Министерство образования и науки Российской Федерации

Кумертауский филиал
федерального государственного образовательного бюджетного
учреждения высшего профессионального образования
«Оренгбургский государственный университет»
(Кумертауский филиал ОГУ)

Кафедра общих математических и естественнонаучных дисциплин

Д.К.Афанасова

Методические указания для проведения лабораторных работ по дисциплине «Математика»

(для студентов очной формы обучения по направлению подготовки
190600.62 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов)

Кумертау 2014

ББК 22.1
УДК 518,519

Афанасова Д.К.

Методические указания для проведения лабораторных работ по дисциплине «Математика»/ Д.К. Афанасова – Кумертау: Кумертауский филиал ОГУ, 2014. – 75с.

Методические указания для проведения лабораторных работ по дисциплине «Математика» предназначены для студентов очной формы обучения направления подготовки 190600.62 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов. Соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Методические указания содержат тематический план лабораторных работ, комплект заданий лабораторных работ.

Методические указания рассмотрены на заседании кафедры общих математических и естественнонаучных дисциплин

№ протокола 8 «6»февраля 2014

Методические указания рекомендованы к изданию решением научно-методического совета Кумертауского филиала ОГУ,

протокол № 3, от «13» марта 2014.

Введение

Методические указания для проведения лабораторных работ по дисциплине «Математика» предназначены для студентов очной формы обучения направления подготовки 190600.62 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов. Соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Математика изучается на 1-2 курсах, всего на изучение 396 ч. (11з.е.), из них лекций -72ч., практических занятий -54ч., лабораторных работ -54ч., самостоятельных работ – 189ч.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВПО по данному направлению:

- владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК–1);

- использует основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК–10);

- приобретает новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОК–17).

В результате изучения дисциплины «Математика» студент должен:

Знать:

- роль и место математики среди других наук;
- основные виды профессиональной деятельности и использование математических методов при анализе реальных ситуаций и обработке результатов практической деятельности;
- основные математические методы, необходимые при анализе и моделировании производственных процессов и явлений, при поиске оптимальных решений производственных задач и выборе наилучших способов реализации этих решений, при обработке и анализе результатов численных и научных экспериментов.

Уметь применять методы математического анализа при решении инженерных задач;

Владеть инструментарием для решения математических, задач в своей предметной области.

Приобрести опыт деятельности в использовании математических методов для решения математических и профессиональных задач; грамотного выполнения расчетов и представления их результатов.

1.Организация лабораторных работ

Лабораторная работа – одна из форм организации учебного процесса, направленная на творческое усвоение теоретических основ учебной дисциплины и получение практических навыков исследования путем постановки, проведения, обработки и представления результатов эксперимента на основе практического использования различных средств (наблюдения, измерения, контроля, вычислительной техники), приобретения навыков опыта творческой деятельности.

Задачи лабораторных работ: приобретение опыта решения учебно-исследовательских и практических задач на основе изученного теоретического материала; формирование умений оформления и представления результатов проведенных исследований; анализ и обсуждение полученных результатов и формулирование выводов; выработка способности логического осмысления самостоятельно полученных знаний; обеспечение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм обучения.

Формы организации лабораторных работ - решение типовых задач.

Лабораторная работа выполняется в соответствии с организационно-методическими данными дисциплины, представленными в рабочей программе и имеет трудоемкость во 1-3 семестрах 54 часа.

2.Тематический план лабораторных работ

№ ЛР	Наименование лабораторных работ	Кол-во ч.
1	Определители. Методы вычислений	2
2	Решение систем линейных уравнений Метод Крамера, Гаусса, обратной матрицы	2
3	Однородная система линейных уравнений	2
4	Собственные векторы и собственные значения матрицы	2
5	Элементы векторного анализа и аналитической геометрии	2
6	Прямая и плоскость в пространстве	2
7	Пределы и производные	2
8	Приложение производной	2
9	Исследование функции и построение графика	2
10	Неопределенные интегралы. Основные методы интегрирования	2
11	Интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных функций	2
12	Определенные интегралы. Основные методы интегрирования	2
13	Определенные интегралы, вычисляемые методом прямоугольников, методом трапеций , методом Симпсона.	2
14	Геометрические приложения определенного интеграла	2
15	Механические приложения определенного интеграла	2
16	Свойства несобственных интегралов первого и второго рода	2
17	Метод наименьших квадратов	2
18	Нелинейные уравнения, решаемые методом половинного деления, методом Ньютона.	2
19-20	Функция двух переменных, производная, дифференциал	2
21	Дифференциальные уравнения первого порядка	2
22	Дифференциальные уравнения второго порядка	2
23	Числовые ряды. Признаки сходимости	2
24	Степенные ряды, радиус и интервал сходимости	2
25	Кратные интегралы.	2
26	Основные формулы теории вероятности	2
27	Элементы математической статистики	2
Всего		54

3.Порядок проведения лабораторных работ

Лабораторная работа №1

Определители. Методы вычислений

Цель работы: Получение навыков нахождения определителя, отработка умений применять эквивалентные преобразования, работка вычислительных навыков

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Решение: 1 способ. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Разложим по первому столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot A11 + 0 \cdot A21 + 1 \cdot A31 - 2 \cdot A41 = 1 \cdot (-1)1+1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)3+1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} -- 2 \cdot (-1)4+1 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (56-10+6+56+4-0)+(12+6+16-$$

4+16+18)+2(0-4+14+1-0+42)=292

Ответ. 292

2 способ. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

С помощью элементарных преобразований матрицу приводим к треугольному виду

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ (1) & -1 & 7 & 0 \\ (-2) & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ изменим выделенные элементы. Для этого все элементы первой строки умножим на -1 и прибавим к элементам третьей строки; все элементы первой строки умножим на 2 и прибавим к элементам четвертой строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & (-4) & 9 & -1 \\ 0 & (10) & -1 & 6 \end{vmatrix}$$ изменим выделенные элементы. Для этого все элементы второй строки умножим на 2 и прибавим к элементам третьей строки; все элементы второй строки умножим на -5 и прибавим к элементам четвертой строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & (-6) & 16 \end{vmatrix}$$ изменим выделенный элемент. Для этого все элементы третьей строки умножим на $\frac{6}{15}$ и прибавим к элементам четвертой строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{146}{11} \end{vmatrix}$$ Полученный определитель имеет треугольный вид, значит, он равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.

$$\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 11 \cdot \frac{146}{11} = 292$$

Ответ. 292

Варианты заданий к лабораторной работе

Вычислить определитель двумя способами

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -9 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -5 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -7 & -1 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Лабораторная работа №2
Решение систем линейных уравнений .Метод Крамера, Гаусса, обратной матрицы

Цель работы: Получение навыков нахождения решения системы линейных уравнений методом Гаусса, Крамера.

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1. Исследовать на совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}.$$

Решение. Найдем ранг расширенной матрицы системы: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)$

Из первой строки вычтем третью, получим: $A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.Очевидно, что $r(A) = r(\tilde{A})=2$

Следовательно, система совместна. Здесь r(A)=2, n=3, так как r<n, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем общее решение системы. Запишем систему, полученную после выполнения эквивалентных преобразований над расширенной матрицей системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad - x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + 3x_3 \\ \quad x_2 = -2 + x_3 \end{cases},$$

где x_1, x_2 - базисные переменные,x_3 - свободная переменная.Из первого уравнения найдем:

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + 3x_3 - x_2) = \frac{1}{2}(1 + 3x_3 + 2 - x_3) = \frac{3}{2} + x_3.$$

Пусть x_3=t, тогда x_1=1,5+t, x_2=-2+t,

Ответ: (1,5+t; -2+t; t)

2. Исследовать на совместность и решить систему.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Данная система уравнений однородная (свободные члены равны нулю), следовательно, совместна, так как имеет нулевое решение (x_1=x_2=x_3=0). Осталось выяснить, определенная она или нет. Для этого вычислим ранг матрицы и сравним ее с числом переменных

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ Поменяем первую и третью строки. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Умножим первую строку на -3 и прибавим ко второй строке; умножим первую строчку на -2 и прибавим к третьей. Получим матрицу эквивалентную к исходной.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$ Получили две одинаковые строки, одну из них убираем.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен r(A)=2, n=3, так как r<n, то система неопределенная. Т.к r(A)=2, то две неизвестные - основные (или базисные), остальные - свободные.

Пусть x_1 и x_2 – базисные (так как $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$)

По матрице ступенчатого вида составим систему уравнений и разрешим ее ее относительно базисных переменных

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -3x_2 - 3x_2 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = -2x_2 \end{cases}$$

Исходная система имеет общее решение (3t;-2t;t), где t – произвольное число.

Ответ: (3t; -2t; t)

Варианты заданий к лабораторной работе

1. Исследовать системы на совместность. Найти общее решение в случае совместности.

1. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 4 \\ y - z + u = -3 \\ x + 3y - 3u = 1 \\ -7y + 3z + u = -3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + 2y + 3z - 4u = 1 \\ 2x + 3y + z - u = 1 \\ 3x + 4y - 3z - u = 1 \\ 3x + 5y + 4z - 2u = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + y - z + u = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 3u = 2 \\ 5x + y - z + 2u = -1 \\ 2x - y + z - 3u = 4 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u + 2v = -2 \\ x + 2y - z - v = -3 \\ x - y + 2z - 3u = 10 \\ -3x + 5z - 11u + 5v = -5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x - y + z + 2u + 3v = 2 \\ 6x - 3y + 2z + 4u + 5v = 3 \\ 4x - 2y + z + 2v = 1 \\ 6x - 3y + 4z + 8u + 13v = 9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y - z + u + v = 0 \\ y + 2z - u + v = 1 \\ 2x + 3y - 4z + 3u + v = -1 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 5x - 3y + 2z + u = 3 \\ 4x - 2y + 3z + u = 1 \\ 8x - 6y - z - 5u = 9 \\ 7x - 3y + 7z + 17u = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + 5y + 2z + 2u = 4 \\ 9x + 4y + z + 7u = 2 \\ 2x + 7y + 3z + u = 6 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x + 7y + 3z + u = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2u = 4 \\ 9x + 4y + z + 7u = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - y + z - u = 0 \\ x + y + 2u = 4 \\ 2x + 3y - z - u = 1 \\ x - 4y + 2z + 2u = 3 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x - 3y + 3z - 2u = 0 \\ 4x + 11y - 13z + 16u = 2 \\ 7x - 2y + z + 3u = -1 \\ 3x + 4y - 5z + 7u = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x+4y+5z+2u+3v=1 \\ 3x+2y+4z+u+2v=3 \\ 9x+6y+3z+3u+3v=1 \\ 3x+2y-2z+u=-7 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 3x+y-4z=0 \\ 2x-y-7z=-1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x-3y+3z=7 \\ 2x+5y+z+3u=2 \\ 4x+6y+3z+5u=4 \\ 4x+14y+z+7u=4 \end{cases}$

2. Исследовать на совместность и решить систему методом Гаусса:

1. $\begin{cases} 5x+6y-2z=18 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 4x-3y+2z=9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-y+5z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x+y-5z=0 \\ x+3y-13z=-6 \\ 2x-y+3z=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ x-12y+5z=4 \\ 4x+4y-8z=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+4y+z=6 \\ x+y+4z=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+3y+z=4 \\ x+y+3z=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y+2z=-1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-y+5z=4 \\ 5x+2y+13z=-23 \\ 3x-y+5z=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 3x-y+z=10 \\ 5x+y+2z=29 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-y+3z=-1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x-z=1 \\ 2x+4y-z=1 \\ x-8y-3z=-2 \end{cases}$

Лабораторная работа №3
Однородная система линейных уравнений

Цель работы: Получение навыков нахождения общего решения системы линейных уравнений.

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1. Исследовать на совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}.$$

Решение. Найдем ранг расширенной матрицы системы: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)$

Из первой строки вычтем третью, получим: $A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Очевидно, что $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$

Следовательно, система совместна. Здесь r(A)=2, n=3, так как r<n, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем общее решение системы. Запишем систему, полученную после выполнения эквивалентных преобразований над расширенной матрицей системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + 3x_3 \\ x_2 = -2 + x_3 \end{cases},$$

где x_1, x_2 - базисные переменные, x_3 - свободная переменная. Из первого уравнения найдем:

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + 3x_3 - x_2) = \frac{1}{2}(1 + 3x_3 + 2 - x_3) = \frac{3}{2} + x_3.$$

Итак, общее решение имеет вид: $\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3}{2} + x_3 \\ x_2 = -2 + x_3 \end{array}\right\}$

Пусть x_3=t, тогда x_1=1,5+t, x_2=-2+t,

Ответ: (1,5+t; -2+t; t)

2. Исследовать на совместность и решить систему.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Данная система уравнений однородная (свободные члены равны нулю), следовательно, совместна, так как имеет нулевое решение (x_1=x_2=x_3=0). Осталось выяснить, определенная она или нет. Для этого вычислим ранг матрицы и сравним ее с числом переменных

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ Поменяем первую и третью строки

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Умножим первую строку на -3 и прибавим ко второй строке;

умножим первую строчку на -2 и прибавим к третьей. Получим матрицу эквивалентную к исходной.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$ Получили две одинаковые строки, одну из них убираем.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.Ранг матрицы равен r(A)=2, n=3, так как r<n, то система неопределенная. Т.к r(A)=2, то две неизвестные - основные (или базисные), остальные - свободные.

Пусть x_1 и x_2 – базисные (так как $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$)

По матрице ступенчатого вида составим систему уравнений и разрешим ее ее относительно базисных переменных

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad\; x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 3x_2 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = -2x_2 \end{cases}$

Исходная система имеет общее решение (3t;-2t;t), где t – произвольное число.

Ответ: (3t; -2t; t)

Варианты заданий к лабораторной работе

1. Исследовать системы на совместность. Найти общее решение в случае совместности.

1. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 4 \\ y - z + u = -3 \\ x + 3y - 3u = 1 \\ -7y + 3z + u = -3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z - 4u = 1 \\ 2x + 3y + z - u = 1 \\ 3x + 4y - 3z - u = 1 \\ 3x + 5y + 4z - 2u = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y-z+u=1 \\ 3x-2y+2z-3u=2 \\ 5x+y-z+2u=-1 \\ 2x-y+z-3u=4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-2y+3z-4u+2v=-2 \\ x+2y-z-v=-3 \\ x-y+2z-3u=10 \\ -3x+5z-11u+5v=-5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-y+z+2u+3v=2 \\ 6x-3y+2z+4u+5v=3 \\ 4x-2y+z+2v=1 \\ 6x-3y+4z+8u+13v=9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y-z+u+v=0 \\ y+2z-u+v=1 \\ 2x+3y-4z+3u+v=-1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x-3y+2z+u=3 \\ 4x-2y+3z+u=1 \\ 8x-6y-z-5u=9 \\ 7x-3y+7z+17u=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x+5y+2z+2u=4 \\ 9x+4y+z+7u=2 \\ 2x+7y+3z+u=6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+7y+3z+u=6 \\ 3x+5y+2z+2u=4 \\ 9x+4y+z+7u=2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x-y+z-u=0 \\ x+y+2u=4 \\ 2x+3y-z-u=1 \\ x-4y+2z+2u=3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-3y+3z-2u=0 \\ 4x+11y-13z+16u=2 \\ 7x-2y+z+3u=-1 \\ 3x+4y-5z+7u=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x+4y+5z+2u+3v=1 \\ 3x+2y+4z+u+2v=3 \\ 9x+6y+3z+3u+3v=1 \\ 3x+2y-2z+u=-7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 3x+y-4z=0 \\ 2x-y-7z=-1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x-3y+3z=7 \\ 2x+5y+z+3u=2 \\ 4x+6y+3z+5u=4 \\ 4x+14y+z+7u=4 \end{cases}$

2. Исследовать на совместность и решить систему.

1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0; \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0; \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0; \\ x_1+2x_2-5x_3+13x_4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+3x_4=0; \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=0; \\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4=0; \\ -x_1+3x_2+x_3+2x_4=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 0; \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Лабораторная работа №4
Собственные векторы и собственные значения матрицы

Цель работы: Освоить понятия собственный вектор и собственные значения линейного преобразования. Научить находить собственные значения и собственные векторы матрицы. Отработка вычислительных навыков.

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

Если система:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}\,x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

оказалась совместной, т. е. матрицы А и А\В имеют один и тот же ранг, то могут представиться две возможности

а) r = n (единственное решение, если $\Delta \neq 0$; б) r < n (бесчисленное множество решений)

Система (1) называется *однородной*, если все $b_i = 0$, т. е. она имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{21}\,x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Если r = n, то нулевое решение будет единственным решением системы (1); при r < n система обладает решениями, отличными от нулевого, и для их разыскания применяют тот же прием, как и в случае произвольной системы уравнений.

Всякий ненулевой вектор - столбец $X = (x_1, x_2,..., x_n)^T$ называется *собственным вектором линейного преобразования (квадратной матрицы* А*)*, если найдется такое число λ, что будет выполняться равенство AX = λX.

Число λ называется *собственным значением линейного преобразования (матрицы* А*)*, соответствующим вектору X. Матрица А имеет порядок n.

Для нахождения собственных значений матрицы А перепишем равенство AX = λX в виде

(A - λE)X = 0, где E- единичная матрица n-го порядка или в координатной форме:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{21} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Получили систему линейных однородных уравнений, которая имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, $|A - \lambda E| = 0$.

Получили уравнение n-ой степени относительно неизвестной λ, которое называется *характеристическим уравнением матрицы* A, многочлен $|A - \lambda E|$ называется *характеристическим многочленом матрицы* A, а его корни - *характеристическими числами, или собственными значениями*, *матрицы* A.

Для нахождения собственных векторов матрицы A в векторное уравнение (A - λE)X = 0 или в соответствующую систему однородных уравнений (3) нужно подставить найденные значения λ и решать обычным образом.

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Вычислим определитель матрицы A - λE:

$$|A - \lambda E| = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4\lambda+4 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & -1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2-4\lambda+4)\begin{vmatrix} 5+\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Итак, $|A - \lambda E| = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda+2)^2$. Корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ - это числа $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$. Другими словами, мы нашли собственные значения матрицы A. Для нахождения собственных векторов матрицы A подставим найденные значения λ в систему (3): при λ = 2 имеем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Решив ее получим общее решение $(\frac{8}{15}t; \frac{8}{15}t; -\frac{1}{5}t\,; t)$.

Задав , например, значение t=15 получим частное решение (8, 8, -3, 15).

Следовательно, собственному значению λ = 2 отвечают собственные векторы вида α (8, 8, -3, 15), где α - любое отличное от нуля действительное число. При λ = -2 имеем:

$$A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и поэтому координаты собственных векторов должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} x_1+3x_2 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ x_3+x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому собственному значению $\lambda = -2$ отвечают собственные векторы вида β (0, 0,-1, 1), где β - любое отличное от нуля действительное число.

Варианты заданий к лабораторной работе

Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

Вариант 1

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 13

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 14

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 15

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Лабораторная работа №5
Элементы векторного анализа и аналитической геометрии

Цель работы: Получение навыков разложение вектора по базису, научиться находить угол между векторами, составлять уравнение прямых, площадь треугольника.

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента

3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1.Даны координаты точек A(-3;-2), B(1;8), C(5;3)

1.Найти координаты вектора $\overline{AB}$,разложить вектор $\overline{AB}$ по базису $\bar{i}$ и $\bar{j}$, найти модуль вектора $\overline{AB}$.

2 Найти уравнения стороны AC

3. Найти внутренний угол A треугольника в градусах и минусах;
4. Найти длину высоты, опущенной из вершины A;
5. Найти площадь треугольника.

Решение: Произвольный вектор $\bar{a}$ в прямоугольной системе координат может быть разложен по базису (разложен по **ортам** координатных осей $\bar{i}$ и $\bar{j}$) в виде $\bar{a}=a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$.

Если вектор задан начальной точкой $M_1(x_1;y_1)$ и конечной точкой $M_2(x_2;y_2)$, то данное разложение может быть представлено в виде:

$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$.

Значит, $\overline{AB} = (1-(-3))\vec{i} + (8-(-)\overrightarrow{2)}\,j = 4\vec{i} + 10\vec{j}$. Значит, $\overline{AB}$ (4;10)

Модуль вектора найдем по формуле $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

$|\overline{AB}| = \sqrt{16+100} = \sqrt{116}(\text{лин.ед})$

Уравнения сторон найдем по формуле прямой, проходящей через две данные точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Уравнение стороны AC: $\frac{x+3}{5+3} = \frac{y+2}{3+2}$, или $\begin{array}{c} 5x + 15 = 8y + 16 \\ 5x - 8y - 1 = 0 \end{array}$ (AC)

Внутренний угол треугольника найдем, зная угловые коэффициенты сторон AB и AC, образующих этот угол, по формуле $\text{tgA} = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB}k_{AC}}$.

Угловые коэффициенты прямых определим по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Получим $k_{AB} = \frac{8+2}{1+3} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$; $k_{AC} = \frac{3+2}{5+3} = \frac{5}{8}$.

Тогда $\text{tgA} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{8}}{1 + \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{8}} = \frac{40-10}{16+25} = \frac{30}{41} \approx 0{,}7317$

$\angle A = 36^0 12'$. Угол определяем с помощью таблицы тангенсов или калькулятора

Длину высоты AD⊥BC найдем как расстояние от данной точки A(-3;-2) до данной прямой BC: 5x + 4y – 37 = 0 по формуле

$d = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где A, B, C – коэффициенты прямой, $x_0 y_0$ - координаты данной точки. Получим

$$d = \left|AD\right| = \frac{\left|5\cdot(-3) + 4\cdot(-2) - 37\right|}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{60}{\sqrt{41}} \approx 9{,}37 \text{ (мин. ед.)}$$

Площадь треугольника можно вычислить несколькими способами.

$$S = \mathrm{mod}\,\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Вычислить ее через координаты вершин треугольника по формуле.

Получим $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1+3 & 8+2 \\ 5+3 & 3+2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}(20-80) = -30$.

Итак, площадь треугольника S_{ABC} = 30 кв. ед.

Варианты заданий к лабораторной работе

Дан координаты вершин треугольника ABC.

1.Найти координаты вектора $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$,разложить векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по базису $\bar{i}$ и $\bar{j}$, найти модуль векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

2. Найти уравнение стороны AC
3. Найти внутренний угол A треугольника в градусах и минусах;
4. Найти длину высоты, опущенной из вершины A;
5. Найти площадь треугольника.
6. Сделать чертёж

1. A(0,1);	B(3,3);	C(4,-1).
2. A(-2,1);	B(3,4);	C(4,-3).
3. A(0,3);	B(4,0);	C(-1,-2).
4. A(5,1);	B(2,-4);	C(-1,3).
5. A(-1,-2);	B(1,3);	C(4,-1).
6. A(-2,3);	B(4,1);	C(5,-3).
7. A(-3,1);	B(1,6);	C(2,-4).
8. A(-1,-4);	B(0,2);	C(3,-1).
9. A(3,4);	B(-1,1);	C(1,-2).
10.A(2,-4);	B(4,1);	C(0,2).
11.A(-2,-3);	B(-1,4);	C(1,2).
12.A(-1,-2);	B(0,2);	C(2,-2).
13.A(1,-2);	B(1,3);	C(5,-2).
14.A(0,5);	B(7,0);	C(-1,-2).
15.A(-1,2);	B(1,3);	C(3,-4).

Лабораторная работа №6
Прямая и плоскость в пространстве

Цель работы: Научить применять к решению задач различные формулы по данной теме: каноническое уравнение прямой; общее уравнение плоскости; уравнение плоскости, проходящей через 3 точки; условия перпендикулярности прямых, плоскостей, прямой и плоскости; угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Варианты заданий к лабораторной работе

Даны четыре точки $A_1(1,\ 2,\ 3)$, $A_2(4,\ -1,\ -2)$, $A_3(4,\ 0,\ 3)$, $A_4(2,\ 1,\ 6)$. Составить уравнение: а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2; в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$; г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2; д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2. Вычислить: е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; ж) косинус угла между координатной плоскостью $0xy$ и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение: а) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ как плоскости, проходящей через три точки A_1, A_2, A_3.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Раскрывая определитель, получим : $-10x-15y+3z+31=0.$

б) Составим уравнение прямой A_1A_2 как прямой, проходящей через две точки A_1 и A_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}; \qquad \frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{-1-2}=\frac{z-3}{-2-3}; \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}.$$

в) Напишем прежде всего уравнение прямой, проходящей через данную точку $A_4(2,\ 1,\ 6)$: $\frac{x-2}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-6}{p}$

Из условия перпендикулярности данной прямой и плоскости $-10x-15y+3z+31=0$ имеем: $\frac{m}{-10}=\frac{n}{-15}=\frac{p}{3},$ поэтому уравнение прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид

$$\frac{x-2}{-10}=\frac{y-1}{-15}=\frac{z-6}{3}.$$

г) Напишем уравнение прямой, проходящей через точку $A_3(4,\ 0,\ 3)$:

$\dfrac{x-4}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z-3}{p}$.

Из условия параллельности двух прямых заключаем, что *m, n, p* должны быть пропорциональны направляющим коэффициентам прямой A_1A_2, т.е. $\dfrac{m}{3}=\dfrac{n}{-3}=\dfrac{p}{-5}$.

Поэтому уравнение прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2 имеет вид: $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

д) Уравнение всех плоскостей, проходящих через точку $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ имеет вид: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

Уравнение всех плоскостей, проходящих через точку $A_4(2,\ 1,\ 6)$ будут имеет вид: $A(x-2)+B(y-1)+C(z-6)=0.$

Пользуясь условием перпендикулярности прямой и плоскости, заменив в последнем уравнении величины *A, B, C* им пропорциональными величинами *m*, *n*, *p* из уравнения прямой A_1A_2, т.е. числами 3, –3, –5, получим

$3(x-2)-3(y-1)-5(z-6)=0 \quad 3x-3y-5z+27=0.$

е) Синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ вычислим, пользуясь формулой для вычисления $\sin\varphi$ между прямой и плоскостью.

Составим уравнение прямой A_1A_4:

$\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-2}{1-2}=\dfrac{z-3}{6-3}; \qquad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{3}.$

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$: $-10x-15y+3z+31=0$; *m* = 1, *n* = –1, *p* = 3, *A* = –10, *B* = –15, *C* = 3

$$\sin\varphi=\frac{1\cdot(-10)-1\cdot(-15)+3\cdot 3}{\sqrt{1+1+9}\sqrt{100+225+9}}=\frac{-10+15+9}{\sqrt{11}\sqrt{334}}=\frac{14}{\sqrt{3674}}.$$

ж) Уравнение координатной плоскости *0xy* имеет вид: *z = 0.*

Вычислим косинус угла между координатной плоскостью *0xy* и плоскостью $A_1A_2A_3$, пользуясь формулой определения угла между двумя плоскостями: $A_1=0,\ B_1=0,\ C_1=1,\ A_2=-10,\ B_2=-15,\ C_2=3.$

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{3}{\sqrt{100+225+9}}=\frac{3}{\sqrt{334}}.$$

Варианты заданий к лабораторной работе

Даны координаты вершин пирамиды Составить уравнение: а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2; в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$; г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2; д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2. Вычислить: е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; ж) косинус угла между координатной плоскостью *0xy* и плоскостью $A_1A_2A_3$.

1. A_1(2; –3; 1), A_2(6; 1; –1), A_3(4; 8; –9), A_4(2; –1; 2).
2. A_1(5; –1; –4), A_2(9; 3; –6), A_3(7; 10; –14), A_4(5; 1; –3).

3. $A_1(1; –4; 0)$, $A_2(5; 0; –2)$, $A_3(3; 7; –10)$, $A_4(1; –2; 1)$.
4. $A_1(–3; –6; 2)$, $A_2(1; –2; 0)$, $A_3(–1; 5; –8)$, $A_4(–3; –4; 3)$.
5. $A_1(–1; 1; –5)$, $A_2(3; 5; –7)$, $A_3(1; 12; –15)$, $A_4(–1; 3; –4)$.
6. $A_1(–4; 2; –1)$, $A_2(0; 6; –3)$, $A_3(–2; 13; –11)$, $A_4(–4; 4; 0)$.
7. $A_1(0; 4; 3)$, $A_2(4; 8; 1)$, $A_3(2; 15; –7)$, $A_4(0; 6; 4)$.
8. $A_1(–2; 0; –2)$, $A_2(2; 4; –4)$, $A_3(0; 11; –12)$, $A_4(–2; 2; –1)$.
9. $A_1(3; 3; –3)$, $A_2(7; 7; –5)$, $A_3(5; 14; –13)$, $A_4(3; 5; –2)$.
10. $A_1(4; –2; 5)$, $A_2(8; 2; 3)$, $A_3(6; 9; –5)$, $A_4(4; 0; 6)$.
11. $A_1(–5; 0; 1)$, $A_2(–4; –2; 3)$, $A_3(6; 2; 11)$, $A_4(3; 4; 9)$.
12. $A_1(1; –4; 0)$, $A_2(2; –6; 2)$, $A_3(12; –2; 10)$, $A_4(9; 0; 8)$.
13. $A_1(–1; –2; –8)$, $A_2(0; –4; –6)$, $A_3(10; 0; 2)$, $A_4(7; 2; 0)$.
14. $A_1(0; 2; –10)$, $A_2(1; 0; –8)$, $A_3(11; 4; 0)$, $A_4(8; 6; –2)$.
15. $A_1(3; 1; –2)$, $A_2(4; –1; 0)$, $A_3(14; 3; 8)$, $A_4(11; 5; 6)$.

