Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Оренбург
2019

УДК 512.64:514.12(076.5)
ББК 22.143я7+22.151.5я7
У 76

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко

Усова, Л.Б.

У 76 Расчетно-графические задания по аналитической геометрии: методические указания / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 75 с.

Методические указания содержат расчетно-графические задания по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Данная разработка поможет в организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины, окажет существенную помощь в подготовке к зачету и экзамену.

Они предназначены для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

УДК 512.64:514.12(076.5)
ББК 22.143я7+22.151.5я7

Содержание

Введение

Методические указания содержат расчетно-графические задания по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Они предназначены для организации самостоятельной работы студентов, для проведения промежуточного контроля знаний студентов. Их содержание ориентировано на обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

Расчетно-графические задания являются частью фонда оценочных средств указанной дисциплины, могут использоваться преподавателями для контроля знаний студентов по пройденным темам, и могут выполняться в аудиторное, так и внеаудиторное время.

В методических указаниях представлены следующие темы: «Прямая на плоскости. Способы задания прямых на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости»; «Плоскость и прямая в пространстве. Способы задания плоскости и прямой в пространстве. Взаимное расположение плоскостей, прямых, плоскости и прямой в пространстве»; «Кривые 2-го порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола»; «Поверхности 2-го порядка»; «Линейное отображение. Линейный оператор. Квадратичная форма». По завершению темы данного курса проводится промежуточная аттестация, студенту предлагается выполнить расчетно-графические задания соответствующего содержания и формулируются критерии оценки: задача считается решенной и оценивается в 5 баллов, если выполнены 90%-100% условий и требований, сформулированных в ней; оценивается в 4 балла, если выполнены 70%-89% условий и требований; оценивается в 3 балла, если выполнены 50%-69%.

1 Тема «Прямая на плоскости. Способы задания прямых на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости»

Вариант 1

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4;8)$, $B(-3;1)$, $C(-5;-6)$, $D(2;1)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ABC опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

2 При каких значениях A и B прямые $2x-3y+4=0$; $Ax+6y+B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 2

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4;8)$, $B(-3;1)$, $C(-5;-6)$, $D(2;1)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L,параллельной диагонали BD и проходящей через вершину C;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ BCD$, проведенной из вершины C на сторону DB;

г) длину высоты в $\Delta\ BCD$, опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD.

2 При каких значениях A и B прямые $Ax-4y+1=0$, $-2x+y-B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 3

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4; 8)$, $B(–3; 1)$, $C(–5; –6)$, $D(2; 1)$. Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ ADC$, опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

2 При каких значениях A и B прямые $4x+y-6=0$, $3x+Ay+2B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 4

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4; 8)$, $B(–3; 1)$, $C(–5; –6)$, $D(2; 1)$. Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ BAD$, опущенной из вершины A на сторону DB;

д) угол между прямыми DA и AB.

2 При каких значениях A и B прямые $x-Ay+5=0$, $2x+3y-B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 5

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(-4;1)$, $D(5;-2)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

д) длину высоты в $\Delta\ ABC$, опущенной из вершины B на сторону AC;

е) угол между прямыми AB и BC.

2 При каких значениях A и B прямые $x+4y-1=0$; $Ax-2y-B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 6

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(6; 3)$, $B(-3; 6)$, $C(-4; 1)$, $D(5; -2)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в) уравнение медианы, высоты в Δ ABC, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ BCD, опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD.

2 При каких значениях A и B прямые $2x - Ay - 3 = 0$, $2x - 2y + B = 0$

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 7

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(6; 3)$, $B(–3; 6)$, $C(–4; 1)$, $D(5; -2)$. Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в) уравнение медианы, высоты в Δ ABC, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ADC, опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

2 При каких значениях A и B прямые $2x - y + 3 = 0$, $2x - Ay + B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 8

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(6; 3)$, $B(–3; 6)$, $C(–4; 1)$, $D(5; -2)$. Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в) уравнение медианы, высоты в Δ ABC, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ BAD, опущенной из вершины A на сторону DB;

д) угол между прямыми DA и AB.

2 При каких значениях A и B прямые $x+2y-B=0$, $Ax-y+3=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 9

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(0;-3)$, $B(2;4)$, $C(-2;3)$, $D(-4;-4)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в Δ ABC, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ABC, опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

2 При каких значениях A и B прямые $x-3y+2=0$; $x+Ay+2B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 10

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(0;-3)$, $B(2;4)$, $C(-2;3)$, $D(-4;-4)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в Δ ABC, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ BCD, опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD.

2 При каких значениях A и B прямые $3x+2y-B=0$, $6x-Ay+1=0$

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 11

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(0; –3)$, $B(2; 4)$, $C(–2; 3)$, $D(–4; –4)$. Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в Δ ABC, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ADC, опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

2 При каких значениях A и B прямые $3x+2y-B=0$, $Ax+2y-4=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 12

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(0; –3)$, $B(2; 4)$, $C(–2; 3)$, $D(–4; –4)$. Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в Δ ABC, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) Вычислить длину высоты в Δ BAD, опущенной из вершины A на сторону DB;

д) угол между прямыми DA и AB.

2 При каких значениях A и B прямые $Ax+y-3=0$, $4x-8y-B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 13

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5;3)$, $B(3;9)$, $C(-5;-1)$, $D(-3;-7)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в Δ ABC, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ABC, опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

2 При каких значениях A и B прямые $2x - Ay - 4 = 0$; $6x + 2y + 3B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 14

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5;3)$, $B(3;9)$, $C(-5;-1)$, $D(-3;-7)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ BCD$, опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD.

2 При каких значениях A и B прямые $2x - 5y + 1 = 0$, $Ax - 4y - 2B = 0$

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 15

1 Дан параллелограмм $ABCD$: A(5; 3), B(3; 9), C(-5; -1), D(-3; -7). Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ ADC$, опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

2 При каких значениях A и B прямые $-x + Ay - 1 = 0$, $2x + 3y + B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 16

1 Дан параллелограмм $ABCD$: A(5; 3), B(3; 9), C(–5; –1), D(–3; –7). Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ BAD$, опущенной из вершины A на сторону DB;

д) угол между прямыми DA и AB.

2 При каких значениях A и B прямые $x - Ay + 1 = 0$, $2x - y + 2B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 17

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5;4)$, $B(-3;7)$, $C(-1;-2)$, $D(7;-5)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ ABC$, опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

2 При каких значениях A и B прямые $Ax + y - B = 0$; $3x - 6y + 2 = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 18

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5;4)$, $B(-3;7)$, $C(-1;-2)$, $D(7;-5)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ BCD$, опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD.

2 При каких значениях A и B прямые $-x + Ay - 3 = 0$, $4x + 6y + B = 0$

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 19

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5; 4)$, $B(–3; 7)$, $C(–1; –2)$, $D(7; –5)$. Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ ADC$, опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

2 При каких значениях A и B прямые $x - Ay + 4 = 0$, $3x + y + 4B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 20

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5; 4)$, $B(–3; 7)$, $C(–1; –2)$, $D(7; –5)$. Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ BAD$, опущенной из вершины A на сторону DB;

д) угол между прямыми DA и AB.

2 При каких значениях A и B прямые $Ax + 2y - 3 = 0$, $-x + 4y + B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 21

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4; 4)$, $B(-4; 8)$, $C(-6; 2)$, $D(2; -2)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ ABC$, опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

2 При каких значениях A и B прямые $3x - Ay - 6 = 0$; $x + 2y + 2B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 22

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4;\,4)$, $B(-4;\,8)$, $C(-6;\,2)$, $D(2;\,-2)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ BCD$, опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD.

2 При каких значениях A и B прямые $5x - Ay + 7 = 0$, $x + 10y - B = 0$

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 23

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4;\,4)$, $B(-4;\,8)$, $C(-6;\,2)$, $D(2;\,-2)$. Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в)уравнение медианы, высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ ADC$, опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

2 При каких значениях A и B прямые $5x - Ay - 3 = 0$, $4x - 4y + B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 24

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4;\,4)$, $B(-4;\,8)$, $C(-6;\,2)$, $D(2;\,-2)$. Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L, параллельной диагонали BD проходящей через вершину A;

в) уравнение высоты в Δ BAD, опущенной из вершины A на сторону DB;

г) длину высоты в Δ BAD, опущенной из вершины A на сторону DB;

д) угол между прямыми DA и AB.

2 При каких значениях A и B прямые $x+5y-3B=0$, $Ax-2y-9=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 25

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(-6;5)$, $B(-9;-3)$, $C(0;-9)$, $D(3;-1)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L, параллельной диагонали AC проходящей через вершину B;

в)уравнение высоты, медианы Δ ABC, опущенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ABC, опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

2 При каких значениях A и B прямые $x+2Ay-6=0$; $6x-y-B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 26

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(-6;5)$, $B(-9;-3)$, $C(0;-9)$, $D(3;-1)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L, параллельной диагонали BD проходящей через вершину C;

в) уравнение высоты, медианы Δ BCD, опущенной из вершины C на сторону DB;

г) длину высоты в Δ BCD, опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD.

2 При каких значениях A и B прямые $Ax+2y-4=0$, $3x-4y-B=0$

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 27

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(-6;\,5)$, $B(-9;\,-3)$, $C(0;\,-9)$, $D(3;\,-1)$. Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L, параллельной диагонали AC проходящей через вершину D;

в)уравнение высоты, медианы Δ ADC, опущенной из вершины D на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ADC, опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

2 При каких значениях A и B прямые $Ax-y+2=0$, $3x-4y-3B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 28

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(-6;\,5)$, $B(-9;\,-3)$, $C(0;\,-9)$, $D(3;\,-1)$. Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L, параллельной диагонали BD проходящей через вершину A;

в)уравнение высоты, медианы Δ BAD, опущенной из вершины A на сторону DB;

г) длину высоты в Δ BAD, опущенной из вершины A на сторону DB;

д) угол между прямыми DA и AB.

2 При каких значениях A и B прямые $4x+3y-2B=0$, $Ax-8y+4=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 29

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(11;\,-3)$, $B(5;\,2)$, $C(-5;\,-3)$, $D(1;\,-8)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L, параллельной диагонали BD проходящей через вершину C;

в)уравнение высоты, медианы Δ BCD, опущенной из вершины C на сторону DB;

г) длину высоты в Δ BCD, опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD.

