx\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{x} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ – наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

Найдем

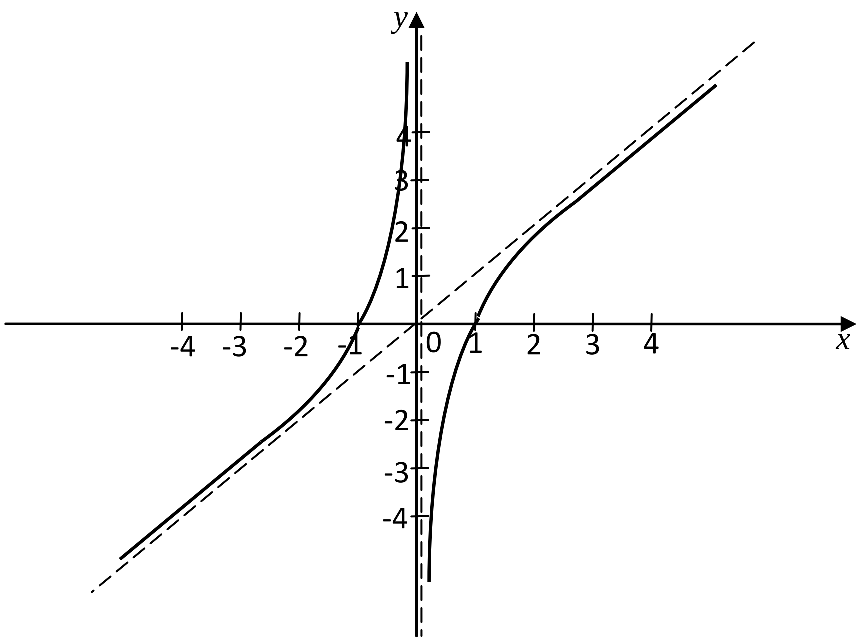
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{x^2} = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-1}{x} - kx\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{-1}{x} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ – наклонная асимптота графика функции при $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x} = \infty \Rightarrow \text{горизонтальных асимптот нет.}$$

10.Построим график функции.



§4. Интеграл

Неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется *перевообразной* для функции $f(x)$ на $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ $F^{'}(x) = f(x)$.

Пример 1. Функция $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$, так как $(x^2)^{'} = 2x$. Функция $F(x) = x^2 + 2$ тоже является первообразной для функции $f(x) = 2x$, так как $(x^2+2)^{'} = 2x$. Функция $F(x) = x^2 - 3$ тоже является первообразной для функции $f(x) = 2x$, так как $(x^2-3)^{'} = 2x$. Таким образом, множество всех первообразных для функции $f(x) = 2x$ выглядит так: $F(x) = x^2 + C$, где C – некоторая постоянная.

Определение. Множество всех первообразных $F(x) + C$ для функции $f(x)$ на $(a;b)$ называют *неопределенным интегралом* и обозначают $\int f(x)dx$. $f(x)$ называется подинтегральной функцией, $f(x)dx$ – подинтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Пример 2. а) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

б) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;
3. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;
4. $(\int f(x)dx)^{'} = f(x)$;
5. $\int dF(x) = F(x) + C$;

Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\int 0dx = C$;
2) $\int 1dx = x + C$;
3) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$;
4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ \ \ (x \neq 0)$;
5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (a > 0,\ a \neq 1),\ \int e^x dx = e^x + C$;
6) $\int \sin x\, dx = \cos x + C$;
7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \ \ \ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right)$;
9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \ \ \ (x \neq \pi k, k \in Z)$;
10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;
11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C$;
12) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\frac{1+x}{1-x} + C$;
13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$

Основные методы интегрирования

1. ***Метод непосредственного интегрирования.***

Интеграл вычисляется с помощью таблицы основных неопределенных интегралов и правил интегрирования.

