Н.А. Спиридонова

Е.В. Липилина

Функции, их свойства и графики в задачах

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Спиридонова Н.А., Липилина Е.В.

Функции, их свойства и графики в задачах

Учебно-методическое пособие

Оренбург
Издательство ОГПУ
2010

УДК 518.35 (07)
С 72
ББК 22.161.5я7

Рецензенты:

В.И. Каширина **–** старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики ОГПУ

М.И. Черемисина **–** кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры и истории математики ОГПУ

С 72 **Спиридонова Н.А., Липилина Е.В. Функции, их свойства и графики в задачах:** учебно-методическое пособие / Н.А. Спиридонова, Е.В. Липилина – Оренбург: Издательство ОГПУ, 2010. – 98 с.

УДК 518.35 (07)
ББК 22.161.5я7

Содержание

Введение

Тема «Функции и их свойства» является одной из основных для всего курса математики. С ней связаны такие важные темы как решение уравнений и неравенств, причем решение неравенств вызывает большие трудности, чем решение уравнений. Для решения рациональных алгебраических неравенств удобен метод интервалов. Этот метод применяют и при решении неравенств, содержащих трансцендентные функции. При этом заменяют трансцендентное неравенство более простым равносильным неравенством на основании следующих рассуждений:

если левая часть простейшего трансцендентного неравенства представима в виде разности значений строго монотонной трансцендентной функции на некотором множестве из ОДЗ (*или на ОДЗ*), *то на этом множестве неравенство можно заменить равносильным неравенством, левая часть которого выражается через разность значений аргумента.*

Например:

1. $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \end{cases}$

в частности, $a(x)^{f(x)} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ (a(x)-1)\cdot f(x) > 0, \end{cases}$

$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases}$

2. $\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) < 0, \end{cases}$

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0, \end{cases}$$

в частности, $\log_{a(x)} f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-1) > 0, \end{cases}$

$$\log_{a(x)} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-1) \geq 0. \end{cases}$$

Аналогично для неравенств противоположного смысла.

Кроме этого, при решении задач нередко бывают полезны следующие неравенства:

1. Неравенство, связывающее между собой среднее арифметическое и среднее геометрическое неотрицательных чисел.

Среднее арифметическое любых двух неотрицательных чисел *a* и *b* не меньше их среднего геометрического

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(равенство при $a=b$),

его модификации:

$$\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ a + \frac{1}{a} \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a + \frac{1}{a} \leq -2 \end{cases} \end{array} \right.,$$

причем: $\begin{array}{c} a + \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 1 \\ a + \frac{1}{a} = -2 \Leftrightarrow a = -1 \end{array};$

$$\left|a+\frac{b}{a}\right| \geq 2\sqrt{b}\ (b \geq 0).$$

Неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$ можно обобщить на любые n неотрицательных чисел.

Среднее арифметическое любых n неотрицательных чисел a_1, a_2, …, a_n не меньше их среднего геометрического

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

(неравенство Коши), причем, равенство выполняется только при равенстве всех чисел между собой: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Неравенство Бернулли.

1) $(1 + x)^n \geq 1 + xn$ $(n \in \mathbf{N}, x \geq -1)$, причем равенство возможно только при $n = 1$ или $x = 0$;

2) $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ $(\alpha \geq 1, x \geq -1)$, причем равенство достигается только при $\alpha = 1$ или $x = 0$;

3) $(1 + x)^\alpha \leq 1 + x\alpha$ $(0 < \alpha < 1,\ x \geq -1)$, причем равенство возможно только при $x = 0$;

3. $e^x \geq 1 + x$ (равенство только при $x = 0$);

4. $e^{x-1} \geq x$;

5. $\ln(1 + x) \leq x$ $(x > -1)$;

6. $\ln x \leq x - 1$ $(x > 0)$.

Упражнение. Докажите эти неравенства и выясните, при каких значениях x последние из них обращаются в равенства!

§ 1. Понятие функции

Пусть даны два множества X и Y действительных чисел.

Определение. Говорят, что на множестве X задана ***числовая функция*** $y = f(x)$, если указано правило f, по которому каждому числу $x \in X$ можно поставить в соответствие единственное число $y \in Y$.

При этом переменную x называют независимой переменной, а y – зависимой переменной.

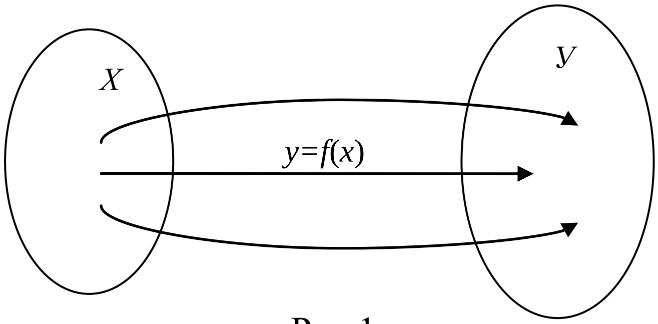


Рис.1

Латинская буква f – начальная буква слова functio [функция].

Определение. Множество X называют ***областью определения*** функции. Обычно область определения функции обозначают $D(y)$ или $D(f)$.

Определение. Множество всех чисел $y \in Y$, для каждого из которых существует число x такое, что $f(x) = y$, называют ***множеством значений*** функции и обозначают $E(y)$ или $E(f)$.

$$E(y) = \left\{ f(x) \in Y,\ x \in X \right\}.$$

Для хорошо известных и наиболее часто встречающихся функций употребляются специальные символы: $\lg x$, $\sin x$, $\arccos x$ и другие.

Функцию считают заданной, если известны:

1) ее область определения;

2) закон соответствия, то есть правило, при помощи которого по данному значению независимой переменной находят соответствующее ему значение функции.

Заметим, что общее математическое понятие «функция» включает и функции, заданные на любых множествах. Например, любому треугольнику на координатной плоскости соответствует единственное число, выражающее его площадь.

Определение. Графиком функции $y = f(x)$ с областью определения $D(y) \subseteq \mathbf{R}$, называют множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in D(y)$.

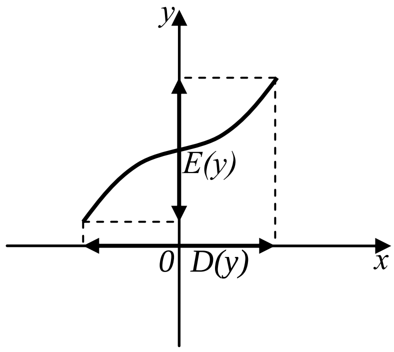


Рис. 2

<u>*Заметим*</u>, что не для всякой функции можно изобразить график. Примером этого является функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \text{ - рационально,} \\ 0, \text{если } x \text{ - иррационально.} \end{cases}$$

На рисунке показаны графики двух функций. (Рис. 3)

$$y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{x^2 + 4x - 5}$$

Они задаются очень похожими формулами, но графики четко

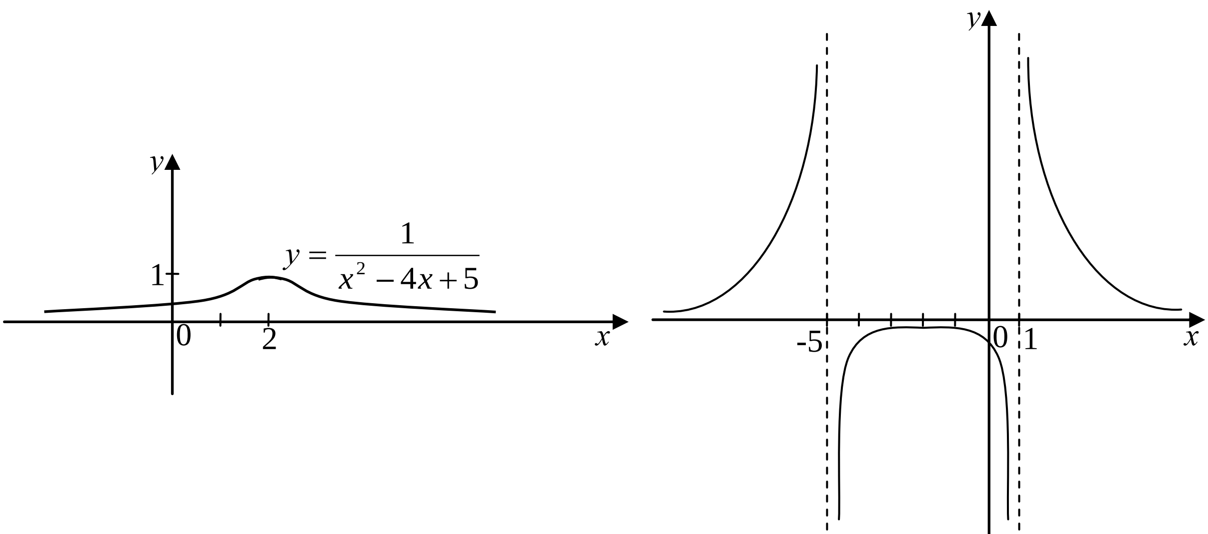


Рис. 3

иллюстрируют различия в поведении этих функций.

Определение. Две функции называют ***равными***, если они имеют:

1) одинаковые области определения;

2) один и тот же закон соответствия.

***Пример* 1**. Рассмотрим на промежутке $(-1; 1)$ функции $f(x) = x - 1$ и $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$. Эти функции равны, так как:

1) $D(f) = D(g) = (-1; 1)$;

2) $\dfrac{x^2-1}{x+1} = x - 1$ для любого x из промежутка $(-1; 1)$.

***Пример* 2**. Рассмотрим на луче $(-\infty; 0]$ функции $f(x) = x + |x| + 3$ и $g(x) = 3$. Они равны, так как:

1) $D(f) = D(g) = (-\infty; 0]$;

2) $x + |x| + 3 = 3$ для любого x из промежутка $(-\infty; 0]$.

Основные способы задания функции

Основными способами задания функции являются *аналитический*, *графический*, *табличный* и *описательный*.

Примером описательного (или словесного) способа задания функции может служить функция $E(x) = [x]$, («антье от x») или целая часть x. Ее описывают обычно словами: «Наибольшее целое число, не превосходящее x».

Например: $[5,752] = 5$; $[10] = 10$; $[0,7] = 0$; $[-0,7] = -1$.

Остановимся на наиболее распространенном и информативном способе задания. Это – *аналитический* способ, то есть задание функции формулой, указывающей последовательность математических действий над независимой переменной x для получения значения $f(x)$ этой функции.

Преимущества аналитического способа:

а) сжатость, компактность задания;

б) возможность вычисления значения функции для любого значения независимой переменной из области определения (значения многих функций, например, $y = \sin x$, $y = \lg x$, мы пока умеем находить только при помощи таблиц);

в) и, самое главное, возможность применения к данной функции аппарата математического анализа, так как он наиболее приспособлен именно к аналитической форме задания функций.

Наиболее распространены следующие *формы аналитического задания* функции:

1) <u>явная</u> форма, то есть формулой $y = f(x)$, позволяющей напрямую найти значение функции по значению аргумента.

***Пример* 3**. а) $y = \dfrac{x^2 + 5x}{3 + |x|}$; б) $y = \sin 3x$;

в) $y = \begin{cases} 1, \text{если } x \in \mathbf{Q} \\ 0, \text{если } x \in \mathbf{I} \end{cases} = D(x)$

г) $y = \begin{cases} -1, \text{если } x < 0 \\ 0, \text{если } x = 0 \\ 1, \text{если } x > 0 \end{cases} = \operatorname{sign} x$ Эту функцию называют «знак числа x», читается «сигнум x» и обозначается $\operatorname{sign} x$;

2) <u>неявная</u> форма – задание функции в виде уравнения $F(x, y) = 0$, связывающего значения функции y и аргумента x. Если это уравнение удается разрешить относительно y, то есть представить в виде $y = f(x)$, то получим ту же функцию, но уже заданную *явным* аналитическим способом.

Например, соотношения $x^2 + y^3 = 1$ и $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$ задают одну и ту же функцию;

3) <u>параметрическая</u> форма, то есть переменные x и y выражаются через некоторую переменную t, называемую параметром: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$.

Параметрическая форма задания функции часто используется в физике. При этом x и y представляют собой координаты точки, а $t \in T \subseteq \mathbf{R}$ – время.

Если в параметрических уравнениях удается исключить параметр t, то придем к явной или неявной форме аналитического задания функции.

***Пример* 4**. Из соотношений

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \text{ в которых } x \in [-2; 2], y \in [0; 2], t \in [0; \pi]$$

исключением параметра t получим уравнение $x^2 + y^2 = 4$. Выразив y из уравнения, придем к явному заданию функции $y=\sqrt{4-x^2}$. Таким образом, мы получили три разные формы записи уравнения верхней полуокружности радиуса 2 с центром в начале координат.

Рассмотрим примеры, способствующие лучшему пониманию аналитического способа задания функции.

***Пример* 5**. Дана функция $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Найдем: а) $f(1-x)$; б) $\dfrac{1}{f(x)}$; в) $2f(3x) + 4$.

Решение. $D(f) = (-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$.

а) $f(1-x)=\dfrac{(1-x)-1}{(1-x)+1}=\dfrac{-x}{2-x}$. Функция $f(1-x)$ определена при $x \neq 2$. Ее область определения можно легко найти, зная область определения функции $f(x)$:

$$1-x\neq-1 \Leftrightarrow x\neq 2.$$

б) $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{x+1}{x-1}$. Эта функция определена для всех x, кроме $x = 1$ и $x = -1$.

в) $2f(3x)+4=2\cdot\dfrac{(3x)-1}{(3x)+1}+4=\dfrac{6x-2+12x+4}{3x+1}=\dfrac{18x+2}{3x+1}$. Данная функция определена при $x\neq-\dfrac{1}{3}$.

***Пример* 6**. Известно, что $f(x-2) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Найдем: а) $f(-1)$; б) $f(x)$; в) $\dfrac{f(x-1)}{f(2x)+1}$.

Решение. Если найти $f(x)$, то нетрудно выполнить задания а) и в).

Рассмотрим два способа решения этой задачи.

1 способ. Выражение для $f(x-2)$ тождественно преобразуем, выделив разность $(x-2)$:

$$\frac{x}{x^2+1}=\frac{x-2+2}{(x-2)^2+4x-4+1}=\frac{(x-2)+2}{(x-2)^2+4(x-2)+5}.$$

Получили: $f(x-2)=\dfrac{(x-2)+2}{(x-2)^2+4(x-2)+5}$, тогда $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4x+5}$.

2 способ. Аргумент $x-2$ обозначим через z: $z=x-2$, тогда $x=z+2$ и $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+2)^2+1}=\dfrac{z+2}{z^2+4z+5}$ или $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4x+5}$.

Теперь легко выполнить остальные пункты задания.

а) $f(-1)=\dfrac{-1+2}{(-1)^2+4(-1)+5}=\dfrac{1}{2}$.

в) $$\frac{f(x-1)}{f(2x)+1}=\frac{\dfrac{x-1+2}{(x-1)^2+4(x-1)+5}}{\dfrac{2x+2}{(2x)^2+4(2x)+5}+1}=\frac{(x+1)(4x^2+8x+5)}{(x^2+2x+2)(4x^2+10x+7)}.$$

Вопросы для самоконтроля

Одну или различные функции задают следующие формулы:

а) $f(x)=x$ и $g(x)=\sqrt{x^2}$;

б) $f(x)=1$ и $g(x)=x^0$;

в) $f(x)=x$ и $g(x)=2^{\log_2 x}$;

г) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x^2$ и $g(x)=2\log_{\frac{1}{2}} x$;

д) $f(x)=\log_{x^2} x^2$ и $g(x)=1$;

е) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$ и $g(x)=\sqrt{x^2}$;

ж) $f(x)=x$ и $g(x)=(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)$;

з) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$ и $g(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$?

Задания

1. Приведите примеры функций: а) числовых; б) не являющихся числовыми.

2. Приведите примеры числовых функций, для которых область определения D и множество значений E удовлетворяют условиям:

а) $D = E$, $E = \mathbf{R}$; б) $D = \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}$; в) $D \subset \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}$.

3. $\varphi(t) = t^3 + 1$ Найдите: $\varphi(t^2)$ и $[\varphi(t)]^2$.

4. $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$. Докажите, что $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

5. $f(x) = \sin x - \cos x$. Докажите, что $f(1) > 0$.

6. $\psi(x) = \lg x$. Докажите, что $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$.

7. $F(z) = a^z$.

а) Докажите, что при любом z справедливо соотношение $F(-z) \cdot F(z) - 1 = 0$.

б) Докажите, что $F(x) \cdot F(y) = F(x + y)$.

8. Дано: $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Найдите все корни уравнения

а) $f(x) = f(0)$; б) $f(x) = f(-1)$.

9. $F(x) = x^2 + 6$; $\varphi(x) = 5x$. Найдите все корни уравнения $F(x) = |\varphi(x)|$.

10. $f(x) = x + 1$; $\varphi(x) = x - 2$. Решите уравнение $|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|$.

11. Найдите значения a и b в выражении функции $f(x) = ax^2 + bx + 5$, для которых справедливо тождество $f(x + 1) - f(x) \equiv 8x + 3$.

12. Для всех значений x имеет место равенство $f(2 - 3x) = 4x - 1$. Найдите $f(-2x + 4)$.

Ответы: **3**. $t^6 + 1$; $t^6 + 2t^3 + 1$. **8**. а) 0; 2; б) −1; 3. **9**. −3; −2; 2; 3. **10**. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. **11**. $a = 4$; $b = -1$. **12**. $\frac{8}{3}x - \frac{11}{3}$.

§ 2. Сложная функция

Функции, с которыми приходится иметь дело на практике, в большинстве своем являются сложными. Это понятие очень важно в математике.

Начнем с примера.

Рассмотрим две функции:

$y = x^3$	$y = (2x+1)^3$

Обе функции определены при любом действительном значении x. Взяв произвольное число x_0, получим соответствующее значение функции $y_0 = y(x_0)$,

возведя x_0 в третью степень.	вычислив прежде значение выражения $2x + 1$, а потом уже возведя его в третью степень.

Это можно записать следующим образом:

$x \to x^3$	$x \to 2x+1 \to (2x+1)^3$ В этом случае функцию можно задать цепочкой равенств: $y(z) = z^3$ и $z(x) = 2x + 1$,

то есть y является функцией аргумента z: $y = f(z)$, а аргумент z, в свою очередь, является функцией $g(x)$ аргумента x. Тогда функцию $y(x) = f(g(x))$ называют *сложной функцией*.

Определение. Пусть даны три множества действительных чисел X, Z и $У$, на которых заданы функции $z = g(x)$ и $y = f(z)$. Тогда закон, ставящий в соответствие каждому числу $x \in X$ единственное число $y \in У$ такое, что $z = g(x)$ и $y = f(z)$, называют ***сложной функцией*** (или композицией функций $y = f(z)$ и $z = g(x)$) и обозначают символом $y = f(g(x))$ (или $y = f \circ g$).

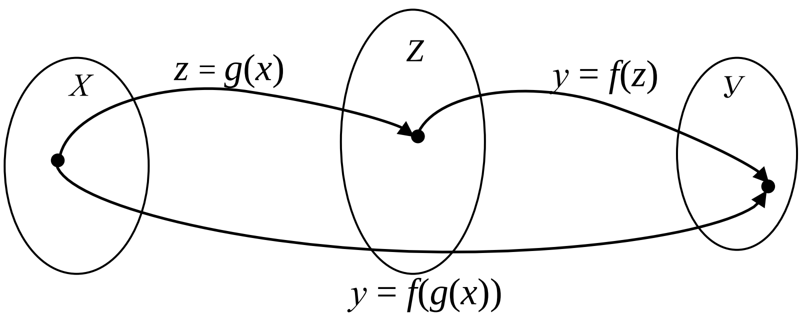


Рис. 4

При этом $z = g(x)$ называют *промежуточным аргументом*.

***Пример* 1**. Даны функции $f(x) = 2 - 3x$ и $g(x) = x^2 + 1$. Найдем $f(g(x))$ и $g(f(x))$.

Решение. $f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2 - 3(x^2 + 1) = -3x^2 - 1$

$g(f(x)) = g(2 - 3x) = (2 - 3x)^2 + 1 = 9x^2 - 12x + 5$

<u>Заметим</u>, что $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Функции f и g могут образовывать сложную функцию $y = f(g(x))$, если пересечение области определения функции f с областью значений функции g – не пустое множество: $D(f) \cap E(g) \neq \emptyset$.

***Пример* 2**. По графику функции $y = \log_{0,5}(ax^2 + bx + c)$ (Рис. 5) определим знаки коэффициентов a, b, c.

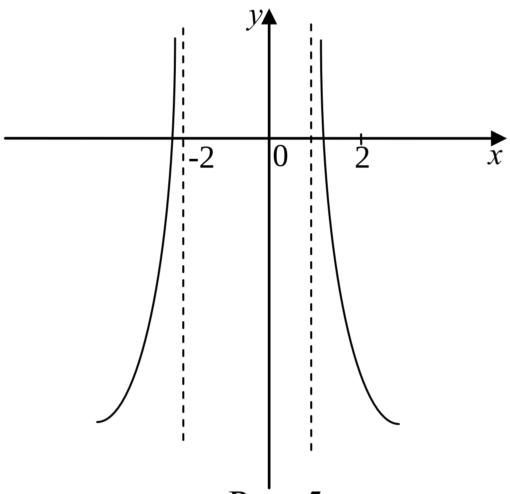


Рис. 5

Решение. Знак коэффициента c можно определить, например, так: функция в точке $x = 0$ не определена, значит, $c < 0$. Кроме того, функция не определена в любой точке промежутка между вертикальными асимптотами, из чего следует, что квадратный трехчлен на этом промежутке отрицателен, то есть ветви параболы направлены вверх, откуда $a > 0$. Наконец, заметим, что модуль отрицательного корня больше положительного, следовательно, число $\frac{b}{a}$ положительно, откуда $b > 0$.

Ответ: $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.

***Пример* 3**. Найдем значение функции $g(4)$, если известно, что $f(2x - 1) = x - 3$ и $f(g(x)) = 2x - 5$.

Решение. Пусть $2x - 1 = y \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$.

Найдем $f(y)$: $f(y) = \frac{y+1}{2} - 3$.

Обозначив y за x, получим $f(x) = \frac{x+1}{2} - 3$.

Вычислим $f(g(4))$: $f(g(4)) = \frac{g(4)+1}{2} - 3$.

С другой стороны $f(g(4)) = 2 \cdot 4 - 5 = 3$.