2 При каких значениях A и B прямые $-x+Ay+B=0$, $3x-y-3=0$

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Вариант 30

1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(11;-3)$, $B(5;2)$, $C(-5;-3)$, $D(1;-8)$. Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L, параллельной диагонали AC проходящей через вершину D;

в) уравнение высоты, медианы Δ ADC, опущенной из вершины D на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ADC, опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

2 При каких значениях A и B прямые $-2x-y+B=0$, $4x-Ay+5=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Продемонстрируем решение некоторых заданий:

Задание 1

Дан параллелограмм $ABCD$ $A(2,2); B(7,5); C(9,-1); D(4,-4)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б)уравнение прямой L параллельной диагонали AC проходящей через вершину B;

в) уравнение медианы, высоты Δ ABC, проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ABC опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

Решение.

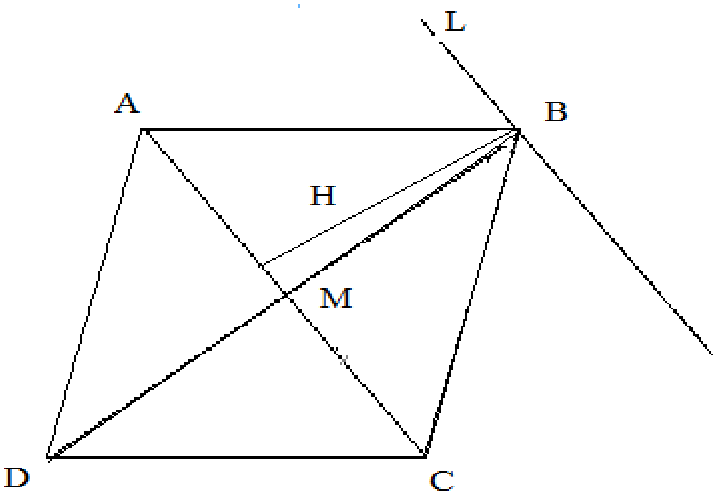

Рисунок 1

а) Подставим координаты точек $A(2{,}2); B(7{,}5)$ в формулу уравнение прямой через две точки $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и упростим, получим уравнение стороны AB:

$3x-5y+4=0$; далее приведем уравнение прямой к нормальному виду: *Нормальное уравнение прямой*: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, т.е. общее уравнение прямой $3x-5y+4=0$ умножим на нормирующий множитель $\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ (знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена C).

Получим уравнение: $\frac{-3x}{\sqrt{34}}+\frac{5y}{\sqrt{34}}-\frac{4}{\sqrt{34}}=0$;

б) Воспользуемся уравнением прямой $L: y=y_0+k(x-x_0)$ проходящей через вершину $B(7{,}5)$ параллельной диагонали AC с угловым коэффициентом $k=-\frac{3}{7}$

имеет вид: $3x+7y-84=0$;

в) Найдем координату середины AC т.е точку $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$, далее подставим в уравнение прямой через две точки M и B $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ их координаты, получим уравнение медианы в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC, которая имеет вид: $3x-y-16=0$. Для нахождения уравнение высоты в $\Delta\ ABC$, проведенной из вершины B на сторону AC воспользуемся уравнением прямой L:

$y = y_0 + k(x - x_0)$ проходящей через вершину $B(7,5)$ перпендикулярной диагонали AC с угловым коэффициентом $k = \frac{7}{3}$, после преобразований получим уравнение: $7x - 3y - 34 = 0$;

г) Для нахождения длины высоты в Δ ABC опущенной из вершины B на сторону AC воспользуемся формулой $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где точка $(x_0; y_0)$, т.е. $(7;5)$ до прямой. : $3x + 7y - 20 = 0$.

$$d = \frac{|3 \cdot 7 + 7 \cdot 5 - 20|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{|36|}{\sqrt{58}} = \frac{36}{\sqrt{58}}.$$

д) Угол между прямыми AB $3x - 5y + 4 = 0$; и BC $3x + y - 26 = 0$;

по формуле нахождения угла между двумя прямыми имеет вид:

$$cos\varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{3 \cdot 3 + (-5) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{85}}, \ \varphi = arccos\frac{2}{\sqrt{85}}.$$

Задание 2

При каких значениях A и B прямые $3x - 5y + 4 = 0, Ax + 6y + B = 0$:

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают?

Решение.

а) Прямые на плоскости могут быть перпендикулярны т.е. $3x - 5y + 4 = 0$ $\Rightarrow \overline{n_1} = (3; -5)$; $Ax + 6y + B = 0$ $\Rightarrow \overline{n_2} = (A;6)$, найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$: $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 3 \cdot A - 5 \cdot 6 = 3A - 30 = 0 \Rightarrow$ при $A = 10$ и $B \in R$;

б) Прямые на плоскости могут быть параллельными, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$; т.е.

$\frac{3}{A} = \frac{-5}{6}$ $A = -\frac{18}{5}$ и $B \in R$;

в) Прямые на плоскости совпадают при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; т.е.

при $A = -\frac{18}{5}$ и $B = -\frac{24}{5}$.

2 Тема «Плоскость и прямая в пространстве. Способы задания плоскости и прямой в пространстве. Взаимное расположение плоскостей, прямых, плоскости и прямой в пространстве»

Вариант 1

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины D на плоскость ABC;

г) уравнение высоты DO;

д) координату точки O, DO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;

ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

2 При каких значениях m прямая $\dfrac{x+10}{m}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x-3y+4z-1=0$?

Вариант 2

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести к нормальному виду;

б) уравнение плоскости П, проходящей через точку C параллельно плоскости ADB;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины C на плоскость ABD;

г) уравнение высоты CO;

д) координату точки O, CO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;

ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{7}$ принадлежит плоскости $2x-y+Cz+D=0$?

Вариант 3

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку B параллельно плоскости ADC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины B на плоскость ADC;

г) уравнение высоты BO;

д) координату точки O, BO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;

ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

2 При каких значениях p и b прямая $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{p}$ перпендикулярна плоскости $6x+by-3z+1=0$?

Вариант 4

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку A параллельно плоскости BDC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины A на плоскость BDC;

г) уравнение высоты AO;

д) координату точки O, AO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;

ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

2 Лежит ли прямая $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-7}$ в плоскостях Π_1: $3x+2y+z=0$ и Π_2: $3x+2y+z-1=0$?

Вариант 5

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины D на плоскость ABC;

г) уравнение высоты DO;

д) координату точки O, DO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;

ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

2 При каких значениях m прямая $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{m}$ параллельна плоскости $3x-4y+z-5=0$?

Вариант 6

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости П, проходящей через точку C параллельно плоскости ADB;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины C на плоскость ABD;

г) уравнение высоты CO;

д) координату точки O, CO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;

ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}$ принадлежит плоскости $3x-Cy+z-D=0$?

Вариант 7

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку B параллельно плоскости ADC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины B на плоскость ADC;

г) уравнение высоты BO;

д) координату точки O, BO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;

ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-p}$ перпендикулярна плоскости $Bx-y+2z-4=0$?

Вариант 8

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку A параллельно плоскости BDC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины A на плоскость BDC;

г) уравнение высоты AO;

д) координату точки O, AO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;

ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

2 Лежит ли прямая $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-1}$ в плоскостях Π_1: $x-y-2z-4=0$ и Π_2: $x-y-2z-1=0$?

Вариант 9

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины D на плоскость ABC;

г) уравнение высоты DO;

д) координату точки O, DO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;

ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

2 При каких значениях m прямая $\frac{x}{4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{m}$ параллельна плоскости $x+2y-3z+1=0$?

Вариант 10

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости П, проходящей через точку C параллельно плоскости ADB;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины C на плоскость

ABD;

г) уравнение высоты CO;

д) координату точки O, CO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;

ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{8}$ принадлежит плоскости $x-2y-Cz-D=0$?

Вариант 11

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку B параллельно плоскости ADC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины B на плоскость ADC;

г) уравнение высоты BO;

д) координату точки O, BO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;

ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{p}=\frac{z-1}{-1}$ перпендикулярна плоскости $2x-4y+Bz-3=0$?

Вариант 12

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку A параллельно плоскости BDC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины A на плоскость BDC;

г) уравнение высоты AO;

д) координату точки O, AO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;

ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

2 Лежит ли прямая $\frac{x+3}{6}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{4}$ в плоскостях Π_1: $2x-3z+5=0$ и Π_2: $2x-3z+9=0$?

Вариант 13

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины D на плоскость ABC;

г) уравнение высоты DO;

д) координату точки O, DO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;

ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

2 При каких значениях m прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-6}{-3}$ параллельна плоскости $3x-my+4z+5=0$?

Вариант 14

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости П, проходящей через точку C параллельно плоскости ADB;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины C на плоскость ABD;

г) уравнение высоты CO;

д) координату точки O, CO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;

ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{8}$ принадлежит плоскости $x-2y-Cz-D=0$?

Вариант 15

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку B параллельно плоскости ADC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины B на плоскость ADC;

г) уравнение высоты BO;

д) координату точки O, BO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;

ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x+2}{p}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{2}$ перпендикулярна плоскости $x+4y-Bz+1=0$?

Вариант 16

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку A параллельно плоскости BDC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины A на плоскость BDC;

г) уравнение высоты AO;

д) координату точки O, AO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;

ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

2 Лежит ли прямая $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4}$ в плоскостях Π_1: $2x-3y+z-3=0$ и Π_2: $2x-3y+z+1=0$?

Вариант 17

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$, $D(8;4;-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины D на плоскость ABC;

г) уравнение высоты DO;

д) координату точки O, DO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;

ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

2 При каких значениях m прямая $\frac{x+3}{5}=\frac{y}{m}=\frac{z+3}{4}$ параллельна плоскости $2x-y+4z-3=0$?

Вариант 18

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$, $D(8;4;-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости П, проходящей через точку C параллельно плоскости ADB;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины C на плоскость ABD;

г) уравнение высоты CO;

д) координату точки O, CO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;

ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}$ принадлежит плоскости $3x-Cy+z-D=0$?

Вариант 19

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку B параллельно плоскости ADC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины B на плоскость ADC;

г) уравнение высоты BO;

д) координату точки O, BO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;

ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x-5}{6}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z}{-p}$ перпендикулярна плоскости $Bx-y+z-3=0$?

Вариант 20

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку A параллельно плоскости BDC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины A на плоскость BDC;

г) уравнение высоты AO;

д) координату точки O, AO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;

ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

2 Лежит ли прямая $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{5}$ в плоскостях Π_1: $3x-4y+5z=0$ и Π_2: $3x-4y+5z-1=0$.