Пример 3. $\int (3x^2+2)dx = \int 3x^2dx + \int 2dx = 3\int x^2dx + 2\int 1dx =$
$= 3\frac{x^3}{3} + 2x + C = x^3 + 2x + C.$

2. ***Метод замены переменной.***

Пусть требуется найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, который нельзя вычислить с помощью таблицы интегралов и правил интегрирования. Обозначим подинтегральную функцию или ее часть за новую переменную $g(x) = t$. Выразим переменную x через t: $x = \varphi(t)$ и найдем dx:

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt.$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Пример 4. $\int \frac{dx}{3x-1} = \begin{bmatrix} 3x-1=t & \\ 3x=t+1 & dx=\frac{1}{3}dt \\ x=\frac{t}{3}+\frac{1}{3} & \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{t} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C =$
$= \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C.$

Пример 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-4}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2x-4}=t & \\ 2x-4=t^2 & dx=tdt \\ x=\frac{t^2}{2}+2 & \end{bmatrix} = \int \frac{tdt}{t} = \int 1dt = t + C =$
$= \sqrt{2x-4} + C.$

Пример 6. $\int \sqrt{2x-6}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt{2x-6}=t & \\ 2x-6=t^2 & dx=tdt \\ x=\frac{t^2}{2}+3 & \end{bmatrix} = \int ttdt = \int t^2dt =$
$= \frac{t^3}{3} + C = \frac{\left(\sqrt{2x-6}\right)^3}{3} + C.$

3. ***Метод интегрирования по частям.***

Пусть функции $U(x)$ и $V(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке $(a;b)$. Тогда на этом промежутке справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

Как правило, данным методом пользуются, когда подинтегральная функция представлена произведением функций. Тогда одну функцию обозначают за U, а оставшееся выражение за dV, так чтобы вновь полученный интеграл стал легче.

Пример 7. $\int x\cos x\,dx.$

$\int x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} U = x \Rightarrow dU = (x)'dx = dx \\ dV = \cos x\,dx \Rightarrow V = \int \cos x\,dx = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x\,dx =$
$= x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C.$

Пример 8. $\int x \ln x \, dx$.

$$\int x \ln x \, dx = \begin{bmatrix} U = \ln x \Rightarrow dU = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ dV = x dx \Rightarrow V = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Определенный интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и принимает на нем неотрицательные значения.

Разобьем отрезок $[a; b]$ точками на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$.

Обозначим Δx_k разность $x_k - x_{k-1}$, а наибольшую из них – через λ и назовем ее параметром разбиения, то есть $\lambda = \underset{1 \le k \le n}{\text{наиб.}} \Delta x_k$.

В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ выберем точку ξ_k. Вычислим значение функции $f(\xi_k)$ и произведения $f(\xi_k)\Delta x_k$ $(k = 1,2, \dots n)$.

Составим сумму этих произведений:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эту сумму называют *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при условии, что $\lambda \to 0$, то его называют *определенным интегралом* функции по отрезку $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования соответственно, $y = f(x)$ – подинтегральной функцией.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
3. пусть $a < c < b$, тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
4. $\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \int_a^b \alpha f(x)dx \pm \int_a^b \beta g(x)dx$.

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $y = f(x)$.

Чтобы вычислить нужно сначала найти $\int f(x)dx = F(x) + C$, положить $C = 0$ и найти разность значений полученной функции $F(x)$ в верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример 1. $\int_2^4 xdx$.

$$\int_2^4 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6.$$

Пример 2. $\int_3^6 \sqrt{x-2}dx$.

$$\int \sqrt{x-2}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x-2} = t & \\ x - 2 = t^2 & dx = 2tdt \\ x = t^2 + 2 & \end{bmatrix} = \int t \cdot 2tdt = \int 2t^2dt = 2\int t^2dt =$$

$$= \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{x-2}\right)^3}{3} + C$$

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}dx = \left.\frac{2(\sqrt{x-2})^3}{3}\right|_3^6 = \frac{2(\sqrt{6-2})^3}{3} - \frac{2(\sqrt{3-2})^3}{3} = \frac{2\cdot 8}{3} - \frac{2\cdot 1}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Пример 3. $\int_2^5 xe^x dx$.

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} U = x \Rightarrow dU = dx \\ dV = e^x dx \Rightarrow V = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C =$$

$$= e^x(x-1) + C$$

$$\int_2^5 xe^x dx = e^x(x-1)\Big|_2^5 = 4e^5 - e^4.$$

Определение. Фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью *Ox* называется криволинейной трапецией.

Геометрический смысл определенного интеграла: $\int_a^b f(x)dx$ есть площадь соответствующей криволинейной трапеции.