Решая уравнение $\frac{g(4)+1}{2} - 3 = 3$, получим $g(4) = 11$.

Ответ: 11.

***Пример* 4**. Решим неравенство $f(f(x)) \geq (f(x))^2$, где $f(x) = 2x^2 - 1$.

Решение. Составим $f(f(x)) = 2(2x^2 - 1)^2 - 1$.

Получаем неравенство $2(2x^2 - 1)^2 - 1 \geq (2x^2 - 1)^2$. ОДЗ: $\forall x \in \mathbf{R}$.

Перейдем к равносильному неравенству:

$$(2x^2-1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow \left|2x^2-1\right| \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-1 \geq 1 \\ 2x^2-1 \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 \geq 1 \\ x^2 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \cup \{0\}$.

Задания

1. Для функций а) $f(x) = |x|$ и $g(x) = 1 - x$;

б) $f(x) = \lg x$ и $g(x) = \sqrt{x}$

найдите их композиции $f \circ g$ и $g \circ f$. Укажите $D(f \circ g)$, $E(f \circ g)$, $D(g \circ f)$, $E(g \circ f)$.

2. Представьте функцию $F(x) = 2^{x^2-1}$ в виде композиции более простых функций.

3. Найдите область определения композиции функций $y(z) = \sqrt{4 - 2^z}$, $z(x) = x^2 - 3x + 2$.

4. Найдите область определения функции $f(x) = \sin \ln \frac{1}{2x-3}$.

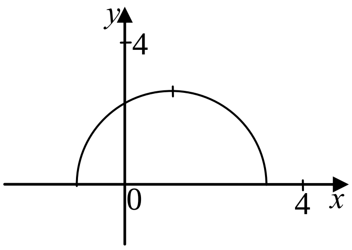


Рис. 6

5. По графику функции $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, изображенному на рисунке 6 определите знаки коэффициентов a, b, c.

Ответы: **1.** а) $|1 - x|$, $D(f \circ g) = \mathbf{R}$, $E(f \circ g) = [0; +\infty)$, б) $1 - |x|$, $D(g \circ f) = \mathbf{R}$, $E(g \circ f) = (-\infty; 1]$; **3.** $[0; 3]$; **4.** $(1{,}5; +\infty)$; **5.** $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$.

§ 3. Обратная функция

Пусть на некотором множестве $D(f)$ задана функция $y = f(x)$ и $E(f)$ – множество ее значений.

Если эта функция разным значениям аргумента $x \in D(f)$ ставит в соответствие разные значения $y \in E(f)$, то есть для $x_1 \in D(f)$, $x_2 \in D(f)$ и $x_1 \neq x_2$ выполняется условие $f(x_1) \neq f(x_2)$, то можно рассмотреть другую функцию, обратную к f.

Определение. Функцию, определенную на множестве $E(f)$ и принимающую в каждой точке y этого множества единственное значение $x \in D(f)$ такое, что $y = f(x)$, называют функцией, ***обратной*** к $y = f(x)$ и обозначают символом $x = f^{-1}(y)$.

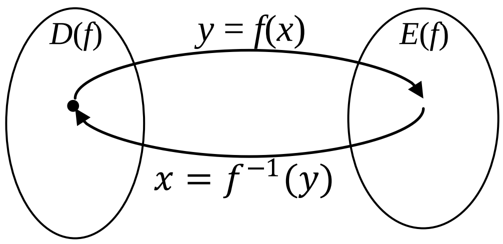


Рис. 7

Графики функций $x = f^{-1}(y)$ и $y = f(x)$ совпадают, так как в обоих случаях точки $(x; y)$, расположенные на графике, удовлетворяют одному и тому же соотношению.

Принято вводить стандартное обозначение для зависимой и независимой переменных и записывать обратную функцию в виде $y = f^{-1}(x)$.

Заметим, что:

- область определения функции f является множеством значений обратной функции f^{-1}, а множество значений функции f – областью определения функции f^{-1}:

$$D(f) = E(f^{-1}),$$
$$E(f) = D(f^{-1});$$

- функция, обратная к обратной – это исходная функция, то есть функции f и f^{-1} – взаимно-обратные и

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x;$$

- графики взаимно-обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (прямой $y = x$).

Алгоритм нахождения функции, обратной к функции y = f(x) на множестве X

1. Убедиться в том, что функция $y = f(x)$ обратима на множестве X.
2. Из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.
3. В полученном равенстве поменять местами x и y.

***Пример* 1**. Найдем функцию, обратную функции $f(x) = 5 - 2x^3$.

Решение. $D(f) = \mathbf{R}$; $E(f) = \mathbf{R}$.

1. Возьмем значения $x_1 \neq x_2$. Рассмотрим разность соответствующих значений функции:

$$f(x_1) - f(x_2) = (5 - 2x_1^3) - (5 - 2x_2^3) = 2(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) \neq 0,$$

так как $x_1 \neq x_2$ и $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 \neq 0$ (неполный квадрат суммы). Значит, двум *разным* значениям x отвечают *разные* значения y, поэтому существует обратная функция.

2. Разрешим уравнение $y = 5 - 2x^3$ относительно x:

$$x = \sqrt[3]{\frac{5-y}{2}}.$$

Теперь по любому значению y можно найти x, при котором это значение получено.

3. Обозначим независимую переменную буквой x, а зависимую – буквой y. Тогда обратная функция примет вид

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{5-x}{2}}, \quad \text{где } D(f^{-1}) = \mathbf{R};\ E(f^{-1}) = \mathbf{R}.$$

***Пример* 2**. Найдем функцию, обратную функции

$$f(x) = \sqrt[4]{x-3} + \sqrt[6]{9-x^2} + x^3.$$

Решение. Найдем область определения функции: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ |x| \leq 3 \end{cases}$. Отсюда $D(f)=\{3\}$. Значит, $f(3) = 27$, для остальных значений x данная функция не определена. Поэтому обратная функция $y = 3$ при $x = 27$.

Упражнение. Что представляют собой графики этих взаимно-обратных функций?

***Пример* 3**. Найдем функцию, обратную функции $y = 4x^2 - 4x + 4$.

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, но в области определения функция не имеет обратной, так как $y(0) = y(1)$. В области определения данной функции $y = (2x-1)^2 + 3$ можно выделить два промежутка $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, в каждом из которых <u>двум разным значениям x соответствуют два разных значения y</u>. Поэтому <u>на каждом</u> из этих двух промежутков функция $y = (2x-1)^2 + 3$ имеет обратную.

а) Решим задачу на луче $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. Множество значений функции $E(y) = [3; +\infty)$.

- Из уравнения $4x^2 - 4x + 4 - y = 0$ выразим x.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16+4y}}{4} \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{y-3}}{2};\ x_2 = \frac{1+\sqrt{y-3}}{2}.$$

Поскольку $x \leq \frac{1}{2}$, выбираем $x = \frac{1-\sqrt{y-3}}{2}$.

- Переименовав переменные, получим

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1-\sqrt{x-3}}{2}, \quad x \in [3; +\infty).$$

б) На луче $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ обратная функция

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1+\sqrt{x-3}}{2}, \quad x \in [3; +\infty).$$

***Пример* 4**. Выясним, при каких значениях параметров a и b линейная функция $y = ax + b$ имеет обратную и совпадает с ней.

Решение. Для существования обратной функции двум различным x_1 и x_2 должны соответствовать разные значения функции, то есть $y(x_1) - y(x_2) \neq 0$.

Составим разность

$$y(x_1) - y(x_2) = a(x_1 - x_2) \Rightarrow y(x_1) - y(x_2) \neq 0 \text{ при } a \neq 0.$$

Итак, обратная функция существует при $a \neq 0$ и равна $y = \frac{x-b}{a}$.

Исходная функция совпадает с обратной, если для *любого* x справедливо условие

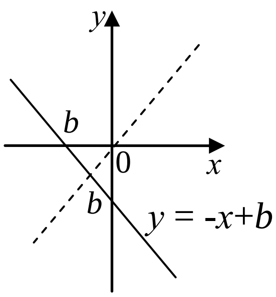


Рис. 8

$$ax + b = \frac{x-b}{a}$$

или

$$a^2x - x + ab + b = 0 \Leftrightarrow x(a^2 - 1) + b(a + 1) = 0.$$

Это выполняется при любом значении x, если $\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ b(a+1) = 0 \end{cases}$,

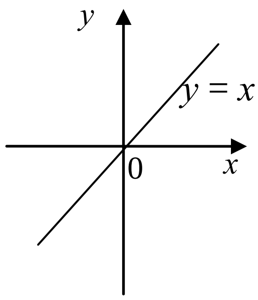


Рис. 9

откуда $\begin{cases} a = -1 \\ -\infty < b < +\infty \end{cases}$ (Рис. 8) или $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ (Рис. 9).

Заметим, что одним из методов построения графика функции служит построение графика обратной функции. Это уместно, если построение графика обратной функции значительно проще, чем построение графика исходной функции. Тогда строят график обратной функции и симметрично отражают его относительно биссектрисы $y = x$.

***Пример* 5**. Построим график функции $f(x) = 2 - \sqrt{1-x}$.

Решение. $D(f) = (-\infty; 1], E(f) = (-\infty; 2]$.

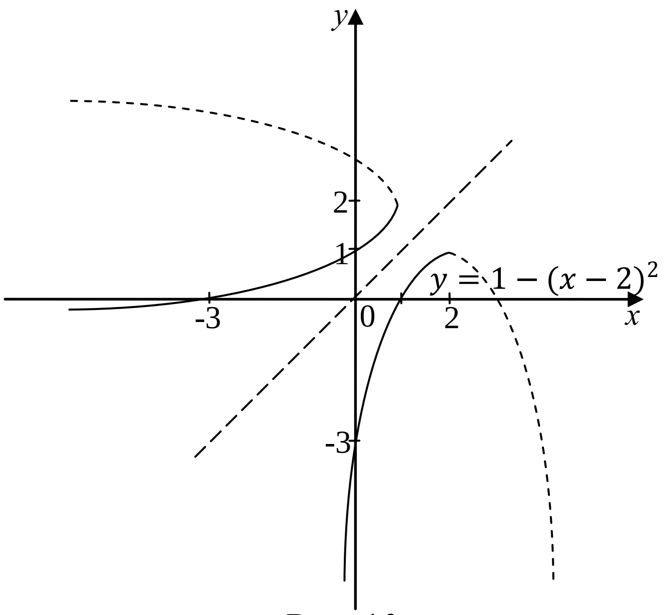


Рис. 10

Функция возрастающая на $D(f)$, значит, для нее можно найти обратную. Ею будет функция

$$f^{-1}(x) = 1 - (x-2)^2:$$

$D(f^{-1}) = (-\infty; 2]$ и

$E(f^{-1}) = (-\infty; 1]$.

Построим ее график и отразив его относительно прямой $y = x$, получим график функции $y = 2 - \sqrt{1-x}$. (Рис. 10)

Достаточно часто применяют более простой прием построения графика. Получив уравнение $x = 1 - (2-y)^2$, изображают график функции $x(y) = 1 - (2-y)^2$ (x – функция, y – аргумент) и, учитывая первоначальные ограничения, выбирают ветвь параболы, для которой $y \le 2$.

Задания

1. Покажите, что функция $f(x) = \frac{2x-1}{3x-2}$ обратна самой себе. Какова особенность графика функции обратной самой себе?

2. Задайте графически несколько функций, определенных на отрезке [1; 2] и с множеством значений а) [1; 2]; б) [0; +∞), имеющих обратную функцию.

3. Даны функции $f_1(x) = x^2,\ x \in (-\infty; +\infty)$,

$$f_2(x) = x^2,\ x \in [0; 2],$$

$$f_3(x) = x^2,\ x \in [-2; 3].$$

Определите, какая из данных функций имеет обратную. Запишите для обратной функции соответствующее аналитическое выражение. Укажите область определения и множество значений обратной функции. Постройте графики данной и обратной функций.

4. Выясните, существует ли обратная функция для функции

а)$f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \le 0 \\ x,\ x > 0 \end{cases}$; б)$f(x) = \begin{cases} x+1,\ 1 \le x < 2 \\ -3x+12,\ 2 \le x \le 3 \end{cases}$;

в)$f(x) = x + 2\sqrt{x}, x \ge 0$.

Если существует, постройте графики данной и обратной функций.

5. Может ли сумма (произведение) двух обратимых функций не иметь обратной? Приведите примеры.

Ответы: **3.** $f_2(x)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $D(f^{-1}) = [0; 4]$, $E(f^{-1}) = [0; 2]$; **4.** а) не существует, б) существует, в) существует; **5.** Может.

§ 4. Нахождение области определения функции, заданной аналитически

Любая функция $y = f(x)$ имеет область определения.

Определение. Областью определения $D(y)$ функции $y = f(x)$ (если это не оговорено особо) называют множество всех значений независимой переменной x, при которых выполнимы все операции, указанные формулой.

При нахождении области определения функций следует помнить, что:

1) такие элементарные функции, как многочлен $y = P_n(x)$, $y = \sqrt[2n-1]{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ определены на всей числовой прямой;

2) область определения остальных основных элементарных функций устанавливается неравенством для аргумента:

$$D\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty);$$
$$D\left(\sqrt[2n]{x}\right)=[0;+\infty);$$
$$D(\log_a x)=(0;+\infty);$$
$$D\left(x^{\frac{m}{n}}\right)=(0;+\infty)\ \text{и}\ [0;+\infty),\ \text{если}\ \frac{m}{n}>0;$$
$$\begin{matrix} D(\arcsin x) \\ D(\arccos x) \end{matrix}=[-1;1];$$
$$D(\operatorname{tg} x)=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}, n\in\mathbf{Z};$$
$$D(\operatorname{ctg} x)=\mathbf{R}\setminus\{\pi n\}, n\in\mathbf{Z}.$$

Большинство функций, с которыми нам приходится работать, являются сложными функциями. Для нахождения их области определения необходимо решать неравенства. Решение многих из них основано на методе интервалов. При применении этого метода особое внимание следует уделять *изолированным* точкам области определения.

Определение. Точку $x_0 \in D(f)$ называют ***изолированной***, если существует интервал, не содержащий ни одной точки из области определения функции, кроме точки x_0.

Пример **1**. Найдем область определения функции

$y=\sqrt{\frac{(x^2-9)(x^2-9x+18)}{x^2-x-2}}$.

Решение. Имеем корень четной степени, поэтому задача о нахождении области определения сводится к решению методом интервалов неравенства

$$\frac{(x^2-9)(x^2-9x+18)}{x^2-x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)(x-3)(x-6)}{(x-2)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2(x+3)(x-6)}{(x-2)(x+1)}\geq 0.$$

Функция $f(x)=\frac{(x^2-9)(x^2-9x+18)}{x^2-x-2}$ имеет простые корни $x=-3$, $x=6$ и двукратный корень $x=3$. Отметим их и нули знаменателя на числовой прямой. (Рис. 11)

Применив метод интервалов, получим множество решений исходного неравенства.

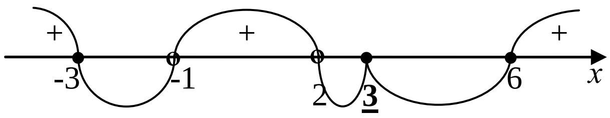


Рис. 11

Ответ: $D(y) = (-\infty; -3] \cup (-1; 2) \cup \{3\} \cup [6; +\infty)$.

При решении подобных неравенств часто учащиеся теряют изолированную точку (в этом случае $x = 3$) области определения.

***Пример* 2**. Найдем $D(y)$ функции $y = \ln\left(\frac{15x+15}{x^2+3x+2} - 6 + x\right)$.

Решение. Условие существования функции выражается неравенством

$$\frac{15x+15}{x^2+3x+2} - 6 + x > 0.$$

Выполнив преобразования, перейдем к неравенству, равносильному данному:

$$\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)(x+1)^2(x+2) > 0.$$

Применив метод интервалов, получим множество решений исходного неравенства. (Рис. 12)

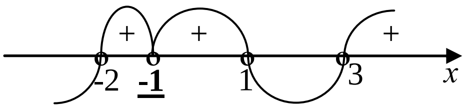


Рис. 12

Ответ: $D(y) = (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$.

При решении этого задания нужно обратить внимание на то, что $x = -1$ *не является* решением исходного неравенства.

Заметим, что неравенство можно решить по-другому:

$$\frac{15x+15}{x^2+3x+2} - 6 + x > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{15(x+1)}{(x+1)(x+2)} - 6 + x > 0 \;\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{x+2} - 6 + x > 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x+2} > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)(x+2) > 0 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

Решая неравенство системы методом интервалов и учитывая условие $x \neq -1$, приходим к тому же ответу.

***Пример* 3**. Найдем $D(y)$ функции $y=\left(3-x^2-2x\right)^{1/5}+\sqrt[4]{\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}}$.

Решение. Обозначим $y_1 = \left(3-x^2-2x\right)^{1/5}$ и $y_2 = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}}$.

$D(y) = D(y_1) \cap D(y_2)$.

Найдем последовательно $D(y_1)$ и $D(y_2)$.

$$D(y_1){:}\ 3 - x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

$$D(y_2){:}\ \frac{x^2+4x+4}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -1 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Чтобы найти $D(y) = D(y_1) \cap D(y_2)$, решим систему: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x > -1 \end{array}\right. \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$,

откуда $\left[\begin{array}{l} -1 < x \leq 1 \\ \quad x = -2 \end{array}\right.$.

Ответ: $D(y) = (-1; 1] \cup \{-2\}$.

<u>*Замечание*</u>: Учащиеся часто рассуждают так: $\left(3-x^2-2x\right)^{1/5}=\sqrt[5]{3-x^2-2x}$, значит, x – любое действительное число.

Никогда не следует забывать, что $\left(3-x^2-2x\right)^{1/5}=\sqrt[5]{3-x^2-2x}$ только при условии $3-x^2-2x\geq 0$!

***Пример* 4**. Найдем $D(f)$ функции

$$f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot x-\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot 3}+\lg(x^3-2x^2-8x).$$

Решение. Логарифмическая функция определена только для положительных чисел, а квадратный корень – для неотрицательных, поэтому задача сводится к решению **системы** неравенств:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot x-\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot 3\geq 0 \\ x^3-2x^2-8x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x(x-3)\geq 0 \\ x\left(x^2-2x-8\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x\cdot(x-4)(x+2)>0 \end{cases}$$

При условии $x \geq 3$ достаточно решить неравенство $(x - 4) > 0$, из чего следует, что $x > 4$.

Ответ: $D(f) = (4; +\infty)$.

***Пример* 5**. Найдем $D(f)$ функции $f(x)=\lg\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$.

Решение.

$$\begin{cases} x-\sqrt{1-x^2}>0 \\ 1-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}<x \\ |x|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}<x \\ -1\le x\le 1 \end{cases}$$

При $x\in[-1;0]$ полученная система несовместна, так как неравенство $\sqrt{1-x^2}<x$ не имеет решений.

При $x\in(0;1]$ имеем

$$\sqrt{1-x^2}<x \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2<x^2,$$

то есть
$$1-x^2<x^2 \Leftrightarrow x^2>\frac{1}{2} \Leftrightarrow |x|>\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Раскрыв модуль, получим $\begin{cases} x>\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x\le 1 \end{cases}$.

Ответ: $D(f)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$.

***Пример* 6**. Найдем $D(f)$ функции $f(x)=\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}$.

Решение. Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то система неравенств $\begin{cases} \frac{\pi}{2}-\arcsin x \ge 0 \\ |x|\le 1 \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} \arccos x \ge 0 \\ |x|\le 1 \end{cases}$, что выполняется для всех значений $x\in[-1;1]$

Ответ: $D(f)=[-1;\ 1]$.

***Пример* 7**. Найдем $D(f)$ функции $f(x)=\sqrt{\arccos x-\frac{\pi}{3}}$.

Решение. Так как $\frac{\pi}{3}=\arccos\frac{1}{2}$, то условие существования функции запишем следующим образом:

$$\begin{cases} |x|\le 1 \\ \arccos\, x\ge \arccos\frac{1}{2} \end{cases}$$

С учетом того, что $y = \arccos t$ убывает на отрезке $[-1;1]$, данная система равносильна системе $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x \le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le \frac{1}{2}$.

Ответ: $D(f) = \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

***Пример* 8**. Найдем $D(y)$ функции $y = \sqrt{\left(1 + x - e^x\right)(4 - x)}$.

Решение. Функция определена, если выполняется условие

$$\left(1 + x - e^x\right) \cdot (4 - x) \ge 0$$

Поскольку при любом действительном значении x имеем $e^x \ge 1 + x$, причем $e^x = 1 + x \Leftrightarrow x = 0$, то приходим к неравенству

$$4 - x \le 0 \Leftrightarrow x \ge 4.$$

Значит, $D(y) = \{0\} \cup [4; +\infty)$.

***Пример* 9**. Найдем $D(y)$ функции $y = \ln \log_x(4 - x^2)$.

Решение.

$$\log_x(4 - x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3 - x^2) > 0 \\ x > 0 \\ |x| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) < 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \sqrt{3} \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \sqrt{3}.$$

Ответ: $D(y) = \left(1; \sqrt{3}\right)$.

***Пример* 10**. Найдем $D(y)$ функции $y = \sqrt{2 - \sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}$.

Решение.

$$\begin{cases} x \le 1 \\ x \ge -1 \\ \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x} \le 2 \end{cases}$$

Неравенство $\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x} \le 2$ можно решить как иррациональное, но мы решим его, используя неравенство Бернулли

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} (1-x)^{\frac{1}{2}} \le 1-\frac{1}{2}x \\ (1+x)^{\frac{1}{2}} \le 1+\frac{1}{2}x \end{array} \\ \hline (1-x)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}} \le 2 \end{array}.$$

Значит, это неравенство справедливо при всех значениях $x \in [-1; 1]$.

Ответ: $D(y) = [-1; 1]$.

Задания

1. Задайте функцию, область определения которой: 1) ограниченное множество; 2)пустое множество; 3)множество, симметричное относительно начала координат; 4) множество, состоящее из одной точки; 5) конечное множество; 6) бесконечное множество.