Вариант 21

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины D на плоскость ABC;

г) уравнение высоты DO;

д) координату точки O, DO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;

ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

2 При каких значениях m прямая $\frac{x}{m}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{5}$ параллельна плоскости $-x+2y+z-2=0$?

Вариант 22

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$,

$C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости П, проходящей через точку C параллельно плоскости ADB;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины C на плоскость ABD;

г) уравнение высоты CO;

д) координату точки O, CO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;

ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x}{5}=\frac{y-4}{C}=\frac{z+1}{-2}$ принадлежит плоскости $2x-y+4z-D=0$?

Вариант 23

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку B параллельно плоскости ADC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины B на плоскость ADC;

г) уравнение высоты BO;

д) координату точки O, BO высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;

ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x-1}{8}=\frac{y}{-p}=\frac{z+2}{3}$ перпендикулярна плоскости $2x+4y-Bz+1=0$?

Вариант 24

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку A параллельно плоскости BDC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины A на плоскость BDC;

г) уравнение высоты AO;

д) координату точки O, AO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;

ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

2 Лежит ли прямая $\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$ в плоскостях Π_1: $2x-3z+5=0$ и Π_2: $2x-3z+9=0$?

Вариант 25

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости П, проходящей через точку C параллельно плоскости ADB;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины C на плоскость ABD;

г) уравнение высоты CO;

д) координату точки O, CO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;

ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

2 При каких значениях m прямая $\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z}{6}$ параллельна плоскости $mx-2y-3z+5=0$?

Вариант 26

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку B параллельно плоскости ADC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины B на плоскость ADC;

г) уравнение высоты BO;

д) координату точки O, BO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;

ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

2 При каких значениях C и D прямая $\dfrac{x-2}{C}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+5}{-1}$ принадлежит плоскости $5x-5y-5z+2D=0$?

Вариант 27

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку A параллельно плоскости BDC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины A на плоскость BDC;

г) уравнение высоты AO;

д) координату точки O, AO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;

ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

2 При каких значениях p и B прямая $\dfrac{x+2}{9}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{p}$ перпендикулярна плоскости $-x+By-z=0$?

Вариант 28

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины D на плоскость ABC;

г) уравнение высоты DO;

д) координату точки O, DO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;

ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

2 Лежит ли прямая $\frac{x}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{5}$ в плоскостях Π_1: $3x+y+2z+1=0$ и Π_2: $3x+y+2z-1=0$?

Вариант 29

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости П, проходящей через точку C параллельно плоскости ADB;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины C на плоскость ABD;

г) уравнение высоты CO;

д) координату точки O, CO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;

ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

2 При каких значениях m прямая $\frac{x+7}{-3}=\frac{y+2}{m}=\frac{z-1}{9}$ параллельна плоскости

$-x+2y+z-2=0$?

Вариант 30

1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку B параллельно плоскости ADC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины B на плоскость ADC;

г) уравнение высоты BO;

д) координату точки O, BO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;

ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

2 При каких значениях C и D прямая $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{6}$ принадлежит плоскости $3x-Cy-4z-3D=0$?

Продемонстрируем решение некоторых заданий:

Задание 1

Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$ $A(1,-1,0), B(2,1,-1), C(2,0,2), D(0,1,0)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение плоскости Π, проходящей через точку B параллельно плоскости ADC;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины B на плоскость ADC;

г) уравнение высоты BO;

д) координату точки O, BO – высота тетраэдра $ABCD$;

е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;

ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

Решение.

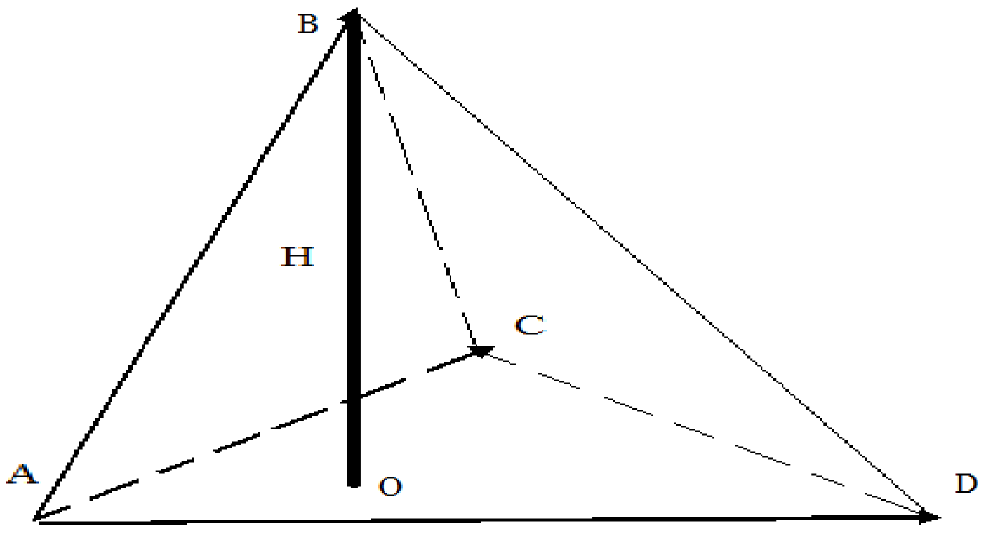

Рисунок 2

а)Уравнение плоскости ADC проходящей через 3 точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $D(x_2;\ y_2;\ z_2), C(x_3;\ y_3;\ z_3)$ находим по формуле $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

После подстановки в данную формулу координат точек $A(1,-1{,}0), C(2{,}0{,}2), D(0{,}1{,}0)$. и вычисления определителя получим его уравнение: $4x+2y-3z-2=0$;

Нормальное уравнение плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ приводится к нормальному виду $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ путем умножения на *нормирующий множитель*

$\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена D. Найдем координаты нормального вектора данного уравнения

$4x+2y-3z-2=0, \Rightarrow \overline{N}=(4;2;-3)$. $\mu=\dfrac{\pm1}{|\overline{N}|} \Rightarrow \mu=\dfrac{\pm1}{\sqrt{(4)^2+(2)^2+(-3)^2}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{29}}$. Так ка

$C=-2<0$, то $\mu=\dfrac{1}{\sqrt{29}}$. Уравнение плоскости в нормальном виде:

$$\frac{4x}{\sqrt{29}}+\frac{2y}{\sqrt{29}}-\frac{3z}{\sqrt{29}}-\frac{2}{\sqrt{29}}=0;$$

б) Так как плоскости параллельны, то их нормальные вектора коллинеарны

$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$, значит для плоскости π_1 нормальный вектор может быть вектор $\overline{N_2} = (4;2;-3)$. Воспользуемся формулой $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ с нормальным вектором $\overline{N} = (A;\, B;\, C)$. Подставив данные значения, получим $4(x-2)+2(y-1)-3(z+1)=0$, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Уравнение плоскости проходящей через точку $B(2,1,-1)$ параллельно плоскости ADC имеет вид: $4x+2y-3z-13=0$;

в) Расстояние от точки $B(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости π: $Ax+By+Cz+D=0$ находим по формуле: $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. После подстановки координат вершины точки $B(2,1,-1)$ и уравнение плоскости ADC $4x+2y-3z-2=0$ получим длину высоты тетраэдра $ABCD$, равную $\frac{11}{\sqrt{29}}$;

г) Найдем уравнение высоты BO по формуле: каноническое уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ параллельно вектору $\overline{s} = (m;n;p)$, имеют вид $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$. По условию задачи точка лежащая на прямой задана координатами $B(2,1,-1)$ и направляющий вектор имеет координаты $\overline{s} = (4;\, 2;-3)$, тогда составим уравнения прямой $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-3} \Rightarrow$

уравнение высоты BO имеет вид: $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}$;

д) Для того чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости необходимо решить систему уравнений. Сначала от канонического уравнения прямой перейдем к параметрическому уравнению

$\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4t+2 \\ y = 2t+1 \\ z = -3t-1 \end{cases}$ - параметрическое уравнение прямой. Точка лежит на прямой и на плоскости, следовательно, ее координаты удовлетворяют и уравнению прямой и уравнению плоскости. Запишем систему линейных уравнений, решим ее и найдем параметр t. $\begin{cases} x = 4t+2, \\ y = 2t+1, \\ z = -3t-1, \\ 4x+2y-3z-2=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4t+2, \\ y = 2t+1, \\ z = -3t-1, \\ 4(4t+2)+2(2t+1)-3(-3t-1)-2=0, \end{cases}$

$16t+8+4t+2+9t+3-2=0$, $t = -\frac{11}{29}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = \frac{14}{29}, \\ y = \frac{7}{29}, \\ z = \frac{4}{29}. \end{cases}$ Подставив вместо параметра значения в параметрическое уравнения мы получили координаты точки. Точка пересечения BO –высоты тетраэдра $ABCD$ и плоскости основания имеет координаты $(\frac{14}{29}, \frac{7}{29}, \frac{4}{29})$;

е) Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Две плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, где $\overline{N_1}=(A_1;\,B_1;\,C_1)$, $\overline{N_2}=(A_2;\,B_2;\,C_2)$. Плоскость ADC $4x+2y-3z-2=0$ с нормальным вектором $\overline{N_1}=(4;2;-3)$. Плоскость ADB $2x+y+4z-1=0$ с нормальным вектором $\overline{N_1}=(2;1;4)$. Наименьший, из двух смежных углов, образованных этими плоскостями, находится по формуле: $\left(\pi_1 \hat{;} \pi_2\right) = \left(\overline{N_1} \hat{;} \overline{N_2}\right) = \varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right|\cdot\left|\overline{N_2}\right|}$

$$cos\varphi = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \quad \cos\varphi = \frac{|4\cdot 2+2\cdot 1+4(-3)|}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{609}},$$

угол между двумя плоскостями ADC и ADB равен $\varphi = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{609}})$;

ж) Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. $(\pi \hat{;} L) = \alpha$. *Угол между прямой* L $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью* π: $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле: $\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ задано формулой: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Точки лежащие на прямой имеют координаты $B(2,1,-1), D(0,1,0)$, подставляя в формулу получим уравнения: $\dfrac{x-2}{0-2}=\dfrac{y-1}{1-1}=\dfrac{z+1}{0+1}$,

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{1} \quad DB:\begin{cases} x=2-2t, \\ y=1, \\ z=-4+t \end{cases} \Rightarrow \bar{s}=(-2;0;\,1).$$

Плоскость ADC $4x+2y-3z-2=0$ имеет нормальный вектор $\overline{N}=(4;2;-3)$

$\sin\alpha=\dfrac{|\;4\cdot(-2)+2\cdot 0+(-3)\cdot 1\;|}{\sqrt{4^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}}=\dfrac{11}{\sqrt{145}}$. Таким образом, угол между прямой DB и плоскостью ADC равен $\alpha=\arcsin(\frac{11}{\sqrt{145}})$.