Вариант 1.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-x+2)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^2-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 2x+3x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+1)-2x$;

3) $f(x)=x^2\cos(2x+1)$;

4) $f(x)=\frac{2x^3}{\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^4+3x^2+2)dx$;

2) $\int\sin 2x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$;

4) $\int 2x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^5\sqrt{2x-1}dx$;

2) $\int\limits_2^4 x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{x-1}$.

Вариант 2.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-2x+3)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{2x^2+3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{3x^2-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2}{x^2-4x+3}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 3x+4x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+2)-3x$;

3) $f(x)=x^2\cos(3x+1)$;

4) $f(x)=\frac{3x^3}{\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^3+2x+1)dx$;

2) $\int\cos 2x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-2}}$;

4) $\int 2x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_5^{13}\sqrt{2x-1}dx$;

2) $\int\limits_2^4 2x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x-1}{x}$.

Вариант 3.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-3x+4)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{2x^2+4x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{4x^2-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3}{x^2-5x+4}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 4x+5x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+3)-4x$;

3) $f(x)=x^2\cos(4x+1)$;

4) $f(x)=\frac{4x^3}{\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^4+3x+4)dx$;

2) $\int \sin 3x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-3}}$;

4) $\int 3x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^6\sqrt{3x-2}dx$;

2) $\int\limits_2^4 3x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{x-2}$.

Вариант 4.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+5)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-7x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{2x^2+5x+4}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{5x^2-6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+5}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 5x+6x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+4)-5x$;

3) $f(x)=x^2\cos(5x+1)$;

4) $f(x)=\frac{5x^3}{\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^3+4x+4)dx$;

2) $\int \cos 3x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-4}}$;

4) $\int 3x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_6^9\sqrt{3x-2}dx$;

2) $\int\limits_2^4 4x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x-2}{x}$.

Вариант 5.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-5x+6)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-8x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{2x^2+6x+5}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{6x^2-7}$;

5) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5}{x^2-7x+6}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 6x+7x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+5)-6x$;

3) $f(x)=x^2\cos(6x+1)$;

4) $f(x)=\frac{6x^3}{\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^5+4x^2+3)dx$;

2) $\int \sin 4x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-5}}$;

4) $\int 4x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^3\sqrt{4x-3}dx$;

2) $\int\limits_2^4 5x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{x-3}$.

Вариант 6.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+7)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-9x+8}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6}{2x^2+7x+6}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{7x^2-8}$;

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-6}{x^2-8x+7}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 7x+8x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+6)-7x$;

3) $f(x)=x^2\cos(7x+1)$;

4) $f(x)=\frac{7x^3}{\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^3+5x^2+3)dx$;

2) $\int \cos 4x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{6x-6}}$;

4) $\int 4x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_3^7\sqrt{4x-3}dx$;

2) $\int\limits_2^4 6x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x-3}{x}$.

Вариант 7.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-7x+8)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7}{2x^2+8x+7}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{8x^2-9}$;

5) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-7}{x^2-9x+8}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 8x+9x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+7)-8x$;

3) $f(x)=x^2\cos(8x+1)$;

4) $f(x)=\frac{8x^3}{\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^5+6x^3+3)dx$;

2) $\int \sin 5x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{7x-7}}$;

4) $\int 5x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^4\sqrt{5x-4}dx$;

2) $\int\limits_2^4 7x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{x-4}$.

Вариант 8.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-8x+9)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-8}{2x^2+9x+8}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{9x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8}{x^2-3x+2}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 9x+x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+8)-9x$;

3) $f(x)=x^2\cos(9x+1)$;

4) $f(x)=\frac{9x^3}{\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^3+8x^2+3)dx$;

2) $\int \cos 5x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{8x-8}}$;

4) $\int 5x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_4^8\sqrt{5x-4}dx$;

2) $\int\limits_2^4 8x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x-4}{x}$.

Вариант 9.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-9x+1)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-5x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{2x^2+x+9}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x^2-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 2x+4x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+9)-10x$;

3) $f(x)=x^2\cos(10x+1)$;

4) $f(x)=\frac{x^3}{2\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^4+2x-1)dx$;

2) $\int\sin 6x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x-9}}$;

4) $\int 6x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^5\sqrt{6x-5}dx$;

2) $\int\limits_2^4 9x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{x-5}$.