2. Приведите пример аналитически заданной функции:

1) определенной только на отрезке $-2 \le x \le 2$;

2) определенной только в интервале $-2 < x < 2$ за исключением точки $x = 0$;

3) определенной на **R**, кроме $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

3. Выпишите действительные значения x, при которых не имеют смысла следующие выражения:

1) $\dfrac{x}{x^3-9x}$;

2) $\dfrac{x+2}{|x|+x}$;

3) $\dfrac{x+1}{2|x|+1}$;

4) $\dfrac{x}{2|x|-3}$;

5) $\dfrac{\ln x}{x^2+1}$;

6) $\dfrac{x+1}{\lg 10x}$;

7) $\dfrac{x}{\sin x}$;

8) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x}$;

9) $\dfrac{x-5}{2^x-5}$;

10) $\dfrac{-2x}{3^x+9}$;

11) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2-2x+1}}{\arccos x}$;

12) $\dfrac{2^{\log_2 x}}{x^2-x+2}$;

13) $\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x}$;

14) $\dfrac{|x|}{\sqrt[6]{\log_{\sqrt{2}} x}}$;

15) $\dfrac{\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{2-x^2}}$;

16) $\dfrac{\sqrt[12]{\arcsin x}}{\sqrt{x^2-2}}$;

17) $\dfrac{x^{-3/4}\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{7}\right)}{2^{|x|}}$.

4. Найдите область существования следующих функций:

1) $y=\log_{\cos x}\sin x$;

2) $y=\log_2\log_3\log_4 x$;

3) $y=\lg(\cos(\lg x))$;

4) $y=\sqrt{(1{,}25)^{1-x^2}-(0{,}4096)^{1+x}}$;

5) $y=\arcsin\left(\frac{-2x+3}{3x+1}\right)$;

6) $y=\frac{\sqrt{(x+1)^2x^2(x-2)}}{\sqrt{x^2-6x+9}}+\frac{1}{3^{\log_3|x-1|}-1}$;

7) $y=\operatorname{tg}(\arcsin x)+\sqrt{\cos(\sin x)}$;

8) $y=\sqrt{(x+2)(1-x+\ln x)}$;

9) $y=\sqrt{\frac{\sqrt[4]{2x-15}}{\lg(x-7)}}$;

10) $y=\sqrt{\frac{(1-|x|)(x^2-x)}{x(x-2)}}$.

Ответы: **3.1)** -3; 0; 3; **3.2)** $(-\infty;\ 0]$; **3.3)** нет таких значений; **3.4)** $-\frac{3}{2};\frac{3}{2}$; **3.5)** $(-\infty;\ 0]$; **3.6)** $(-\infty;\ 0]\cup\{0{,}1\}$; **3.7)** $\pi n, n\in\mathbf{Z}$; **3.8)** $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}; \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; **3.9)** $\log_2 5$; **3.10)** нет таких значений; **3.11)** $(-\infty;\ -1)\cup[1;+\infty)$; **3.12)** $(-\infty;\ 0]$; **3.13)** $|x|>4,\ x=0$; **3.14)** $(-\infty;\ 1]$; **3.15)** $(-\infty;\ 1)\cup(1;+\infty)$; **3.16)** $\mathbf{R}$; **3.17)** $(-\infty;\ 0]\cup\left\{-\frac{\pi}{7}+\pi n, n\in\mathbf{N}\right\}$.

4.1) $(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$; **4.2)** $(4;\ +\infty)$; **4.3)** $\left(10^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n};10^{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right), n\in\mathbf{Z}$; **4.4)** $[-1;\ 5]$; **4.5)** $(-\infty;-4]\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$; **4.6)** $\{-1\}\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$; **4.7)** $(-1;\ 1)$; **4.8)** 1; **4.9)** $\{7{,}5\}\cup(8;+\infty)$; **4.10)** $[-1;0)\cup(0;2)$.

§5. Четные и нечетные функции

Определение. *Множество* D называют ***симметричным*** относительно начала координат, если для любого $x \in D$ противоположное ему число $(-x)$ также принадлежит D.

Примерами множеств, симметричных относительно начала координат являются: 1) числовая прямая; 2) все интервалы вида $(-a;\ a)$ $(a > 0)$; 3) отрезки вида $[-b;\ b]$ $(b > 0)$; 4) множество вида $(-a;\ -b] \cup [b;\ a)$ $(a > 0,\ b > 0)$ и так далее.

Определение. Функцию $f(x)$, заданную на множестве $D(f)$, называют ***четной*** (***нечетной***), если:

1) множество $D(f)$ симметрично относительно начала координат;

2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство: $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, $\boldsymbol{(f(-x) = -f(x))}$.

Функцию, которая не является ни четной, ни нечетной, называют ***функцией общего вида***.

Исследование функции на четность полезно начинать с <u>необходимого</u> условия, то есть с проверки области определения функции на симметричность относительно начала координат.

Пример **1**. Исследуем на четность функцию $y = \frac{x^4}{x+1}$.

Решение. Сразу можно сделать вывод, что имеем функцию общего вида, так как ее область определения $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ не симметрична относительно начала координат.

Пример **2**. Исследуем на четность функцию $f(x) = \sin x$, $x \in [0;\ \pi]$.

Решение. 1) Область определения D_f данной функции не симметрична относительно начала координат, то есть не выполняется необходимое условие, значит, данная функция является функцией общего вида.

***Пример* 3**. Исследуем на четность функцию $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$.

Решение.

1) $D_f = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – симметричное множество относительно точки О (0; 0).

2) Составим выражение для $f(-x)$ и сравним его с выражением для $f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} + \frac{1}{(-x)^4} = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = f(x)$$

Вывод: Так как $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D_f$, то $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$ — четная функция.

***Пример* 4**. Исследуем на четность функцию $f(x) = x + \frac{5}{x + x^3}$.

Решение.

1) $D_f = (-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$ – симметричное множество относительно точки О (0; 0).

2) $f(-x) = (-x) + \frac{5}{(-x)+(-x)^3} = -\left(x + \frac{5}{x+x^3}\right) = -f(x)$

Вывод: Так как $f(x) = -f(x)$ $\forall x \in D_f$, то $f(x) = x + \frac{5}{x+x^3}$ – нечетная функция.

***Пример* 5**. Исследуем на четность функцию $h(x) = \frac{|x+3|}{x-3} + \frac{|x-3|}{x+3}$.

Решение.

1) $D(h) = \mathbf{R}\backslash\{-3;\ 3\}$.

2) Составим $h(-x)$:

$$h(-x) = \frac{|-x+3|}{-x-3} + \frac{|-x-3|}{-x+3} = -\frac{|x-3|}{x+3} - \frac{|x+3|}{x-3} = -\left(\frac{|x-3|}{x+3} + \frac{|x+3|}{x-3}\right) = -h(x)\ \ \forall x \in D(h)$$

Следовательно, $h(x) = \frac{|x+3|}{x-3} + \frac{|x-3|}{x+3}$ — нечетная функция.

При сравнении выражений $f(x)$ и $f(-x)$ не всегда сразу видно, обладает ли функция свойством четности. Тогда к $f(-x)$ применяют тождественные преобразования.

Пример **6.** Исследуем на четность функцию $f(x)=\lg\frac{3x-1}{3x+1}$.

Решение.

1) Найдем $D(f)$. Для этого решим неравенство:

$\frac{3x-1}{3x+1}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{1}{3} \\ x<-\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow D(f)=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}+\infty\right)$ - симметричное множество относительно точки О (0; 0).

2) Составим $f(-x)$:

$$f(-x)=\lg\frac{3(-x)-1}{3(-x)+1}=\lg\frac{-3x-1}{-3x+1}=\lg\frac{3x+1}{3x-1}=-\lg\frac{3x-1}{3x+1}=-f(x)$$

Вывод: $f(-x)=-f(x)\ \forall x\in D(f)$, значит, $f(x)=\lg\frac{3x-1}{3x+1}$ – нечетная функция.

Пример **7.** Исследуем на четность функцию

$$g(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right).$$

Решение.

1) $\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$ при любом действительном значении $x\Rightarrow$ $D(g)=\mathbf{R}$ – симметричное относительно точки О множество.

2) $g(-x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=$ $=-g(x)\ \ \forall x\in D(g)\Rightarrow g(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ – нечетная функция.

Пример **8.** Исследуем на четность функцию $g(x)=\frac{2^x-1}{x\left(2^x+1\right)}$.

Решение.

1) $D(g)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ – необходимое условие выполнено.

$$2)\, g(-x)=\frac{2^{-x}-1}{-x\left(2^{-x}+1\right)}=-\frac{1-2^{x}}{x(1+2^{x})}=\frac{2^{x}-1}{x(2^{x}+1)}=g(x)\ \ \forall x\in D(g)\Rightarrow$$

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{2^{x}-1}{x\left(2^{x}+1\right)}$ четная функция.

Некоторые свойства четных и нечетных функций

Исследовать функцию на четность можно не только по определению, но и с помощью следующих свойств.

***Свойство* 1.** Если две четные функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одну и ту же область определения, то функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ являются четными функциями в этой же области определения.

***Пример* 9**. Исследуем на четность функцию

$$f(x) = |x| + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{2x^4+5x^6}{7x^2+3x^8}.$$

Решение. Функция $f(x)$ с $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;+\infty)$ четная как сумма четных функций $|x|$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$ (см. пример 3), $\dfrac{2x^4+5x^6}{7x^2+3x^8}$ (свойство 1).

***Свойство* 2.** Если две нечетные функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одну и ту же область определения, то функции $f(x)\pm g(x)$ являются нечетными, а функции $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ являются четными функциями в этой же области определения.

***Пример* 10**. Исследуем на четность функцию

$$f(x) = x(x^3 + x^5) - x^4 + \frac{x+\dfrac{5}{x+x^3}}{x^5+x^7}.$$

Решение. Функция $f(x)$ с $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;+\infty)$ четная как сумма четных функций x^4, $x(x^3 + x^5)$ и $\dfrac{x+\dfrac{5}{x+x^3}}{x^5+x^7}$ (свойство 2).

***Свойство* 3.** Пусть одна из функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных на множестве X , четная, а другая нечетная, тогда функции $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) и $\frac{g(x)}{f(x)}$ ($f(x) \neq 0$) нечетные на промежутке X, а функции $f(x) \pm g(x)$ – функции общего вида.

Свойства 1 – 3 упрощают исследование функции на четность.

***Свойство* 4.** Любая функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, симметричном относительно начала координат, может быть представлена в виде суммы двух функций – четной и нечетной, причем **единственным** образом.

Доказательство.

Очевидно, что функция $y = f(-x)$ также определена на симметричном множестве X. Пусть существуют четная функция $f_1(x)$ и нечетная функция $f_2(x)$ такие, что

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \forall x \in \mathrm{X}.$$

Тогда для каждого $x \in X$ $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x)$. Для определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) + f_2(x) \\ f(-x) = f_1(x) - f_2(x), \end{cases}$$

из которой следует, что

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \qquad (1)$$

Следовательно, искомые функции однозначно определяются по данной функции формулами (1). Из этих же формул следует, что искомое представление всегда существует.

Если $f(x)$ – четная функция, то $f(x) = f_1(x)$ и $f_2(x) = 0$.

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $f(x) = f_2(x)$ и $f_1(x) = 0$.

Разумеется, что в этом нет никакого противоречия, так как функция $y(x) \equiv 0$ является одновременно и четной, и нечетной (единственная функция, обладающая таким свойством!).

***Пример* 11**. Представим функцию $f(x) = x\cdot\ln|x| + \dfrac{x-1}{x+1}$ в виде суммы четной и нечетной функций.

Решение.

Воспользуемся формулами (1).

$$f_1(x) = \frac{x\cdot\ln|x| + \dfrac{x-1}{x+1} + (-x)\cdot\ln|-x| + \dfrac{(-x)-1}{(-x)+1}}{2} = \frac{x\cdot\ln|x| + \dfrac{x-1}{x+1} - x\cdot\ln|x| + \dfrac{x+1}{x-1}}{2} =$$

$$= \frac{x^2-2x+1+x^2+2x+1}{2(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Функция $f_1(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ является четной (свойство 1) на множестве $\mathbf{R}\backslash\{-1;\,0;\,1\}$.

$$f_2(x) = \frac{x\cdot\ln|x| + \dfrac{x-1}{x+1} - \left((-x)\cdot\ln|-x| + \dfrac{(-x)-1}{(-x)+1}\right)}{2} = \frac{x\cdot\ln|x| + \dfrac{x-1}{x+1} + x\cdot\ln|x| + \dfrac{x+1}{-x+1}}{2} =$$

$$= \frac{2x\cdot\ln|x| + \dfrac{-x^2+2x-1+x^2+2x+1}{1-x^2}}{2} = \frac{2x(1-x^2)\cdot\ln|x|+4x}{2(1-x^2)} = \frac{x(1-x^2)\cdot\ln|x|+2x}{1-x^2}$$

$f_2(x) = \dfrac{x(1-x^2)\cdot\ln|x|+2x}{(1-x^2)}$ нечетна на множестве $(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,0)\cup(0;\,1)\cup$ $\cup\,(1;\,+\infty)$ как отношение нечетной и четной функций.

Таким образом $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} + \dfrac{x(1-x^2)\cdot\ln|x|+2x}{(1-x^2)}$.

***Пример* 12**. Выясним при каких значениях параметра p функция $f(x) = \sqrt{12-x^2-4x} + 2\sqrt{36-x^2+16x} - \sqrt{x^2-4} + p$ является нечетной.

Решение.

Найдем $D(f)$: $\begin{cases} x^2+4x-12\le 0 \\ x^2-16x-36\le 0 \\ x^2\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\le x\le 2 \\ -2\le x\le 18 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Область определения функции состоит из двух чисел: $x = 2$ и $x = -2$.

$f(2) = 16 + p$; $f(-2) = 4 + p$; $f(x)$ – нечетная, если $f(-2) = -f(2)$, то есть $4 + p = -p - 16 \Leftrightarrow 2p = -20 \Leftrightarrow p = -10$.

Ответ: $p = -10$.

***Пример* 13**. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и нечетна. При $x > 0$ она совпадает с функцией $g(x) = \frac{2x+5}{x-1}$. Какой формулой задается функция $f(x)$?

Решение. При $x < 0$ в силу нечетности функции $f(x)$ имеем

$$f(x) = -g(-x) = -\frac{2(-x)+5}{-x-1} = \frac{-2x+5}{x+1}.$$

При $x = 0$ нечетная функция, определенная на всей числовой прямой, может быть равна только нулю.

Таким образом, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+5}{x-1}, x > 0 \\ \frac{5-2x}{x+1}, x < 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

***Пример* 14**. Функция $f(x)$ – четная. При $x < 0$ она совпадает с функцией $g(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$. Какой формулой задается функция $f(x)$? Решить уравнение $f(x) = 1$.

Решение. Поскольку $f(x)$ – четная, то при $x > 0$ справедливо условие

$$f(x) = f(-x) = \frac{2(-x)+5}{-x-1} = \frac{2x-5}{x+1}.$$

При $x = 0$ четная функция может быть равна любому числу.

Значит, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+5}{x-1}, x < 0 \\ \dfrac{2x-5}{x+1}, x > 0 \\ c, \quad x = 0 \end{cases}$.

Теперь решим уравнение $f(x) = 1$.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{2x+5}{x-1} = 1 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{2x-5}{x+1} = 1 \\ x > 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -6 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ x > 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 6 \end{array} \right..$$

Если положить $C = 1$, то $f(0) = 1$.

***Пример* 15**. При каких значениях параметров a и b функция $f(x)=\sqrt{ax+3}+\sqrt{x+b}$ является четной?

Решение. $D_f:\begin{cases} ax+3 \geq 0 \\ x+b \geq 0. \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} \text{При } a>0 \ D_f = \left[\text{наиб.}\left\{-\dfrac{3}{a}; -b\right\}; +\infty\right] \\ \text{при } a=0 \ \ D_f = [-b; +\infty) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{не симметричные относительно} \\ \text{точки } O(0;0) \text{ множества.} \end{matrix}$$

При $a<0$ $D_f = \left[-b; -\dfrac{3}{a}\right]$.

1) Этот промежуток симметричен относительно начала координат, при условии $\begin{cases} -\frac{3}{a} = -(-b) \\ -b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -3 \\ b > 0. \end{cases}$

2) Поскольку для четной функции $f(-x) = f(x) \ \ \forall x \in D_f$, то $f(b) = f(-b) \Rightarrow \sqrt{ab+3} + \sqrt{2b} = \sqrt{3-ab},$ откуда при условии $ab = -3$ получим $\sqrt{2b} = \sqrt{6} \Leftrightarrow b = 3$ и $a = -1$.

При найденных значениях параметров имеем функцию

$$f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+3},$$

область определения которой $D_f = [-3; 3]$ и $f(-x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x} =$
$= f(x) \ \ \forall x \in D_f$, то есть четную.

Свойства графиков четных и нечетных функций

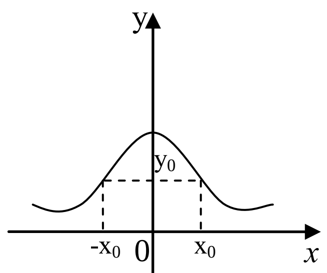


Рис. 13
$y(-x_0) = y(x_0) = y_0$

График **четной** функции симметричен относительно оси Oy. (Рис. 13)

График **нечетной** функции симметричен относительно начала координат. (Рис. 14)

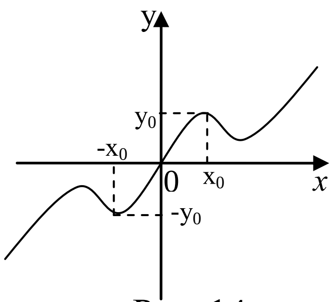


Рис. 14
$y(-x_0) = -y(x_0) = -y_0$

Это свойство облегчает построение графиков функций, так как достаточно построить график только для $x \geq 0$, а потом учесть свойство симметрии графика данной функции.

Упражнение. Докажите, что функция $f(g(x))$, где $g(x)$ – четная функция, четна!

Задания

1. Определите, какие из следующих функций являются четными, нечетными, общего вида.

1) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$;

2) $f(x) = x^3+3\sin x$;

3) $f(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^x+1}$;

4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

5) $f(x) = \sin x + \cos x$;

6) $f(x) = \dfrac{x^3|x+3|}{\sqrt{x^2+6x+9}}$;

7) $f(x) = 2^{x^2} + x$;

8) $f(x) = \log_2 \frac{5x+1}{5x-1}$.

2. Представьте следующие функции в виде суммы четных и нечетных функций в области, где они определены.

1) $f(x) = \sin 5x + 2^x \operatorname{tg} x$;

2) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x}{x^4-1}$;

3) $f(x) = \dfrac{3^x+x^2}{\sin x}$.

3. Определите количество четных функций (n), нечетных функций (m) и функций общего вида (k). В ответ записать $n + 3m + 7k$:

$\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; $\sqrt{\mathrm{c}\quad x\mathrm{o}}$; $\sin(x-8°)\cdot\sin(x+8°)$; 5^x-5^{-x};

$\operatorname{tg}(36°-x)-\operatorname{ctg}(36°-x)$; $\dfrac{x(e^x-1)}{e^x+1}$.

4. Функция $g(x)$ – четная и при $x \leq 0$ совпадает с функцией $f(x) = 3\cos x + 2|x| + 5|x-1|$. Найдите функцию $g(x)$.

5. Нечетная функция f при $x > 0$ задается формулой $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Какой формулой задается эта функция при $x < 0$? Решите уравнение $f(x) = \frac{1}{2}$.

6. При каких значениях параметра k функция $f(x) = \sqrt{12 - x^2 - 4x} + 2\sqrt{36 - x^2 + 16x} - 3\sqrt{x^2 - 4} + kx$ является четной?

Ответы: **3.** 16; **4.** $3\cos x + 7|x| + 5$; **5.** $-1 + \frac{1}{\sqrt{-x}}$, $-\frac{4}{9}$ и 4; **6.** -3.

§6. Периодические функции

Определение. Функцию $y = f(x)$, заданную на множестве $D(f)$, называют ***периодической***, если существует такое число $T \neq 0$, что:

1) для любого числа x, принадлежащего области определения функции D_f, числа $x \pm T$ также принадлежат области определения.

$$(\forall x \in D_f) \Rightarrow (x \pm T \in D_f)$$

(отсюда следует неограниченность области определения)

2) для всякого числа x из области определения справедливо равенство

$$f(x \pm T) = f(x)$$

(то есть значения функции повторяются через каждые T единиц на оси Ox).

Коротко: f – периодическая на множестве $D_f \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in D_f \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} 1)\ (x \pm T) \in D_f \\ 2)\ f(x \pm T) = f(x) \end{matrix}.$$

Число T называют ***периодом*** функции.

Определение. Наименьший положительный период (если он существует) называют ***основным периодом*** функции.

Если для любого числа $T \neq 0$ найдется такое число $x \in D_f$, что не выполняется хотя бы одно из условий определения, то функция не является периодической.

***Пример* 1**. Докажем, что функция $y = \cos\sqrt{3x}$ непериодическая.

Доказательство.

Область определения функции состоит только из неотрицательных чисел: $D_f = [0;+\infty)$. Предположим, что функция имеет ненулевой период Т. Так как $0 \in D_f$, то и числа $T = 0 + T$ и $-T = 0 - T$ должны принадлежать области определения; но $T \neq 0$ и одно из чисел T и $-T$ является отрицательным и области определения принадлежать не может. Полученное противоречие и доказывает, что функция является непериодической.

***Пример* 2**. Докажем, что функция $f(x) = \cos\frac{2}{x}$ непериодическая.

Доказательство.

1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Возьмем любое число $T \neq 0$, значит, точка $x = -T \in D(f)$. Но число $x + T = -T + T = 0$ не принадлежит области определения функции.

Таким образом, для любого числа $T \neq 0$ нашлось значение $x = -T$ из области определения функции, для которого не выполняется условие $(x + T) \in D(f)$. Следовательно, функция $f(x) = \cos\frac{2}{x}$ не является периодической.

Отметим некоторые ***свойства периодических функций***.

***Свойство* 1**. Если число T – период функции f, то периодом этой функции также будут числа вида $k \cdot T$, где $k \in \mathbf{Z} \backslash \{0\}$.

***Свойство* 2**. Не каждая периодическая функция имеет наименьший положительный период.

Например:

- функция $f(x) = C$ ($\forall C \in \mathbf{R}$) является периодической, ее периодом является любое положительное число;
- функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbf{I} \end{cases}$ периодическая, ее периодом является любое рациональное число;

(в обоих случаях нет наименьшего положительного числа).

***Свойство* 3**. Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих один и тот же основной период T_0, не обязательно имеет тот же самый период T_0.

Например, сумма функций $f(x) = \cos x$ и $g(x) = -\cos x$ вообще не имеет основного периода.