Лабораторная работа №7
Пределы и производные

Цель работы: Научить вычислять пределы и раскрывать неопределенности; находить производные сложных функций.

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Варианты заданий к лабораторной работе

Вариант 1.

1.Найдите пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20},$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2}$$

2. Найдите производные функций y $=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$,

Вариант 2.

1. Найдите пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6},$$
$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5},\quad \lim_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$$

2.Найдите производные функций y = $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}+4}{x}}$,

$y=3^{\frac{1}{x^2}}$, y = $\sin^3\frac{2x}{\sqrt{x}+5}$, $y=\frac{x^2-4}{x+1}$.

3. Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции y = $\frac{x}{x^2+1}$ в точке x = 1.

$y=6^{\ln 3x}$, y = $\operatorname{tg}^3\left(3x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$, y = $\frac{4x+\sqrt{x}+2}{x+4}$.

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$ в точке x = 0.

Вариант 3.

1.Найдите пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{x\sin x}$

2.Найдите производные функций y = $\frac{3x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}$, $y=e^{x^2+\frac{1}{x}}$, y = $\operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$, $y=\frac{2\sqrt{x}}{x+2}$.

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=x\cdot\sin(x^2+x)$ в точке x = 0.

Вариант 4.

1.Найдите пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^3-2x-1)\cdot(x+1)}{x^4+4x^2-5}$,

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$

2. Найдите производные функций y $=\left(\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}\right)^{-3}$, $y=2^{x+\cos^2 x}$, y = $\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, y = $\frac{2+\sqrt{5}\cdot tgx}{x}$.

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции y = $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ в точке x = 1.

Вариант 5.

1.Найдите пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$,

$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{2x^2}$

2.Найдите производные функций y $=\sqrt[3]{x^2\cdot(1+x)}$, $y=e^{x^2+\sin x}$, y =

Вариант 6.

1. Найдите пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100x}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{\sin x}$

2. Найдите производные функций y

$\sin^2(2x^2+1)$, $y=\arccos\frac{x^2-3}{x+2}$

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=\ln(1+x^2)$ в точке x = -1.

$=\arcsin\frac{x^3}{4}$,

$y=2x\cdot\sqrt[3]{x^2+4x}$, $y=e^{x^2+\sin x}$, $y=\log_7^2(x^2+16x)$

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=x\cdot e^{x^2}$ в точке x = -1.

Вариант 7.

1.Найдите пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3-8x+5}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$,

$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$

2. Найдите производные функций $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+7x^2}}$, $y=e^{x^2+\frac{1}{x}}$, $y=\lg^3\left(\frac{x}{3x^2+2}\right)$, $y=ctg\left(\frac{x}{x+1}\right)$

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=\arcsin(x^2)$ в точке x = 0.

Вариант 8.

1.Найдите пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{x^3+2}$, $\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$

2.Найдите производные функций $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, $y=\sin^3\frac{2x}{\sqrt{x}+5}$, $y=\mathrm{arctg}\frac{x^2-4}{x+1}$.

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ в точке x = 0.

Вариант 9.

1.Найдите пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-12x+6}{3x^2-2x}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$,

$\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$

Вариант 10.

1.Найдите пределы

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2n}\right)$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{\sin^2 x}$,

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\cos(\pi x)}{1-\cos(2\pi x)}$

2.Найдите производные функций y

2.Найдите производные функций y $=\frac{3x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}$, $y=e^{-x+tgx}$, y = $\sin\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$, $y=\frac{\cos^2(2-3x)}{1+\ln x}$

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ в точке x = 1.

Вариант 11.

1.Найдите пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-1}{6x^2-6x},\quad \lim_{x\to3}\left(\frac{4x}{x^2-9}-\frac{2}{x-3}\right),$$
$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos5x}{2x^2}$$

2.Найдите производные функций y $=\frac{1}{\sqrt[3]{2x+x^2+3}}$ $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x+4}}}$, y = $\frac{arctg\,x}{x^5}-1$, $y=\sin^3(2x+4)$

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=\sqrt[3]{\sin x+x}$ в точке x = 0.5.

Вариант 13.

1.Найдите пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2)^2}{x^2+1},\quad \lim_{x\to7}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{2x-14},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x-\sin3x}{x\sin x}$$

$=\frac{x-1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$, $y=e^{-x^2+tgx}$, y = $\cos^3\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}+1}\right)$, $y=\frac{\cos^3(2-x)}{1+x}$

3. Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ в точке x = 1.

Вариант 12.

1.Найдите пределы

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right),\quad \lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1},$$
$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}},\quad \lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$$

2.Найдите производные функций y = $\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$, $y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$, y = $\sin^3\frac{2x}{\sqrt{x}+5}$, $y=\mathrm{arctg}\,\frac{x^2-4}{x+1}$.

3. Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}-1}$ в точке x = 0.

Вариант 14.

1. $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{1-\cos x}$,

$$\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}},\quad \lim_{x\to1}\frac{1+\cos(\pi x)}{1-\cos(2\pi x)}$$

2.Найдите производные функций y = $\sqrt[3]{x^2\cdot(1+x)}$, $y=e^{x^2+\sin x}$, y =

2.Найдите производные функций y $= \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 1}}$, y = $3^{x^2 - \frac{1}{x^3}}$, y = $\log_5^3\left(x^2 + \sqrt{x}\right)$, y $= \sin\frac{x}{\sqrt{x} + 5}$

3.Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции y $= \sqrt[3]{x + \frac{1}{x}}$ в точке x = 1.

Вариант 15.

1.Найдите пределы

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2 - 3n + 1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x - 1}{3^x - 1}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{1 - x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{1 - \cos(2\pi x)}$

2.Найдите производные функций y $= \sqrt[3]{x\cdot(1 + \ln x)}$, y $= e^{x^2 + \sin x}$, y $= \ln\left(\frac{x^2}{2x - 1}\right)$, y $= \text{arctg}\frac{x^2 - x - 1}{x + 2}$

3. Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции y = arctg x в точке x = 1.

$\ln^3\left(\frac{x}{2x - 1}\right)$, y $= \arccos\frac{x^2 - 3}{x + 2}$

3. Найдите значения производных $y',\ y'',\ y'''$ функции y $= e^{x^2 - x}$ в точке x = 0.

Лабораторная работа №8-9
Приложение производной. Исследование функции и построение графика

Цель работы: Научиться применять аппарат дифференциального исчисления для исследования функции и построения ее графика.

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта

4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график. $y=\frac{x}{x^2-4}$.

Решение:

1.Область определения. $x^2-4\neq 0,\ x\neq 2,\ x\neq -2$, значит, $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$ - область определения.

x=-2, $x=2$ – точки разрыва. Исследуем характер точек разрыва.

$\lim\limits_{x\to -2-0}\frac{x}{x^2-4}=\frac{-2}{+0}=-\infty$., $\lim\limits_{x\to -2+0}\frac{x}{x^2-4}=\frac{-2}{-0}=+\infty$ .x=-2 - точка разрыва второго рода.

$\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{-0}=-\infty$., $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{+0}=+\infty$ .x=2 - точка разрыва второго рода.

2.Найдем асимптоты графика функции.

$x=a$ - вертикальная асимптота, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, следовательно, x=-2, $x=2$ - вертикальные асимптоты графика функции.

$y=kx+b$ - наклонная асимптота (при k=0 горизонтальная), где

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x^2-4}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2-4}\right)=0$., $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x^2-4}\right]=0$,y=0 - горизонтальная асимптота.

3. Найдем точки пересечения с осями координат. С осью OX: y=0, значит, $\frac{x}{x^2-4}=0$, x=0.

(0;0) – точка пересечения с осью OX. С осью OY: x=0, значит, $y=0$.(0;0) – точка пересечения с осью OY.

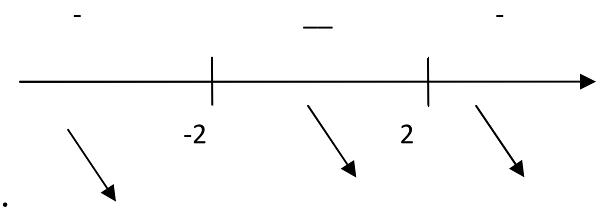
4.Исследуем на четность, нечетность функции.

$y(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-4}=\frac{-x}{x^2-4}=y(x)$.Значит, данная функция является нечетной, следовательно, график функции симметричен начала координат.

5.Найдем экстремумы функции, интервалы возрастания, убывания функции.

$$y'(x)=\left(\frac{x}{x^2-4}\right)'=\frac{x'\cdot(x^2-4)-x(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}\neq 0$$

.Следовательно, $x_1=2,\ x_2=-2$- критические точки (y' не существует)



.

Функция убывает при $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$. Точек экстремума нет.

6.Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости, вогнутости графика функции.

$$y'' = \left(\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} \right)' = \frac{\left(-x^2-4\right)'(x^2-4)^2 - \left(-x^2-4\right)\left((x^2-4)^2\right)'}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2-4)^2 + (x^2+4)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0$$

Следовательно, $x = 0$- критическая точка (y''=0).

$x_1 = 2,\ x_2 = -2$- критические точки (y'' не существует).

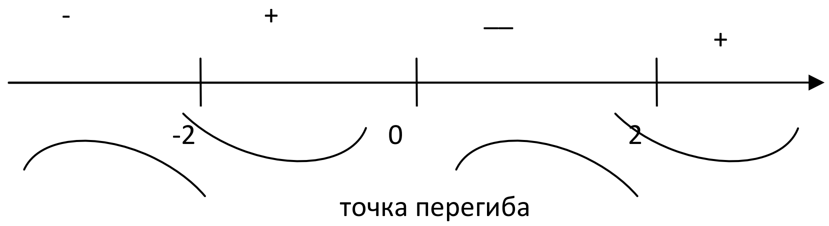
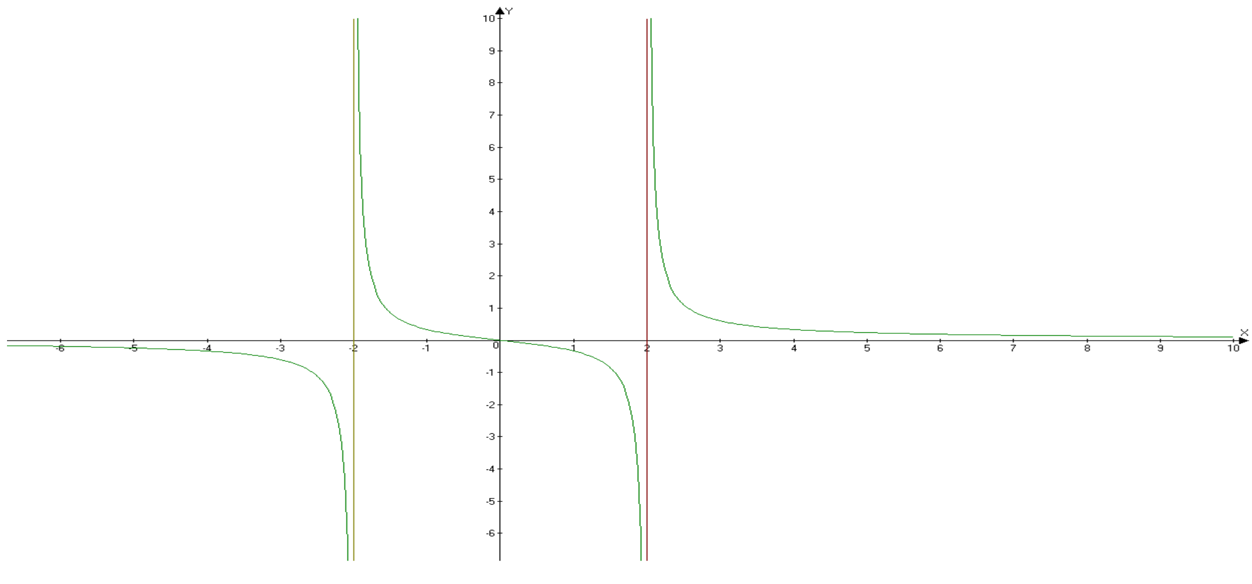


График функции выпуклый при $x \in (-\infty;-2) \cup (0;2)$, график функции вогнутый при $x \in (-2;0) \cup (2;+\infty)$.

(0;0) точка перегиба.

8) построим график функции.



Варианты заданий к лабораторной работе

Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график

Вариант 1 $y=3x^2-2-x^3$	Вариант 2 $y=12x-x^3-1$	Вариант3 $y=x^4-2x^2+5$	Вариант 4 $y=2x^3+9x^2+12x$	Вариант 5 $y=x^4-8x^2$
Вариант 6 $y=4x^2-x^4-3$	Вариант 7 $y=6x-8x^3$	Вариант 8 $y=3x^2-2-x^3$	Вариант 9 $y=x^4-6x^2+5$	Вариант 10 $y=6x^2-x^4$
Вариант 11 $y=2x^3-9x^2+12x-9$	Вариант 12 $y=3x-x^3$	Вариант 13 $y=2-3x^2-x^3$	Вариант 14 $y=2x^3-3x^2-4$	Вариант 15 $y=3x^2-2-x^3$

Лабораторная работа №10
Неопределенные интегралы. Основные методы интегрирования

Цель работы: Получение навыков вычисления неопределенных интегралов непосредственно, методом подстановки и методом интегрирования по частям

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1.Найти интеграл $\int\left(5x^4-3x^2+1\right)dx$

Решение: $\int\left(5x^4-3x^2+1\right)dx=5\int x^4dx-3\int x^2dx+\int dx=x^5-x^3+x+C$.