Вариант 10.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-x+2)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{x^2-6x+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-10}{x^2-5x+4}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 3x+5x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+10)-x$;

3) $f(x)=x^2\cos(2x+2)$;

4) $f(x)=\frac{x^3}{3\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^3+4x-3)dx$;

2) $\int\cos 6x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{10x-10}}$;

4) $\int 6x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_5^9\sqrt{6x-5}dx$;

2) $\int\limits_2^4 10x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x-5}{x}$.

Вариант 11.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-2x+3)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-8x+7}{x^2-7x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-2}{2x^2+4x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2}{4x^2-6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 4x + 6x$;

2) $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 3x$;

3) $f(x) = x^2 \cos(3x + 2)$;

4) $f(x) = \frac{x^3}{4 \ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^3 - 4x + 3)dx$;

2) $\int \sin 7x \, dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$;

4) $\int 7x \cos x \, dx$.

4. Вычислить:

1) $\int_1^6 \sqrt{7x-6}dx$;

2) $\int_3^6 x \ln x \, dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x+1}{x}$.

Вариант 12.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-3x+4)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-9x+8}{x^2-8x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-3}{2x^2+5x+4}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3}{5x^2-7}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-2}{x^2-5x+4}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 5x + 7x$;

2) $f(x) = \ln(x^2 + 2) - 4x$;

3) $f(x) = x^2 \cos(4x + 2)$;

4) $f(x) = \frac{x^3}{5 \ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^3 - 4x^2 + 3)dx$;

2) $\int \cos 7x \, dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-4}}$;

4) $\int 7x \sin x \, dx$.

4. Вычислить:

1) $\int_6^{10} \sqrt{7x-6}dx$;

2) $\int_3^6 2x \ln x \, dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x}{x+1}$.

Вариант 13.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-4x+5)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4}{2x^2+6x+5}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4}{6x^2-8}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3}{x^2-6x+5}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 6x+8x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+3)-5x$;

3) $f(x)=x^2\cos(5x+2)$;

4) $f(x)=\frac{x^3}{6\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^5-5x^2+3)dx$;

2) $\int \sin 8x\, dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-6}}$;

4) $\int 8x\cos x\, dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^2 \sqrt{8x-7}dx$;

2) $\int\limits_3^6 3x\ln x\, dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{x+2}$.

Вариант 14.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-5x+6)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-5}{2x^2+7x+6}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5}{7x^2-9}$;

5) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-4}{x^2-7x+6}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 7x+9x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+4)-6x$;

3) $f(x)=x^2\cos(6x+2)$;

4) $f(x)=\frac{x^3}{7\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^4+7x-6)dx$;

2) $\int \cos 8x\, dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-8}}$;

4) $\int 8x\sin x\, dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_2^4 \sqrt{8x-7}dx$;

2) $\int\limits_3^6 4x\ln x\, dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x+2}{x}$.

Вариант 15.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-6x+7)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-6}{2x^2+8x+7}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6}{8x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5}{x^2-8x+7}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 8x+x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+5)-7x$;

3) $f(x)=x^2\cos(7x+2)$;

4) $f(x)=\frac{x^3}{8\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^3-5x^2+4)dx$;

2) $\int \sin 9x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-10}}$;

4) $\int 9x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_4^7\sqrt{8x-7}dx$;

2) $\int\limits_3^6 5x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{x+3}$.

Вариант 16.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-7x+8)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-8x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-7}{2x^2+9x+8}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7}{9x^2-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-6}{x^2-9x+8}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 2x+5x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+6)-8x$;

3) $f(x)=x^2\cos(8x+2)$;

4) $f(x)=\frac{x^3}{9\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^5-5x^2+3)dx$;

2) $\int \cos 9x\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{6x-12}}$;

4) $\int 9x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_7^{11}\sqrt{8x-7}dx$;

2) $\int\limits_3^6 6x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x+3}{x}$.