Задание 2

При каких значениях m прямая $\frac{x-2}{m}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-3}$ параллельна плоскости $-x+2y+z-2=0$?

Решение.

Прямая L $\frac{x-2}{m}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-3}$ параллельна плоскости π $-x+2y+z-2=0$, если направляющий вектор $\bar{s}$ прямой L перпендикулярен нормальному вектору $\overline{N}$ плоскости π.

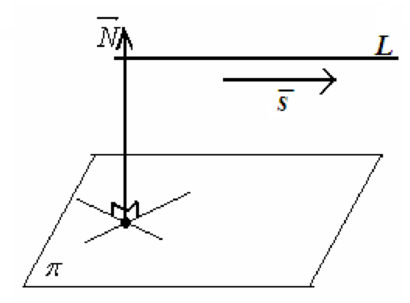

Рисунок 3

$L\,\|\,\pi \Leftrightarrow \bar{s}\perp\overline{N} \Rightarrow \bar{s}\cdot\overline{N}=0$. $\bar{s}\cdot\overline{N}=m\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot(-3)=-m+1=0 \Rightarrow$ $m=1$.

3 Тема «Кривые 2-го порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола»

Задание 1

Приведите уравнение кривой к каноническому виду. Изобразите кривую. Отметьте на рисунке фокусы и директрисы.

Вар.	Задания	Вар.	Задания	Вар.	Задания
1	$x^2+4y-8=0$	11	$y^2+25x^2=100$	21	$16y^2-x^2=64$
2	$x^2+4y^2=16$	12	$x^2+16y^2=64$	22	$y^2+4x^2=16$
3	$16y^2-4x^2=16$	13	$x^2+4y-10=0$	23	$x^2-y^2=4$
4	$9y^2-4x^2=36$	14	$x^2-y+4=0$	24	$4x^2-16y^2=64$
5	$25x^2-y^2=25$	15	$y^2-5x+15=0$	25	$4x^2-4y^2=36$
6	$25y^2-4x^2=100$	16	$y^2+3x-6=0$	26	$4x^2+25y^2=100$
7	$4x^2-16y^2=64$	17	$y^2-16x^2=16$	27	$9x^2-9y^2=36$
8	$y^2-2x+5=0$	18	$4x^2+16y^2=16$	28	$4y^2-4x^2=16$
9	$y^2+8x-4=0$	19	$9x^2+y^2=36$	29	$4y^2-9x^2=36$
10	$x^2-6y+12=0$	20	$9x^2+4y^2=36$	30	$y^2+25x^2=25$

Продемонстрируем решение некоторых заданий:

Задание 1

Дано уравнение эллипса $24x^2+49y^2=1176$.

Найти: а) длины его полуосей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет эллипса; г) уравнения директрис и расстояние между ними; д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12.

Решение.

Разделив обе части уравнения на 1176 мы получим уравнение эллипса в каноническом виде $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$.

а) длины полуосей эллипса $a^2=49$, $b^2=24$, т.е. $a=7$, $b=2\sqrt{6}$.

б) координаты фокусов. Так как $\tilde{n}^2=a^2-b^2$, то $c^2=7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2=25$, $c=5$. Следовательно, $F_1(-5;\,0)$ и $F_2(5;\,0)$.

в) эксцентриситет эллипса. Так как $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $\varepsilon=\frac{5}{7}<1$.

г) уравнения директрис имеют вид $x_1=\frac{a}{\varepsilon}$ и $x_2=-\frac{a}{\varepsilon}$. Тогда $x_{1,\,2}=\pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$, т.е.

$x_1=\frac{49}{5}$ и $x_2=-\frac{49}{5}$; расстояние между ними $d=\frac{49}{5}-\left(-\frac{49}{5}\right)=\frac{98}{5}=19{,}6$.

д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12. По формуле $r_1=a+\varepsilon x$ находим абсциссу точки, расстояние от которой до точки F_1 равно 12: $12=7+\frac{5}{7}x$, т.е. $x=7$. Подставляя значение x в уравнение эллипса, найдем ординату этой точки: $24\cdot 49+49y^2=1176$, $49y^2=0$, $y=0$. Условию задачи удовлетворяет точка $A(7;\,0)$.

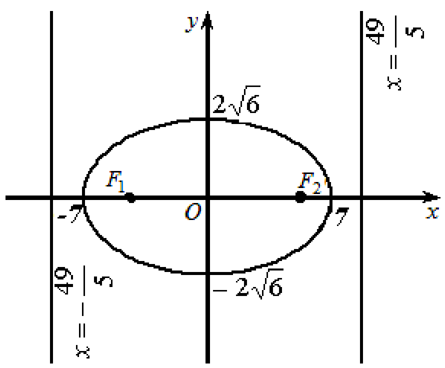

Рисунок 4

Задание 2

Приведите к каноническому виду и изобразите кривую. Уравнение кривой задано в таблице по вариантам:

Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание
1	$x^2+y^2+4x-6y+12=0$	16	$x^2-9y^2+10x+18y+7=0$
2	$x^2-y^2-8x-2y+11=0$	17	$4x^2+y^2-40x-6y+93=0$
3	$9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$	18	$9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$
4	$x^2-4y^2+2x+16y-19=0$	19	$y^2-8y-3x+22=0$
5	$4y^2-x^2+24y+2x+19=0$	20	$4x^2+y^2+16x-6y+9=0$
6	$4x^2+y^2+40x-4y+100=0$	21	$y^2-x^2-2y-4x-7=0$
7	$x^2-6x+2y+19=0$	22	$y^2+6y+3x-3=0$
8	$25x^2+4y^2+250x-24y+561=0$	23	$4x^2-36y^2+8x+144y-284=0$
9	$4y^2-x^2-16y-2x-1=0$	24	$x^2+y^2+6x-4y-3=0$
10	$y^2-4x+4y+24=0$	25	$y^2-x^2+10y+8x-16=0$
11	$x^2+10x+3y+19=0$	26	$y^2-8y+x+21=0$
12	$x^2+8x+4y^2-16y+16=0$	27	$x^2+6x-4y+17=0$
13	$4x^2-9y^2-32x-36y-8=0$	28	$x^2-4y^2-2x-8y-67=0$
14	$4y^2-25x^2+8y+50x-121=0$	29	$y^2-4x^2+6y-32x-71=0$
15	$x^2+12x+4y+24=0$	30	$16x^2-9y^2+128x+36y+364=0$

Продемонстрируем решение некоторых заданий:

Задание 1

Уравнение кривой $16x^2+9y^2-32x+36y-92=0$ привести к каноническому виду и изобразить.

Решение.

Приведем данное уравнение кривой к каноническому виду.

Сгруппируем переменные и вынесем за скобки коэффициенты при наивысших степенях. В каждой скобке выделим полный квадрат.

$$16x^2 - 32x + 9y^2 + 36y - 92 = 0$$

$$16(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) - 92 = 0$$

$$16((x-1)^2 - 1) + 9((y+2)^2 - 4) - 92 = 0$$

Раскроем скобки.

$$16(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 144 \quad /:144,$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$$

Получили уравнение центр находится в точке $(1;\ -2)$.

Из уравнения находим: $a^2 = 9$, $a = 3$ и $b^2 = 16$, $b = 4$ $(b > a)$. Поэтому

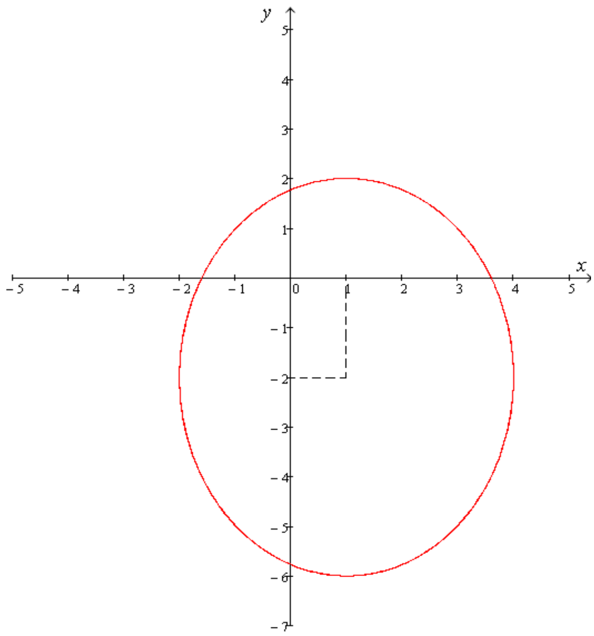

Рисунок 5

$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} < 1$.

Задание 2

Дано уравнение гиперболы $x^2 - 4y^2 = 16$. Найти:

а) длины его полуосей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет гиперболы; г) уравнения асимптот и директрис (изобразить кривую).

Решение.

Разделив обе части уравнения на 16, приведем уравнение гиперболы к каноническому виду $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: $\quad \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

а) длины его полуосей $a^2 = 16$, $b^2 = 4$, т.е. $a = 4$, $b = 2$;

б) координаты фокусов. Используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, находим $c^2 = 4 + 16$, т.е. $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Координаты фокусов: $F_1(-2\sqrt{5};\ 0)$ и $F_2(2\sqrt{5};\ 0)$;

в) эксцентриситет гиперболы. По формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ находим $\varepsilon = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$;

г) уравнения асимптот и директрис найдем по формулам $y_{1,2} = \pm \frac{b}{a} x$ и $x_{1,2} = \pm \frac{a}{\varepsilon}$: $y_{1,2} = \pm \frac{1}{2} x$ и $x_{1,2} = \pm \frac{8}{\sqrt{5}}$.