2.Найти интеграл $\int\frac{x^6-x^5+1}{x^2}dx$

Решение: $\int\frac{x^6-x^5+1}{x^2}dx=\int\left(x^4-x^3+x^{-2}\right)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+C.$

3.Найти интеграл $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

Решение: Пусть $x=t^2$. Тогда $dx = 2tdt$, получим

$$\int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2\int \sin tdt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

4.Найти интеграл $\int xe^x\,dx.$

Решение: Пусть $u=x \to du=dx$, $dv = e^x dx \to v = e^x$; Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Варианты заданий к лабораторной работе

Вычислить интегралы:

1. а) $\int (7-x)\cdot(\frac{1}{x}+2\sqrt{x})dx$;

б) $\int e^{4x^2-3x+2}\cdot(8x-3)dx$;

в) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}dx$;

2. а) $\int (\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x})\cdot(4-x)dx$;

б) $\int \frac{\ln x+5}{x}dx$;

в) $\int (2x-7)\cdot\cos 2xdx$;

3. а) $\int \frac{(x^3+3)^2}{\sqrt{x}}dx$;

б) $\int \frac{e^{4x}dx}{\sqrt[3]{e^{4x}-4}}$;

в) $\int (6x^2+5)\ln xdx$;

4. а) $\int \frac{\sqrt{x^3}+5-x^4}{x^2}dx$;

б) $\int \frac{\cos xdx}{\sin^4 x}$;

в) $\int (2x-1)\cdot e^x dx$;

5. а) $\int (3x-6)^2\cdot\sqrt{x^3}dx$;

б) $\int \frac{tgx-1}{\cos^2 x}dx$;

в) $\int (7x+1)\cdot e^{7x}dx$;

6. а) $\int \sqrt{x^5}(x^3-7x+2)dx$;

б) $\int \frac{arctg^2 3x}{1+9x^2}dx$;

в) $\int (3x-4)\cdot\sin 3xdx$;

7. а) $\int \sqrt[3]{x}(16-x^3+\frac{1}{x^2})dx$;

б) $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$;

в) $\int (3x-x^2)\cos xdx$;

8. а) $\int (5\sqrt{x}+4)\cdot(\frac{4}{\sqrt[3]{x}}-5x^2)dx$;

б) $\int \frac{6x+2}{(3x^2+2x-1)^3}dx$;

в) $\int \ln(6x-1)dx$;

9. а) $\int \frac{e^{2x}-x^3\cdot e^x-1}{e^x}dx$;

б) $\int \frac{2^x dx}{(2^x+7)^3}$;

в) $\int \arcsin\sqrt{1-5x^2}dx$;

10. а) $\int \frac{2^x-5^x}{10^x}dx$;

б) $\int \frac{\arccos^9 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$;

в) $\int \frac{\ln 3x}{\sqrt[7]{x}}dx$;

11. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} - 5x^3 + 4\sqrt{x}}{x^2} dx$;

б) $\int \frac{e^{\sqrt{4x+1}} dx}{\sqrt{4x+1}}$;

в) $(3x^2 - 2x + 3) \cdot \ln x dx$;

12. а) $\int (\sqrt{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}) dx$;

б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin x + 5}}$;

в) $\int (x-2) \cdot 3^x dx$;

13. а) $\int \sqrt[3]{x^2} \cdot (3x^2 - 2x) dx$;

б) $\int \frac{2x^3 - 3x}{x^4 - 3x^2 + 7} dx$

в) $\int (6 - 5x) \cdot \cos 2x dx$;

14. а) $\int \frac{x^3 - \sqrt{x^3} + 3}{\sqrt[4]{x^5}} dx$;

б) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 9)^6}$;

в) $\int (6x + 7) \cdot e^{7x} dx$;

15. а) $\int (2x - \sqrt[6]{x})^2 \cdot x dx$;

б) $\int 5^{3x^2 - 6x + 5} \cdot (x - 1) dx$;

в) $\int (x + 8) \cdot 2^x dx$;

Лабораторная работа №11
Интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных функций

Цель работы: Получение навыков вычисления неопределенных интегралов от рациональных, тригонометрических функций

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1. Вычислить интеграл: $\int \frac{2x+3}{x^2 + 3x - 10} dx$

Решение: Разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-10} = \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$

приравнивая числители дробей, получаем: $2x + 3 = A(x+5) + B(x-2)$

Определим коэффициенты A и B, придавая любые значения переменной x:

$x = 2,\ \textit{тогда}\ 7 = A \cdot 7;\ A = 1$

$x = -5,\ \textit{тогда}\ -7 = B(-7);\ B = 1$

Получаем $A=1$ и $B=1$. Исходный интеграл найдём как сумму интегралов от полученных дробей.

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+5} = \ln|x-2| + \ln|x+5| + C = \ln|(x-2)(x+5)| + C$$

2.Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональных функций заменой переменной $\boxed{t = tg\frac{x}{2}}$, где $-\pi < x < \pi$. Такая замена называется ***универсальной тригонометрическая подстановкой.*** В этом случае,

$$\sin x = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

2. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение: Положим $t = tg\frac{x}{2}$. Тогда, используя выражения через t для dx и sin$x$, указанные выше, получаем, что искомый интеграл равен

$$\int \frac{(1+t^2)2dt}{(1+t^2)2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

2.При вычислении интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$

рассмотрим частные случаи:

n – нечётное $\int \sin^3 x \cos^m dx = \int \sin^2 x \cos^m x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^m x\, d(-\cos x)$

n, m – чётные, ≥ 0. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

применяют формулы тригонометрии:

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

3.При вычислении интегралов вида $\int R(tgx, ctgx)dx$ делают замену

$\boxed{tgx = t}$, тогда $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Если интеграл имеет вид $\int tg^n x\, ctg^m x\, dx$, где n, m – чётные, применяют формулу:

$$tg^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

3. Вычислить интегралы:а) $\int tg^3 x\, dx$ б) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

Решение:

а) $\int tg^3 x\, dx = \int tg\, x(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)\, dx = \int tg\, x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int tg\, x\, dx = \frac{tg^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

б) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int tg^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x\, d(tg\, x) = \frac{tg^3 x}{3} + C$

4. При вычислении $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ используют формулы

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x]$$

Варианты заданий к лабораторной работе

Вычислить интегралы:

1. а) $\int \frac{5x+18}{2x^2+6x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$;

2. а) $\int \frac{7-x}{x^2-2x-3}dx$; б) $\int \sin 5x \cdot \cos 7x dx$;

3. а) $\int \frac{9x-3x^2-2}{2x^2-x^3}dx$; б) $\int \sin^2 3x dx$;

4. а) $\int \frac{3x^2-x+15}{x^3+5x}dx$; б) $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}$;

5. а) $\int \frac{5-x}{x^2+2x-3}dx$; б) $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x dx$;

6. а) $\int \frac{4x^2-11x+4}{x\cdot(x-2)^2}dx$; б) $\int \cos^2 2x dx$;

7. а) $\int \frac{x^2-3}{x^3+3x}dx$; б) $\int \frac{dx}{3+5\cos 2x}$;

8. а) $\int \frac{x^2+12x-4}{x^3-4x}dx$; б) $\int \sin^3 \frac{x}{5} dx$;

9. а) $\int \frac{x-1}{4x^3+x}dx$; б) $\int \frac{dx}{3+3\cos x - 5\sin x}$;

10. а) $\int \frac{9x-2x^2+14}{x^2(x+7)}dx$; б) $\int \frac{dx}{3-7\cos x}$;

11. а) $\int \frac{x^2-8x-12}{x^3-2x^2+4x-8}dx$; б) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$;

12. а) $\int \frac{10x-9x^2-9}{(x^2+1)(x^2-9)}dx$; б) $\int \cos 5x \cos x dx$;

13. а) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)^2}dx$; б) $\int \sin^2 \frac{x}{7} dx$;

14. а) $\int \frac{x-13}{x^2-13x+42}dx$; б) $\int \cos^3 6x dx$;

15. а) $\int \frac{x-6}{x^2-2x}dx$; б) $\int \frac{dx}{3-\sin x}$;

Лабораторная работа №12

Определенные интегралы. Основные методы интегрирования.

Цель работы: Получение навыков вычисления определенных интегралов от рациональных функций, отработка умений вычислять определенные интегралы методом подстановки и по частям

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

Вычислите интеграл:

1. $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

2. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$.

Решение: применим подстановку $\cos x = t, \quad \sin x dx = -dt$. Определим новый промежуток интегрирования. Если $x = 0, \quad$ от $\quad \cos 0 = t \quad$ и $\quad t = 1$, если $x = \frac{\pi}{2}, \quad$ от $\quad \cos\frac{\pi}{2} = t \quad$ и $\quad t = 0$. Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\sin x dx = -\int_1^0 (1-t)^2 dt = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \left.\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\right|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Варианты заданий к лабораторной работе

Вычислить определенные интегралы.

1.а) $\int_1^3 e^{\cos 5x} \sin 5x dx$; **б)** $\int_0^1 x \cdot arctgx dx$; **в)** $\int_3^8 \frac{dx}{x^2+2x}$.

2.а) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$; **б)** $\int_0^{\pi} \frac{x}{\cos^2 x} dx$; **в)** $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2-4x}$.

3.а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+5\sin x)^2} dx$; **б)** $\int_1^5 x^2 \cdot \ln x dx$; **в)** $\int_3^4 \frac{(x-1)dx}{x^2-3x+1}$.

4.а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{(1+\cos 3x)^2} dx$; **б)** $\int_1^8 \sqrt[3]{x} \cdot \ln x dx$; **в)** $\int_1^4 \frac{dx}{x^2-x+6}$.

5.а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \frac{\sin x dx}{(1+5\cos x)}$; **б)** $\int_0^{\pi} x \cdot \sin 3x dx$; **в)** $\int_1^7 \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

6.а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\cos x} dx$; **б)** $\int_0^1 x \cdot arctgx dx$; **в)** $\int_3^4 \frac{(x-2)dx}{x^2+4x+3}$.

7.а) $\int_1^3 e^{\sin 7x} \cos 7x dx$; **б)** $\int_0^1 x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$ **в)** $\int_0^1 \frac{(3-5x)dx}{x^2+4x+3}$.

8.а) $\int_1^9 \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+1)}$; **б)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos 8x dx$ **в)** $\int_1^5 \frac{dx}{x^2-2x-2}$.

9.а) $\int_0^3 e^{\cos 2x}\cdot\sin 2x dx$; **б)** $\int_1^2 x^3\cdot\ln x dx$ **;** **в)** $\int_2^0 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

10.а) $\int_1^2 \frac{(3x^2+e^x)dx}{x^3+e^x}$; **б)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos 2x dx$ **;** **в)** $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

11.а) $\int_0^{0.5} \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}$; **б)** $\int_0^{\pi} x\cdot\sin 4x dx$ **;** **в)** $\int_1^{25} \frac{(x+1)dx}{x^2-x-2}$.

12.а) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{x^6+1}$; **б)** $\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2}dx$ **;** **в)** $\int_{-2}^3 \frac{(x-1)dx}{x^2-3x+2}$.

13.а) $\int_0^{0.5} \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **б)** $\int_1^4 x\cdot 3^{2x}dx$ **;** **в)** $\int_1^5 \frac{dx}{x^2+x}$.

14.а) $\int_1^5 \frac{\sin 3x dx}{3-5\cos 3x}$; **б)** $\int_1^2 (1-2x^2)\cdot\ln x dx$ **;** **в)** $\int_1^3 \frac{dx}{x^2-x}$.

15.а) $\int_0^3 e^{-3x^2}\cdot x dx$ **;** **б)** $\int_0^{\pi} (x+15)\cdot\sin 2x dx$ **;** **в)** $\int_3^7 \frac{dx}{x^2-4x}$.

Лабораторная работа №13
Определенные интегралы, вычисляемые методом прямоугольников, методом трапеций , методом Симпсона.

Цель работы: Получение навыков вычисления определенных интегралов с помощью приближенных формул

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Варианты заданий к лабораторной работе

Вычислить значение интеграла $I=\int_1^{1.44} P_n(x)dx$, где $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, с помощью формул трапеций и Симпсона для элементарного отрезка интегрирования.

Оценить величину погрешности. Вычислить интеграл I с точностью 0.0001 по формуле левых прямоугольников. Предварительно оценить шаг интегрирования, при котором достигается заданная точность.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:
1.Вычислить значение интеграла *I* аналитически.
2.Задать многочлен $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Вычислить значение интеграла *I* по формулам трапеций и Симпсона, считая отрезок[1;1,44] элементарным отрезком интегрирования.
3.Найти абсолютные погрешности результатов.
4.Используя выражение для остаточных членов интегрирования оценить шаги интегрирования, при которых величина погрешности по формуле левых прямоугольников достигается с точностью 0.001.

Вариант	c_0	c_1	c_2	Значение n для формулы трапеций	Значение 2n для формулы парабол
1	0.6	1.3	0	6	8
2	1	0.9	0.8	6	8
3	0.4	0.3	0.2	6	8
4	0.1	-0.1	1	6	8
5	1.5	0	-2.1	6	8
6	-2.5	-2.1	0	6	8
7	6.8	1.7	-4.1	6	8
8	0	1.4	3.2	6	8
9	1.3	0	-0.1	6	8
10	4.2	-1.2	1.5	6	8
11	-2.2	0.7	4.5	6	8
12	5.3	-1.2	-1.5	6	8
13	4.9	5.3	3.3	6	8
14	0.4	2.7	1.5	6	8
15	5.4	2.1	0.3	6	8

Лабораторная работа №14-15
Геометрические приложения определенного интеграла

Цель работы: Получение навыков вычисления площади криволинейной трапеции, объема тела вращения, координат центра тяжести тела вращения с помощью определенных интегралов

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Варианты заданий к лабораторной работе

1. Постройте совместно графики обеих линий и найдите координаты точек пресечения.
2. Найдите площадь и периметр плоской фигуры.
3. Найдите объём и поверхность тела, образованного вращением фигуры вокруг оси X.
4. Найдите координату центра тяжести полученного тела вращения на оси X.

Вариант	Плоская фигура ограничена линиями
1	$y = x^3 + 2$ и $y = x^2 + 2$.
2	$y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$
3	$y = -x^3$ и $y = -9x$.
4	$y^2 = x - 2$, $y = 0$, $y = x^3$, $y = 1$
5	$y = 3 - \frac{2}{x-3}$ и $y = 2x + 3$.
6	$y = 2x$, y=x и $y = x^2$.
7	$y = x^3 - 3x$ и y=x.
8	$y = x^2 - 2x + 3$ и y=3x-1.
9	$y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$,y=0,x=0,x=3.
10	$y = x - x^2 + 3$ и $y = 2$.
11	$y = x^2 + 2x + 2$ и $y = 1 - x$.
12	$y^2 = 2x + 1$, y=x-1
13	$y = 2 - x - x^2$ и $y = 1 - x$.
14	$y = x^2 - 6$, $y = -x^2 + 5x - 6$
15	$y = (x - 1)^2$, $y^2 = x - 1$

Лабораторная работа №16

Свойства несобственных интегралов первого и второго рода

Цель работы: Получение навыков вычисления несобственных интегралов

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

Вычислите несобственные интегралы или установить его расходимость

а) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(1 - e^{-b}\right) = 1$, т.е. данный несобственный интеграл сходится.

б) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty,$ т.е. данный интеграл расходится.

в) Установим, при каких значениях α интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится.

Случай $\alpha=1$ был рассмотрен в примере б). Если $\alpha\neq 1,$ то

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\begin{cases}+\infty, \text{ при } <1\\ \dfrac{1}{\alpha-1}, \text{ при } >1\end{cases}.$$

Значит, данный интеграл сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$.

г) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1-x}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln(1-x)\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=\lim\left[\ln(1-\varepsilon)-\ln 1\right]=-\infty$, т.е. расходится.