Вариант 17.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-8x+9)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-9x+8}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-8}{2x^2+x+9}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{x^2-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7}{x^2-3x+2}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 3x + 6x$;

2) $f(x) = \ln(x^2 + 7) - 9x$;

3) $f(x) = x^2\cos(9x + 2)$;

4) $f(x) = \frac{2x^3}{3\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^5 - 4x^4 + 3)dx$;

2) $\int \sin\frac{x}{2}dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{7x-14}}$;

4) $\int\frac{1}{2}x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^8\sqrt{9x-8}dx$;

2) $\int\limits_3^6 7x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x}{x+4}$.

Вариант 18.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-9x+1)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{2x^2-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8}{x^2-4x+3}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 4x + 7x$;

2) $f(x) = \ln(x^2 + 8) - 10x$;

3) $f(x) = x^2\cos(2x + 3)$;

4) $f(x) = \frac{3x^3}{4\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^5 - 5x^3 + 3)dx$;

2) $\int \cos\frac{x}{2}dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{8x-16}}$;

4) $\int\frac{1}{2}x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^9\sqrt{10x-9}dx$;

2) $\int\limits_3^6 8x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x+4}{x}$.

Вариант 19.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-x+3)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{2x^2+2x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{3x^2-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+4}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 5x+8x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+9)-2x$;

3) $f(x)=x^2\cos(3x+3)$;

4) $f(x)=\frac{4x^3}{5\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^5-4x^2+8)dx$;

2) $\int\sin\frac{x}{3}dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x-18}}$;

4) $\int\frac{1}{3}x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_3^8\sqrt{4x+4}dx$;

2) $\int\limits_3^6 9x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x}{x+5}$.

Вариант 20.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-2x+4)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-5x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{2x^2+3x+4}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4x^2-7}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10}{x^2-6x+5}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 6x+9x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+10)-3x$;

3) $f(x)=x^2\cos(3x+3)$;

4) $f(x)=\frac{5x^3}{6\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^5-7x^2+2)dx$;

2) $\int\cos\frac{x}{3}dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-3}}$;

4) $\int\frac{1}{3}x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_0^3\sqrt{4x+4}dx$;

2) $\int\limits_3^6 10x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x+5}{x}$.

Вариант 21.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-3x+5)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-6x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{2x^2+4x+5}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{5x^2-8}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 2x + 6x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+1) - 4x$;

3) $f(x) = x^2\cos(4x+3)$;

4) $f(x) = \frac{6x^3}{7\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^5 - 2x^4 + 3)dx$;

2) $\int \sin\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-6}}$;

4) $\int \frac{1}{4}x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^6 \sqrt{10x-6}\,dx$;

2) $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{2x}{x-1}$.

Вариант 22.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+6)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-9x+8}{x^2-7x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{2x^2+5x+6}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{7x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2}{x^2-6x+5}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 3x + 7x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+2) - 5x$;

3) $f(x) = x^2\cos(5x+3)$;

4) $f(x) = \frac{7x^3}{8\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^5 + 8x^2 + 6)dx$;

2) $\int \cos\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-9}}$;

4) $\int \frac{1}{4}x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_2^4 \sqrt{10x-4}\,dx$;

2) $\int\limits_1^2 2x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x-1}{2x}$.

Вариант 23.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-5x+7)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6}{2x^2+6x+7}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{8x^2-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-3}{x^2-7x+6}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 4x + 8x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+3) - 6x$;

3) $f(x) = x^2\cos(6x+3)$;

4) $f(x) = \frac{8x^3}{9\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^3 - 9x^2 + 5)dx$;

2) $\int \sin\frac{x}{5}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-12}}$;

4) $\int \frac{1}{5}x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^3 \sqrt{8x+1}dx$;

2) $\int\limits_1^2 3x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{2x}{x-2}$.

Вариант 24.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+8)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7}{2x^2+7x+8}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{9x^2-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-4}{x^2-8x+7}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 5x + 9x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+4) - 7x$;

3) $f(x) = x^2\cos(7x+3)$;

4) $f(x) = \frac{3x^3}{2\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^4 + 4x^3 - 9)dx$;

2) $\int \cos\frac{x}{5}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-15}}$;

4) $\int \frac{1}{5}x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_2^3 \sqrt{7x-5}dx$;

2) $\int\limits_1^2 4x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x-2}{2x}$.