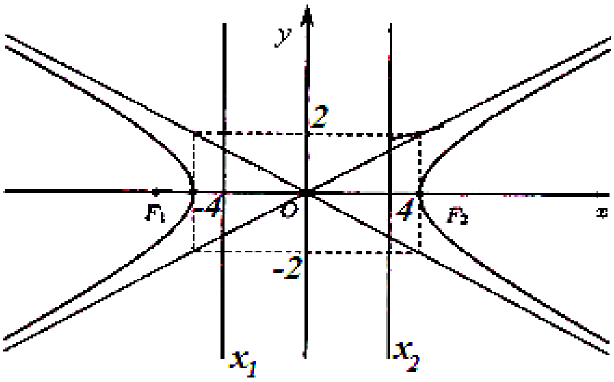

Рисунок 6

Задание 3

Приведите уравнение кривой к каноническому виду и изобразите кривую (исследовать кривую через $tg\alpha$). Уравнение кривой задано в таблице по вариантам:

Номер варианта	Задание
1	$-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$
2	$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
3	$-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$
4	$-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$
5	$3x^2 - 8xy - 3y^2 + 12x - 15 = 0$
6	$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$
7	$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$
8	$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$
9	$19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$
10	$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$
11	$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$
12	$7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$
13	$50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$
14	$41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$

15	$29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$
16	$4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$
17	$41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$
18	$16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$
19	$34x^2-12xy+18y^2+24x-72y-504=0$
20	$7x^2-48xy-7y^2+34x+62y-98=0$
21	$-4x^2+2xy-4y^2+10x-10y+1=0$
22	$9x^2+24xy+16y^2-18x+226y+209=0$
23	$6xy+8y^2-12x-26y+11=0$
24	$x^2+4xy+y^2+4x+2y-5=0$
25	$x^2-4xy+4y^2-2x-6y+2=0$
26	$9x^2+24xy+16y^2+50x-100y+25=0$
27	$2x^2+4xy+2y^2+8x+8y+1=0$
28	$4x^2+2xy+4y^2+12x+12y+1=0$
29	$4xy+3y^2+16x+12y-36=0$
30	$x^2-4xy+4y^2-2x-6y+2=0$

4 Тема «Поверхности 2-го порядка»

Задание 1

Приведите уравнение поверхности к каноническому виду. Определите вид поверхности и изобразите ее. Уравнение поверхности задано в таблице по вариантам:

Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание
1	$x^2+4y^2=4$	11	$4x^2+16y^2=32$	21	$25x^2+4y^2=100$
2	$4x^2+16z=64$	12	$4x^2+z^2=16$	22	$9x^2+4z^2=36$
3	$4z^2+25y^2=100$	13	$9y^2+4z^2=36$	23	$16y^2+4z^2=64$
4	$4x^2-16y^2=16$	14	$16y^2-4x^2=16$	24	$16x^2-4y^2=64$
5	$25y^2-4x^2=100$	15	$9x^2-4y^2=36$	25	$25y^2-4x^2=100$
6	$16x^2-64z^2=64$	16	$25x^2-4z^2=100$	26	$4x^2-z^2=16$
7	$4z^2-25x^2=100$	17	$z^2-9x^2=36$	27	$z^2-16x^2=16$
8	$9y^2-z^2=9$	18	$9y^2-36z^2=36$	28	$25y^2-4z^2=100$

9	$16z^2 - y^2 = 16$	19	$4z^2 - 16y^2 = 16$	29	$z^2 - 4y^2 = 16$
10	$y^2 = 4z$	20	$z^2 = -8y$	30	$x^2 = 2z$

Продемонстрируем решение некоторых заданий:

Задание 1

Какие поверхности определяют следующие уравнения:

1) $x^2 + z^2 = 16$; 2) $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$; 3) $x = 2z^2$; 4) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$?

Решение.

Каждое из этих уравнений содержит только две переменные x и z, определяет на плоскости xOz кривые: 1) окружность; 2) эллипс; 3) параболу;4) гиперболу. В пространстве же каждое из них определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, так как эти уравнения не содержат переменной y. Направляющими этих цилиндрических поверхностей служат указанные кривые:

1) $x^2 + z^2 = 16$ - уравнение прямого кругового цилиндра;

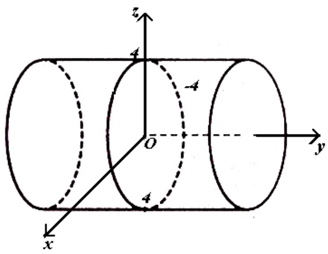

Рисунок 7

2) $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$ - уравнение эллиптического цилиндра;

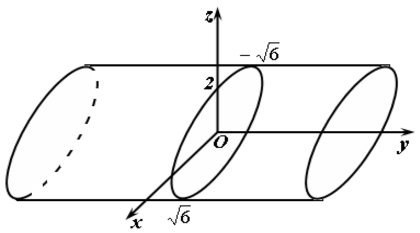

Рисунок 8

3) $x = 2z^2$ - уравнение параболического цилиндра;

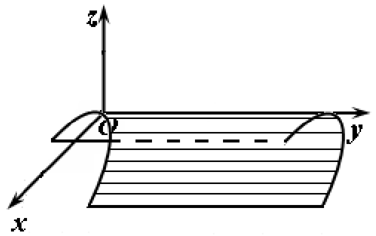

Рисунок 9

4) $\frac{z^2}{5}-\frac{x^2}{7}=1$ - уравнение гиперболического цилиндра.

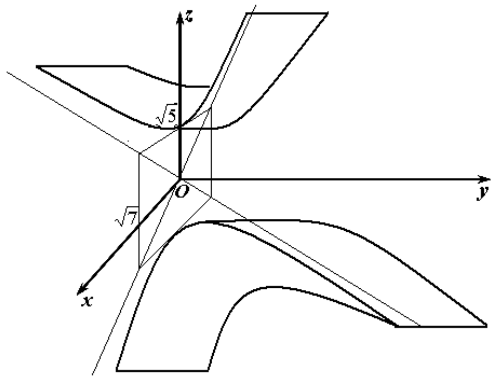

Рисунок 10

Задание 2

Приведите уравнения поверхности к каноническому виду. Определите вид поверхности и изобразите ее. Уравнение поверхности задано в таблице по вариантам:

Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание
1	$4x^2+y^2+16z^2=64$	16	$9x^2+4y^2+z^2=36$
2	$4x^2+4y^2-36z^2=36$	17	$x^2-4y^2-9z^2=36$
3	$4x^2+16z^2-4y^2=64$	18	$y^2-9z^2-x^2=36$
4	$9z^2+4y^2-x^2=36$	19	$x^2-9y^2+9z^2=81$
5	$16y^2+z^2-64x^2=-64$	20	$4x^2-25y^2+z^2=100$
6	$16x^2+4y^2+z^2=64$	21	$16x^2+16y^2+4z^2=16$
7	$4x^2-9y^2+z^2=-36$	22	$4x^2+9y^2-z^2=36$
8	$4x^2-25y^2-z^2=100$	23	$y^2+16x^2-16z^2=64$
9	$16x^2+y^2-16z^2=-64$	24	$25x^2-4y^2-z^2=-100$
10	$16z^2-4y^2+4x^2=-64$	25	$16x^2-4y^2+z^2=16$

11	$25x^2+4y^2+z^2=100$	26	$16x^2+16y^2+4z^2=64$
12	$4x^2+y^2-4z^2=64$	27	$4x^2+4z^2-y^2=-16$
13	$x^2+4y^2-16z^2=-16$	28	$16x^2+4y^2-4z^2=-64$
14	$9y^2-4x^2+z^2=36$	29	$25x^2-4x^2+4y^2=-100$
15	$z^2-4y^2+25x^2=100$	30	$x^2-y^2+4z^2=36$

Продемонстрируем решение некоторых заданий:

Задание 2

Изобразить поверхность $4x^2+y^2+16z^2=64$.

Решение.

Приведем данное уравнение $4x^2+y^2+16z^2=64$ к каноническому виду: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ т.е разделим правую и левую части исходного уравнения на 64 и получи: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$.

В точках $(4;\,0;\,0)$ и $(-4;\,0;\,0)$ эллипсоид пересекает ось Ox.

В точках $(0;\,-8;\,0)$ и $(0;\,8;\,0)$ эллипсоид пересекает ось Oy.

В точках $(0;\,0;\,-2)$ и $(0;\,0;\,2)$ эллипсоид пересекает ось Oz.

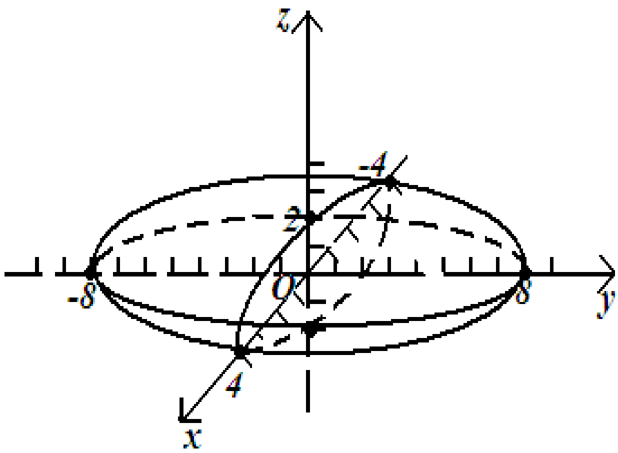

Рисунок 11

Задание 3

Приведите уравнения поверхности к каноническому виду. Определите вид поверхности и изобразите ее. Уравнение поверхности задано в таблице по вариантам:

Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание	Номер вар-та	Задание
1	$x^2+y^2=2z$	11	$x^2+z^2=-2y$	21	$z^2+x^2-4y^2=0$
2	$x^2-y^2=-z$	12	$4x^2+z^2=4y$	22	$x^2+y^2+z^2=16$
3	$y^2+z^2=x$	13	$z^2-x^2+4y^2=0$	23	$x^2+y^2+z^2=25$
4	$z^2-y^2=x$	14	$x^2-y^2=0$	24	$4x^2+y^2=4z$
5	$x^2+4y^2-z^2=0$	15	$y^2-4x^2=0$	25	$4z^2+x^2=4y$
6	$y^2+z^2=-x$	16	$z^2-x^2=0$	26	$x^2-y^2+4z^2=0$
7	$x^2-y^2+4z^2=0$	17	$x^2-4z^2=0$	27	$y^2-x^2+z^2=0$
8	$y^2+x^2=-4z$	18	$x^2-4y^2-4z^2=0$	28	$x^2-4z^2=0$
9	$x^2-4y^2=4z$	19	$y^2-z^2=0$	29	$y^2-z^2=0$
10	$z^2-2y^2=-2x$	20	$z^2-4y^2=0$	30	$x^2+y^2+z^2=0$

Продемонстрируем решение некоторых заданий:

Задача 10

Какие поверхности определяются уравнениями:

1) $x^2-y^2+z^2=0$; 2) $x=z^2+y^2$;