Варианты заданий к лабораторной работе

Вариант	Вычислите несобственные интегралы или установить его расходимость		
1	а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^4+1\right)}}$	б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\cos 15x dx$	в) $\int\limits_{1}^{3}\frac{x^2dx}{\left(3-x\right)^2}$
2	а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{\left(x^8+45\right)}}$	б) $\int\limits_{0}^{\infty}2x\sin xdx$	в) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{9-x^2}$
3	а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx$	б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{\left(x+1\right)^3}}$	в) $\int\limits_{3}^{\infty}(2x-8)\ln xdx$
4	а) $\int\limits_{-3}^{2}\frac{dx}{\left(x+3\right)^2}$	б) $\int\limits_{3}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+2\right)^3}$	в) $\int\limits_{0}^{\infty}(9-25x)25^x dx$
5	а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$	б) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\left(2-x\right)^5}$	в) $\int\limits_{1}^{\infty}x^4e^{3x^5}dx$
6	$\int\limits_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{8-x^3}}$	б) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4}$	в) $\int\limits_{0}^{\infty}(5+23x)32^x dx$
7	а) $\int\limits_{1}^{8}\frac{dx}{\left(x-1\right)^3}$	б) $\int\limits_{2}^{\infty}x^5e^{-x^6}dx$	в) $\int\limits_{7}^{\infty}(7x-11)\sin xdx$
8	а) $\int\limits_{3}^{8}\frac{dx}{\left(x-3\right)^3}$	б) $\int\limits_{2}^{\infty}x\ e^{-5x^2}dx$	в) $\int\limits_{4}^{\infty}-4xe^x dx$
9	а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\left(2x-1\right)^3}$	б) $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-9}$	в) $\int\limits_{0}^{\infty}x\sin 2xdx$
10	а) $\int\limits_{0,5}^{5}\frac{dx}{\left(2x-1\right)^3}$	б) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\left(x+1\right)dx}{2+2x+x^2}$	в) $\int\limits_{3}^{\infty}(2x-8)\cos xdx$
11	а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$	б) $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{4-x^2}$	в) $\int\limits_{2}^{\infty}x\cos 3xdx$

12 а) $\int_{-5}^{5}\frac{2dx}{(x+5)^3}$ б) $\int_{2}^{\infty} x\ e^{3x^2}dx$ в) $\int_{0}^{\infty}\frac{(x+1)dx}{10+7x+x^2}$

13 а) $\int_{1}^{8}\frac{dx}{(x-1)^3}$ б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ в) $\int_{2}^{\infty}(2+5x)\sin xdx$

14 а) $\int_{0}^{2}\frac{x^4dx}{\sqrt{32-x^5}}$ б) $\int_{-\infty}^{-3}\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ в) $\int_{0}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+5x+6}$

15 а) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(2x-4)dx}{x^2+4+5}$ б) $\int_{0}^{3}\frac{xdx}{9-x^2}$ в) $\int_{1}^{\infty} x\ \ln xdx$

Лабораторная работа №17
Метод наименьших квадратов

Цель работы: Научиться с помощью метода наименьших квадратов находить зависимость между x и y

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Варианты заданий к лабораторной работе

Вариант	Полученные из опыта значения функции при различных значениях независимой переменной приведены в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию $y=f(x)$ в виде $y=ax+b$. Сделать чертеж.											
1	x	-2,1	-1,3	0,1	0,9	1,5	2,1	3,4	3,9	4,2	5,3	
	y	28,6	23,1	13,3	7,7	3,5	-0,6	-9,8	-13,2	-15,5	-23,2	
2	x	-0,3	0,6	1,3	1,9	2,4	3,2	3,9	4,2	5,3	6,5	
	y	-19,9	-14,3	-10,1	-6,4	-3,5	1,2	5,5	7,2	13,6	20,9	
3	x	-1,9	-0,5	0,3	1,1	1,7	2,1	2,7	3,2	3,8	4,2	4,7
	y	-13,5	-12,1	-0,8	-7,1	-2,4	-0,8	5,6	9,7	14,5	17,5	21,7
4	x	-0,1	-0,3	-0,9	-1,5	-2,6	-3,2	-3,8	-4,1	-5,0	-6,3	-7,8
	y	20,3	18,8	14,6	10,6	2,7	-0,7	-5,6	-7,7	-13,8	-23,2	-33,5
5	x	-6,1	-5,4	-3,2	-2,1	-1,5	-0,9	1,1	1,8	2,5	3,7	4,5

		y	29,1	26,7	17,5	13,5	10,9	8,5	0,6	-2,2	-4,9	-9,8	-12,9
6		*x*	8,2	9,6	10,4	11,3	13,2	15,1	16,9	17,9	18,3	20,4	21,7
		y	-6,9	-5,3	-4,8	-3,6	-1,9	0,2	1,8	2,3	3,4	5,3	6,6
7		*x*	-0,2	0,5	1,2	1,8	2,3	3,1	3,8	4,1	5,2	6,3	
		y	16,8	14,8	10,6	7,1	4,3	-0,5	-4,9	-6,5	-13,1	-19,8	
8		*x*	7,4	8,2	9,6	10,3	12,8	14,9	15,3	16,9	18,1	19,5	20,3
		y	-7,7	-6,7	-5,3	-4,6	-2,1	-0,1	0,2	1,8	3,0	4,4	5,2
9		*x*	-1,5	-0,6	0,2	0,8	1,3	2,1	2,8	3,4	4,2	5,3	6,1
		y	-20,9	-15,5	-10,9	-7,3	-4,2	0,5	4,9	8,5	13,1	19,8	24,5
10		*x*	-1,0	-0,6	0	0,8	1,3	2,1	2,8	5	5,2	5,3	6,1
		y	-10,9	-15,5	-10,9	-7,3	-4,2	0,5	4,9	8,5	13,1	19,8	24,5
11		*x*	-3,5	-0,1	0,2	0,8	1,3	2,1	2,8	3,4	4,2	5,3	6,1
		y	-18,9	-15,7	-10,9	-7,3	-4,2	0,5	4,9	8,5	13,1	19,8	24,5
12		*x*	-2,0	-1,8	0,1	0,9	1,5	2,1	3,4	3,9	4,2	5,3	
		y	25	20,1	13,3	7,7	3,5	-0,6	-9,8	-13,2	-15,5	-23,2	
13		*x*	7,4	8,2	10	10,3	12,8	14,9	15,3	16,9	18,1	19,5	20,3
		y	-7,7	-5,1	-5,3	-4,6	-2,1	-0,1	0,2	1,8	3,0	4,4	5,2
14		*x*	0	8,5	9,6	10,3	12,8	14,9	15,3	16,9	18,1	19,5	20,3
		y	-7,0	-6,7	-5,3	-4,6	-2,1	-0,1	0,2	1,8	3,0	4,4	5,2
15		*x*	-0,2	0,5	1,2	1,8	2,3	3,1	3,8	4,1	5,2	6,3	
		y	10,8	14,8	10,6	7,1	4,3	-0,5	-4,9	-6,5	-13,1	-19,8	

Лабораторная работа №18
Нелинейные уравнения, решаемые методом половинного деления, методом Ньютона

Цель работы: Научиться находить корень нелинейного уравнения методом Ньютона (касательных)

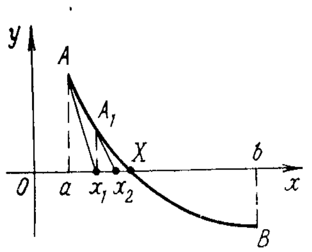
Порядок выполнения работы

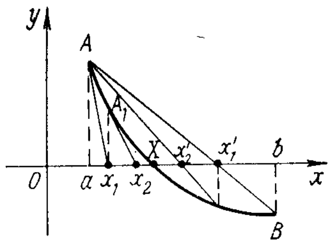
1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

Пусть на промежутке (a,b) находиться единственный корень уравнения f(x)=0.Проведем касательную к графику функции y=f(x) в точке A(a,f(a)).





Ее уравнение примет вид: . Полагая y=0 найдем абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox: ——, при

.

Чтобы получить второе приближение , применим аналогичные рассуждения к промежутку (,b). Касательная к графику функции y=f(x) в точке A_1(,f( )) примет вид: .

Полагая y=0, найдем второе приближение: ——.

Аналогично определяются последующие приближения корня

——, n=1,2,…

За нулевое приближение принимается такое значение на отрезке [a,b], для которого выполняется условие

1. Вычислить с точностью до 0,01 корень уравнения $f(x)=x^3-2x^2-4x-7=0$ на промежутке (3,4)

Решение: Так как $f(3) = -10$, $f(4) = 9$ (то есть знаки на концах промежутка различные), то на этом промежутке наша функция пересекает ось OX. Вычислим первую и вторую производные функции:

$f'(x)=3x^2-4x-4$; $f''(x)=6x-4$,

так как значение обеих производных на (3,4) положительно, то касательную проводим в точке b=4.

Так как $f(4)>0$, то $x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4\frac{9}{28} \approx 3{,}68$.

$f(3{,}68)=1{,}03$; $f'(3{,}68)=21{,}9$;

$x_2 = 3{,}68 - \frac{f(3{,}68)}{f'(3{,}68)} = 3{,}68 - 0{,}047 = 3{,}633.$

Очевидно, что дальнейшие вычисления не повлияют на цифру сотен:
$f(3{,}633) = 0{,}020;\ f(3{,}630) = -0{,}042.$

Итак, с точностью большей заданной, x=3,63.

Варианты заданий к лабораторной работе

Вариант	Методом Ньютона найти корень уравнения с точностью ε
1	$x^4 + 3x - 20 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
2	$x^3 - 2x - 5 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
3	$x^4 - 3x + 1 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
4	$x^3 + 3x + 5 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
5	$x^4 + 5x - 7 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
6	$x^3 - 12x + 1 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
7	$x^3 + 2x - 7 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
8	$x^3 + x^2 - 11 = 0, \varepsilon = 0{,}001$
9	$x^4 - 2x - 4 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
10	$x^3 + x^2 - 3 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
11	$x^2 - 2x + 7 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
12	$x^7 + x + 4 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
13	$x^3 - 6x + 2 = 0, \varepsilon = 0{,}001$
14	$x^4 - x - 1 = 0, \varepsilon = 0{,}01$
15	$x^3 - x - 1 = 0, \varepsilon = 0{,}01$

Лабораторная работа №19
Функция двух переменных, производная, дифференциал

Цель работы: Получение навыков нахождения: области определения функции двух переменных; частных производных

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \frac{x - y}{x + y^2 - 1}$.

Решение: Очевидно, аналитическое выражение, задающее данную функцию, имеет смысл тогда и только тогда, когда знаменатель дроби не равен нулю: $x+y^2-1\neq 0$. Уравнение $x+y^2-1=0$ задаёт на координатной плоскости xOy параболу $y^2=-x+1$, вершина которой находится в точке $(1;0)$, ветви направлены влево, а осью симметрии является ось абсцисс. Таким образом, областью определения данной функции являются все точки координатной плоскости, кроме тех, что лежат на параболе $y^2=-x+1$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1. $z=\ln xy$.

Решение: $z'_x=(\ln xy)'_x=\dfrac{1}{xy}\cdot(xy)'_x=\dfrac{y}{xy}=\dfrac{1}{x}$; $z'_y=(\ln xy)'_y=\dfrac{1}{xy}\cdot(xy)'_y=\dfrac{x}{xy}=\dfrac{1}{y}$.

2.2. $z=x^4y^5$.

Решение: $z'_x=(x^4y^5)'_x=y^5\cdot(x^4)'=4x^3y^5$; $z'_y=(x^4y^5)'_y=x^4\cdot(y^5)'=5x^4y^4$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z=\sin xy$.

Решение: Сначала найдём частные производные первого порядка:

$z'_x=(\sin xy)'_x=y\cos xy$; $z'_y=(\sin xy)'_y=x\cos xy$.

Теперь находим производные второго порядка по переменным x и y:

$z''_{xx}=(y\cos xy)'_x=-y^2\sin xy$; $z''_{yy}=(x\cos xy)'_y=-x^2\sin xy$.

Находим смешанные производные:

$z''_{xy}=z''_{yx}=(-y^2\sin xy)'_y=(-y^2)'\cdot\sin xy+(-y^2)\cdot(\sin xy)'_y=-2y\sin xy-xy^2\cos xy$.

Варианты заданий к лабораторной работе

Вариант	Задания
1	1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z=\dfrac{x-y}{x^2+y^2-1}$. 2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z=\ln xy$; 2.2. $z=x^2y^2$; 2.3. $z=x\cos y$. 3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z=arctg\ xy$
2	1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z=\dfrac{x-y}{x^2-y^2-1}$. 2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z=\sqrt{xy}$; 2.2. $z=x^4y^2$; 2.3. $z=x\sin y$. 3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z=tg\ xy$.
3	Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z=\dfrac{x-y}{x^2+y-1}$. 2. Найти частные производные первого порядка функций двух

переменных: 2.1. $z = \cos xy$; 2.2. $z = \frac{y^2}{x^2}$; 2.3. $z = x\,tg\;y$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = \arcsin xy$.

4 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \frac{x - y}{x + y^2 - 1}$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \frac{xy}{\ln x}$; 2.2. $z = \frac{x}{y^3}$; 2.3. $z = x\,ctg\;y$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = \arccos xy$.

5 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \frac{x + y}{x + 4y^2 - 1}$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \sqrt{xy}$; 2.2. $z = x^2 y - 3xy^2$; 2.3. $z = x \ln y^{-1}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = ctg\;\,xy$.

6 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \frac{\sqrt{xy}}{x - y}$; 2.2. $z = x^2 y - 3xy^2 + xy$; 2.3. $z = xe^{xy}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7 1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \ln(x - y + 1)$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \frac{\sqrt{x - y}}{x + y}$; 2.2. $z = x^2 y^2 - x^2 y + xy^2$; 2.3. $z = 10^{xy}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$.

8 1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \ln\left(x - y^2 + 1\right)$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \frac{\sqrt{x - y}}{xy}$; 2.2. $z = \frac{1}{2}x^2 y^2 - 2xy + 2y$; 2.3. $z = x^y$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции

двух переменных: $z = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{xy}$.

9 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \frac{x - y}{x^2 + y^2 - 1}$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \frac{\sqrt{x - y}}{xy}$; 2.2. $z = \frac{1}{2}x^2 y^2 - 2xy + 2y$; 2.3. $z = x^y$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = arctg\, xy$.

10 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \frac{x - y}{x^2 - y^2 - 1}$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \frac{\sqrt{x - y}}{x + y}$; 2.2. $z = x^2 y^2 - x^2 y + xy^2$; 2.3. $z = 10^{xy}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = tg\, xy$.

11 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \frac{x - y}{x^2 + y - 1}$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \frac{\sqrt{x + y}}{x + y}$; 2.2. $z = x^3 y^2 - 3xy - y^2$; 2.3. $z = 6^{xy}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = \arcsin xy$.