Вариант 25.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-7x+9)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-8}{2x^2+8x+9}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-5}{x^2-9x+8}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 6x + 10x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+5) - 8x$;

3) $f(x) = x^2\cos(8x+3)$;

4) $f(x) = \frac{4x^3}{3\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^4 - x^3 + 4)dx$;

2) $\int \sin\frac{x}{6}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-18}}$;

4) $\int \frac{1}{6}x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_4^8 \sqrt{6x+1}dx$;

2) $\int\limits_1^2 5x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{2x}{x-3}$.

Вариант 26.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-x+3)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-9x+8}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-9}{2x^2+9x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{2x^2-6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6}{x^2-3x+2}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 2x + 7x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+6) - 9x$;

3) $f(x) = x^2\cos(9x+3)$;

4) $f(x) = \frac{5x^3}{4\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^4 + x^2 - 4)dx$;

2) $\int \cos\frac{x}{6}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x-21}}$;

4) $\int \frac{1}{6}x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^6 \sqrt{9x-5}dx$;

2) $\int\limits_1^2 6x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x-3}{2x}$.

Вариант 27.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-2x+4)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+3x+5}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{3x^2-7}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7}{x^2-4x+3}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 3x + 8x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+7) - 10x$;

3) $f(x) = x^2\cos(2x+4)$;

4) $f(x) = \frac{6x^3}{5\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^3 - x + 9)dx$;

2) $\int \sin\frac{x}{7}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-24}}$;

4) $\int \frac{1}{7}x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^5 \sqrt{8x-4}dx$;

2) $\int\limits_1^2 7x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{2x}{x-4}$.

Вариант 28.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-3x+5)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{2x^2+4x+6}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{4x^2-8}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8}{x^2-5x+4}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 4x + 9x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+1) - 6x$;

3) $f(x) = x^2\cos(3x+4)$;

4) $f(x) = \frac{7x^3}{6\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^3 - 3x + 7)dx$;

2) $\int \cos\frac{x}{7}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-27}}$;

4) $\int \frac{1}{7}x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_2^6 \sqrt{4x+1}dx$;

2) $\int\limits_1^2 8x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x-4}{2x}$.

Вариант 29.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-4x+6)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-5x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-3}{2x^2+5x+7}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10}{5x^2-9}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+5}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 5x+10x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+2)-7x$;

3) $f(x)=x^2\cos(4x+4)$;

4) $f(x)=\frac{8x^3}{7\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^3-3x^2+6)dx$;

2) $\int\sin\frac{x}{8}\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-4}}$;

4) $\int\frac{1}{8}x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^5\sqrt{3x+1}dx$;

2) $\int\limits_1^2 9x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{2x}{x-5}$.

Вариант 30.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-5x+7)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-9x+8}{x^2-6x+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4}{2x^2+6x+8}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{6x^2-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-10}{x^2-7x+6}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x)=\sin 2x+8x$;

2) $f(x)=\ln(x^2+3)-8x$;

3) $f(x)=x^2\cos(5x+4)$;

4) $f(x)=\frac{9x^3}{8\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int(x^3-7x^2+2)dx$;

2) $\int\cos\frac{x}{8}\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-8}}$;

4) $\int\frac{1}{8}x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^{10}\sqrt{5x-1}dx$;

2) $\int\limits_1^2 10x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x-5}{2x}$.

Вариант 31.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-6x+8)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{2x^2+7x+9}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{7x^2-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+5}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 3x + 9x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+4) - 9x$;

3) $f(x) = x^2\cos(6x+4)$;

4) $f(x) = \frac{2x^3}{5\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^3 - 6x^2 + 8)dx$;

2) $\int \sin\frac{x}{9}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-12}}$;

4) $\int \frac{1}{9}x\cos x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^3 \sqrt{6x-2}dx$;

2) $\int\limits_4^8 x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{3x}{x-1}$.

Вариант 32.

1. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-7x+9)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-8x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6}{2x^2+8x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{8x^2-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-2}{x^2-7x+6}$.

2. Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin 2x + 9x$;

2) $f(x) = \ln(x^2+2) - 8x$;

3) $f(x) = x^2\cos(7x+4)$;

4) $f(x) = \frac{3x^3}{7\ln x}$.

3. Найти:

1) $\int (x^5 - 9x^3 + 5)dx$;

2) $\int \cos\frac{x}{9}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-16}}$;

4) $\int \frac{1}{9}x\sin x\,dx$.