***Свойство* 4**. Если $f(x)$ – периодическая функция с периодом T_0, то сложная функция $g(f(x))$ – тоже периодическая, причем T_0 служит ее периодом, но не обязательно T_0 является для $g(f(x))$ основным периодом.

Например, $f(x) = \cos x$, $T_0 = 2\pi$; $f(x) = \cos^2 x$, $T_0 = \pi$.

***Свойство* 5**. Если T – основной период функции $f(x)$, то функция $a\cdot f(kx + b)$, где $a \neq 0$, $k \neq 0$ периодическая и ее период равен $\frac{T}{|k|}$.

Например, $T_{0\ \cos kx} = \frac{2\pi}{|k|}$; $T_{0\ \mathrm{ctg}\, kx} = \frac{\pi}{|k|}$.

Определение. Пусть функции y_1 и y_2 – периодические с периодами T_1 и T_2 ($T_1 \neq 0$, $T_2 \neq 0$!). Если отношение периодов функций y_1 и y_2 *рационально*, то есть $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$, то эти периоды называют ***соизмеримыми***. При этом функции y_1 и y_2 называют ***соизмеримо периодическими***.

Если отношение периодов $\frac{T_1}{T_2}$ – *иррациональное* число, то их сумма и произведение – непериодические функции.

Например, $y = \sin\sqrt{2}x + \cos x$ – непериодическая функция.

***Свойство* 6**. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соизмеримо периодические функции (то есть имеют соизмеримые периоды T_1 и T_2), то они имеют общий период.

***Пример* 3**. Найдем период функции $y = 3\cos x + \sin 3x$.

Решение.

1. $D(y) = \mathbf{R}$.

2. Функция y_1= $3\cos x$ − периодическая, $T_1 = 2\pi$.

Функция $y_2 = \sin 3x$ − периодическая , $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{1} \Rightarrow$ периоды T_1 и T_2 – соизмеримы, значит, функции y_1 и y_2 имеют общий период $T = T_1 = 3T_2 = 2\pi$.

Ответ: 2π.

Среди функций, изучаемых в курсе математики средней школы, периодическими являются тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ ($T_0 = 2\pi$), $y = \text{tg } x$, $y = \text{ctg } x$ ($T_0 = \pi$), дробная часть числа $y = \{x\}$ ($T_0 = 1$), постоянная функция $y = C$.

Для построения графика периодической функции достаточно построить часть ее графика на любом отрезке $[a;\ a + T] \subset D(y)$ длиной в период, а потом перенести ее вдоль оси Ox на $\pm T, \pm 2T, \ldots$(Рис. 15)

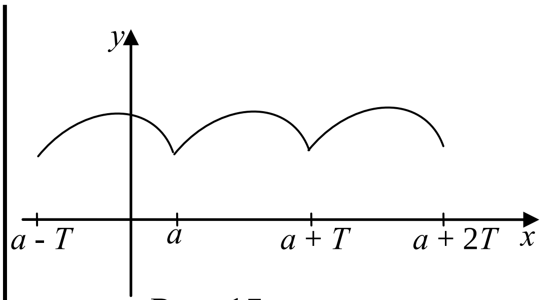


Рис. 15

***Пример* 4**. Докажем, что функция $f(x) = \cos 3x + \cos 4x$ периодическая и найти ее **основной** период.

Доказательство.

Данная функция определена на **R**.

Функция $y_1 = \cos 3x$ имеет период $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, а функция $y_2 = \cos 4x$ – период $T_2 = \frac{2\pi}{4}$. Периоды T_1 и T_2 соизмеримы. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{3}$, значит (свойство 6), существует общий период $T = 3T_1 = 4T_2 = 2\pi$. Покажем, что этот период основной.

Наибольшее значение функции $f(x)$ равно 2, и оно достигается в тех точках, где $\cos 3x = 1$ и $\cos 4x = 1$. На отрезке $[0;\ 2\pi]$ функция $\cos 3x$ принимает значение 1 в точках 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, 2π $\left(x = \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbf{Z}\right)$, а функция

$\cos 4x$ принимает значение 1 в точках 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π $\left(x = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbf{Z}\right)$. Следовательно, функция $f(x) = \cos 3x + \cos 4x$ на отрезке [0; 2π] принимает значение 2 лишь в точках 0 и 2π. Отсюда и следует, что число 2π – основной период.

***Пример* 5**. (ЕГЭ В8) Найдем значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $y = \sin((2a+5)x)$ равен $\frac{\pi}{2}$.

Решение. ОДЗ: $x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$.

По условию:

$$T_{\sin x} = 2\pi \Rightarrow T_{\sin((2a+5)x)} = \frac{2\pi}{|2a+5|}$$

$$\frac{2\pi}{|2a+5|} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4 = |2a+5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a+5=4 \\ 2a+5=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-0{,}5 \\ a=-4{,}5 \end{array}\right.$$

Получили два значения параметра a, удовлетворяющих данному условию, их произведение: $(-0{,}5)(-4{,}5)$=2,25

Ответ: 2,25.

***Пример* 6.** (ЕГЭ) Найдем значение функции $f(11)$, если известно, что функция $y = f(x)$ – нечетная, имеет период 7, и на отрезке [0; 3] график функции $y = f(x)$ совпадает с графиком функции $g(x) = x^2 - 4x$.

Решение. Поскольку функция периодическая и нетрудно вычислить ее значения для всех значений $x \in [0;\ 3]$, то искомое значение функции представим следующим образом: $f(11) = f(2 \cdot 7 - 3) = f(-3)$, но $x = -3 \notin [0;\ 3]$.

На основании нечетности функции

$$f(-3) = -f(3) = -g(3) = -(3^2) + 4 \cdot 3 = 3.$$

Ответ: 3.

***Пример* 7**. Известно, что $f(x)$ – периодическая функция с периодом T. Функция $g(x)$ удовлетворяет тождеству по x:

$$3+g(3-2x)\equiv 3f\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)-4f(3x-1).$$

Является ли эта функция периодической? Если да, то найти ее период.

Решение.

Период функции $f(x)$ равен T $\Rightarrow$ период функции $3f\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ равен $\frac{T}{\left|\frac{5}{2}\right|}=\frac{2T}{5}$, а период функции $4f(3x-1)$ равен $\frac{T}{3}$.

Эти периоды соизмеримы: $\frac{T_1}{T_2}=\frac{6}{5}$. Их общий период равен $5\cdot\frac{2T}{5}$ = $6\cdot\frac{T}{3}$ = $2T$, значит, функция $3+g(3-2x)-$ периодическая и ее период равен $2T$, то есть функция $g(3-2x)$ $-$ периодическая с периодом $2T$, следовательно, период функции $g(x)$ равен $|-2|\cdot 2T = 4T$.

Ответ: $4T$.

<u>Замечание</u>: Число $2T$ – наименьшее общее кратное периодов T_1 и T_2 $-$ <u>общий</u> период функций $f\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ и $f(3x-1)$. Нахождение <u>основного</u> периода (пример 4) требует более тонкого метода решения.

***Пример* 8**. Найдем основной период функции $f(x)=\sin(\cos x)$.

Решение. Пусть T – основной период функции.

$D(f)$ = **R**, то есть область определения неограниченное множество.

Составим тождество

$$f(x+T)\equiv f(x)\Leftrightarrow \sin(\cos(x+T))\equiv\sin(\cos x)\Leftrightarrow \sin(\cos(x+T))-\sin(\cos x)\equiv 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\cos(x+T)-\cos x}{2}\cdot\cos\frac{\cos(x+T)+\cos x}{2}\equiv 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos(x+T)-\cos x\equiv 2\pi k, k\in\mathbf{Z}\\ \cos(x+T)+\cos x\equiv\pi+2\pi m, m\in\mathbf{Z}\end{array}\right.$$

Учитывая ограниченность функций $|\cos(x+T) \pm \cos x| \leq 2$, заключим, что уравнение $\cos(x+T)+\cos x \equiv \pi + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$ не имеет решений , а первое уравнение может иметь решения только при $k = 0$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} \cos(x+T)-\cos x \equiv 0 \Leftrightarrow \text{-}2\sin\dfrac{T}{2}\sin\left(x+\dfrac{T}{2}\right) \equiv 0 \Leftrightarrow \sin\dfrac{T}{2}=0 \Leftrightarrow T = 2\pi l, l \in \mathbf{Z} \\ \cos(x+T)+\cos x \equiv \pi + 2\pi m, m \in \mathbf{Z} \text{ не имеет решений} \end{array}\right.$.

Наименьшее положительное значение $T = 2\pi$.

Действительно, $\sin(\cos(x+2\pi)) = \sin(\cos x)) \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Ответ: основной период функции равен 2π.

***Пример* 9**. Найдем наименьший положительный период функции

$$y = \arcsin(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1).$$

Решение. Сначала выполним тождественные преобразования выражения $8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$:

$8\cos^2 x(\cos^2 x - 1) + 1 = 1 - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x$.

Функцию привели к виду $y = \arcsin \cos 4x$.

1) Функция определена на всей числовой прямой, так как $|\cos 4x| \leq 1$ при любом действительном значении x.

2) Пусть T – основной период функции. Тогда:

$$\arcsin \cos 4(x+T) \equiv \arcsin \cos 4x.$$

Положим в этом тождестве $x = 0$: $\arcsin \cos 4T = \arcsin 1 \Leftrightarrow \cos 4T = 1$ (функция $f(t) = \arcsin t$ монотонна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Из последнего уравнения имеем $4T = 2\pi k$, откуда $T = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{N}$.

Наименьшее положительное значение равно $\frac{\pi}{2}$.

Действительно,

$$\arcsin \cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \arcsin \cos(4x + 2\pi) = \arcsin \cos 4x,$$

то есть $\quad y\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \equiv y(x)$.

Ответ: $T = \frac{\pi}{2}$.

Вопросы для самопроверки

1. Может ли вся область определения периодической функции представлять собой отрезок? луч?

2. Наименьшие положительные периоды функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно равны T и $\frac{T}{2}$. Какой наименьший положительный период имеет функция:

1) $y = f(x+2)$	4) $y = g(Tx + a)$
2) $y = f(Tx)$	5) $y = g(x) + b$
3) $y = k\cdot f(x)$ $(k \neq 0)$	6) $y = f(x) + g(x)$.

Задания

1. Определите период функции, если он существует:

1) $y = 2\sin 15x + 5\cos 10x$;

2) $y = 0{,}5\sin(0{,}5x + 1) - 0{,}2\cos 0{,}2x$;

3) $y = \sin 2\pi x + \cos 3\pi x$;

4) $y = \sin \frac{\pi}{2}x - \cos \frac{\pi}{3}x$;

5) $y = \cos (x\sqrt{2}) + \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$;

6) $y = 2^{\sin x}$;

7) $y = 6\sin\left(\frac{12}{5}x\right) + 11\cos\left(\frac{4}{9}x\right)$.

2. Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $y = \sin^2\left(\left(a^2 - 4a - 21\right)x\right)$ равен $\frac{\pi}{24}$.

3. Если $f(x)$ – четная, периодическая с периодом $T \neq 0$ функция, такая, что $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & 0 \le x \le 3 \\ -2x + 4, & 3 < x \le 5 \end{cases}$, то значение выражения $2f(98) + f(126)$ равно:

а) 1; б) −3; в) −2; г) 2; д) 6.

4. Найдите основной период функции $y = -\frac{2}{3} - 7f(3x + 10)$, если основной период функции $f\left(\frac{2}{3} - 5x\right)$ равен $\frac{3}{7}$.

5. Известно, что $f(x)$ – периодическая функция с периодом T. Функция $g(x)$ удовлетворяет тождеству по x:

$$g\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=3f\left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{3}\right)+2f\left(\frac{4}{5}x-\pi\right)-5.$$

Будет ли функция $g(x)$ периодической? Если да, то найти ее период.

Ответы: **1.1)** $\frac{2}{5}\pi$; **1.2)** 20π; **1.3)** 2; **1.4)** 12; **1.5)** $2\sqrt{2}\pi$; **1.6)** 2π; **1.7)** $\frac{45}{2}\pi$.

2. -135; **3.** д; **4.** $\frac{5}{7}$; **5.** $\frac{40}{3}\pi$.

§7. Монотонные функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на множестве $D(f)$. Пусть x_1 и x_2 – любые две *различные* точки множества (например, $x_1 < x_2$), содержащегося во множестве $D(f)$.

Определение. Функцию $y = f(x)$ называют на множестве X

– ***возрастающей***, если $f(x_1) < f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует *меньшее* значение функции);

– ***убывающей***, если $f(x_1) > f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует *большее* значение функции);

– ***невозрастающей***, если $f(x_1) \geq f(x_2)$;

– ***неубывающей***, если $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Всякая возрастающая (убывающая) функция одновременно является и неубывающей (невозрастающей). Обратное утверждение неверно.

$$\text{возрастающая} \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} \text{неубывающая}$$

Во всех четырех случаях функцию называют ***монотонной*** на множестве X.

Возрастающую (убывающую) функцию называют ***строго монотонной*** на множестве X.

Замечания. **1**. Из возрастания (убывания) функции на каждом из двух промежутков не следует ее возрастание (убывание) на объединении этих промежутков.

Например, для функции $y = \frac{1}{x}$ **неправильно** писать, что она убывает на области определения, то есть на множестве $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Она убывает <u>на каждом</u> из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ в отдельности. (Рис. 16)

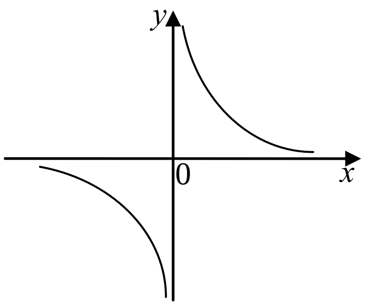


Рис. 16

2. Постоянную функцию $y = \boldsymbol{C}$, согласно определению, можно считать и неубывающей, и невозрастающей.

3. Существуют функции, которые не являются ни возрастающими, ни убывающими ни на каком промежутке. Примером такой функции служит функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbf{I} \end{cases}.$$

Возрастание (убывание) функции легко считывать с ее графика.

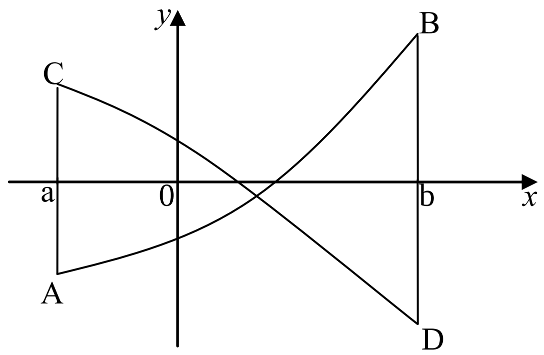


Рис.17

Пусть кривые AB и CD – графики некоторых функций. Если рассматривать график функции, изображенный на рисунке 17, слева направо (что соответствует возрастанию аргумента x), то для *возрастающей* функции линия поднимается *вверх* (линия AB), а для *убывающей* функции опускается *вниз* (линия CD).

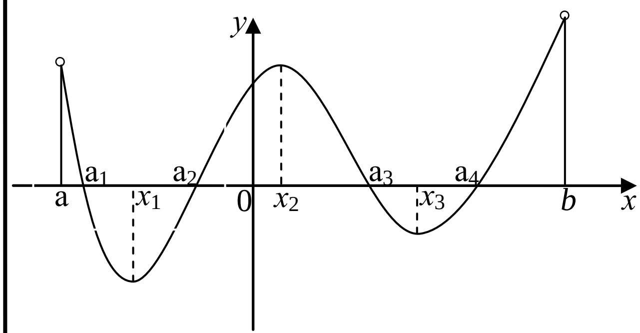


Рис. 18

Функция, график которой имеем на рисунке 18 не является ни возрастающей, ни убывающей на интервале (a; b). Но точками x_1, x_2, x_3 интервал (a; b) разбивается на промежутки (а; x_1], [x_1; x_2], [x_2; x_3], [x_3; b), в которых функция соответственно убывает, возрастает, убывает, возрастает.

***Пример* 1**. Исследуем на монотонность функцию $f(x) = \sqrt{2x+4}$.

Решение. Выберем любые различные числа x_1 и x_2 из промежутка $[-2; +\infty) = D(f)$.

Пусть $-2 \le x_1 < x_2$. Рассмотрим разность $f(x_1) - f(x_2)$:

$$\sqrt{2x_1+4}-\sqrt{2x_2+4}=\frac{(\sqrt{2x_1+4}-\sqrt{2x_2+4})\cdot(\sqrt{2x_1+4}+\sqrt{2x_2+4})}{(\sqrt{2x_1+4}+\sqrt{2x_2+4})}=\frac{2x_1-2x_2}{(\sqrt{2x_1+4}+\sqrt{2x_2+4})}$$

Знаменатель полученной дроби – число положительное как сумма арифметических корней. Рассмотрим числитель. Так как мы условились, что $-2 \le x_1 < x_2$, то выражение $2(x_1 - x_2) < 0$, значит, и дробь отрицательна. Таким образом, получили, что для любых x_1 и x_2, удовлетворяющих условию $-2 \le x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, согласно определению, функция $f(x) = \sqrt{2x+4}$ возрастает на $D(f)$.

***Пример* 2**. Пользуясь определением монотонно возрастающей на промежутке функции, найдем все *положительные* значения параметра a, для которых функция $f(x)=\dfrac{a(x+1)}{a^2+3a-x}$ монотонно возрастает на промежутке [1; 4).

Решение. Выберем любые $x_1 \in [1;\ 4)$, $x_2 \in [1;\ 4)$ и пусть $x_1 < x_2$. Выясним, для каких значений параметра $a > 0$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Составим соответствующие значения функции

$$f(x_2)=\frac{a(x_2+1)}{a^2+3a-x_2},\quad f(x_1)=\frac{a(x_1+1)}{a^2+3a-x_1},$$

и решим относительно a неравенство, связывающее их:

$$\frac{a(x_2+1)}{a^2+3a-x_2} > \frac{a(x_1+1)}{a^2+3a-x_1} \Leftrightarrow a\left(\frac{x_2+1}{a^2+3a-x_2}-\frac{x_1+1}{a^2+3a-x_1}\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a^2+3a+1)(x_2-x_1)}{(a^2+3a)^2-(a^2+3a)(x_1+x_2)+x_1x_2}>0 \Leftrightarrow (a^2+3a)^2-(a^2+3a)(x_1+x_2)+x_1x_2>0$$

Поскольку $x_2 > x_1$, то $a^2+3a>x_2$ или $a^2+3a<x_1$, значит,

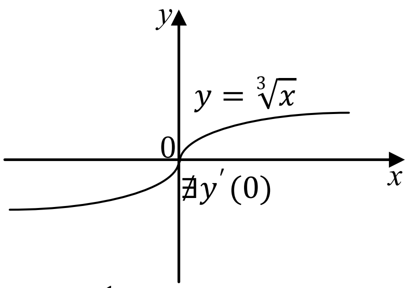
$$\left[\begin{array}{l} a^2+3a\ge 4 \\ a^2+3a<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+3a-4\ge 0 \\ a^2+3a-1<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a\ge 1 \\ a\le -4 \\ \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{13}-3}{2} \end{array}\right.$$

Учитывая, что $a > 0$, заключаем, что функция $f(x)=\dfrac{a(x+1)}{a^2+3a-x}$ монотонно возрастает для всех значений $a\in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}\right)\cup[1;+\infty)$.

<u>*Замечание*</u>. С помощью производной исследование функции на монотонность проводить значительно проще.

Теорема. Для того чтобы <u>дифференцируемая</u> на промежутке X функция $y = f(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x\in X$ выполнялось условие $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$).

Замечание. На рисунках 19, 20 имеем графики непрерывных, возрастающих на всей числовой прямой функций. При $x\neq 0$ их производные положительны, при $x = 0$ производные не существуют.



$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};\ y'(0)=+\infty$$

Рис. 19

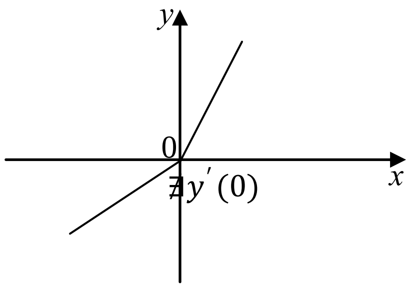


Рис. 20

Проведем исследование функции примера 2, применяя производную.

$f(x)=\dfrac{a(x+1)}{a^2+3a-x}$, $x\in[1;\ 4)$, $a>0$.

Решение. Функция определена, если $a^2 + 3a \neq x$.

Ее производная $f'(x) = a\dfrac{a^2+3a+1}{\left(a^2+3a-x\right)^2}$ положительна при $a > 0$.

Необходимо исключить значения a, при которых выражение $a^2 + 3a$ принадлежит промежутку [1; 4), то есть задача сводится к решению совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} a^2+3a \geq 4 \\ a^2+3a < 1 \end{array}\right.$, которое рассмотрено выше.

Нетрудно показать, что:

1) Если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X, то

а) функция $y = -f(x)$ убывает;

б) функция $y = \frac{1}{f(x)}$ – убывает;

в) функция $y = \sqrt{f(x)}$ возрастает на промежутке X.

2) сумма двух возрастающих (убывающих) на промежутке X функций – функция возрастающая (убывающая) на промежутке X;

3) произведение двух возрастающих положительных функций на промежутке X – возрастающая на промежутке X функция;

4) произведение двух возрастающих отрицательных функций на промежутке X – убывающая на промежутке X функция.

Упражнение. Докажите эти утверждения!

<u>*Заметим*</u>, что строго монотонная функция каждое свое значение $y \in E(f)$ принимает только **один раз**, то есть если

$$f(x_1) = f(x_2), \text{ то } x_1 = x_2.$$

Это свойство очень полезно при решении уравнений вида

$$f(x) = C. \qquad (1)$$

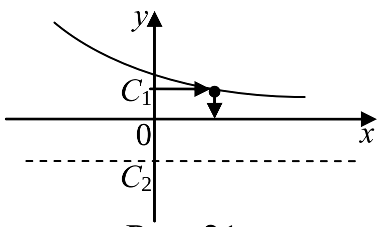


Рис. 21

Такое уравнение может иметь не более одного корня, то есть

– единственный корень, если $C \in E(f)$,

– ни одного, если $C \notin E(f)$. (Рис. 21)

Рассмотрим уравнение вида

$$f(x) = g(x), \qquad (2)$$

одна часть которого – монотонно возрастающая, а другая – монотонно убывающая на ОДЗ функция.