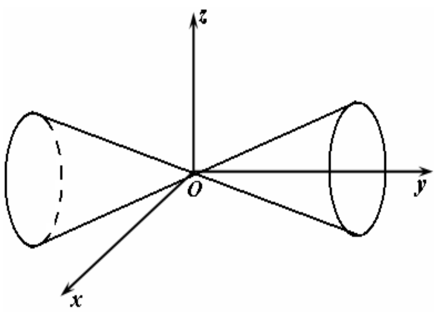

Рисунок 12

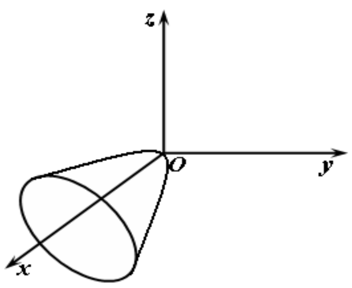

Рисунок 13

3) $y^2+z^2-\dfrac{x^2}{4}=0$; 4) $\dfrac{x^2+z^2}{6}-\dfrac{y^2}{4}=-1$;

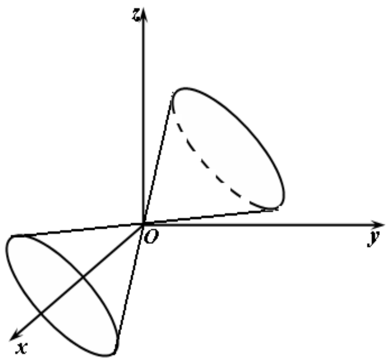

Рисунок 14

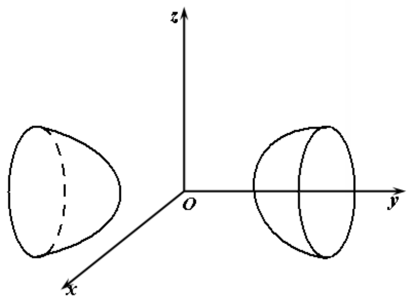

Рисунок 15

5) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{1}-1=0$;

6) $-x^2+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{7}=1$;

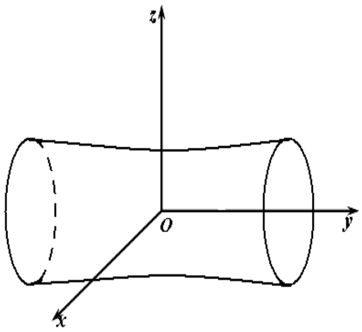

Рисунок 16

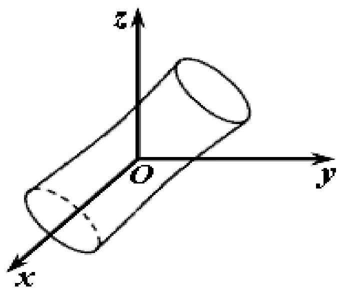

Рисунок 17

7) $z=-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}\right)$;

8) $z=x^2-y^2$.

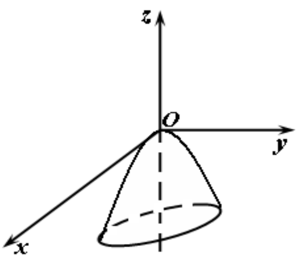

Рисунок 18

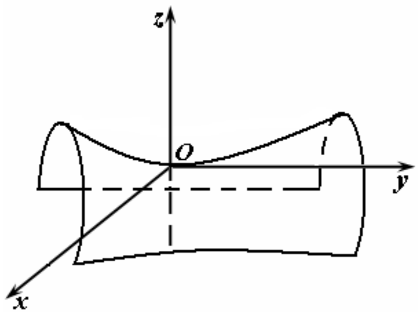

Рисунок 19

5 Тема «Линейное отображение. Линейный оператор. Квадратичная форма»

Вариант 1

1 Пусть $x=(x_1,\ \ x_2,\ \ x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$\begin{aligned}&Ax=(6x_1-5x_2-4x_3,\quad -3x_1-2x_2-x_3,\quad x_2+2x_3),\\&Bx=(6-5x_2-4x_3,\quad 3x_1-2x_2-x_3,\quad x_2+2),\\&Cx=(x_3^4,\quad 3x_1-2x_2-x_3,\quad x_2+2x_3).\end{aligned}$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \ \mathbf{e}_2',\ \ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \ \mathbf{e}_2,\ \ \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=(1/2)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{-3,\quad 2,\quad 4\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ \ e_2',\ \ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1 Пусть $x=(x_1,\ \ x_2,\ \ x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$\begin{aligned}&Ax=(5x_1-4x_2-3x_3,\quad 2x_1-x_2,\quad x_2+2),\\&Bx=(5x_1-4x_2-3x_3,\quad 0,\quad x_2^4+2x_3),\\&Cx=(5x_1-4x_2-3x_3,\quad 2x_1-x_2,\quad x_2+2x_3).\end{aligned}$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \ \mathbf{e}_2',\ \ \mathbf{e}_3')$, если он задан в

базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$: $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (2/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{2,\quad 6,\quad -3\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = \left(4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2^4 + 3x_3\right),$$
$$Bx = \left(4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3\right),$$
$$Cx = \left(4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$: $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (3/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{1,\quad -4,\quad 8\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=(3x_1+2x_2+x_3,\quad x_3,\quad 2x_1-3x_2-4x_3),$$
$$Bx=(3x_1+2x_2+x_3,\quad 1,\quad 2x_1-3x_2-4),$$
$$Cx=(3x_1+2x_2+x_3,\quad x_3,\quad 2x_1^4-3x_2-4x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$.
$$\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=(4/5)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$$
$$\mathbf{x}=\{7,\quad -5,\quad 10\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.
$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

Вариант 5

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:
$$Ax=(x_1,\quad x_1-2x_2-3,\quad 4x_1-5x_2-6),$$
$$Bx=(x_1,\quad x_1-2x_2-3x_3,\quad 4x_1^4-5x_2-6x_3),$$
$$Cx=(x_1,\quad x_1-2x_2-3x_3,\quad 4x_1-5x_2-6x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$.
$$\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-5\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=(5/6)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$$
$$\mathbf{x}=\{1,\quad -6,\quad 6\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(2x_1+x_2,\quad x_2-2x_3,\quad 3x_1-4x_2^2-5x_3\right),$$
$$Bx=\left(2x_1+x_2,\quad x_2-2x_3,\quad 3x_1-4x_2-5x_3\right),$$
$$Cx=\left(2x_1+x_2,\quad x_2-2,\quad 3x_1-4x_2-5\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(6/7)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{1,\quad 7,\quad -7\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(x_1,\quad x_1+2x_2+3x_3,\quad 4x_1+5x_2+6x_3\right),$$
$$Bx=\left(x_1,\quad x_1+2x_2+3,\quad 4x_1+5x_2+6\right),$$
$$Cx=\left(x_1,\quad x_1+2x_2+3x_3,\quad 4x_1^4+5x_2+6x_3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в

базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (7/8)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{3,\quad -8,\quad 8\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad 1,\quad x_1 + 2x_2 + 3),$$
$$Bx = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad 0,\quad x_1^3 + 2x_2 + 3x_3),$$
$$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_3,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (8/9)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -8\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{9,\quad 9,\quad 2\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = \left(6x_1 - 5x_2 - 4x_3, \quad -3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2x_3\right),$$
$$Bx = \left(6 - 5x_2 - 4x_3, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2\right),$$
$$Cx = \left(x_3^4, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2x_3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1', \ \mathbf{e}_2', \ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (1/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{-3, \quad 2, \quad 4\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1', \ e_2', \ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1, \ e_2, \ e_3)$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10

1 Пусть $x = (x_1, \quad x_2, \quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = \left(5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_2 + 2\right),$$
$$Bx = \left(5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 0, \quad x_2^4 + 2x_3\right),$$
$$Cx = \left(5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_2 + 2x_3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1', \ \mathbf{e}_2', \ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (2/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{2, \quad 6, \quad -3\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1', \ e_2', \ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1, \ e_2, \ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 11

1 Пусть $x=\left(x_1,\quad x_2,\quad x_3\right)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2^4+3x_3\right),$$
$$Bx=\left(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2+3x_3\right),$$
$$Cx=\left(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2+3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\left(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3'\right)$, если он задан в базисе $\left(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3\right)$.
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=\left(3/4\right)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \end{cases}$$
$$\mathbf{x}=\left\{1,\quad -4,\quad 8\right\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $\left(e_1',\ e_2',\ e_3'\right)$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $\left(e_1,\ e_2,\ e_3\right)$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 12

1 Пусть $x=\left(x_1,\quad x_2,\quad x_3\right)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(3x_1+2x_2+x_3,\quad x_3,\quad 2x_1-3x_2-4x_3\right),$$
$$Bx=\left(3x_1+2x_2+x_3,\quad 1,\quad 2x_1-3x_2-4\right),$$
$$Cx=\left(3x_1+2x_2+x_3,\quad x_3,\quad 2x_1^4-3x_2-4x_3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\left(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3'\right)$, если он задан в

базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (4/5)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{7,\quad -5,\quad 10\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 13

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = (x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3,\quad 4x_1 - 5x_2 - 6),$$
$$Bx = (x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3,\quad 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3),$$
$$Cx = (x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3,\quad 4x_1 - 5x_2 - 6x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (5/6)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{1,\quad -6,\quad 6\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 14

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(2x_1+x_2,\quad x_2-2x_3,\quad 3x_1-4x_2^2-5x_3\right),$$
$$Bx=\left(2x_1+x_2,\quad x_2-2x_3,\quad 3x_1-4x_2-5x_3\right),$$
$$Cx=\left(2x_1+x_2,\quad x_2-2,\quad 3x_1-4x_2-5\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\left(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3'\right)$, если он задан в базисе $\left(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\right)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-6\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=\left(6/7\right)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$

$$\mathbf{x}=\left\{1,\quad 7,\quad -7\right\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $\left(e_1',\ e_2',\ e_3'\right)$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $\left(e_1,\ e_2,\ e_3\right)$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Вариант 15

1 Пусть $x=\left(x_1,\quad x_2,\quad x_3\right)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(x_1,\quad x_1+2x_2+3x_3,\quad 4x_1+5x_2+6x_3\right),$$
$$Bx=\left(x_1,\quad x_1+2x_2+3,\quad 4x_1+5x_2+6\right),$$
$$Cx=\left(x_1,\quad x_1+2x_2+3x_3,\quad 4x_1^4+5x_2+6x_3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\left(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3'\right)$, если он задан в базисе $\left(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\right)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-7\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=\left(7/8\right)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$

$$\mathbf{x}=\left\{3,\quad -8,\quad 8\right\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $\left(e_1',\ e_2',\ e_3'\right)$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $\left(e_1,\ e_2,\ e_3\right)$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 16