12 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \frac{x - y}{x + y^2 - 1}$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \frac{\sqrt{xy}}{x - y}$; 2.2. $z = x^2 y - 3xy^2 + xy$; 2.3. $z = xe^{xy}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = \arccos xy$.

13 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \frac{x + y}{x + 4y^2 - 1}$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1. $z = \frac{\sqrt{xy}}{x + y}$; 2.2. $z = x^2 y^2 - 3xy$; 2.3. $z = xe^y$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = ctg\ xy$.

14 1.Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \ln\left(x^2 - y^2 - 1\right)$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:2.1. $z = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x+y}$; 2.2. $z = x^3y^2 - 3xy - y^2$; 2.3. $z = 6^{xy}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$.

15 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \ln\left(x^2 - y - 1\right)$.

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных: 2.1. $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$; 2.2. $z = x^2y^2 - 3xy$; 2.3. $z = xe^y$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Лабораторная работа №21

Дифференциальные уравнения первого порядка

Цель работы: Получение навыков нахождения общих и частных решений дифференциальных уравнений первого порядка

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1.Найти общее решение $y' = \dfrac{e^y}{\cos^2 x}$.

Решение: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^y}{\cos^2 x}$;

$\dfrac{dy}{e^y} = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$;интегрируя, найдем общее решение

$-e^{-y} = tgx - C$ или $\dfrac{1}{e^y} = C - tgx$;

$e^y = \dfrac{1}{C - tgx}$;

$y = \ln\dfrac{1}{C - tgx}$ - общее решение.

Ответ: $y=\ln\frac{1}{C-tgx}$

2.Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям y'+ y ctgx – cosx = 0, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Решение: y' + y ctgx – cosx = 0, это линейное уравнение первого порядка. Решим его по методом Бернулли .

Пусть $\gamma=uv => y'=u'v+uu'$

$u'v+uv'+uvctgx=\cos x$

$u'v+u(v'+vctgx)=\cos x$

Пусть $v'+vctgx=0$

$\frac{dv}{dx}=-vctgx$, $\int\frac{dv}{v}=-\int ctgxdx$, lnv=-ln(sinx), $v=\frac{1}{\sin x}$

$\frac{u'}{\sin x}=\cos x$, $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\sin 2x$, $\int du=\frac{1}{2}\int\sin 2xdx$, $u=-\frac{1}{4}\cos 2x+c$,

$y=uv=-\frac{\cos 2x}{4\sin x}+\frac{c}{\sin x}$, т.к. $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, то $0=-\frac{\cos\pi}{4\sin\frac{\pi}{2}}+\frac{c}{\sin\frac{\pi}{2}}$

$$0=\frac{1}{4}+\frac{c}{1} => c=-\frac{1}{4}$$

Значит, $y=-\frac{\cos 2x}{4\sin x}+\frac{c}{\sin x}$ $y^2=-\frac{\cos 2x+1}{4\sin x}$

Ответ: $y^2=-\frac{\cos 2x+1}{4\sin x}$

Варианты заданий к лабораторной работе

Вариант	Задание 1: Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.	Задание 2: Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения
1.	$x^2y'=2xy+3, \quad y(1)=1.$	$x^2y'-y^2=x^2$
2.	$x(y'-y)=e^x, \quad y(1)=1.$	$y'+2xy=2xe^{-x^2}$
3.	$y'y\operatorname{ctg}x-\cos x=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$	$\left(x^2+2x+1\right)y'-\left(x+1\right)y=1$
4.	$y'+1=\sqrt{x+y+1}$, y(0)=1	$y'=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$

5.	$x^2ydy-\ln xdx=0, \quad y(1)=1.$	$4x^2-xy+y^2+y'\left(x^2-xy+4y^2\right)=0$
6.	$ydx+ctgxdy=0, \quad y(\frac{\pi}{3})=-1.$	$2xy'-y=3x^2$
7.	$x^2(2yy'-1)=1, \quad y(1)=0.$	$y'-y\cos x=\sin 2x$
8.	$x^2dy-y^2dx=0, y(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$	$xy'=\sqrt{y^2-x^2}+y$
9.	$ydy+(x-2y)dx=0.$, y(0)=1	$y'+y=\frac{e^{-x}}{\sqrt{4-x^2}}$
10.	$1+y^2=x^2yy', y(2)=1$	$xy'+xe^{\frac{y}{x}}-y=0$
11.	$y'\sin x-y\ln y=0, y(\frac{\pi}{2})=1$	$y'+\frac{y}{x-5}=\frac{\sin 5x}{x-5}$
12.	$y'2y^{-3}=xe^{-x^2}, \quad y(0)=1.$	$y'-2xy=2xe^{x^2}$
13.	xy’+2y=2xyy’, y(2)=1	$xy'-3y=x^4e^x$
14.	$3x^2ydx+2\sqrt{4-x^3}\,dy=0$, y(5)=2	$xy'-y=\frac{x}{\left(\frac{y}{x}\right)^3+1}$
15.	$(3x-1)dy+y^2dx=0$, y(1)=2	$y'=x^2+2x-2y$

Лабораторная работа №22

Дифференциальные уравнения второго порядка

Цель работы: Получение навыков решение дифференциальных уравнений 2 порядка

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$2xy'y'' = y'^2 + 1$

Замена $y' = p, y'' = p'$

$2xpp' = p^2 + 1$

$$2xp\frac{dp}{dx} = p^2 + 1$$

$$\int \frac{2pdp}{p^2+1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d\left(p^2+1\right)}{p^2+1} = \ln x + \ln c_1$$

$\ln(p^2+1)=\ln c_1x$

$p = \pm\sqrt{c_1x+1}$

$$y = \pm\int \sqrt{c_1x-1}dx = \pm\frac{2}{3c_1}(c_1x-1)^{\frac{2}{3}} + c_2$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения.

$y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x}$, y(0)=1, $y'(0) = 4$

$y = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y}$ - общее решение ЛОДУ, y^* - частное решение

$y'' + 2y' + 5y = 0$

$k^2 + 2k + 5 = 0$

Д = 4 – 20 = -16

$k_{1.2} = -1 \pm 2i$

$\overline{y} = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

$y^* = Ae^{2x}, \left(y^*\right)' = 2Ae^{2x}, \left(y^*\right)'' = 4Ae^{2x}$

$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} + 5Ae^{2x} = 13e^{2x}$

$13Ae^{2x} = 13e^{2x}$

A = 1

$y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + e^{2x}$

$y' = -e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + e^{-x}(-2c_1\sin 2x + 2c_2\cos 2x) + 2e^{2x}$

$$\begin{array}{r} y'(0) = -c_1 + 2c_2 + 2 = 4 \\ y(0) = c_1 + 1 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + e^{2x}$

Варианты заданий к лабораторной работе

1.Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижения порядка:

1.	$y''' = \frac{1}{x}.$	**2.**	$y''' = \frac{\ln x}{x^2}.$
3.	$y''' = \sin^2 x.$	**4.**	$y''x\ln x = y'.$
5.	$y'''\operatorname{tg} x = 2y''$	**6.**	$xy'' = (1+2x^2)y'.$
7.	$2xy'y'' = y'^2 + 1$	**8.**	$y''(x^2+1) = 2xy'.$
9.	$yy'' = 1 + y'^2.$	**10.**	$2y'^2 = (y-1)y''$
11.	$x^3y'' + x^2y' = 1$	**12.**	$y''\,tgy = 2(y')^2$

13. $xy''\ln x = y'$ **14.** $2xy'y'' - (y')^2 = 1$

15. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$

2.Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = y_0$; $y'(0) = y_0'$:

1. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.

2. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y'(0) = \dfrac{1}{27}$.

3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

4. $y'' + y = \cos 3x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

5. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

6. $y'' + 9y' = 6e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7. $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

8. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

9. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

10. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

11. $y'' - 4y' + 3y = x + 1$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.

12. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y'(0) = \dfrac{1}{27}$.

13. $y'' - 6y' + 9y = x + 1$, $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y'(0) = \dfrac{1}{27}$.

14. $y'' + y = \cos x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

15. $y'' - 8y' + 16y = xe^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Лабораторная работа №23
Числовые ряды. Признаки сходимости

Цель работы: Получение умений применять необходимый и достаточные признаки сходимости числовых рядов, умений определять абсолютно и условно сходящиеся ряды

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1. Составить формулу общего члена числового ряда: $-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{64} \ldots$.

Решение: Во-первых, данный ряд является знакочередующимся, причём первый множитель является отрицательным. Поэтому формула общего члена ряда должна содержать множитель $(-1)^n$. Во-вторых, все члены ряда представляют собой дроби со знаменателем, равным единице. В-третьих, знаменатели каждой дроби являются квадратами последовательных натуральных чётных чисел: $4=2^2, 16=4^2, 36=6^2$ и так далее. Таким образом, получим формулу: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)^2}$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n+1}$.

Решение: $S_5 = \sum\limits_{n=1}^{5} a_n = \dfrac{2}{2}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{6}{4}+\dfrac{8}{5}+\dfrac{10}{6} = 6\dfrac{7}{10}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-4}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2-1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n}{n^{2n}}$

Решение: а)Проверим сначала для данного ряда выполнения необходимого условия сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-4}{n+1} = 3 \neq 0$. Предел общего члена ряда не равен нулю, следовательно, данный ряд является расходящимся.

б) Данный ряд относится к типу обобщённых гармонических рядов $\dfrac{1}{n^p}$, причём $p=\dfrac{2}{3}<1$, значит, ряд расходится.

в) Используем признак Даламбера. Найдём $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Здесь $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2-1}$.

Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2-1} : \dfrac{2^n}{n^2-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n^2-1)}{n^2+2n} = 2 > 1$. Согласно признаку Даламбера, данный ряд расходится.

г) Применим радикальный признак Коши. Найдём $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Получим:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{e^n}{n^{2n}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{n^2} = 0 < 1$. Согласно признаку Коши, данный ряд сходится.

4. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}$.

Решение: Запишем последовательность абсолютных величин членов данного ряда. Получим: $1+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}+\cdots$. Члены ряда убывают по абсолютной величине. Теперь найдём предел общего члена ряда, составленного из абсолютных величин. Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3} = 0$ - как предел обобщённого гармонического ряда при $p>1$. Таким образом, выполняются оба условия признака Лейбница, и данный ряд является сходящимся. Поскольку выше мы установили сходимость ряда, составленного из абсолютных величин, то данный ряд сходится абсолютно.

Варианты заданий к лабораторной работе

1

1. Составить формулу общего члена числового ряда: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+3}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-4}{2n+6}$. б). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. в). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^3-1}$.

4. Исследовать на сходимость знакопеременные ряды:а)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 0{,}5^n$.

2

1. Составить формулу общего члена числового ряда: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4n-3}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды:
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+1}{2n^2+n}$;б)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$;в)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 0{,}3^n$.

3

1. Составить формулу общего члена числового ряда: $-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n+1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+3}{n^2+2n+5}$;б)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3}{(n+1)^2(n+2)}$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 0{,}1^n$.

4

1. Составить формулу общего члена числового ряда: $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+3}}{2n+5}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$. ;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-4}{(n+1)(n+2)}\right)^n$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+4}$. ;б)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 0{,}9^n$.

5

1. Составить формулу общего члена числового ряда: $0+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{2n^2+1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n-1}}{n+2}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}$;в)

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4}{n+1}\right)^n$

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^3}$.

6

1. Составить формулу общего члена числового ряда: $-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\frac{4}{17}-\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{2n^2-1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{2n+5}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$;в)

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-4}{n^2+1}\right)^n$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость :а). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$;б)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}$.

7

1. Составить формулу общего члена числового ряда: $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{3}{8}+\frac{4}{10}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2n^2+1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды:а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^4}}$;в)

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^n$

4. Исследовать на абсолютную сходимость : а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;б)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2}$.

8 1. Составить формулу общего члена числового ряда: $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi n}{2}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{n(n-3)}{n^2}$.

9 1. Составить формулу общего члена числового ряда: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n+1}$.

3.Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+2)^3}}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{5n+1}\right)^n$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi n}{2}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+3)}{n^2}$.

10 1. Составить формулу общего члена числового ряда: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+3}$.

3.Исследовать на сходимость числовые ряды:а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+1}{2n^2+n}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 0{,}5^n$.

11 1. Составить формулу общего члена числового ряда: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+3}{n^2+2n+5}$;б)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3}{(n+1)^2(n+2)}$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^2+1}$;б)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 3^n$.

12 1. Составить формулу общего члена числового ряда: $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n-1}}{n+2}$;б)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}$. ;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4}{n+1}\right)^n$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+4}$;б)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 0{,}9^n$.

13 1. Составить формулу общего члена числового ряда: $-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\frac{4}{17}-\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{2n^2-1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}$;б)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^4}}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^n$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$;б)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}$.

14 1. Составить формулу общего члена числового ряда: $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\ldots$

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$.

3.Исследовать на сходимость числовые ряды:а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$;б)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+2)^3}}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{5n+1}\right)^n$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi n}{2}$;б)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n(n-3)}{n^2}$.

15 1. Составить формулу общего члена числового ряда: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$.

2. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n-1}{n^2+4n-1}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{(n+1)^2(n+2)}$.

4. Исследовать на абсолютную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^2+1}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 3^n$.

Лабораторная работа №24
Степенные ряды, радиус и интервал сходимости

Цель работы: Получение навыков нахождения радиуса и интервала сходимости степенного ряда; умений применять необходимый и достаточные признаки сходимости числовых рядов, умений определять абсолютно и условно сходящиеся ряды

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 5^n}$.

Решение: Запишем коэффициент данного ряда: $\frac{1}{n\cdot 5^n}$. Найдём радиус сходимости данного ряда: $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\cdot 5^n}:\frac{1}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)}{n}=5$.

Интервал сходимости данного ряда будет $(-5;5)$. Проверим поведение ряда в конечных точках данного интервала.

Пусть $x=5$. Получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}}{n\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n}$. Проверим его сходимость по признаку Даламбера. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}}{n+1}:\frac{5^n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5>1$. Ряд расходится, следовательно, точка $x=5$ не принадлежит области сходимости.

Пусть $x=-5$. Получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{2n}}{n\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^{2n}}{n\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^n}{n}$. Получили знакочередующийся ряд, расходимость которого легко устанавливается с помощью признака Лейбница (не выполняется первое условие). То есть, точка $x=-5$ также не входит в область сходимости. Итак, область сходимости данного ряда - $(-5;5)$.

2. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,01.

Решение: Данный интеграл не выражается в конечном виде через элементарные функции. Разложим его подынтегральную функцию в степенной ряд по формуле: $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x\mathrm{I}}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

Заменим x на (–x)2:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x\mathrm{I}}{1!}+...+\frac{x^4}{2!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+...$$

Отсюда: $\int_0^1(1-\frac{x\mathrm{I}}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+...)dx=(x-\frac{x\mathrm{i}}{3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+...)\Big|_0^1=$

$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!7}+\frac{1}{4!9}-\frac{1}{5!11}+...$

Вычисляя члены этого ряда с точностью до 0,001, замечаем, что уже шестой член по абсолютной величине <0,001, значит, надо взять сумму первых пяти членов, что обеспечивает требуемую точность: $\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0{,}747.$

3.Вычислить приближенно $e^{-\frac{3}{5}}$, с точностью 0,01.