Пусть $f(x)$ – монотонно возрастает, а $g(x)$ – монотонно убывает. Тогда функция $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ − монотонно возрастающая функция и приходим к предыдущему случаю $\varphi(x) = C$, где $C = 0$. Следовательно, уравнение (2) имеет не более одного корня.

***Пример* 3**. Решим уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$.

Легко увидеть, что $x = 2$ − корень уравнения. Докажем, что он единственный.

$$3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \ (5^x \neq 0 \text{ при } \forall x \in \mathbf{R}).$$

Функция $\varphi(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ − убывает на **R** как сумма двух убывающих на **R** функций. Пришли к уравнению вида (1), следовательно, других корней, кроме $x = 2$, нет.

Ответ: 2.

***Пример* 4**. Решим неравенство $x > 10 - \sqrt[3]{x}$.

Решение. ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$.

Функция $y = x$ возрастает на **R**, а функция $y = 10 - \sqrt[3]{x}$ убывает на **R**. Уравнение $x = 10 - \sqrt[3]{x}$ имеет единственный корень $x = 8$, а данному неравенству удовлетворяют все числа из промежутка $(8;\ +\infty)$.

Ответ: $(8;\ +\infty)$.

Для **строго монотонной** функции имеет место

Теорема. Если функция f строго монотонна на множестве X, то она обратима.

Монотонность ***сложной*** функции $y = f(g(x))$ устанавливается с помощью следующего утверждения:

Если обе функции f и g ведут себя одинаково, то есть либо обе возрастают, либо обе убывают на промежутке *X*, то функция $y = f(g(x))$ возрастает на промежутке *X*, если f и g ведут себя по – разному, то $y = f(g(x))$ убывает на промежутке *X*.

> *Упражнение.* Обоснуйте это утверждение, пользуясь элементарными средствами и методами математического анализа (воспользуйтесь правилом дифференцирования сложной функции и достаточным условием возрастания (убывания) функции).

***Пример* 5**. Исследуем на монотонность функцию $y = 2^{x^2-2x-3}$.

Решение. $D_y = \mathbf{R}$

Пусть $y(z) = 2^z, z(x) = x^2 - 2x - 3$.

Функция $y(z) = 2^z -$ возрастающая на $\mathbf{R}$.

Рассмотрим $z(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$.

На промежутке $(-\infty; 1]$ функция $z(x)$ убывает от $+\infty$ до -4, а функция $y(x) = 2^{x^2-2x-3}$ убывает от $+\infty$ до $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

На промежутке $[1; +\infty)$ функция $z(x)$ возрастает от -4 до $+\infty \Rightarrow$ функция $y = 2^{x^2-2x-3}$ возрастает от $\frac{1}{16}$ до $+\infty$.

***Пример* 6**. Исследуем на монотонность функцию

$$y = \arcsin\left(\frac{1}{2} + x^2\right).$$

Решение. Найдем *D*(*y*).

$$\left|x^2 + \frac{1}{2}\right| = x^2 + \frac{1}{2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то есть $D(y) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Пусть $y(z) = \arcsin z\,, z(x) = \frac{1}{2} + x^2$.

Функции $y = \arcsin z$ и $z = \frac{1}{2} + x^2$ на промежутке $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ возрастают. Значит, данная функция $y = \arcsin\left(\frac{1}{2} + x^2\right)$ на $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ тоже возрастает $\left(\text{от } \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ до } \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку данная функция $y(x)$ четная, то на промежутке $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$ она убывает $\left(\text{от } \frac{\pi}{2} \text{до } \frac{\pi}{6}\right)$.

***Пример* 7**. Решим неравенство $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>4x-2$.

Решение.

$$\begin{cases} \sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>\left(\sqrt{5x}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2 \\ x\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\sqrt{x+2}\right)^2+\sqrt{x+2}>\left(\sqrt{5x}\right)^2+\sqrt{5x} \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + t$, $t \in [0;\ +\infty)$.

Пусть $\sqrt{x+2} = t_1$, $\sqrt{5x} = t_2$.

Функция f монотонно возрастает на луче $[0;\ +\infty)$. Поэтому неравенство $\left(\sqrt{x+2}\right)^2+\sqrt{x+2} > \left(\sqrt{5x}\right)^2+\sqrt{5x}$ выполняется, если $x+2>5x$.

Откуда $x<\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[0;\frac{1}{2}\right)$

Задания

1. Сравните с нулем следующие выражения:

а) $\sin 73^\circ - \sin 79^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 7{,}6 - \operatorname{tg} 8$;

в) $\operatorname{ctg} 110^\circ - \operatorname{ctg} 114^\circ$;

г) $\operatorname{arcctg} 0{,}7 - \operatorname{arcctg} 0{,}3$.

2. Функция $f(x)$ убывает на всей числовой прямой. Возрастающей или убывающей будет функция

а) $y = f(1-2x)$; б) $y = f(2^x)$; в) $y = f(\cos x)$.

3. Решите уравнения:

а) $x+1=2^{-x}$;

б) $2x-1=\frac{1}{x^4}$;

в) $3^x=10-\log_2 x$;

г) $\log_2(3^x-8)=2-x$;

д) $x\cdot 2^x = x(3-x)+2(2^x-1)$.

4. Решите неравенства: а) $\sqrt{x+50}<3-4x$;

б) $\left(\cos\frac{1}{2} - \cos 3\right)(x^2 - 7x + 12) < 0$;

в) $x^3 + x + 2\sqrt{2x^3 + x + 1} \geq 6$;

г) $\log_4 16x + \sqrt{x+2} \leq 4{,}5$;

д) $\frac{2^{-x} - 1}{2} < \left(\frac{x}{2}\right)^3$.

5. Сравните с единицей $\sqrt[3]{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha}$, если α – острый угол.

6. Укажите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = (0{,}1)^{x^2+x-6}$;

б) $f(x) = \lg \sin x$;

в) $f(x) = 2^{\sqrt{x^3}}$;

г) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 3)$;

д) $f(x) = \arcsin(2 - x)$;

е) $f(x) = \mathrm{arcctg}(x^2 - 1)$.

7. Найдите множество значений функции:

а) $y = 2^{-3x^2+6x-6}$;

б) $y = \log_{0,5}(3x^2 - 6x + 7)$.

8. Определите знаки коэффициентов a, b, c для функции $y = \log_2(ax^2 + bx + c)$, график которой изображен на рисунке 22.

9. Докажите, что функция $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ является постоянной. Решите задачу с помощью производной и без нее.

10. При каких значениях b функция $y = x^2 - bx$ убывает на отрезке $[-1; 1]$.

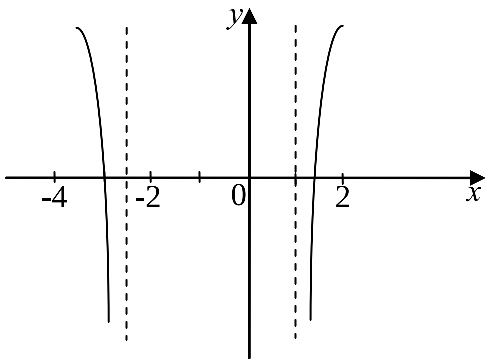


Рис. 22

Ответы: **1.** а) $-$; б) $-$; в) $+$; г) $-$. **2.** а)возрастающая; б) убывающая. **3.** а) 0; б) 1; в) 2; г) 2; д) 0; 2. **4.** а) $[-50; -1)$; б) $(3; 4)$; в) $[1; +\infty)$; г) $(0; 2]$; д) $(0; +\infty)$. **5.** >. **6.** а) возрастает на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, убывает на $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) возрастает на $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; в) возрастает на $[0; +\infty)$; г) возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$; д) убывает на $[1; 3]$; е) возрастает на $(-\infty; 0]$ и убывает на $[0; +\infty)$. **7.** а) $\left(0; \frac{1}{8}\right]$; б) $(-\infty; -2]$. **8.** $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.

§8. Ограниченные функции

Определение. Функцию $y = f(x)$, заданную на множестве $D(f)$, называют ***ограниченной***, если существуют такие действительные числа m и M $(m \leq M)$, что для любого $x \in D(f)$ справедливо неравенство $m \leq f(x) \leq M$.

Из этого определения легко получить определение функции, ограниченной

а) сверху (Рис. 23);

б) снизу (Рис. 24).

(Сделайте это!)

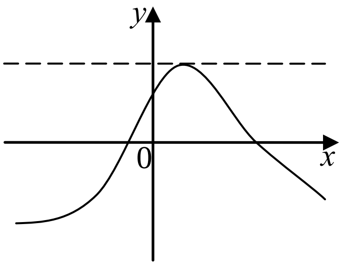


Рис. 23

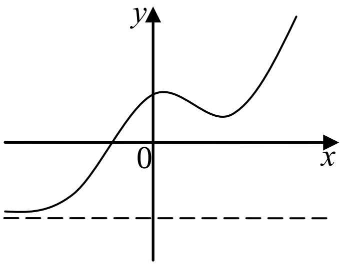


Рис. 24

Из определения ограниченной функции следует, что

- постоянная функция является ограниченной;
- множество значений $E(f)$ ограниченной функции ограничено.

Числа m и M при этом называют соответственно *нижней* и *верхней* границей множества $E(f)$.

Поскольку любое ограниченное множество имеет бесконечно много нижних и верхних границ, то определение ограниченной функции можно сформулировать следующим образом:

Определение. Функцию $y = f(x)$, заданную на множестве $D(f)$, называют ***ограниченной***, если существует положительное число $\boldsymbol{C}$ такое, что $|f(x)| \leq \boldsymbol{C}$ для любого значения x из области определения $D(f)$.

***Пример* 1**. Выясним, ограничена ли функция $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

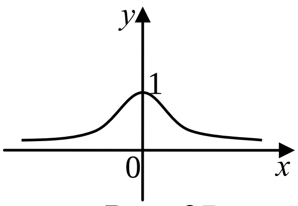


Рис. 25

Решение. $D_f = \mathbf{R}$

Для любого $x \in D_f$ имеем $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$ (так как $x^2 + 1 \geq 1$), что по определению означает, что $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ – ограниченная функция.

***Пример* 2**. Выясним, ограничена ли функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

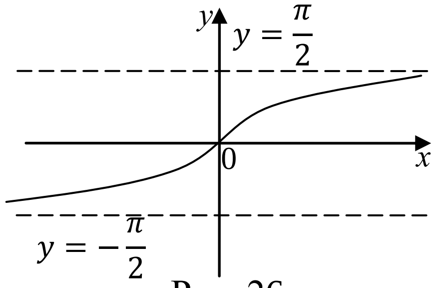


Рис. 26

Решение.

Для $\forall x \in D_f \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, что по определению означает, что $f(x) = \operatorname{arctg} x$ – ограниченная функция.

***Пример* 3**. Выясним, ограничена ли функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

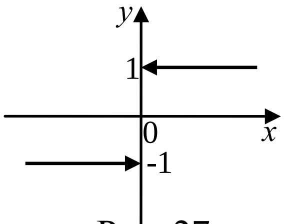


Рис. 27

Решение. $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$f(x) = -1$ для любого $x \in (-\infty; 0)$.

$f(x) = 1$ для любого $x \in (0; +\infty)$, то есть для $\forall x \in D_f \Rightarrow -1 \leq \frac{|x|}{x} \leq 1$, что по определению означает, что $f(x) = \frac{|x|}{x}$ – ограниченная.

(Заметим, что функция не принимает промежуточных значений между -1 и 1).

***Пример* 4**. Выясним, ограничена ли функция $f(x) = \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}$.

Решение. $D_f = \mathbf{R}$.

Преобразуем выражение $\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} = 1 + \frac{2}{(x+1)^2+1}$.

Поскольку $0 < \frac{2}{(x+1)^2+1} \leq 2$, то $1 < 1 + \frac{2}{(x+1)^2+1} \leq 3$.

Таким образом, $\forall x \in D_f \Rightarrow 1 < 1 + \frac{2}{(x+1)^2+1} \leq 3$, значит, функция ограничена.

Свойство графика ограниченной функции

График любой ограниченной функции заключен между двумя прямыми, параллельными оси *Ox*.

Упражнение. Сформулировать свойство графика функции, ограниченной снизу; сверху!

Если функция не является ограниченной на множестве $D(f)$, то ее называют <u>неограниченной</u> на этом множестве. Это означает, что для <u>любого</u> $\boldsymbol{C} > 0$ <u>существует</u> хотя бы одно значение x из области определения функции, для которого $|f(x)| > \boldsymbol{C}$. (Рис. 28)

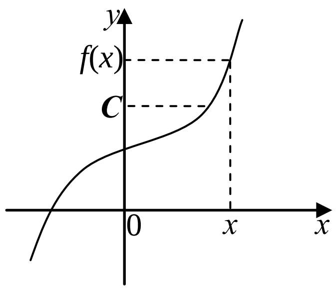


Рис. 28

Что означает неограниченность функции на $D(f)$ сверху? снизу?

***Пример* 5**. Докажем, что функция $f(x) = 2^x$ неограничена сверху.

Доказательство. $D_f = \mathbf{R}$.

Очевидно, что функция $f(x) = 2^x$ ограничена снизу, так как $f(x) = 2^x > 0$ для $\forall x \in \mathbf{R}$. Предположим, что $f(x) = 2^x$ ограничена сверху, то есть <u>существует</u> такое M, что для <u>$\forall x \in D_f$</u> справедливо неравенство $2^x \leq M$ (значит, $M > 0$). Но для $x = \log_2 M + 1$ имеем $2^{\log_2 M+1} = 2 \cdot 2^{\log_2 M} = 2 \cdot M$, а $2M > M$.

Значит, нашлось такое значение $x \in D_f$, для которого $f(x) > M$, что противоречит предположению и функция $f(x) = 2^x$ неограничена сверху.

<u>*Заметим*</u>, что свойство <u>монотонности</u> функции облегчает ее исследование на ограниченность.

***Пример* 6**. В примере 1 §7 установили, что функция $f(x) = \sqrt{2x+4}$ возрастает на области определения $D_f = [-2; +\infty)$. Очевидно, что наименьшего значения функция достигает при $x = -2$: $f(-2) = 0$, то есть $f(x) \geq 0$. Значит, данная функция ограничена снизу.

Задания

1. Докажите, что следующие функции неограничены сверху:

а) $y = x^2$; в) $y = 3^{x+1}$;

б) $y = x^3$; г) $y = \log_4 x - 1$.

2. Выясните, ограничены ли функции:

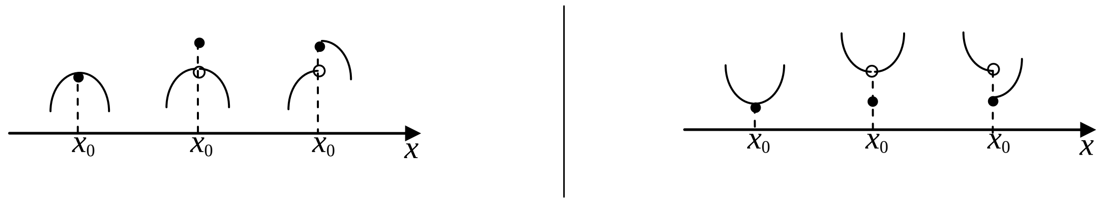
а) $y=\frac{x^2+x+3}{x^2+x+1}$; в) $y=\frac{2}{x^2+x+5}$; д) $y=\sqrt{4-x^2}$;

б) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; г) $y=\sin x^{-\frac{2}{7}}+x^0$; е) $y=\frac{x}{1+x}$.

Ответы: 2.а), б), в), г), д) ограничены; е) неограничена.

§9. Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции

Определение. Точку $x_0 \in D(f)$ называют ***точкой локального максимума*** (***минимума***) функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$, если существует интервал $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, где $\delta>0$, содержащийся в $D(f)$, такой, что для каждого $x \neq x_0$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ $\big(f(x)>f(x_0)\big)$.



Другими словами, точка x_0 – точка локального максимума (минимума), если значение функции в этой точке больше (меньше), чем значение функции во всех других точках интервала $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ с центром в точке x_0, принадлежащего области определения.

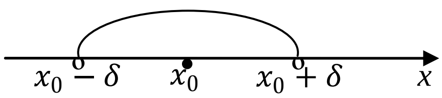


Рис. 29

Определение. Интервал $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ с центром в точке x_0 называют ***окрестностью*** точки x_0 радиуса δ.

Функция может иметь несколько максимумов и несколько минимумов, причем иной максимум может оказаться меньше некоторого минимума.

Обратимся к графику функции, определенной на отрезке $[a;\ b]$, изображенному на рисунке 30.

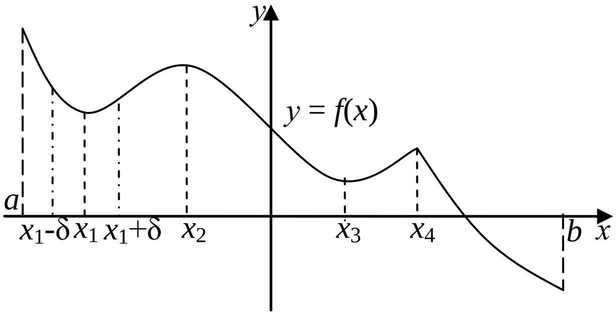


Рис. 30

Точки x_1 и x_3 – точки минимума, а точки x_2 и x_4 – точки максимума, значения функции $f(x_1)$ и $f(x_3)$ – минимумы, а $f(x_2)$ и $f(x_4)$ – максимумы функции, причем $f(x_1) > f(x_4)$.

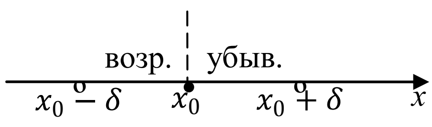
__*Заметим*__, что точка a <u>не является</u> точкой максимума, а точка b – точкой минимума, поскольку для каждой из них <u>нельзя</u> выбрать интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ с центром в этих точках, принадлежащий отрезку $[a; b]$.

Таким образом, точки локального максимума (минимума) могут лежать только <u>внутри</u> области определения функции.

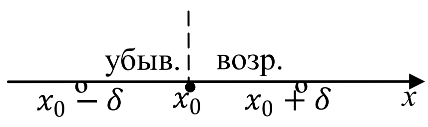
Определение. <u>Точки</u> локального <u>максимума</u> и локального <u>минимума</u> называют ***точками локального экстремума*** функции, а <u>значения функции</u> в этих точках называют ***экстремумами функции***.

Обычно функции имеют на заданном конечном промежутке лишь конечное, то есть определенное число точек экстремума. Именно такие функции будем рассматривать в дальнейшем (в отличие от них функция $y = x\sin\frac{1}{x}$, например, в любом интервале, содержащем точку $x = 0$, непрерывна, если считать $y(0) = 0$, но имеет <u>бесконечное</u> число точек экстремума).

Признак локального экстремума**:** Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором интервале $(x_0 - \delta;\ x_0)$, содержащемся в $D(f)$ и убывает (возрастает) на интервале $(x_0;\ x_0 + \delta)$, содержащемся в $D(f)$, то точка $x_0 \in D(f)$ – точка локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$.



т. max



т. min

***Пример* 1**. Определим точки экстремумов и экстремумы функции

$$y = |x^2 - 4|.$$

Решение.

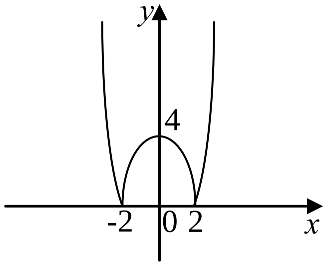
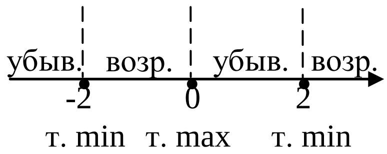


Рис. 31



Точки $x = -2$ и $x = 2$ – точки локального минимума, точка $x = 0$ – точка локального максимума. Экстремумы функции $f(-2) = f(2) = 0$ (функция четная), $f(0) = 4$.

<u>*Замечание*</u>. Нельзя смешивать понятия «точка экстремума» и «экстремум» функции!

«Точка экстремума» – значение переменной x.

«Экстремум» – значение функции в этой точке.

Если существует точка $x_0 \in D(f)$ такая, что при <u>любом значении</u> <u>$x \in D(f)$</u> имеет место неравенство $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$), то говорят, что $f(x_0)$ − наименьшее (наибольшее) значение функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$.

Замечания.

1. Не следует путать максимум (минимум) функции с наибольшим (наименьшим) значением функции в области определения.

2. Если у функции *существует* наибольшее (наименьшее) значение, то оно *единственно*.

3. Для <u>любой</u> функции, определенной и <u>непрерывной на отрезке</u>, существуют и наибольшее, и наименьшее значения. Функция их принимает либо внутри области определения, либо на концах отрезка.

На рисунке 30 видим, что наибольшее значение функция достигает при $x = a$ и равно $f(a)$, наименьшее при $x = b$ и равно $f(b)$.

На рисунке 31: функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Наибольшего значения она не имеет, а наименьшее совпадает с минимумом и достигается в точках $x = -2$ и $x = 2$ и $f(-2) = f(2) = 0$.

Полезно помнить, что:

1. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$, то наименьшее (наибольшее) значение она принимает в точке $x = a$, а наибольшее (наименьшее) значение – в точке $x = b$.

2. Если функция неограниченна сверху, то она не принимает наибольшего значения; если функция неограниченна снизу, то она не принимает наименьшего значения.

Заметим, что и ограниченная функция может не принимать наибольшего и наименьшего значений.

***Пример* 2**. $y = \operatorname{arctg} x$.

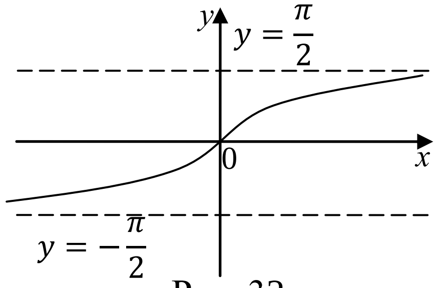


Рис. 32

Функция определена и непрерывна на интервале $(-\infty; +\infty)$, ограничена (ее график в полосе между прямыми $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$), но не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. (Рис. 32)

***Пример* 3**. $y = \arcsin x$.

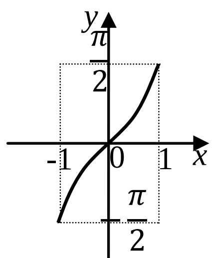


Рис. 33

Функция определена и непрерывна на отрезке $[-1;\ 1]$, ограничена и имеет наименьшее и наибольшее значения, причем (функция возрастает на отрезке $[-1;\ 1]$) наименьшее значение принимает в точке $x = -1$, а наибольшее $-$ в точке $x = 1$. (Рис. 33)

***Пример* 4**. В примере 4 §8 была рассмотрена непрерывная на **R** функция $f(x) = \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}$ и установлено множество ее значений: $E(f) = (1;\ 3]$. Применим другой способ отыскания наибольшего и наименьшего значений. Он аналогичен нахождению обратной функции и ее области определения.