1 Пусть $x=(x_1, \quad x_2, \quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=(3x_1-2x_2-x_3, \quad 1, \quad x_1+2x_2+3),$$
$$Bx=(3x_1-2x_2-x_3, \quad 0, \quad x_1^3+2x_2+3x_3),$$
$$Cx=(3x_1-2x_2-x_3, \quad x_3, \quad x_1+2x_2+3x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1', \quad \mathbf{e}_2', \quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (8/9)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -8\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{9, \quad 9, \quad 2\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1', \; e_2', \; e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1, \; e_2, \; e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 17

1 Пусть $x=(x_1, \quad x_2, \quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=(6x_1-5x_2-4x_3, \quad -3x_1-2x_2-x_3, \quad x_2+2x_3),$$
$$Bx=(6-5x_2-4x_3, \quad 3x_1-2x_2-x_3, \quad x_2+2),$$
$$Cx=(x_3^4, \quad 3x_1-2x_2-x_3, \quad x_2+2x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1', \quad \mathbf{e}_2', \quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в

базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (1/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{-3,\quad 2,\quad 4\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 18

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_2 + 2),$$
$$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 0,\quad x_2^4 + 2x_3),$$
$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_2 + 2x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (2/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{2,\quad 6,\quad -3\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 19

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2^4+3x_3\right),$$
$$Bx=\left(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2+3x_3\right),$$
$$Cx=\left(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2+3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=(3/4)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{1,\quad -4,\quad 8\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Вариант 20

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(3x_1+2x_2+x_3,\quad x_3,\quad 2x_1-3x_2-4x_3\right),$$
$$Bx=\left(3x_1+2x_2+x_3,\quad 1,\quad 2x_1-3x_2-4\right),$$
$$Cx=\left(3x_1+2x_2+x_3,\quad x_3,\quad 2x_1^4-3x_2-4x_3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=(4/5)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{7,\quad -5,\quad 10\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 21

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=(x_1,\quad x_1-2x_2-3,\quad 4x_1-5x_2-6),$$
$$Bx=(x_1,\quad x_1-2x_2-3x_3,\quad 4x_1^4-5x_2-6x_3),$$
$$Cx=(x_1,\quad x_1-2x_2-3x_3,\quad 4x_1-5x_2-6x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(5/6)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{1,\quad -6,\quad 6\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 22

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=(2x_1+x_2,\quad x_2-2x_3,\quad 3x_1-4x_2^2-5x_3),$$
$$Bx=(2x_1+x_2,\quad x_2-2x_3,\quad 3x_1-4x_2-5x_3),$$
$$Cx=(2x_1+x_2,\quad x_2-2,\quad 3x_1-4x_2-5).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в

базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (6/7)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{1,\quad 7,\quad -7\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 23

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = (x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$$
$$Bx = (x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6),$$
$$Cx = (x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (7/8)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{3,\quad -8,\quad 8\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 24

1 Пусть $x = (x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(3x_1-2x_2-x_3,\quad 1,\quad x_1+2x_2+3\right),$$
$$Bx=\left(3x_1-2x_2-x_3,\quad 0,\quad x_1^3+2x_2+3x_3\right),$$
$$Cx=\left(3x_1-2x_2-x_3,\quad x_3,\quad x_1+2x_2+3x_3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+(8/9)\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=-8\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{9,\quad 9,\quad 2\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&3&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Вариант 25

1. Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=\left(6x_1-5x_2-4x_3,\quad -3x_1-2x_2-x_3,\quad x_2+2x_3\right),$$
$$Bx=\left(6-5x_2-4x_3,\quad 3x_1-2x_2-x_3,\quad x_2+2\right),$$
$$Cx=\left(x_3^4,\quad 3x_1-2x_2-x_3,\quad x_2+2x_3\right).$$

2. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=(1/2)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{-3,\quad 2,\quad 4\}.$$

3. Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 26

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=(5x_1-4x_2-3x_3,\quad 2x_1-x_2,\quad x_2+2),$$
$$Bx=(5x_1-4x_2-3x_3,\quad 0,\quad x_2^4+2x_3),$$
$$Cx=(5x_1-4x_2-3x_3,\quad 2x_1-x_2,\quad x_2+2x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(2/3)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{2,\quad 6,\quad -3\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 27

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2^4+3x_3),$$
$$Bx=(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2+3x_3),$$
$$Cx=(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2+3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в

базисе $(\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (3/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{1, \quad -4, \quad 8\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1', \ e_2', \ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1, \ e_2, \ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 28

1 Пусть $x = (x_1, \quad x_2, \quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad x_3, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$$
$$Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad 1, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4),$$
$$Cx = \left(3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad x_3, \quad 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3\right).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1', \quad \mathbf{e}_2', \quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (4/5)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \{7, \quad -5, \quad 10\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1', \ e_2', \ e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1, \ e_2, \ e_3)$.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 29

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=(x_1,\quad x_1-2x_2-3,\quad 4x_1-5x_2-6),$$
$$Bx=(x_1,\quad x_1-2x_2-3x_3,\quad 4x_1^4-5x_2-6x_3),$$
$$Cx=(x_1,\quad x_1-2x_2-3x_3,\quad 4x_1-5x_2-6x_3).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-5\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=(5/6)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{1,\quad -6,\quad 6\}.$$

3 Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где $e_1'=e_1-e_2+e_3$, $e_2'=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Вариант 30

1 Пусть $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax=(2x_1+x_2,\quad x_2-2x_3,\quad 3x_1-4x_2^2-5x_3),$$
$$Bx=(2x_1+x_2,\quad x_2-2x_3,\quad 3x_1-4x_2-5x_3),$$
$$Cx=(2x_1+x_2,\quad x_2-2,\quad 3x_1-4x_2-5).$$

2 Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\quad \mathbf{e}_2',\quad \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-6\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2'=(6/7)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\end{cases}$

$$\mathbf{x}=\{1,\quad 7,\quad -7\}.$$

3 Найти матрицу в базисе (e_1', e_2', e_3'), где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Продемонстрируем решение некоторых заданий:

Задание 1

Является ли линейным оператор f, переводящий вектор $x(x_1; x_2; x_3)$ в вектор y, заданный координатами в том же базисе что и x? В случае линейности преобразования найти матрицу преобразования в том же базисе что и вектор x.

а) $y(2x_1 - x_2; x_3 - x_2; x_1)$; б) $y(x_1; x_2 + 2; x_3)$; в) $y(x_1^2; x_2^2; x_3^2)$.

Решение.

Оператор f называется линейным оператором, если выполняются два условия: 1) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, если x - любой вектор пространства, λ - любое число;

2) $A(x + z) = Ax + Az$, где x и z - любые два вектора пространства $Ax = y$

а) $y(2x_1 - x_2; x_3 - x_2; x_1)$. Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x) = (2\lambda x_1 - \lambda x_2; \lambda x_3 - \lambda x_2; \lambda x_1)$,

$\lambda Ax = (\lambda(2x_1 - x_2); \lambda(x_3 - x_2); \lambda x_1) = (2\lambda x_1 - \lambda x_2; \lambda x_3 - \lambda x_2; \lambda x_1) \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda Ax$,

следовательно, первое условие выполнено.

2) $A(x + z) = (2(x_1 + z_1) - (x_2 + z_2); (x_3 + z_3) - (x_2 + z_2); x_1 + z_1)$.

$Ax + Az = (2x_1 - x_2; x_3 - x_2; x_1) + (2z_1 - z_2; z_3 - z_2; z_1) =$

$= (2(x_1 + z_1) - (x_2 + z_2); (x_3 + z_3) - (x_2 + z_2); x_1 + z_1) \Rightarrow A(x + z) = Ax + Az$.

Второе условие также выполняется. Таким образом, линейный оператор f, переводящий вектор x в вектор y с координатами $y(2x_1 - x_2; x_3 - x_2; x_1)$ является линейным. Следовательно, матрица данного линейного оператора имеет вид: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б) $y(x_1;\ x_2+2;\ x_3)$

Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=(\lambda x_1;\ \lambda x_2+2\lambda;\ \lambda x_3)$, $\lambda Ax=(\lambda x_1;\ \lambda(x_2+2);\ \lambda x_3)\Rightarrow A(\lambda x)=\lambda A(x)$, следовательно, первое условие выполняется.

2) $A(x+z)=(x_1+z_1;\ (x_2+z_2)+2;\ x_3+z_3)$,

$Ax(x_1;\ x_2+2;\ x_3)$, $Az(z_1;\ z_2+2;\ z_3)$

$Ax+Az=(x_1+z_1;\ (x_2+z_2)+4;\ x_3+z_3)\Rightarrow A(x+z)\neq Ax+Az$.

Второе условие не выполняется и данный оператор f не является линейным.

в) $y(x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2)$

Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=((\lambda x_1)^2;\ (\lambda x_2)^2;\ (\lambda x_3)^2)$,

$\lambda(Ax)=(\lambda x_1^2;\ \lambda x_2^2;\ \lambda x_3^2)\Rightarrow A(\lambda x)\neq\lambda(Ax)$.

Первое условие не выполняется и оператор f не является линейным.

Задание 2

Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$. $\begin{cases} \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2'=(6/7)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3'=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x}=\{1,\quad 7,\quad -7\}$.

Решение.

Вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$ имеет координаты {1,7,-7}. Найдем координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$. Из условия задачи дана матрица перехода от базиса $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$ к базису $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{7} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$x = A \cdot x^{\iota} \Rightarrow x^{\iota} = A^{-1}x$, где x координаты вектора в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$, а x^{ι} координаты вектора в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$. Найдем обратную матрицу к матрице A и подставим в формулу $x^{\iota} = A^{-1}x$ т.е. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ 7 & 5 & 2 \\ 6 & \frac{36}{7} & \frac{13}{7} \end{pmatrix}$.

Следовательно $A^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ 7 & 5 & 2 \\ 6 & \frac{36}{7} & \frac{13}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 28 \\ 29 \end{pmatrix}$. Таким образом координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$ имеют вид {6,28,29}.

Задание 2

Приведите уравнение кривой к каноническому виду и изобразите кривую (исследовать кривую через собственные значения и собственные векторы).