Решение: Используем ряд Маклорена для функции

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...,$$

подставим $x=-\frac{3}{5}$, получим $e^{-\frac{3}{5}}=1-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1!}+\frac{3^2}{5^2 2!}-\frac{3^3}{5^3 3!}+...+\frac{(-1)^n 3^n}{5^n n!}+...,$

или $e^{-\frac{3}{5}}=1-0{,}6+0{,}18-0{,}036+0{,}0054-...$

получили знакочередующийся ряд, из теоремы Лейбница следует, что погрешность $|r_n|$, не превышает первого из отброшенных членов (по абсолютной величине). Так как пятый член ряда меньше заданной точности $u_5=0{,}0054<0{,}01$,то сумма ряда равна $e^{-\frac{3}{5}}=1-0{,}6+0{,}18-0{,}036=0{,}58$.

Варианты заданий к лабораторной работе

Вариант № 1.

1.Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

2. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0.2} \cos(25x^2)dx$

3.Вычислить sin 10° с точностью до 0,0001

Вариант № 2.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

2.Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0.1} \cos(100x^2)dx$

3.Вычислите ln1,5 с точностью до 0,01, используя ряд Маклорена.

Вариант № 3.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2.Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{1} \sin x^2 dx$

3.Пользуясь разложением функции в ряд, вычислить sin 18^0 с точностью до 0,0001.

Вариант № 4.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n}$.

2.Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0.5} e^{-\frac{3x^2}{25}} dx$

3.Вычислите ln0,99 с точностью до 0,01, используя ряд Маклорена.

Вариант № 5.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n}$.

2. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

3.Разложить в ряд Маклорена $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Вариант № 6.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$.

2.Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

3.Вычислить $\sqrt[5]{1,25}$ с точностью до 0,001

Вариант № 7.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$.

2.Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0.4}\cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

3. Вычислить $\ln 1{,}02$ с точностью до 0,0001

Вариант № 8.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{2n-1}$.

2. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0.5}\sin 4x^2 dx$

3.Вычислить cos 18º с точностью до 0,0001

Вариант № 9.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^{2n-1}}{2n}$.

2. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0.5}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$

3.Вычислить cos 46º с точностью до 0,0001

Вариант № 10.

1.Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{2n}}{4n}$.

2. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0.5}\frac{3e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$

3.Вычислить cos 0,22 с точностью до 0,0001

Вариант № 11.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

2.Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$

3.Вычислить $\sqrt[3]{2{,}02}$ с точностью до 0,001

Вариант № 12.

1.Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n}$.

2. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$

3.Вычислить arctg 0,2 с точностью до 0,0001

Вариант № 13.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$.

2. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0.5}\cos 4x^2 dx$

3.Вычислить sin 0,22 с точностью до 0,0001

Вариант № 14.

1.Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{2n-1}$.

2. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_{0}^{0.2}\sin 25x^2dx$

3.Вычислить sin 22 º с точностью до 0,0001

Вариант № 15.

1. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{2n}}{4n}$.

2. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_{0}^{0.3}e^{-2x^2}dx$

3.Вычислить sin 65 º с точностью до 0,0001

Лабораторная работа №25
Кратные интегралы

Цель работы: Получение навыков нахождения двойного и тройного интегралов через повторный интеграл.

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

1. Название лабораторной работы

2 ФИО и группа студента

3 Исходные данные варианта

4 Последовательность действий для решения каждой задачи

5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж области интегрирования.

$$\int_{1}^{2}dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}f(x,y)dy$$

Решение: Построим область интегрирования ограниченной кривыми :x=1,x=2, y=x, $y=\sqrt{2x-x^2}$

y D1

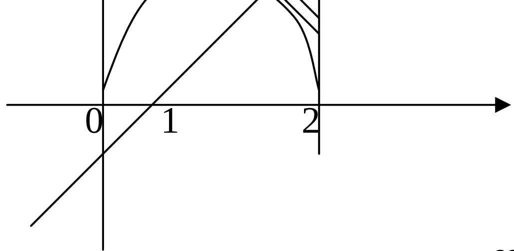
$y=\sqrt{2x-x^2}$ D2

$y^2=2x-x^2$

$(x-1)^2+y^2=1$

x

$x=\sqrt{1-y^2}+1$



$D_1\begin{cases}1\le y\le 2\\ y\le x\le 2\end{cases}$ $D_2\begin{cases}0\le y\le 1\\ \sqrt{1-y^2}+1\le x\le 2\end{cases}$ $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^2 f(x,y)dx$

2. Проведем вычисления для следующего интеграла

$\iint\limits_{\Omega} x^2e^{xy}dxdy\quad \Omega=\{(x,y):x\ge 0;\, y\le 2;\, y\ge 2x\}$.

Решение: Применим формулу повторного интегрирования: внутренний интеграл по переменной y, внешний по x.

$$\iint\limits_{\Omega} x^2e^{xy}dxdy=\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_{2x}^2 e^{xy}dy=\int\limits_0^1 x^2dx\left.\frac{e^{xy}}{x}\right|_{2x}^{2}=$$

$$=\int\limits_0^1 x(e^{2x}-e^{2x^2})dx=\left.\left(\frac{e^{2x}}{2}x-\frac{e^{2x}}{4}-\frac{1}{4}e^{2x^2}\right)\right|_0^1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3. Найдём массу тела $\Omega: x\le 1;\ y\ge 0;\ y\le 2x;\ 0\le z\le 3xy$, если плотность $\rho=x^2+y^2+2z^2$.

Решение: Согласно физическому смыслу тройного интеграла масса тела Ω равна

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x}dy\int\limits_0^{3xy}(x^2+y^2+2z^2)dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x}dy\left.\left(x^2z+y^2z+\frac{2}{3}z^3\right)\right|_0^{3xy}=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x}(3x^3y+3xy^3+18x^3y^3)dy=\int\limits_0^1\left.\left(3x^3\frac{y^2}{2}+\frac{3}{4}xy^4+\frac{9}{2}x^3y^4\right)\right|_0^{2x}dx=$$

$$=\int\limits_0^1(6x^5+12x^5+72x^7)dx=\left.(x^6+2x^6+9x^8)\right|_0^1=12$$

Варианты заданий к лабораторной работе

1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж области интегрирования.

1	$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy$	**2**	$\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)dx$.
3	$\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$	**4**	$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$
5	$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$	**6**	$\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$

7 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)dy$

8 $\int_{-1}^{0} dy \int_{-y}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$

9 $\int_0^2 dx \int_{x}^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy$

10 $\int_{-2}^{2} dy \int_{-3}^{1-y^2} f(x,y)dx$

11 $\int_1^2 \mathrm{dx} \int_2^4 \mathrm{f(x,y)dy}$

12 $\int_1^3 \mathrm{dx} \int_{\frac{1}{\mathrm{x}}}^{\sqrt{\mathrm{x}}} \mathrm{f(x,y)dy}$

13 $\int_0^2 dy \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)dx$

14 $\int_0^3 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

15 $\int_0^2 dx \int_{x^2}^{x+1} f(x,y)dy$

2. Вычислить двойной интеграл по указанной области Ω.

1 $\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)e^{-3xy}dxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 2; y \ge \frac{x}{2}$

2 $\iint\limits_{\Omega} y^2 e^{-5xy}dxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 4; y \ge \frac{x}{4}$

3 $\iint\limits_{\Omega} xye^{xy}dxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 3; y \ge 2x$

4 $\iint\limits_{\Omega} (x^2+3y^2)e^{xy}dxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 2; y \ge x$

5 $\iint\limits_{\Omega} y^2 \sin xydxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 1; y \ge 2x$

6 $\iint\limits_{\Omega} y^2 e^{3xy}dxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 1; y \ge 2x$

7 $\iint\limits_{\Omega} y^2 \cos\frac{xy}{3}dxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 3; y \ge 3x$

8 $\iint\limits_{\Omega} (x^2-y^2)e^{-xy}dxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 3; y \ge 3x$

9 $\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)e^{-xy}dxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 1; y \ge x$

10 $\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\sin xydxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 1; y \ge x$

11 $\iint\limits_{\Omega} x^2 \cos\frac{xy}{3}dxdy$

$\Omega: x \ge 0; y \le 2; y \ge \frac{x}{2}$

12 $\iint\limits_{\Omega} x^2 \cos\frac{xy}{4}dxdy$

$\Omega: x \le 4; y \ge 0; y \le \frac{x}{4}$

13 $\iint\limits_{\Omega} y^2 \cos 3xy dxdy$

$\Omega: x \geq 0; y \leq 3; y \geq \dfrac{x}{3}$

14 $\iint\limits_{\Omega} (2x^2 + 3y^2) e^{xy} dxdy$

$\Omega: x \leq 1; y \geq 0; y \leq x$

15 $\iint\limits_{\Omega} x^2 \cos 4xy dxdy$

$\Omega: x \geq 0; y \leq 4; y \geq \dfrac{x}{4}$

3. Вычислить массу тела Ω с заданной плотностью ρ с помощью тройного интеграла.

1 $\rho = x^2$

$\Omega: x \geq 0;\ y \geq 0;\ x + y \leq 1;$

$0 \leq z \leq 10(x + 3y)$

2 $\rho = 8y + 12z$

$\Omega: x \leq 1; y \geq 0; y \leq x;$

$0 \leq z \leq 3x^2 + 2y^2$

3 $\rho = \left(1 + \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{16}\right)^5$

$\Omega: x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;$

$\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{16} \leq 1$

4 $\rho = 5x + \dfrac{3z}{2}$

$\Omega: x \leq 1; y \geq 0; y \leq x;$

$0 \leq z \leq x^2 + 15y^2$

5 $\rho = \left(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4}\right)^3$

$\Omega: x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;$

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} \leq 1$

6 $\rho = x^2 z$

$\Omega: x \leq 2; y \geq 0; y \leq 3x;$

$0 \leq z \leq xy$

7 $\rho = x^2 + 4y^2$

$\Omega: x \geq 0;\ y \geq 0;\ x + y \leq 1;$

$0 \leq z \leq 20 \cdot (2x + y)$

8 $\rho = x^2 + 3y^2 + z^2$

$\Omega: x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1;$

$0 \leq z \leq 10x$

9 $\rho = 1 + 2\sqrt{y}$

$\Omega: x \leq 1;\ y \geq 0;\ y \leq x$

$0 \leq z \leq \sqrt{xy}$

10 $\rho = x^2 z$

$\Omega: x \leq 2; y \geq 0; y \leq 3x;$

$0 \leq z \leq xy$

11 $\rho = 1 + 2x^3$

$\Omega: x \leq 1;\ y \geq 0;\ y \leq 36x$

$0 \leq z \leq \sqrt{xy}$

12 $\rho = x + 2y + z$

$\Omega: x \leq 2; y \geq 0; y \leq 2x$

$0 \leq z \leq x^2 + y^2$

13 $\rho = 4 + z^3$

$\Omega : x \le 1;\ y \ge 0;\ y \le x$

$0 \le z \le \sqrt{xy}$

14 $\rho = x + 3y + 5z$

$\Omega : x \le 3;\ y \ge 0;\ y \le \dfrac{x}{2}$

$0 \le z \le 2x^2 + 3y^2$

15 $\rho = (1 + x + y + 2z)^4$

$\Omega : x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;$

$x + y + 2z \le 1$

Лабораторная работа №26
Основные формулы теории вероятности

Цель работы: Получение навыков нахождения вероятности события. Формирование умений применять теоремы сложения и умножения.

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Образец выполнения задания

1.В ящике 10 шаров: 7 черных и 3 белых. Из ящика вынимают 5 шаров. Найти вероятность того. что среди них окажется 3 черных и 2 белых шара.

Решение: Требуемую вероятность найдем с помощью классической формулы: $P(A) = \dfrac{m}{n}$ Число n - общее число возможных исходов - равно (поскольку порядок шаров безразличен) сочетанию 5 из 10 элементов: n = C_{10}^{5}

Теперь определим число благоприятных исходов т. Очевидно, что способов, которыми можно вынуть 3 черных шара из 7 и 2 белых шара из 5 равно соответственно: C_7^3 и C_3^2.

Поскольку каждая комбинация черных шаров может сочетаться с любой комбинацией белых, всего получится $C_7^3 \cdot C_7^4$ способов.

Получим: $P(A) = \dfrac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \dfrac{\frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{10!}{5!\cdot 5!}} \approx 0{,}417$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}42$

2.Из колоды в 36 карт наугад вынимают 5 карт. Какова вероятность того, что среди них не будет карты пиковой масти?

Решение: Вычислим по формуле $P(A)=\frac{m}{n}$ Очевидно, общее количество возможных исходов n равно C_{36}^{5} .Так как в колоде 27 карт не пиково» масти, то благоприятным исходом можно считать извлечение 5 любых из них. Тогда m = C_{27}^{5}

Получим: $P(A) = \frac{C_{27}^{5}}{C_{36}^{5}} = \frac{\frac{27!}{5!\cdot 22!}}{\frac{36!}{5!\cdot 31!}} \approx 0{,}214$

Ответ: P(A) ≈ 0,214

3.Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие А) равна 0,8. а вторым (событие В)-0,7.

Решение: События *A* и *B* независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$P(AB) = P(A)\,P(B) = 0{,}7*0{,}8 = 0{,}56.$

Ответ: P(AB) ≈ 0,56

4.Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: p_1=0,8; p_2=0,7; p_3=0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности. Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3.

(т. е. вероятности промахов), соответственно равны:q_1= l - p_l= 1-0,8=0,2; q_2= 1 – p_2= 1-0,7=0,3;q_3= l-p_3= 1-0,9=0,1.

$P(A) = 1 - q_1q_2q_3$= 1-0,2*0,3*0,1 =0,994.

Ответ: P(A) ≈ 0,994

Варианты заданий к лабораторной работе

Вариант 1.

1. В урне содержится 60 чёрных и 40 белых шаров. Случайным образом вынимают 50 шаров. Найти вероятность, что среди них 20 белых шаров.
2. Три стрелка стреляют по цели. Вероятности попадания равны для 1-го стрелка 0.231, для 2-го 0.421, для 3-го 0.312. Первый стрелок сделал 2 выстрела, второй и третий по одному. Найти вероятность, что
   a. нет ни одного попадания:
   b. имеется 4 попадания
   c. первый стрелок попал хотя бы 1 раз

Вариант 2.