Итак, имеем функцию $y = \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}$ с областью определения $D_f = \mathbf{R}$. Разрешим уравнение относительно x.

Преобразуя его, приходим к квадратному уравнению относительно x.

$$x^2(y-1)+2x(y-1)+2y-4=0.$$

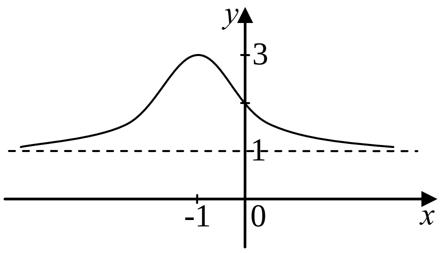


Рис. 34

($y=1$ не удовлетворяет этому уравнению). Тогда

$$x_{1,2}=\frac{1-y\pm\sqrt{-y^2+4y-3}}{y-1}\ (y\neq 1!).$$

Действительные корни получим только при условии

$$y^2-4y+3\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq y\leq 3.$$

Учитывая сделанное ограничение на y, получим $1<y\leq 3$. При всех значениях $y\in(1;3)$ существует два различных значения x: x_1 и x_2; при $y=3$ – одно: $x=-1$, его нетрудно найти из выражения для $x_{1,2}$:

$$x=\frac{1-3}{3-1}=-1.$$

Приходим к выводу: данная функция ограничена на $D(f)=\mathbf{R}$, имеет наибольшее значение $f(-1)=3$ и не имеет наименьшего значения. (Наибольшее значение совпадает с локальным максимумом).

График функции $y=\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}$ изображен на рисунке 34.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции $y=f(x)$, имеющей конечное число локальных максимумов (минимумов), нужно

- найти значение функции в каждой точке локального максимума (минимума),
- на концах отрезка,
- из полученных значений функции выбрать наибольшее (наименьшее).

Если на некотором промежутке непрерывная функция $y=f(x)$ имеет единственный экстремум и это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции на этом промежутке.

***Пример* 5**. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 5$ на отрезке а) [0; 3]; б) [−1; 1].

Решение. Наименьшее и наибольшее значения для данной функции на заданных отрезках существуют, так как функция непрерывна.

Выделив полный квадрат, запишем функцию в виде

$$f(x) = (x-2)^2 + 1.$$

а) В точке $x = 2 \in (0;\ 3)$ функция имеет локальный минимум $f(2) = 1$, а на концах отрезка принимает значения $f(0) = 5$ и $f(3) = 2$. Отсюда вывод:

$$y_{\text{нм}} = f(2) = 1;\ y_{\text{нб}} = f(0) = 5.$$

Заметим, что вычисление значения функции в точке $x = 3$ излишне. Учитывая симметрию графика данной квадратичной функции относительно прямой $x = 2$, легко прийти к соотношению $f(0) > f(3)$.

б) Вершина (2; 1) параболы лежит правее отрезка [−1; 1], то есть функция убывает на этом отрезке, следовательно, $y_{\text{нб}} = f(-1) = 10$, $y_{\text{нм}} = f(1) = 2$.

Рассмотрим еще некоторые способы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

***Пример* 6**. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 10\sin x + 24\cos x.$$

Векторный способ решения

Воспользуемся следующими векторными соотношениями:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2, \text{ где } \vec{a}(x_1;\ y_1),\ \vec{b}(x_2;\ y_2).$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \le \vec{a}\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}|$$

Алгебраическое выражение, задающее функцию $f(x)$, будем считать скалярным произведением векторов $\vec{a}(10;\ 24)$ и $\vec{b}(\sin x;\ \cos x)$, $f(x) = \vec{a}\vec{b} = 10\sin x + 24\cos x$. Вычислим длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{100 + 576} = 26;\ |\vec{b}| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

Так как $-|\vec{a}||\vec{b}| \le \vec{a}\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}|$, то $-26 \le f(x) \le 26$.

Следовательно, на всей области определения функции $D(f) = \mathbf{R}$ выполняются неравенства:

$$-26 \le 10\sin x + 24\cos x \le 26 \text{ и } f_{\text{нм}}(x) = -26,\ f_{\text{нб}}(x) = 26.$$

Способ введения вспомогательного аргумента

Запишем функцию $f(x) = 10\sin x + 24\cos x$ в виде:

$$f(x) = \sqrt{10^2 + 24^2}\left(\frac{10}{\sqrt{10^2+24^2}}\sin x + \frac{24}{\sqrt{10^2+24^2}}\cos x\right)$$

или
$$f(x) = 26\left(\frac{10}{26}\sin x + \frac{24}{26}\cos x\right).$$

К числам $\frac{10}{26}$ и $\frac{24}{26}$ применима следующая

Теорема. Для того чтобы числа m и n (m, $n \in \mathbf{R}$) можно было принять за косинус и синус одного и того же аргумента, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $m^2 + n^2 = 1$.

В силу того, что выполняется равенство $\left(\frac{10}{26}\right)^2 + \left(\frac{24}{26}\right)^2 = 1$, существует значение t, для которого

$$\cos t = \frac{10}{26},\quad \sin t = \frac{24}{26}.$$

Тогда данную функцию можно представить в виде:

$$f(x) = 26(\cos t \cdot \sin x + \sin t \cdot \cos x), \text{ то есть } f(x) = 26\sin(x + t),$$

откуда

$$-26 \le 26\sin(x + t) \le 26.$$

Получим $f_{\text{нм}}(x) = -26$, $f_{\text{нб}}(x) = 26$.

***Пример* 7**. Найдем наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{6}x + 33}.$$

Геометрический способ решения

Воспользуемся тем, что кратчайшее расстояние между двумя точками – это длина отрезка, соединяющего эти точки.

Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sqrt{2^2 + x^2} + \sqrt{3^2 + \left(2\sqrt{6} - x\right)^2}.$$

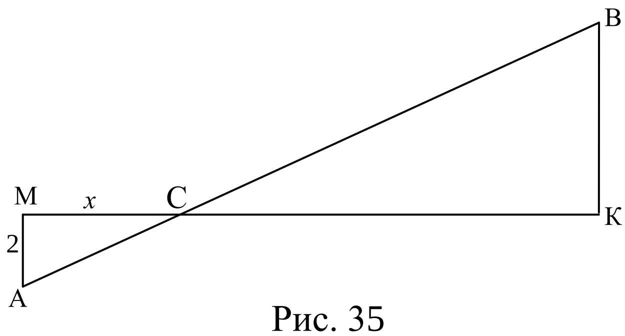


Рис. 35

Каждый из радикалов в формуле, задающей функцию, можем толковать как длину гипотенузы прямоугольного треугольника.

Рассмотрим прямоугольные треугольники МАС и СВК, у которых С ∈ АВ и АМ = 2, МС = x, ВК = 3, СК = $2\sqrt{6}-x.$ (Рис. 35)

Тогда $\sqrt{2^2+x^2}$ =АС,

$\sqrt{3^2+\left(2\sqrt{6}-x\right)^2}$ = СВ.

Значит, функция $f(x)$ задает длину ломаной АСВ, которая станет наименьшей тогда, когда ломаная выродится в отрезок АВ, то есть когда

$$AB = AC + CB.$$

Очевидно, что если отрезки АС и СВ лежат на одной прямой, то треугольники АСМ и ВСК подобны.

Тогда $\frac{AM}{BK}=\frac{MC}{KC}$, то есть $\frac{2}{3}=\frac{x}{2\sqrt{6}-x}$, отсюда $x=\frac{4\sqrt{6}}{5}$ и

$$f_{\text{нм}}(x)=f\left(\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)=\sqrt{4+\frac{16\cdot 6}{25}}+\sqrt{9+\left(\frac{6\sqrt{6}}{5}\right)^2}=2\sqrt{\frac{49}{25}}+3\sqrt{\frac{49}{25}}=7.$$

***Пример* 8**. Найдем наименьшее значение функции

$$f(x) = (x-1)(x-7)(x-4)(x+2) + 90$$

и соответствующие значения аргумента.

Решение способом выделения полного квадрата

Представим $f(x)$ в виде:

$$f(x) = (x^2-5x+4)(x^2-5x-14) + 90$$

или

$$f(x) = (x^2-5x+4)(x^2-5x+4-18) + 90$$

и, наконец, приведем к виду:

$$f(x)=(x^2-5x+4)^2-18(x^2-5x+4) + 90.$$

Пусть $x^2 - 5x + 4 = t$, где $t \in \left[-\frac{9}{4}; +\infty\right)$. Рассмотрим функцию

$$g(t) = t^2 - 18t + 90$$

или

$$g(t) = (t - 9)^2 + 9.$$

Отсюда ясно, что функция $g(t)$ принимает наименьшее значение, равное 9 при $t = 9 > -\frac{9}{4}$. Значения x, соответствующие $t = 9$, найдем из уравнения

$$x^2 - 5x + 4 = 9$$

$$x = \frac{5-3\sqrt{5}}{2}; \quad x = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}.$$

Итак, наименьшее значение функция принимает дважды: при $x = \frac{5-3\sqrt{5}}{2}$ и $x = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$ и оно равно 9.

***Пример* 9**. Найдем наименьшее значение функции

$$f(x)= \frac{x^4-4x^3+8x^2-8x+5}{x^2-2x+2}.$$

Приведем данную функцию к виду

$$f(x) = \frac{(x^2-2x+2)^2+1}{x^2-2x+2},$$

или

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{1}{x^2-2x+2}.$$

Поскольку $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$ при всех действительных значениях x, решим задачу, пользуясь неравенством $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ($a > 0$).

Тогда $x^2 - 2x + 2 + \frac{1}{x^2-2x+2} \geq 2$. Значит, наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{1}{x^2-2x+2}$ равно 2 при условии

$$(x-1)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Таким образом $f_{\text{нм}}(x) = f(1) = 2$.

Ответ: $f_{\text{нм}}(1) = 2$.

Методы математического анализа существенно облегчают нахождение экстремумов, наибольшего и наименьшего значений функции.

Пример **10**. Найдем промежутки монотонности, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$.

Решение. Функция определена, непрерывна и нечетна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

1. Найдем критические точки, то есть точки, в которых производная $f'(x)$ либо не существует, либо равна 0.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

а) $\nexists f'(0)$

б) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Точки $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ – критические точки.

2. Установим знак производной в каждом интервале, на которые область определения разбивается критическими точками. (Рис. 36)

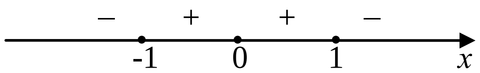


Рис. 36

Функция убывает на лучах $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, возрастает на отрезке $[-1; 1]$.

$$\left.\begin{array}{r} x = -1 - \textit{точка минимума},\ f(-1) = -2 \\ x = 1 - \textit{точка максимума},\ f(1) = -f(-1) = 2 \end{array}\right\} \text{экстремумы функции.}$$

Наибольшего и наименьшего значений функции нет, так как

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x}\left(3 - \sqrt[3]{x^2}\right) = \mp\infty,$$

то есть функция неограничена.

При решении уравнений вида $f(x) = g(x)$ нередко используется следующее утверждение:

Если число C для функции $f(x)$ является наименьшим значением, а для функции $g(x)$ – наибольшим значением, то данное уравнение равносильно на ОДЗ системе уравнений $\begin{cases} f(x) = C \\ g(x) = C. \end{cases}$

***Пример* 11**. Решим уравнение $\sqrt{15+2x-x^2}=4+\arccos x$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} |x|\le 1 \\ x^2-2x-15\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -3\le x\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le x\le 1.$

Оценим левую часть уравнения.

$0\le 15+2x-x^2=16-(x-1)^2\le 16 \Rightarrow 0\le\sqrt{15+2x-x^2}\le 4.$

Оценим правую часть уравнения.

Поскольку $0\le\arccos x\le\pi$, то $4+\arccos x\ge 4$.

Значит, данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{15+2x-x^2}=4 \\ 4+\arccos x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: 1.

Задания

1. Нарисуйте график функции, максимум которой совпадает с ее наибольшим значением.

2. Существуют ли наибольшее и наименьшее значения функции $y=\log_2(x^2-4x+20)$. Если да, то найдите их.

3. Известно, что

а) наименьшее значение функции $y=\log_3(x^2-2x+c)$ равно 1. Найдите значение с.

б) наибольшее значение функции $y=\log_a(x^2-6x+25)$ равно -2. Найдите значение a.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=a\sin x+b\cos x$.

5. Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{9+x^2}+\sqrt{x^2-2\sqrt{15}x+31}$.

6. Найдите экстремумы функции $f(x)=(x-3)e^{|x+1|}$ на интервале $(-2;4)$, а также наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-2;4]$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3$.

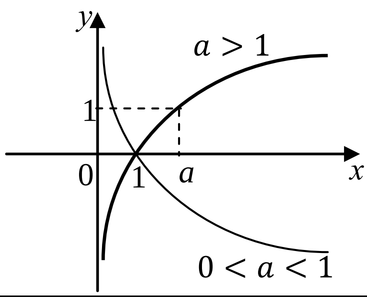
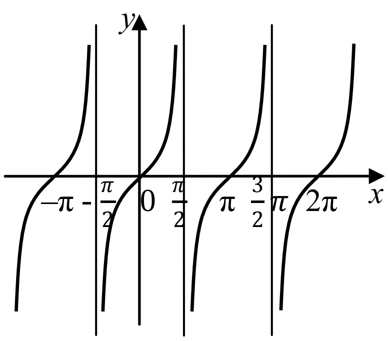
8. Решите неравенство $2^y + \sqrt{y - x^2 - 1} \leq 2\cos x$.

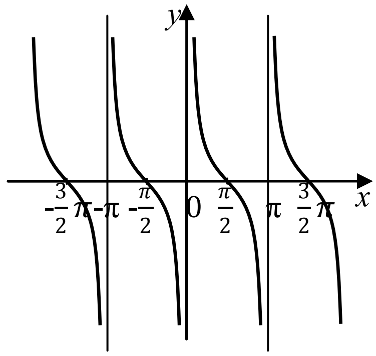
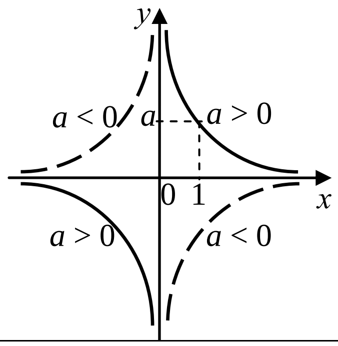
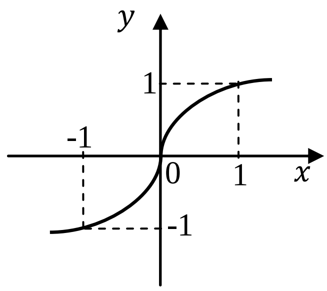
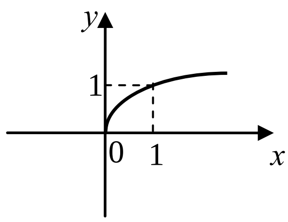
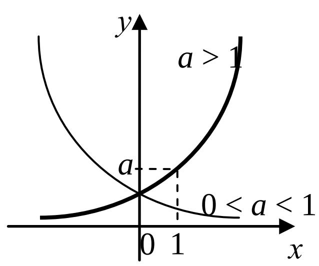
Ответы: **2.** $y_{\text{нм}} = 4$. **3.** а) $c = 4$; б) $a = \frac{1}{4}$. **4.** если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $y_{\text{нм}} = -\sqrt{a^2 + b^2}$, $y_{\text{нб}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. **5.** 8. **6.** $y_{\text{нм}}(2) = -e^3$, $y_{\text{нб}}(4) = e^5$. **7.** $f_{\text{нм}} = 2{,}75$, $f_{\text{нб}} = 5$. **8.** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

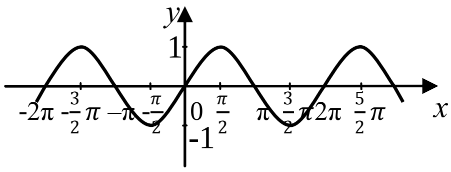
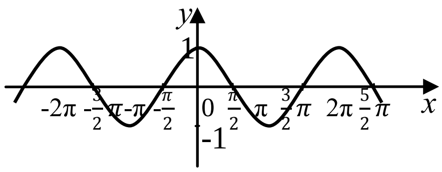
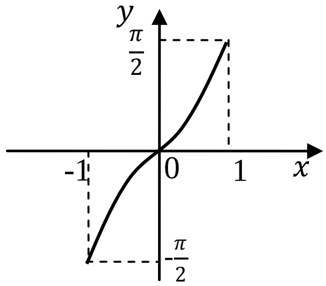
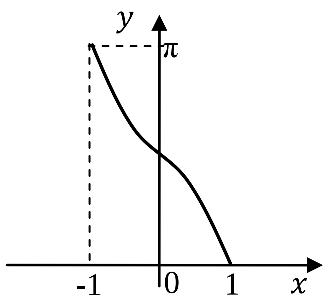
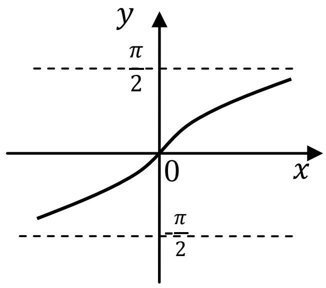
§10. Нахождение множества значений функции, заданной аналитически

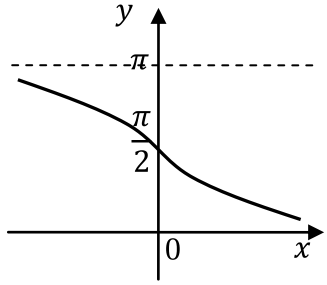
Определение. Известно, что под ***множеством значений*** функции E_f понимают множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых существует число $x_0 \in D(f)$ такое, что $f(x_0) = y_0$.

Множество значений основных элементарных функций

Функция	График	Множество значений (E_y)
$y = \log_a x$		**R**
$y = \operatorname{tg} x$		**R**

<table>
<tr><td>$y = \operatorname{ctg} x$</td><td>
</td><td>R</td></tr>
<tr><td>$y = \frac{a}{x}$</td><td>
</td><td>$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$y = \sqrt[2n+1]{x}$</td><td>
</td><td>R</td></tr>
<tr><td>$y = \sqrt[2n]{x}$</td><td>
</td><td>$[0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$y = a^x$</td><td>
</td><td>$(0; +\infty)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$y = \sin x$</td><td>
</td><td>$[-1;\, 1]$</td></tr>
<tr><td>$y = \cos x$</td><td>
</td><td>$[-1;\, 1]$</td></tr>
<tr><td>$y = \arcsin x$</td><td>
</td><td>$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$</td></tr>
<tr><td>$y = \arccos x$</td><td>
</td><td>$[0; \pi]$</td></tr>
<tr><td>$y = \operatorname{arctg} x$</td><td>
</td><td>$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$</td></tr>
</table>

$y = \operatorname{arcctg} x$		$(0;\pi)$

Для многочлена нечетной степени множеством значений является множество всех действительных чисел **R**, а для многочлена четной степени – все действительные числа из промежутка $[y_{\text{нм}}; +\infty)$ или $(-\infty; y_{\text{нб}}]$.

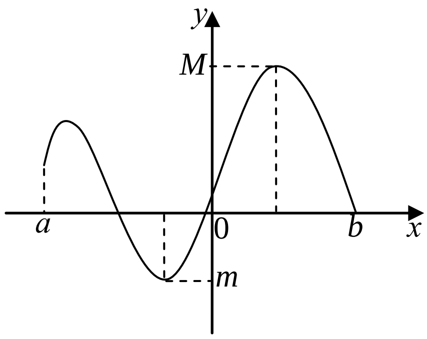


Рис. 37

Полезно помнить, что:

Множество значений функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, есть отрезок $[m; M]$, где $m = f_{\text{нм}}(x)$; $M = f_{\text{нб}}(x)$. (Рис. 37)

Методы нахождения множества значений функции довольно разнообразны. Остановимся только на некоторых из них.

***Пример* 1**. Найдем множество значений функции

$$y = a\sin\omega x + b\cos\omega x \ \ (a^2 + b^2 \neq 0).$$

Решение выполним методом введения вспомогательного аргумента, рассмотренным на частном примере §9.

Для этого запишем функцию в следующем виде:

$$y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x\right)$$

и воспользуемся теоремой из §9.

Поскольку

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

то существует число β, такое что

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \ \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда

$$y = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\beta\sin\omega x + \sin\beta\cos\omega x)$$

или

$$y = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\beta),$$

из чего следует, что наибольшее значение функции равно $\sqrt{a^2+b^2}$, а наименьшее – $\left(-\sqrt{a^2+b^2}\,\right)$, откуда $E_f = \left[-\sqrt{a^2+b^2}; \sqrt{a^2+b^2}\,\right]$.

Ответ: $E_f = \left[-\sqrt{a^2+b^2}; \sqrt{a^2+b^2}\,\right]$.

Упражнение. Найдите множество значений функции $y = \sin x + \cos x$.

***Пример* 2**. Найдем множество значений функции $y(x) = \cos 2x - 8\cos x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$y(x) = 2\cos^2 x - 8\cos x - 1$$

и сделаем замену $\cos x = t$. На отрезке $[0;\ 2\pi]$ функция $t = \cos x$ принимает все значения из отрезка $[-1;\ 1]$. Таким образом, имеем функцию

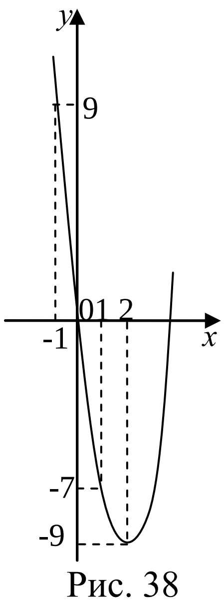


Рис. 38

$$y(t) = 2t^2 - 8t - 1,\ \text{где}\ t \in [-1;\ 1].$$

Поскольку функция $y(t)$ непрерывна на отрезке $[-1; 1]$, то множество ее значений есть отрезок $[y_{нм}; y_{нб}]$, то есть задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции на отрезке $[-1; 1]$.