Номер варианта	Задание
1	$-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$
2	$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
3	$-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$
4	$-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$
5	$3x^2 - 8xy - 3y^2 + 12x - 15 = 0$
6	$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$
7	$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$
8	$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$
9	$19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$
10	$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$
11	$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$
12	$7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$
13	$50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$

14	$41x^2+24xy+34y^2+34x-112y+129=0$
15	$29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$
16	$4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$
17	$41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$
18	$16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$
19	$34x^2-12xy+18y^2+24x-72y-504=0$
20	$7x^2-48xy-7y^2+34x+62y-98=0$
21	$-4x^2+2xy-4y^2+10x-10y+1=0$
22	$9x^2+24xy+16y^2-18x+226y+209=0$
23	$6xy+8y^2-12x-26y+11=0$
24	$x^2+4xy+y^2+4x+2y-5=0$
25	$x^2-4xy+4y^2-2x-6y+2=0$
26	$9x^2+24xy+16y^2+50x-100y+25=0$
27	$2x^2+4xy+2y^2+8x+8y+1=0$
28	$4x^2+2xy+4y^2+12x+12y+1=0$
29	$4xy+3y^2+16x+12y-36=0$
30	$x^2-4xy+4y^2-2x-6y+2=0$

Задание 3

Привести алгебраическое уравнение второй степени к каноническому виду и определить тип кривой, определяемой данным уравнением $11x_1^2-20x_1x_2-4x_2^2-20x_1-8x_2+1=0$.

Решение.

Запишем данное уравнение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -20 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+1=0.$$

Для того чтобы найти матрицу ортогонального оператора, приводящего квадратичную форму $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ к каноническому виду, сначала составим характеристическое уравнение

$$det\,(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}11-\lambda & -10\\ -10 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(11-\lambda)(-4-\lambda)-100=0.$$

Для решения этой части задачи требуется владение методами решений уравнений различных степеней вида $f(\lambda)=0$.

Решая уравнение, мы получим два действительных корня $\lambda=-9,\quad \lambda=16$.

Далее для каждого собственного значения находим собственные векторы, решая однородные системы линейных уравнений.

Для каждой системы будем находить фундаментальную систему решений.

а) $\lambda=-9$ $\begin{pmatrix}20 & -10\\ -10 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}20c_1-10c_2=0,\\ -10c_1+5c_2=0,\end{cases}\begin{cases}2c_1-c_2=0,\\ -2c_1+c_2=0,\end{cases}$

$\begin{cases}c_1\in R,\ c_1\neq 0,\\ c_2=2c_1.\end{cases}$ Первый собственный вектор имеет координаты $\begin{pmatrix}c_1\\ 2c_1\end{pmatrix}$.

При $c_1=1$ первый собственный вектор имеет вид $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. Нормируем вектор и получим первый нормированный собственный вектор $Y_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

б) $\lambda=16$ $\begin{pmatrix}-5 & -10\\ -10 & -20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-5c_1-10c_2=0,\\ -10c_1-20c_2=0,\end{cases}\begin{cases}c_1+2c_2=0,\\ c_1+2c_2=0,\end{cases}$

$\begin{cases}c_1=-2c_2,\\ c_2\in R,\ c_2\neq 0.\end{cases}$ Второй собственный вектор имеет координаты $\begin{pmatrix}-2c_2\\ c_2\end{pmatrix}$.

Аналогично, второй нормированный собственный вектор $Y_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

в) Ортогональный оператор, приводящий квадратичную форму к каноническому виду имеет вид $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$. Базисные векторы новой системы координат $\left(O_1, Y_1, Y_2\right)$. $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$; $Y_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$. Так как det S=1, то A оператор поворота двумерного линейного пространства вокруг начало координат на угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Замечание. Если бы мы получили матрицу такую, что detS=-1, то достаточно было бы поменять местами два собственных вектора.

Получим уравнение кривой в новой системе координат $\left(O_1, Y_1, Y_2\right)$, применяя формулы перехода: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2$.

$$-9y_1^2 + 16y_2^2 + \left(-20 - 8\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

$$-9y_1^2 + 16y_2^2 + \begin{pmatrix} -\frac{36}{\sqrt{5}} & \frac{32}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0, \quad \frac{\left(y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{5/9} - \frac{\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{5/16} = 1,$$

пусть $y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} = z_1$, $y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} = z_2$, тогда $\frac{z_1^2}{5/9} - \frac{z_2^2}{5/16} = 1$.

Уравнение определяет гиперболу, полученную параллельным переносом системы координат $\left(\hat{I}_1, Y_1, Y_2\right)$ в точку $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Изобразим кривую $\frac{z_1^2}{5/9} - \frac{z_2^2}{5/16} = 1$. Для начала, изобразим оси координат Ox_1 и Ox_2. Далее, собственные вектора будут являться базисными векторами новой системы координат $\left(\hat{I}_1, Y_1, Y_2\right)$: $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$; $Y_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$. В новой системе координат $\hat{I}_1 \acute{o}_1 \acute{o}_2$ изображаем центр гиперболы в точке с координатами $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.Через данную точку проведем новую систему координат $\left(\hat{I}_2, Z_1, Z_2\right)$ параллельную $\left(\hat{I}_1, Y_1, Y_2\right)$. В системе координат $\hat{I}\ _2 z_1 z_2$ по оси $O_2 z_1$ вверх и вниз отмечаем расстояние равное $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, а по оси $O_2 z_2$ - расстояние равное $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Через полученные точки проведем вспомогательный прямоугольник, в котором диагонали будут содержать асимптоты гиперболы. Ось $O_2 z_1$ является действительной осью и через нее проходит гипербола.

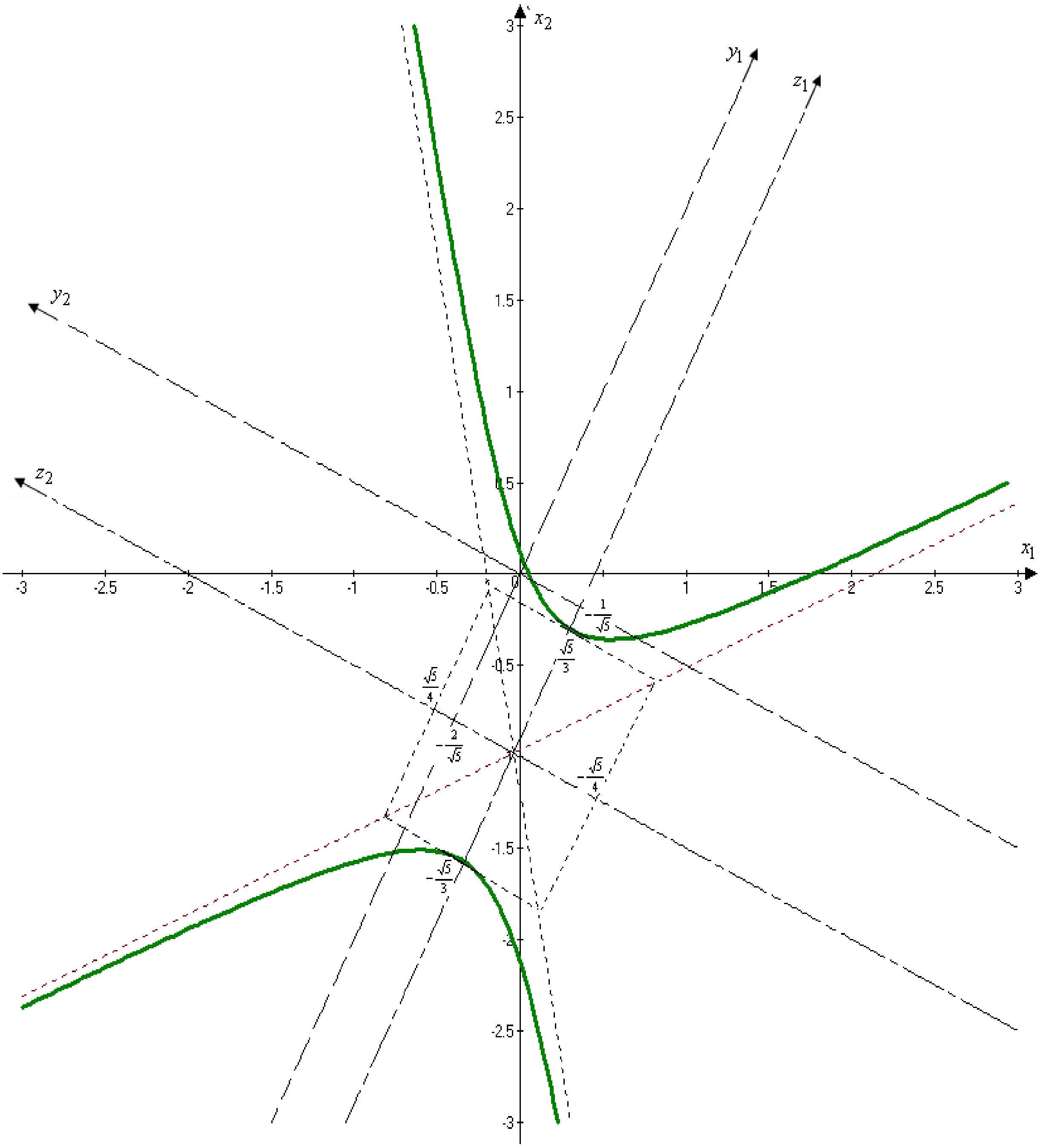

Рисунок 17

Список использованных источников

1 Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с. – ISBN 978-5-9221-0979-6.

2 Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Текст]: учеб. для вузов / А.Г. Курош. – 18-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2011. – 432 с. – ISBN 978-5-8114-0521-3.

3 Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: Физматлит, 2005. Ч. 1: / под ред. В.Д. Кулиева. – 2005. – 216 с. – ISBN 5-9221-0581-7.

4 Молчанов, В.А. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для вузов / В.А. Молчанов; Мин-во образования и науки РФ; ГОУ ОГУ. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 194 с.

5 Усова, Л.Б. Организация самостоятельной работы по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" [Электронный ресурс]: методические указания для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; "Оренбург. гос. ун-т", – Ч. 1. – Оренбург: ОГУ. – 2019. – 69 с.

6 Усова, Л.Б. Организация самостоятельной работы по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" [Электронный ресурс]: методические указания для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; "Оренбург. гос. ун-т", – Ч. 2. – Оренбург: ОГУ. – 2019. – 89 с.

7 Усова, Л.Б. Организация самостоятельной работы по дисциплине "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" [Электронный ресурс]: методические указания для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; "Оренбург. гос. ун-т", – Ч. 3. – Оренбург: ОГУ. – 2019. – 60 с.

8 Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – 13 изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 288 с. – ISBN 5-8114-0427-1.