1.В урне содержится 70 чёрных и 50 белых шаров. Случайным образом вынимают 60 шаров. Найти вероятность, что среди них 20 белых шаров

2. Для освещения коридора установили 4 лампы: две на 60 вт, одну на 40 вт и одну на 25 вт. Вероятность, что в течение месяца сгорит лампа на 60 вт равна 0.431, на 40 вт равна 0.354, на 25 вт равна 0.226. Найти вероятность, что за месяц:
   a. ни одна лампа не сгорит
   b. сгорят все лампы

d. первый не попал ни разу, но имеется 1 попадание
e. третий попал и имеется 2 попадания

Вариант 3.

1.В урне содержится 40 чёрных и 70 белых шаров. Случайным образом вынимают 50 шаров. Найти вероятность, что среди них 30 белых шаров.

2. На работу случайным образом приняли четырёх гастарбайтеров: двух из Таджикистана, одного из Киргизии и одного из Узбекистана. Среди таджикских гастарбай-теров водительские права имеют 12.7% , среди киргизских 21.56%, среди узбекских 28.35%. Найти вероятность, что среди принятых гастарбайтеров:

a. никто не имеет водительских прав
b. все имеют водительские права
c. водительские права имеет 1 гастарбайтер
d. хотя бы один гастарбайтер имеет водительские права
e. хотя бы один таджик имеет водительские права

c. сгорит хотя бы одна лампа
d. сгорит хотя бы одна лампа на 60 вт
e. сгорят более половины ламп

Вариант 4.

1.На складе лежали 200 ламп, из которых 50 бракованных. На продажу взяли наудачу 100 ламп. Найдите вероятность, что среди взятых ламп 10 бракованных.

2.Три стрелка стреляют по цели. Вероятности попадания равны для 1-го стрелка 0.338, для 2-го 0.223, для 3-го 0.411. Второй стрелок сделал 2 выстрела, первый и третий по одному. Найти вероятность, что

a. имеется 4 попадания
b. имеется 1 попадание
c. хотя бы 1 попадание
d. второй стрелок попал хотя бы 1 раз
e. все стрелки хотя бы 1 раз промахнулись

Вариант 5.

1.На складе лежали 300 ламп, из которых 50 бракованных. На продажу взяли наудачу 100 ламп. Найдите вероятность, что среди взятых ламп 20 бракованных.

2.Для освещения коридора установили 4 лампы: две на 40 вт, одну на 60 вт и одну на 25 вт. Вероятность, что в течение месяца сгорит лампа на 40 вт равна 0.431, на 60 вт равна 0.504, на 25 вт равна 0.318. Найти вероятность, что за месяц:

a. ни одна лампа не сгорит

Вариант 6.

1. На складе лежали 300 ламп, из которых 50 бракованных. На продажу взяли наудачу 100 ламп. Найдите вероятность, что среди взятых ламп 30 бракованных.

2.На работу случайным образом приняли четырёх гастарбайтеров: одного из Таджикистана, двух из Киргизии и одного из Узбекистана. Среди таджикских гастарбай-теров водительские права имеют 18.7% , среди киргизских 23.51%, среди узбекских 25.34%. Найти вероятность, что среди принятых

b. сгорят все лампы
c. сгорят 3 лампы
d. сгорит хотя бы одна лампа
e. сгорит хотя бы одна лампа на 40 вт

гастарбайтеров:

a. никто не имеет водительских прав
b. все имеют водительские права
c. водительские права имеют 3 гастарбайтера
d. хотя бы один гастарбайтер имеет водительские права
e. права имеет узбек и ещё один гастарбайтер

Вариант 7.

1. На складе лежали 250 ламп, из которых 50 бракованных. На продажу взяли наудачу 100 ламп. Найдите вероятность, что среди взятых ламп 20 бракованных.

2.Три стрелка стреляют по цели. Вероятности попадания равны для 1-го стрелка 0.411, для 2-го 0.224, для 3-го 0.307. Третий стрелок сделал 2 выстрела, первый и второй по одному. Найти вероятность, что

a. нет ни одного попадания
b. имеется 4 попадания
c. хотя бы 1 попадание
d. третий стрелок попал хотя бы 1 раз
e. третий не попал ни разу, но имеется 1 попадание

Вариант 8.

1. На избирательном участке голосовало 400 человек, из которых 100 проголосовало за ЛДПР. После выборов опросили 200 случайно взятых избирателей, голосовавших на этом участке. Найдите вероятность, что среди опрошенных избирателей никто не голосовал за ЛДПР.

2.Для освещения коридора установили 4 лампы: две на 25 вт, одну на 40 вт и одну на 60 вт. Вероятность, что в течение месяца сгорит лампа на 60 вт равна 0.531, на 40 вт равна 0.454, на 25 вт равна 0.322. Найти вероятность, что за месяц:

a. ни одна лампа не сгорит
b. сгорят все лампы
c. сгорят 2 лампы
d. сгорит хотя бы одна лампа
e. сгорит хотя бы одна лампа на 25 вт

Вариант 9.

1. На избирательном участке голосовало 300 человек, из которых 100 проголосовало за КПРФ. После выборов опросили 100 случайно взятых избирателей, голосовавших на этом участке. Найдите вероятность, что 20 опрошенных избирателей голосовали за КПРФ.

2. На работу случайным образом

Вариант 10.

Задание 1. На избирательном участке голосовало 500 человек, из которых 100 проголосовало за Справедливую Россию. После выборов опросили 100 случайно взятых избирателей, голосовавших на этом участке. Найдите вероятность, что среди опрошенных избирателей за Справедливую приняли четырёх гастарбайтеров: одного из Таджикистана, одного из Киргизии и двух из Узбекистана. Среди таджикских гастарбай-теров водительские права имеют 21.7% , среди киргизских 16.6%, среди узбекских 23.35%. Найти вероятность, что среди принятых гастарбайтеров:

a. никто не имеет водительских прав
b. все имеют водительские права
c. водительские права имеет 1 гастарбайтер
d. хотя бы один гастарбайтер имеет водительские права
e. права имеют менее половины принятых гастарбайтеров

Россию голосовало 10 человек.

2.Три стрелка стреляют по цели. Вероятности попадания равны для 1-го стрелка 0.331, для 2-го 0.256, для 3-го 0.427. Первый стрелок сделал 2 выстрела, второй и третий по одному. Найти вероятность, что

a. нет ни одного попадания
b. имеется 3 попадания
c. хотя бы 1 попадание
d. первый стрелок попал хотя бы 1 раз
e. первый не попал ни разу, но имеется 1 попадание

Вариант 11.

1. На избирательном участке голосовало 400 человек, из которых 100 проголосовало за Яблоко. После выборов опросили 100 случайно взятых избирателей, голосовавших на этом участке. Найдите вероятность, что среди опрошенных избирателей за Яблоко голосовало 20 человек.

2.Для освещения коридора установили 4 лампы: две на 40 вт, одну на 60 вт и одну на 25 вт. Вероятность, что в течение месяца сгорит лампа на 40 вт равна 0.355, на 60 вт равна 0.552, на 25 вт равна 0.225. Найти вероятность, что за месяц :

a. ни одна лампа не сгорит
b. сгорят все лампы
c. сгорят 3 лампы
d. сгорит хотя бы одна лампа
e. все лампы на 40 вт уцелеют, но одна из ламп сгорит

Вариант 12.

1. В урне содержится 100 чёрных и 200 белых шаров. Случайным образом вынимают 60 шаров. Найти вероятность, что среди них 50 белых шаров.

2.На работу случайным образом приняли четырёх гастарбайтеров: двух из Таджикистана, одного из Киргизии и одного из Узбекистана. Среди таджикских гастарбай-теров водительские права имеют 15.7% , среди киргизских 23.56%, среди узбекских 21.35%. Найти вероятность, что среди принятых гастарбайтеров:

a. никто не имеет водительских прав
b. все имеют водительские права
c. водительские права имеет 1 гастарбайтер
d. хотя бы один гастарбайтер имеет водительские права
e. хотя бы один таджик имеет водительские права

Вариант 13.

Вариант 14.

1. Магазин закупил партию из 200 единиц товара, среди которых было 10 дефектных. Для проверки качества он проверил 100 случайно взятых единиц. Найдите вероятность, что он не обнаружил ни одного дефекта.

2. Три стрелка стреляют по цели. Вероятности попадания равны для 1-го стрелка 0.531, для 2-го 0.461, для 3-го 0.366. Второй стрелок сделал 2 выстрела, первый и третий по одному. Найти вероятность, что

a. нет ни одного попадания
b. имеется 2 попадания
c. хотя бы 1 попадание
d. второй стрелок попал хотя бы 1 раз
e. все стрелки хотя бы 1 раз промахнулись

Вариант 15.

1. Магазин закупил партию из 100 единиц товара, среди которых было 5 дефектных. Для проверки качества он проверил 10 случайно взятых единиц. Найдите вероятность, что он обнаружил только одну единицу с дефектом.

2.На работу случайным образом приняли четырёх гастарбайтеров: одного из Таджикистана, двух из Киргизии и одного из Азербайджана. Среди таджикских гастарбай-теров водительские права имеют 12.7% , среди киргизских 21.56%, среди азербайджанских 31.31%. Найти вероятность, что среди принятых гастарбайтеров:

a. никто не имеет водительских прав
b. все имеют водительские права
c. водительские права имеют 2 гастарбайтера

1. Магазин закупил партию из 100 единиц товара, среди которых было 10 дефектных. Для проверки качества он проверил 30 случайно взятых единиц. Найдите вероятность, что он обнаружил 2 с дефектом.

2. Для освещения коридора установили 4 лампы: две на 60 вт, одну на 40 вт и одну на 25 вт. Вероятность, что в течение месяца сгорит лампа на 60 вт равна 0.335, на 40 вт равна 0.311, на 25 вт равна 0.221. Найти вероятность, что за месяц :

a. ни одна лампа не сгорит
b. сгорят все лампы
c. сгорит 1 лампа
d. сгорит хотя бы одна лампа
e. сгорит хотя бы одна лампа на 60 вт

d. хотя бы один гастарбайтер имеет водительские права
e. хотя бы один азербайджанец имеет водительские права

Лабораторная работа №27
Элементы математической статистики

Цель работы: Научиться строить гистограммы, полигон, находить точечные оценки выборки.

Порядок выполнения работы

1. Выполните задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
1. Название лабораторной работы
2 ФИО и группа студента
3 Исходные данные варианта
4 Последовательность действий для решения каждой задачи
5 Результаты решения задачи

Варианты заданий к лабораторной работе

1. Построить гистограмму частот и гистограмму относительных частот по данному распределению выборки

Вариант	i	Частичные интервалы x_i-x_{i+1}	n_i	Вариант	i	Частичные интервалы x_i-x_{i+1}	n_i
1	1	8-11	20	**2**	1	0-2	20
	2	11-14	35		2	2-4	35
	3	14-17	30		3	4-6	30
	4	17-20	15		4	6-8	15
3	1	6-9	20	**4**	1	5-8	15
	2	9-12	35		2	8-11	30
	3	12-15	30		3	11-14	35
	4	15-18	15		4	14-17	20
5	1	4-7	20	**6**	1	3-6	15
	2	7-10	35		2	6-9	30
	3	10-13	30		3	9-12	35
	4	13-16	15		4	12-15	20
7	1	2-5	20	**8**	1	1-4	15
	2	5-8	35		2	4-7	30
	3	8-11	30		3	7-10	35
	4	11-14	15		4	10-13	20
9	1	0-3	20	**10**	1	11-13	15
	2	3-6	35		2	13-15	30
	3	6-9	30		3	15-17	35
	4	9-12	15		4	17-19	20
11	1	9-11	20	**12**	1	7-9	15

	2	11-13	35		2	9-11	30
	3	13-15	30		3	11-13	35
	4	15-17	15		4	13-15	20
13	1	5-7	15	**14**	1	3-5	20
	2	7-9	30		2	5-7	35
	3	9-11	35		3	7-9	30
	4	11-13	20		4	9-11	15
15	1	1-3	20				
	2	3-5	35				
	3	5-7	30				
	4	7-9	15				

2. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки объема n = 100 (предварительно найти значение a). Составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

Вариант	Распределение						Вариант	Распределение					
1	x_i	1	3	5	7	9	2	x_i	5	5,5	6	7,5	8
	n_i	10	25	30	a	15		n_i	10	25	30	a	15
3	x_i	1.5	2,5	3,5	4,5	5,5	4	x_i	3	7	10	12	15
	n_i	10	25	30	a	15		n_i	10	15	30	a	25
5	x_i	1,2	2,3	3,1	4,5	5,2	6	x_i	3	7	10	12	14
	n_i	10	25	30	a	15		n_i	10	15	30	a	25
7	x_i	-1	0	1	2	3	8	x_i	2	3	4	5	6
	n_i	10	25	30	a	15		n_i	10	15	30	a	25
9	x_i	10	12	14	16	18	10	x_i	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
	n_i	10	25	30	a	15		n_i	10	15	30	a	25
11	x_i	3	3,5	4	4,5	5	12	x_i	1	1,5	2	2,5	3
	n_i	10	25	30	a	15		n_i	10	15	30	a	25
13	x_i	1	1,2	2,4	3	5	14	x_i	2	7	10	12	15
	n_i	10	15	30	a	25		n_i	10	25	30	a	15
15	x_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5							
	n_i	10	25	30	a	15							

3. По данным результатам измерений найти: выборочную среднюю; выборочную дисперсию; несмещённые оценки генеральных средней и дисперсии.

Вариант	Результат измерений	Вариант	Результат измерений
1	15, 17, 19, 21	2	12, 13, 14, 15
3	13, 15, 17, 19	4	12, 14, 16, 18
5	10, 12, 14, 16	6	9, 11, 13, 15, 17
7	7, 9, 11, 12	8	5, 7, 9, 11
9	3, 5, 7, 9	10	1, 3, 5, 7
11	2, 4, 6, 8	12	21, 22, 23, 24
13	20, 21, 22, 23	14	19, 20, 21, 22
15	18, 19, 20, 21		

4. Список рекомендуемой литературы

1. Балдин, К. В. Математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. - М.: Юнити-Дана, 2012. - 543 с. http://biblioclub.ru
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман.- 12-е изд.. - Москва : Юрайт, 2014. - 479 с.: ил.. - (Бакалавр. Базовый курс). - ISBN 978-5-9916-3461-8.
3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман.- 11-е изд., перераб. и доп.. - Москва : Юрайт, 2013. - 404 с.. - (Бакалавр. Базовый курс). - Прил.: с. 388-404. - ISBN 978-5-9916-2789-4.
4. Малахов, А. Н. Высшая математика [Электронный ресурс] : Учебно-методический комплекс - М.: Евразийский открытый институт, 2009. - 394 с. http://biblioclub.ru
5. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс [Текст] : учебник для бакалавров / В. С. Шипачев; [под ред. А. Н. Тихонова].- 4-е изд., испр. и доп.. - Москва : Юрайт, 2014. - 607 с.. - (Бакалавр. Базовый курс) - ISBN 978-5-9916-3325-3.