4. Вычислить:

1) $\int\limits_1^4 \sqrt{7x-3}dx$;

2) $\int\limits_4^8 2x\ln x\,dx$.

5. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \frac{x-1}{3x}$.

Вопросы к экзамену

1. Векторы. Равные, противоположные, коллинеарные вектора. Действия над векторами в геометрической форме.
2. Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора. Действия над векторами в координатной форме. Условие коллинеарности двух векторов.
3. Координаты вектора, заданного координатами его начала и конца. Длина вектора. Расстояние между двумя точками.
4. Скалярное произведение векторов, его свойства. Скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме.
5. Прямая линия на плоскости, способы ее задания.
6. Взаимное расположение двух прямых. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
7. Понятие функции, способы задания функции. Производственная функция.
8. Основные свойства функции: область определения, область значения, возрастание и убывание, выпуклость и вогнутость, четность и нечетность, точки максимума, минимума, перегиба.
9. Элементарные и неэлементарные функции. Преобразование графиков функций.
10. Определение предела функции в точке. Теоремы о пределах. Правило вычисления пределов.
11. Функции бесконечно малые и бесконечно большие, их свойства и связь между ними.
12. Бесконечности и операции над ними. Раскрытие неопределенностей.
13. Замечательные пределы. Таблица эквивалентных бесконечно малых. Обобщенный второй замечательный предел.
14. Приращение аргумента и приращение функции. Непрерывность функции в терминах приращения. Исследование функции $y = x^2$ на непрерывность.
15. Понятие производной функции. Правила нахождения производных. Таблица производных основных элементарных функций.
16. Геометрический, механический и биологический смыслы производной.
17. Общий план исследования функции с помощью производных. Признаки возрастания и убывания функции. Нахождение точек экстремума. План исследования.
18. Признаки выпуклости и вогнутости функции. Нахождение точек перегиба. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
19. Дифференциал функции. Связь дифференциала с производной. Таблица дифференциалов. Геометрический смысл дифференциала. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
20. Понятие неопределенного интеграла. Правила интегрирования. Таблица интегралов основных функций.
21. Приемы интегрирования.
22. Понятие определенного интеграла.

23. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла. Приложения определенного интеграла.
24. Несобственный интеграл и его виды.
25. Элементы комбинаторики.
26. Событие и его виды. Классическое определение вероятности.
27. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
28. Теорема полной вероятности. Формулы Байеса.
29. Формулы Бернулли и Пуассона.
30. Асимптотические локальная и интегральная теоремы Лапласа.
31. Случайные величины и их виды. Закон распределения ДСВ. Числовые характеристики ДСВ.
32. Интегральная функция распределения случайной величины и ее свойства.
33. Дифференциальная функция распределения НСВ, ее свойства. Числовые характеристики НСВ.
34. Нормальный закон распределения. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило трех сигм.
35. Кривая Гаусса. Влияние параметров a и σ на вид нормальной кривой.
36. Математическая статистика. Генеральная и выборочная совокупности. Репрезентативная выборка. Способы отбора статистического материала.
37. Построение полигона и гистограммы.
38. Выборочные числовые характеристики.
39. Доверительный интервал, надежность.
40. Две основные задачи теории корреляции. Корреляционная зависимость. Корреляционная таблица.
41. Линейная корреляция. Эмпирическая и теоретическая линии регрессии. Метод наименьших квадратов.
42. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства.
43. Понятие о нелинейной и множественной корреляции.
44. Статистическая проверка статистических гипотез. Нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы. Ошибки первого и второго рода.
45. Статистические критерии. Критическая область. Критические точки. Мощность критерия.

Список литературы

1. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. – М.: Наука, 1983.
2. Зайцев И. А. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 2004. – 400 с.
3. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1959. – 359 с
4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.:Наука, 1973. – 640с.

Учебное издание

Мещерина Елена Владимировна

Методическое пособие по математике

Подписано в печать 05.04.2011
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 2,44. Печать оперативная.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Заказ № 4015. Тираж 100 экз.

Издательский центр ОГАУ. 460795, г. Оренбург,
ул. Челюскинцев, 18. Тел.: (3532) 77-61-43