Найдем координаты вершины параболы:

$$y = 2(t-2)^2 - 9, \text{то есть}\ A\ (2; -9).$$

На отрезке $[-1;\ 1]$ функция убывает, поэтому $f_{нб}(-1) = 9$, а $f_{нм}(1) = -7$, то есть $E_f = [-7; 9]$.

Ответ: $E_f = [-7; 9]$.

***Пример* 3**. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{x^2}{x^4+1}.$$

Решение. Функция в своей области определения $D_f = \mathbf{R}$ непрерывна, четна и неотрицательна. Поэтому сразу можно указать $f_{\text{нм}}(0) = 0$.

Наибольшее значение y ($y_{\text{нб}} \neq 0$) найдем двумя способами.

1 способ: $\frac{1}{y} = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Известно, что сумма двух взаимно-обратных положительных чисел не меньше двух, то есть $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ (причем $\frac{1}{y} = 2$ при $x^2 = 1$). Если $\frac{1}{y} \geq 2$ и $y > 0$, то $y \leq \frac{1}{2}$. Итак, $y_{\text{нб}}(\pm 1) = \frac{1}{2}$.

2 способ: Решим уравнение относительно x: $y \cdot x^4 - x^2 + y = 0$.

Пусть $x^2 = t$, где $t \geq 0$.

$$y \cdot t^2 - t + y = 0$$

если $y = 0$, то $t = 0 \Rightarrow x = 0$

если $y \neq 0$, то решаем квадратное уравнение: $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}$.

Корни $t_{1,2}$ действительны и неотрицательны при условии

$$\begin{cases} 1 - 4y^2 \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < y \leq \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что $y = \frac{1}{2}$ – наибольшее значение данной функции. Определим значения x, при которых оно достигается, подстановкой:

$$x^2 = t = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}}, \; x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1; \; x_2 = 1.$$

Итак, $f_{\text{нб}}(\pm 1) = \frac{1}{2}$.

Ответ: $f_{\text{нм}}(0) = 0$, $f_{\text{нб}}(\pm 1) = \frac{1}{2}$.

Такой способ отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, аналогичный нахождению обратной функции и ее области существования, можно применять, если уравнение $y = f(x)$ разрешимо относительно x.

***Пример* 4**. Найдем множество значений функции

$$y = \sqrt{2x+21} - \sqrt{2x-15}.$$

Решение. Найдем область определения функции

$$D(y): \begin{cases} 2x+21 \geq 0 \\ 2x-15 \geq 0 \end{cases}.$$

Получим $D(y) = [7{,}5; +\infty)$.

Для нахождения области значений функции запишем ее в виде дроби:

$$y = \frac{36}{\sqrt{2x+21} + \sqrt{2x-15}}.$$

Знаменатель $\sqrt{2x+21} + \sqrt{2x-15}$ – возрастающая на промежутке $[7{,}5; +\infty)$ функция (сумма двух возрастающих). Значит, при x = 7,5 знаменатель принимает наименьшее значение, равное 6. Отсюда заключаем, что исходная функция $y = \frac{36}{\sqrt{2x+21}+\sqrt{2x-15}}$ при x = 7,5 имеет наибольшее значение, равное $\frac{36}{6}$, то есть 6. Нетрудно заметить, что функция может принимать только положительные значения, поэтому $E_y = (0; 6]$.

Задания

1. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = 4\cos^2 x + 2\sin x - 5$.

2. Найдите множество значений функции

а) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-2x^2 - 4x - 1{,}75)$;

б) $y = \frac{x^2+25}{6x}$;

в) $y = \operatorname{arcctg}(-5\sin x + 12\cos x - 4)$.

3. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)\left(1 + \sin^2(x+y)\right) = 1 + 7\cos^2(x+y)$.

4. Решите неравенство $2^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$.

Ответы: **1.** $\frac{25}{4}$. **2.** а) $[2;+\infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3};\ +\infty\right)$; в) $[\operatorname{arcctg} 9;\ \operatorname{arcctg}(-17)]$. **3.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 + \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 + \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$. **4.** 2.

§11. Направление выпуклости графика функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a;b)$.

Определение. Говорят, что график функции $y = f(x)$ на интервале $(a;\ b)$ имеет ***выпуклость***, направленную ***вверх*** (***вниз***), если для любых значений аргумента $x_1, x_2 \in (a;b)$: $x_1 \neq x_2$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$

Это неравенство – частный случай условия выпуклости вверх (вниз) графика функции $y = f(x)$:

$$f\left(\frac{x_1+tx_2}{t+1}\right) > \frac{f(x_1)+tf(x_2)}{t+1} \left(f\left(\frac{x_1+tx_2}{t+1}\right) < \frac{f(x_1)+tf(x_2)}{t+1}\right), \text{где } t > 0.$$

При $t = 1$ имеем

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right):$$

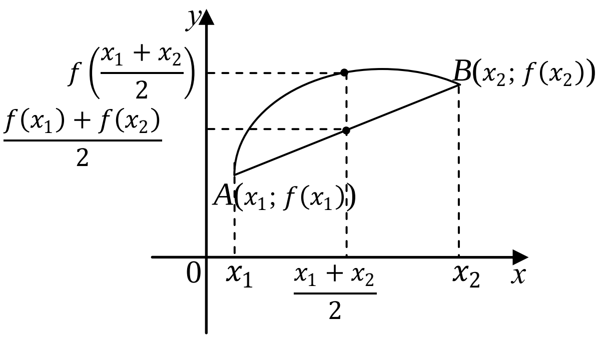
значение функции от среднего арифметического чисел x_1 и x_2 больше (меньше) среднего арифметического значений функции в этих точках.

Данное определение допускает простую геометрическую интерпретацию. Для этого введем следующее определение.

Определение. Говорят, что график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ расположен выше (ниже) данной прямой, если ордината кривой $y_{кр}(x_0)$ больше (меньше) ординаты прямой $y_{пр}(x_0)$ при любом значении аргумента x_0 из отрезка $[a;\ b]$, то есть

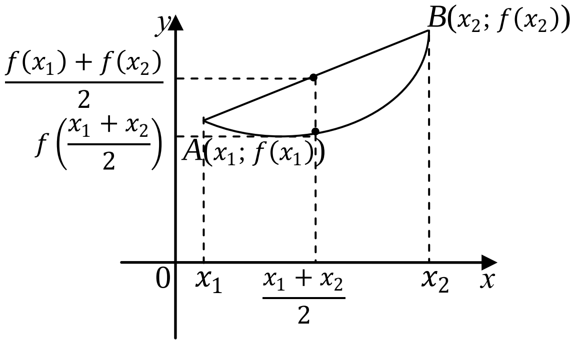
$$y_{кр}(x_0) > y_{пр}(x_0) \ \ (y_{кр}(x_0) < y_{пр}(x_0)) \ \forall x_0 \in [a;\ b].$$

<u>Геометрический смысл понятия выпуклости графика функции:</u>



выпуклая вверх кривая

Рис. 39



выпуклая вниз кривая

Рис. 40

Точки любой дуги AB графика функции $y = f(x)$ $\big(A = (x_1; f(x_1)),\ B = (x_2; f(x_2))\big)$ лежат не ниже (не выше) хорды, стягивающей эту дугу, если график выпуклый вверх (выпуклый вниз).

Свойство выпуклости можно применять при доказательстве неравенств.

***Пример* 1**. Докажем часто употребляемое в математическом анализе неравенство $\frac{2}{\pi}x < \sin x$, где $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Функция $y = \sin x$ выпукла вверх в промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, значит, $y_{\text{кр}} > y_{\text{хорды}}$ для $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, где $y_{\text{хорды}} = \frac{2}{\pi}x$.

Следовательно, $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

<u>Заметим</u>, что для *линейной* функции $(y = ax + b)$ направление выпуклости можно считать произвольным.

***Пример* 2**. Исследуем характер выпуклости графика функции $y = x^3$.

Решение. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой и нечетна, поэтому исследуем ее на луче $[0; +\infty)$.

Пусть $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$ и $x_1 \neq x_2$.

Определим знак разности

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3 - \frac{x_1^3+x_2^3}{2} =$$

$$= \frac{x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_2^2x_1 + x_2^3 - 4x_1^3 - 4x_2^3}{8} = \frac{-3x_1^3 - 3x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_2^2x_1}{8} =$$

$$= \frac{3}{8}\left(x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^2(x_1 - x_2)\right) = \frac{3}{8}(x_2 - x_1)(x_1^2 - x_2^2) =$$

$$= -\frac{3}{8}(x_1 - x_2)^2(x_1 + x_2) < 0,$$

то есть $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Это и доказывает, что график функции выпуклый вниз на луче $[0;\ +\infty)$.

> *Упражнение.* Докажите, что график функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на луче $(-\infty; 0]$ выпуклый вниз и на луче $[0;\ +\infty)$ выпуклый вверх!

***Пример* 3**. Докажем, что график функции $f(x) = \lg(1 + x)$ выпуклый вверх на интервале $(-1;\ +\infty)$.

Доказательство.

Пусть $x_1, x_2 \in (-1;\ +\infty)$ и $x_1 \neq x_2$. Составим $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ и $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \lg\left(1 + \frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{\lg(1+x_1)+\lg(1+x_2)}{2} = \lg\sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)}\ .$$

Остается сравнить выражения $\lg\left(1 + \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ и $\lg\sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)}$.

Из неравенства Коши имеем

$$\frac{(1+x_1)+(1+x_2)}{2} > \sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)},$$

откуда

$$\lg\left(1 + \frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}(\lg(1 + x_1) + \lg(1 + x_2)),$$

то есть

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

и график функции $f(x) = \lg(1 + x)$ выпуклый вверх на интервале $(-1;\ +\infty)$.

***Пример* 4**. Пусть график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ выпуклый вниз. Докажем, что график функции $y = f(x) + kx + l$ $(k, l \in \mathbf{R})$ на отрезке $[a; b]$ также выпуклый вниз.

Доказательство.

Возьмем любые значения аргумента x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$ из отрезка $[a; b]$. По условию график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ выпуклый вниз, что означает, что для любых $x_1, x_2 \in [a; b]$ и $x_1 \neq x_2$ выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < 0$. Оценим знак разности

$$y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{y(x_1)+y(x_2)}{2} =$$

$$= \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + k\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + l\right) - \left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + k\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + l\right) =$$

$$= f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < 0,$$

то есть график функции $y = f(x) + kx + l$ выпуклый вниз на отрезке $[a; b]$.

Упражнение. Докажите, что если график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх (выпуклый вниз) на отрезке $[a; b]$, то $y = k \cdot f(x)$ при $k > 0$ выпуклый вверх (выпуклый вниз), при $k < 0$ выпуклый вниз (выпуклый вверх)!

Заметим, что применение второй производной значительно упрощает исследование выпуклости графика функции, поскольку направление выпуклости полностью характеризуется знаком второй производной.

Теорема: Для того чтобы график дважды дифференцируемой на интервале $(a; b)$ функции $y = f(x)$ был выпуклым вверх (выпуклым вниз) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in (a; b)$ выполнялось неравенство

$$f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0).$$

Если $f''(x) = 0$ в любой точке $x \in (a; b)$, то $y = f(x)$ – линейная функция.

***Пример* 5**. Исследуем функцию $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$ на выпуклость.

Решение. $D(f) = \mathbf{R}$.

Исследование графика функции $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$ сведем к исследованию графика функции $y = 3\sqrt[3]{x}$ (для удобства положительный коэффициент 3 оставим) на луче $[0;\ +\infty)$. Воспользуемся теоремой: $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $y'' = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} < 0$ при любом значении $x \in (0;\ +\infty)$. Значит, на промежутке (0; +∞) график функции $y = 3\sqrt[3]{x}$, а следовательно, и график функции $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$ выпуклый вверх. Тогда на промежутке $(-\infty; 0)$ график функции $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$ выпуклый вниз, (0; 0) – точка перегиба, то есть точка, в которой график функции меняет направление выпуклости. (Рис. 41)

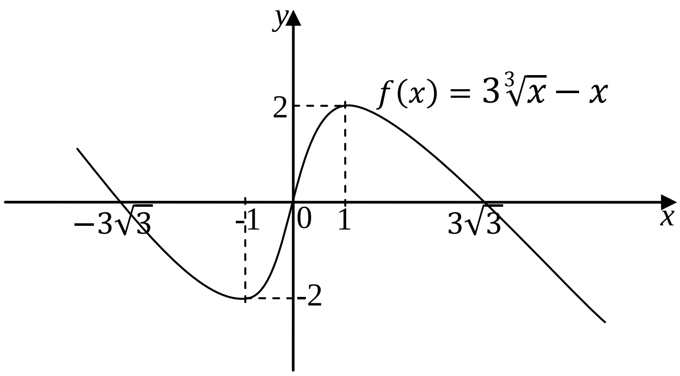


Рис. 41

<u>*Заметим*</u>, что в точке $x = 0$ данная функция имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке О (0; 0) совпадает с осью *ОУ*.

***Пример* 6**. Сравним с нулем выражение $\sqrt[3]{25} - \frac{\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{26}}{2}$.

Решение. Числа $\sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[3]{26}$ можно рассматривать как значения функции $y = \sqrt[3]{x}$, где $x > 0$. Известно, что на промежутке $[0;\ +\infty)$ график этой функции направлен выпуклостью вверх, поэтому для значений $x_1 = 24$ и $x_2 = 26$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{24+26}{2}\right) > \frac{f(24)+f(26)}{2} \Leftrightarrow f(25) > \frac{f(24)+f(26)}{2}$$

или

$$\sqrt[3]{25} > \frac{\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{26}}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{25} - \frac{\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{26}}{2} > 0.$$

Задания

1. Графики каких из указанных функций имеют одинаковые характер и интервалы выпуклости:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$;

б) $g(x) = 3\operatorname{arctg} x + 2x + 5$;

в) $h(x) = -2\operatorname{arctg} x + x - 1$;

г) $\varphi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + x^2 - 0{,}1$;

д) $q(x) = 3 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x$?

2. Сравните два числа:

а) $\arccos(-0{,}36) + \arccos(-0{,}64)$ и $\frac{4}{3}\pi$;

б) $\sin 152° + \sin 158°$ и $2\sin 155°$;

в) $\frac{1}{\sqrt[3]{995}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1005}}$ и $\frac{1}{5}$.

3. При каких значениях a кривая $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ будет выпукла вниз на всей числовой прямой?

4. Докажите, что функция $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ является постоянной. Решите задачу с помощью производной и без нее.

Ответы: **1.** а и б, в и д. **2.** а) >; б) <; в) >. **3** $(-2; 2)$.

§12. Преобразования графиков функций

Вопрос о построении графика функции $y = Af(ax + b) + B$ по известному графику функции $y = f(x)$ рассматривается в школьных учебниках.

С целью обобщения обратимся лишь к отдельным случаям.

Известно, что графики функций

а) $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ симметричны относительно оси Oy (прямой $x = 0$);

б) $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси Ox (прямой $y = 0$);

в) $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Обобщим каждый из этих случаев.

а) Отражение относительно прямой $x = a$.

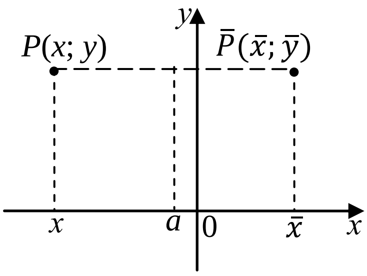


Рис. 42

Пусть $P(x;\ y)$ – точка графика функции $y = f(x)$. При заданном преобразовании точка $P(x;\ f(x))$ переходит в точку $\bar{P}(\bar{x};\ \bar{y})$. Поскольку известна зависимость $y = f(x)$, то x и y выразим через $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Заметим, что

$$\begin{cases} y = \bar{y} \\ \frac{x+\bar{x}}{2} = a \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} y = \bar{y} \\ x = 2a - \bar{x} \end{cases}.$$

Получим $\bar{y} = f(2a - \bar{x})$ или $\boldsymbol{y = f(2a - x)}$.

При $a = 0$ приходим к преобразованию $f(x) \to f(-x)$.

***Пример* 1**. Найдем уравнение функции, график которой симметричен графику функции $y = -2x^2 + 4x + 3$ относительно прямой $x = 2$.

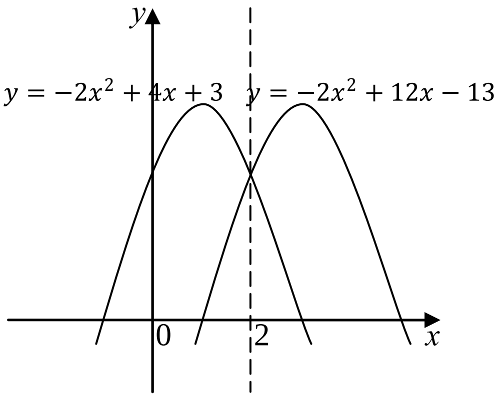


Рис. 43

Решение. Пользуясь приведенным правилом при $a = 2$, придем к уравнению $y = f(4 - x)$, то есть $y = -2(4 - x)^2 + 4(4 - x) + 3$.

Преобразуя выражение, получим уравнение искомой функции

$$y = -2x^2 + 12x - 13.$$

б) Отражение относительно прямой $y = a$.

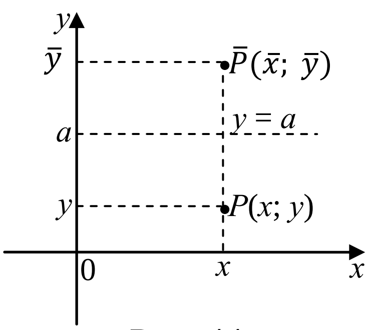


Рис. 44

Точка $P(x;\ y)$ графика функции $y = f(x)$ преобразуется в точку $\bar{P}(\bar{x};\ \bar{y})$. Установим связь между координатами этих точек: $\begin{cases} x = \bar{x} \\ \frac{y+\bar{y}}{2} = a \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \bar{x} \\ y = 2a - \bar{y}, \end{cases}$ откуда $2a - \bar{y} = f(\bar{x})$ или

$$\boldsymbol{y = 2a - f(x)}.$$

(Сравните с преобразованием $f(x) \to -f(x)$.)

***Пример* 2**. Найдем уравнение функции, график которой симметричен графику функции $y = \sqrt{x}$ относительно прямой $y = 2$.

Решение. Следуя правилу, имеем $y = 4 - \sqrt{x}$. (Рис. 45)

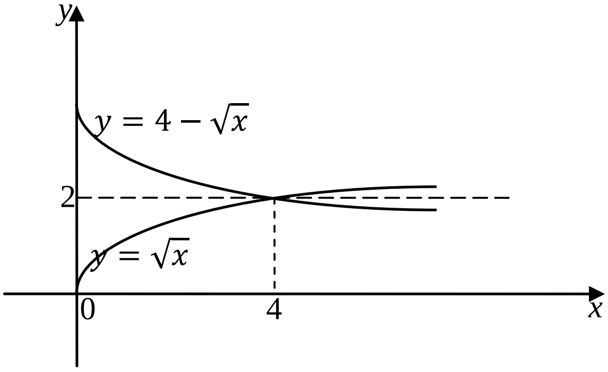


Рис. 45

в) Отражение относительно прямой $y = x + a$.

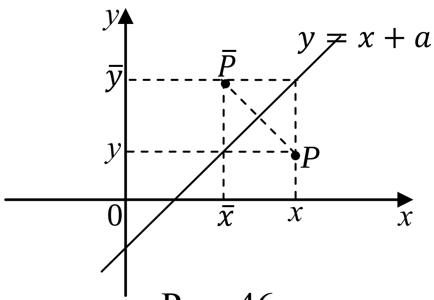


Рис. 46

Образом точки $P(x;\ y)$ графика функции $y = f(x)$ является точка $\bar{P}(\bar{x};\ \bar{y})$. Свяжем между собой координаты известной точки P и искомой точки $\bar{P}$:

$$\begin{cases} \bar{y} = x + a \\ y = \bar{x} + a \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y = \bar{x} + a \\ x = \bar{y} - a \end{cases}.$$

Учитывая условие $y = f(x)$, получим $\bar{x} + a = f(\bar{y} - a)$ или

$$\boldsymbol{x + a = f(y - a)}.$$

Если функция f обратима, то $y - a = f^{-1}(x + a)$ или $y = a + f^{-1}(x + a)$.

При $a = 0$ получим отражение относительно прямой $y = x$.

***Пример* 3**. Найдем уравнение функции $y = f(x)$, график которой симметричен графику функции $y = 3^x + 1$ относительно прямой $y = x - 1$.

Решение. Уравнение искомой функции нетрудно составить, построив график.

Указанное правило позволяет быстрее получить ответ. Монотонная на числовой прямой функция $y = 3^x + 1$ обратима и $f^{-1}(x) = \log_3(x - 1)$, тогда выражение для функции, удовлетворяющей требованию задачи, находится так: $y = -1 + \log_3(x - 1 - 1) \Leftrightarrow y = \log_3(x - 2) - 1$.

Упражнение. Изобразите графики обеих функций в одной системе координат!

***Пример* 4**. Найдем уравнение функции $x = g(y)$, график которой симметричен графику функции $y = |x| + 1$ относительно прямой $y = x - 1$.

Решение.

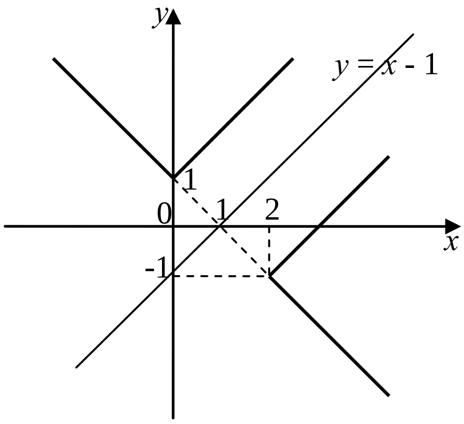


Рис. 47

1 способ. Отразим данную ломаную относительно прямой $y = x - 1$. Теперь составим уравнение функции, взяв за аргумент переменную y: $x = |y + 1| + 2$.

2 способ. Воспользуемся формулой $x + a = f(y - a)$. Для нашего случая имеем

$$x - 1 = |y + 1| + 1 \Leftrightarrow x = |y + 1| + 2.$$

г) Отражение относительно прямой $y = -x + a$.

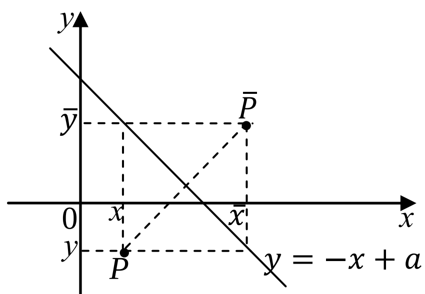


Рис. 48

Рассуждая как в предыдущем случае, получим: $\begin{cases} \bar{y} = -x + a \\ y = -\bar{x} + a \end{cases}$. Поскольку $y = f(x)$, то имеем $-\bar{x} + a = f(a - \bar{y})$ или

$$\boldsymbol{x - a = -f(a - y)}.$$

Если функция f обратима, то $a - y = f^{-1}(a - x)$ или $y = a - f^{-1}(a - x)$.

***Пример* 5**. Отразим график функции $y = \frac{2-3x}{1+2x}$ относительно прямой $y = 2 - x$.

Решение. Поскольку функция $y = \frac{2-3x}{1+2x}$ обратима на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, то

$$2 - y = f^{-1}(2 - x) \text{ или } y = 2 - f^{-1}(2 - x).$$

Разрешив уравнение $y = \frac{2-3x}{1+2x}$ относительно переменной x, найдем функцию обратную данной: $x = \frac{2-y}{2y+3}$.

Переобозначив переменные, получим $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{2x+3}$.

Составим выражение для $f^{-1}(2-x)$:

$$f^{-1}(2-x) = \frac{x}{7-2x}$$

Таким образом, функция, график которой симметричен графику функции $y = \frac{2-3x}{1+2x}$ относительно прямой $y = 2 - x$, задается формулой

$$y = 2 - \frac{x}{7-2x} = \frac{5x-14}{2x-7}.$$

Упражнение. Изобразите графики исходной и полученной функций!

Задания

1. Найдите координаты точки, симметричной точке A(1; 7) относительно прямой $2x - 5y + 4 = 0$.

2. Найдите функцию, в которую переходит функция $y = \frac{2x-3}{-2x+5}$

а) при параллельном переносе на вектор (1; 2);

б) при симметрии относительно прямой $y = x$.

3. График какой функции получится, если график функции $y = \operatorname{tg} x$ перенести по оси *Ox* вправо на 2 единицы, потом сжать по оси *Oy* в 5 раз?

4. В какую функцию переходит функция $y = \frac{3x-1}{5x+2}$ при симметрии относительно прямой x = -3?

Ответы: **1.** $(5; -3)$. **2.** а) $y = \frac{-2x+9}{-2x+7}$; б) $y = \frac{5x+3}{2(x+1)}$. **3.** $y = \frac{1}{5}\operatorname{tg}(x-2)$. **4.** $y = \frac{3x+19}{5x+28}$.

Вопросы и задания для контроля и самоконтроля

1. а) На координатной плоскости изображена замкнутая кривая. Может ли она быть изображением графика некоторой числовой функции?

б) Кривая Г на координатной плоскости симметрична относительно оси ординат. Может ли Г изображать график числовой функции $y = f(x)$ на координатной плоскости? Ответ подтвердите примерами.

в) Кривая Г на координатной плоскости симметрична относительно оси абсцисс. Может ли Г изображать график числовой функции на координатной плоскости? Ответ подтвердите примерами.

2. Составьте функцию, область определения которой:

а) ограниченное множество;

б) множество, симметричное относительно начала координат;

в) изолированные точки;

г) $\emptyset$; д) **R**; е) (-1; 3); ж) $(-3;3) \cup [7;10]$.

3. Составьте функцию, у которой:

а) $D_f = E_f$; $E_f = \mathbf{R}$; б) $D_f = \mathbf{R}$; $E_f \subset \mathbf{R}$; в) $D_f \subset \mathbf{R}$; $E_f \subset \mathbf{R}$.

4. Нарисуйте график функции:

а) с $D_f = [-3;0] \cup (1;+\infty)$ и неограниченной в любой окрестности точки 1;

б) ограниченной сверху и не имеющей наибольшего значения;

в) ограниченной, но не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего значений;

г) имеющей наименьшее и не имеющей наибольшего значения.

5. Пусть $f(x) = \sqrt{x-2}$ и $g(x) = \sqrt{1-x}$. Задает ли функцию формула:

а) $F(x) = f(x) + g(x)$; б) $Y(x) = f(x) \cdot g(x)$?

6. Выясните, в каком из следующих случаев область определения композиции $g \circ f = g\big(f(x)\big)$ заданных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ не является пустым множеством:

а) $f(x) = \lg x \ \forall x \in (0;1)$, $g(x) = \lg x \ \forall x \in (0;\ +\infty)$;

б) $f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \cos x \ \forall x \in \mathbf{R}$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x \ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right), g(x) = 2^x \ \forall x \in \mathbf{R}$.

7. Составьте композиции $f \circ f = f\big(f(x)\big)$, $f \circ g = f\big(g(x)\big)$, $g \circ f = g\big(f(x)\big)$, $g \circ g = g\big(g(x)\big)$ и укажите их области определения, если:

а) $f(x) = 2^x \ \forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \log_2 x \ \forall x \in (0;\ +\infty)$;

б) $f(x) = 2^x \ \forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbf{R}$.

8. Установите, какие из перечисленных ниже функций имеют обратные. Найдите соответствующие обратные функции, их области определения, постройте графики:

а) $f(x) = (x-1)^3$;

б) $f(x) = \ln 2x$;

в) $f(x) = \cos 2x$;

г) $f(x) = x^2 + 1$;

д) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$;

е) $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$.

Монотонны ли исходные функции и обратные к ним?

9. Найдите композицию $f \circ f \circ f$ функции f, если $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Постройте графики исходной функции и композиции. Что можно сказать об ограниченности и монотонности этих функций?

10. Область определения нечетной функции – промежуток $[a;\ b]$. Что можно сказать о числах a и b?

11. Область определения нечетной функции – объединение промежутков $[a; b] \cup [c; d]$. Что можно сказать о числах a, b, c, d?

12. Существует ли нечетная функция, принимающая только положительные значения?

13. Известно, что 1) функция f – нечетная; 2) точки $x = 2$ и $x = -3$ не принадлежат ее области определения. Что следует из этих условий?

14. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что функция: а) четная; б) нечетная.

15. Составьте функцию, для которой нарушается необходимое условие четности.

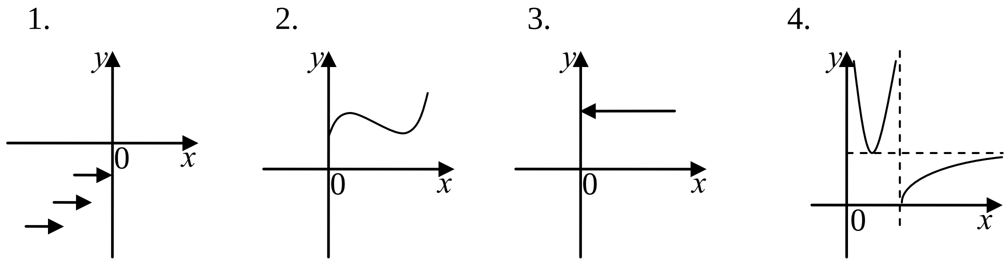
16. Может ли функция одновременно быть и четной, и нечетной?

17. Докажите, что если нечетная функция обратима, то обратная ей функция – нечетная.

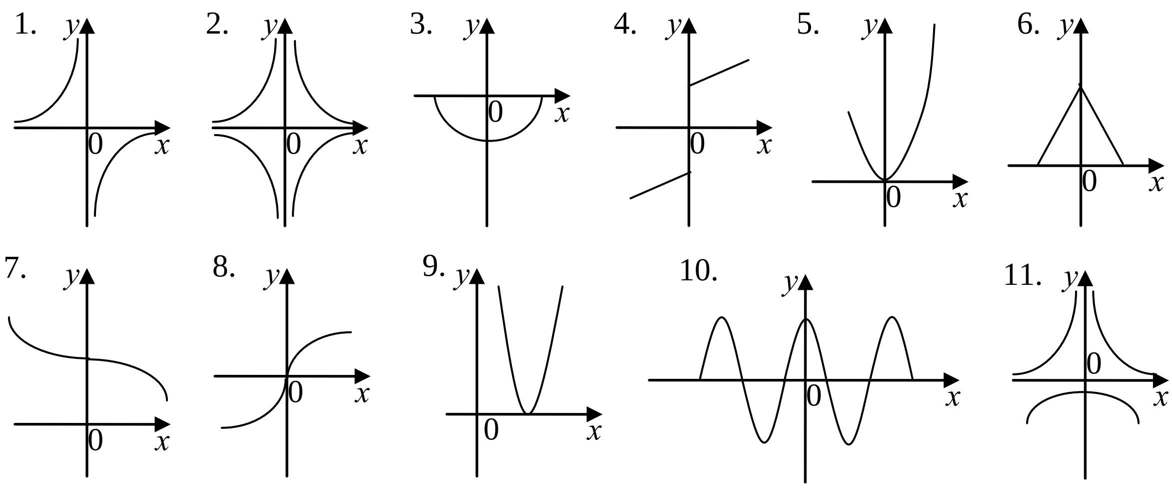
18. Докажите, что четная функция необратима.

19. а) Дополните, если возможно, до графика

а) четной; б) нечетной функции



б) Найдите на данных рисунках графики функций: а) четных; б) нечетных; г) ни четных, ни нечетных.



20. Четная функция f убывает на $(-\infty: 0)$. Что можно сказать о поведении этой функции на $(0; +\infty)$?

21. Нечетная функция f возрастает на $(0; +\infty)$. Что можно сказать о ее поведении на $(-\infty: 0)$?

22. Функция $f(x)$ убывает на каждом из промежутков:

а) $[0; 1]$ и $[1; 2]$; б) $[0; 1)$ и $[1; 2]$

Обязательно ли она убывает на $[0; 2]$?

23. Может ли:

а) ограниченная функция иметь вертикальную асимптоту;

б) функция, заданная на ограниченном множестве, иметь невертикальную асимптоту?

24. Составьте функцию, график которой имеет вертикальные асимптоты:

а) $x = 2$ и $x = -2$;

б) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$;

в) горизонтальную $y = \frac{3}{2}\pi$.

25. Приведите примеры и постройте графики периодических функций с периодами

а) T = 1; б) $\mathrm{T} = \frac{1}{2}$; в) T = 3.

26. Составьте функцию, имеющую основной период: а) T = 3π; б) T = 10π.

27. Известно, что $\sin(0 + \pi) = \sin 0$. Можно ли сделать вывод о том, что π - период функции синус?

28. Для функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ определить значения $f(1)$ и $f(2 + 1)$. Является ли данная функция периодической?

29. Может ли вся область определения периодической функции представлять собой отрезок, луч?

30. Может ли периодическая функция иметь конечное число точек разрыва на D_f?

31. Пусть $x_0 \in D_f$ ($y = f(x)$ – периодическая с периодом T). Принадлежат ли D_f точки $x_0 + n \cdot \mathrm{T}$ $(n \in \mathbf{Z})$?

32. Выразите простейшей формулой функцию, которая является одновременно четной, нечетной, невозрастающей, неубывающей и периодической.

33. Наименьшие положительные периоды функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно равны Т и $\frac{\mathrm{T}}{2}$. Какой наименьший положительный период имеет функция:

а) $y = f(x+2)$;

б) $y = f(\mathrm{T}x)$;

в) $y = k \cdot f(x)$ $(k \neq 0)$;

г) $y = g(\mathrm{T}x + a)$;

д) $y = g(x) + b$;

е) $y = f(x) + g(x)$?

34. Будет ли композиция $g \circ f = g\big(f(x)\big)$ периодической функцией, если $f(x)$ – периодическая?

35. Является ли периодической функция? Если является, то укажите ее период.

а) $f(x) = \sqrt{8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}$;

б) $f(x) = \cos \pi x + \cos x$;

в) $f(x) = 2^{|\sin x|}$;

г) $f(x) = 2x - [2x]$;

д) $f(x) = 2^{\sin x}$;

е) $f(x) = \sin\big(\sqrt{x}\big)^2$.

36. Может ли быть периодической сумма двух функций, если:

а) каждая из них непериодическая;

б) одна из них периодическая, а другая непериодическая?

37. Существует ли периодическая функция, для которой любое рациональное число является периодом, а любое иррациональное число периодом не является?

38. При каких значениях a функция:

а) $y = a^{-x}$; б) $y = \log_a(1-x)$ является возрастающей? убывающей?

39. Нарисуйте график функции, максимум которой совпадает с ее наибольшим значением.

40. Найдите область определения функции:

а) $y = \mathrm{ctg}\,(\pi \sin x)$;

б) $y = \sqrt{\log_3(x^2+9) \cdot (2x - x^2 - 5)}$.

41. $D_\rho = ?$ а) $\rho(\varphi) = \lg \cos 2\varphi$; б) $\rho(\varphi) = \sqrt{\sin 3\varphi}$.

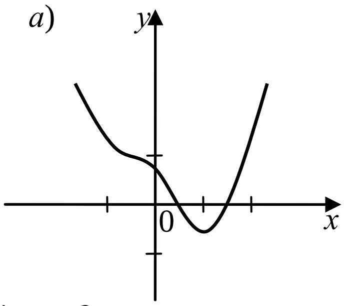
42. Существует ли такое значение x, при котором выполняется равенство

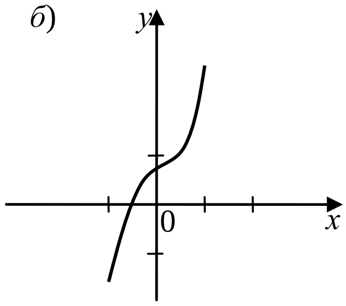
а) $\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{5}$; б) $\sin x \cdot \cos x = \frac{5}{8}$.

43. Можно ли восстановить график функции $f(x)$ по графику функции: $f(-x)$, $f(|x|)$? Сравните преобразования $f(-x)$ и $f(|x|)$.

44. При каких значениях a уравнение $10^{|x|} = a$ имеет корни? Сколько и какие?

45. На рисунке изображен график функции:





а) $f(x) = ax^4 - x^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b, c.

б) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Определите знаки коэффициентов a, b, c, d.

46. Исследуйте на четность:

а) $f(x) = \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+1}} \cdot (x^2 - 9)$;

б) $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} x^3$;

в) $f(x) = \frac{(x+2)(x^2-7x+10)}{x-5}$;

г) $f(x) = 2^{\log_2 \cos x} + x^{\frac{2}{3}}$;

д) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x+1} + \cos^2 \frac{1}{x+1}$.

47. Решите уравнение:

а) $x^3 + 1 = -x - 1$;

б) $x + \sqrt{3x + 10} = 10$;

в) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 3} = 5$;

г) $\sqrt[3]{x - 2} = \sqrt{4 - x}$;

д) $6 + \sqrt{17 - 2x} = 2^{x-1} + 1$;

е) $2^{-x} - 9 \cdot 3^x = -2^{-x-1}$;

ж) $5^{x+1} \cdot 3^{-x+2} = 75$;

з) $4^{x+5} = 2^{1-x}$.

48. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x + 3} > -x - 1$;

б) $2\sqrt{x} > x^{-1/2} + 1$.

49. Найдите сумму всех корней уравнения $2\operatorname{tg} x + 7x^9 + \sin x - x^7 = 0$.

50. Вычислите интегралы:

а) $\int_{-2}^{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) dx$;

б) $\int_{-1}^{1} |2^x - 2^{-x}| dx$.

51. Верно ли, что:

- любая функция имеет наибольшее значение;

- любая ограниченная сверху функция имеет наибольшее значение;

- если некоторое число ограничивает сверху все значения функции и совпадает с одним из них, то это число — наибольшее значение функции;

- если некоторое число М ограничивает сверху все значения функции и никакое меньшее число их не ограничивает, то число М является наибольшим значением функции;

- если некоторое число — наибольшее значение функции, то во всех точках, кроме одной, функция принимает значения, меньшие этого числа;

- любая функция каждое значение между своим наибольшим и наименьшим значениями принимает хотя бы в одной точке?

52. С помощью дискриминанта $\boldsymbol{D} = b - 4ac$ квадратного трёхчлена $f(x) = ax + bx + c$ с положительным коэффициентом a, абсциссы $x_0 = -b/2a$ вершины соответствующей параболы и значений функции $f(x)$ в отдельных точках сформулируйте необходимые и достаточные условия для того, чтобы этот квадратный трёхчлен:

- не имел корней;

- имел единственный корень;

- имел два корня, расположенные по разные стороны от числа d;

- имел два корня, между которыми лежит отрезок $[n; m]$;

- имел два корня, большие числа d;

- имел два корня на отрезке $[n; m]$;

- имел два корня, расположенные по одному на каждом из двух непересекающихся интервалов (n_1; m_1) и (n_2; m_2);

- не имел корней, больших числа d;

- не имел корней на отрезке [n; m];

- имел хотя бы один корень, больший числа d;

- имел хотя бы один корень на отрезке [n; m];

- имел ровно один корень, больший числа d;

- имел ровно один корень на интервале (n; m).

53. Верно ли, что:

- если функция имеет положительную производную во всех точках своей области определения, то она – возрастающая;

- если функция имеет положительную производную во всех точках некоторого интервала, то она возрастает на этом интервале;

- если функция имеет положительную производную во всех точках интервала (a; b) и непрерывна на отрезке [a; b], то она возрастает на этом отрезке;

- если функция имеет неотрицательную производную во всех точках числовой прямой, то она – неубывающая;

- если функция в некоторой точке имеет производную, равную нулю, то эта точка является точкой экстремума;

- в точке экстремума дифференцируемой функции производная этой функции равна нулю;

- своё наибольшее значение функция может принимать только в точке максимума;

- своё наибольшее значение функция, определённая на отрезке, может принимать только в точке максимума или на конце отрезка;

- если при переходе через некоторую точку производная функции меняет знак с плюса на минус, то эта точка является точкой максимума?

Контрольная работа.

1. Задана функция $f(x)=\frac{3-2x}{x+1}$. Найдите:

а) $f(2)$;

б) $f(1-a)$;

в) $f\left(\frac{2}{x}\right)$;

г) $f(a-x)$;

д) $f\big(f(x)\big)$.

2. а) По графику функции $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$, изображенному на рисунке 1 определите знаки коэффициентов a, b, c.

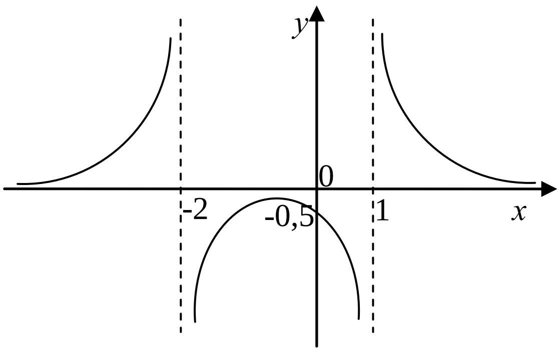


Рис. 1

б) Определите знаки коэффициентов a, b, c для функции $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, график которой изображен на рисунке 2.

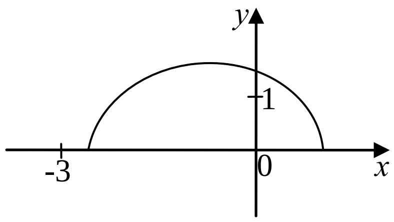


Рис. 2

3. Найдите функцию, обратную функции $y=2-3|x-1|,\ x\in(2;4]$.

4. Найдите область определения функции

а) $y=\sqrt{(5-x)(x-\ln(1+x))}$;

б) $y=\lg\big((x-e^{x-1})(1+2x-e^{2x})\big)$.

5. При каких значениях параметров p и k функция $f(x)=\sqrt{12-x^2-4x}+2\sqrt{36-x^2+16x}-3\sqrt{x^2-4}+kx+p$ является одновременно и четной, и нечетной?

6. Сравните числа $\cos 320°+\cos 330°$ и $2\cos 325°$.

7. Наименьший положительный период функции $f\left(\frac{2}{3}-5x\right)$ равен $\frac{3}{7}$. Найдите наименьший положительный период функции $-\frac{2}{3}-7f(3x+10)$.

8. В какую функцию переходит функция $y=\frac{2x-3}{-2x+5}$ при симметрии относительно прямой $y=-x+1$.

9. Найдите множество значений функции

а) $y = \frac{x^2+25}{6x}$;

б) $y = 2^{-3x^2+6x-6}$.

10. а) Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $\big||2x+3|+x\big| = a$;

б) Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} |x+a| \leq 4 \\ |x-a-1| \leq 5 \end{cases}$ имеет единственное решение.

11. Постройте график функции $|y| = \frac{|\mathrm{tg}\, x|}{\mathrm{tg}\, x}$.

Список литературы.

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1965. с. 444. стр. 7 – 26, 97.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1967. с. 736. стр. 25 – 64.
3. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. – Челябинск: “Взгляд”, 2004. с. 448.
4. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. Функции и графики (основные приемы). – Выпуск 2. Издание третье, исправленное и дополненное. – М.: Наука, 1968.-с96. стр. 24 – 30, 52 – 56.
5. Гузаиров Г.М. Периодические функции. – Оренбург: Издательство ОГПУ, 2005. с. 24. стр. 4.
6. Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. – издание третье перераб. – М.: Наука, 1988. – с. 720. стр. 37 – 48, 138 – 168.
7. Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. – М.: “Высшая школа”, 1965. с. 551.
8. Сивашинский Ю.С. Учебное пособие для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1968. с. 280. стр. 114- 115.
9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. I. – издание седьмое. – М.: Физматлит, 2002. с. 415
10. “Математика в школе” №4 2004. Епифанова Т.Н. “Отыскание экстремальных значений функции различными способами” с. 52 – 54.
11. Учебно-методический комплекс “Математика. ЕГЭ 2010” под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: издательство “Легион – М” 2009.

Учебное издание

Спиридонова Наталья Анатольевна

Липилина Елена Владимировна

Функции, их свойства и графики в задачах

Учебно-методическое пособие

Оригинал-макет издания изготовлен авторами

Подписано в печать 11.03.2010 г.

Усл. печ. л. 6

Тираж 100 экз.

Издательство Оренбургского государственного педагогического университета
460844, г. Оренбург, ул. Советская, 19