

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра машиноведения

Ю. А. Чирков, С. Н. Горелов, В. М. Кушнарченко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКЕ ПРИ ИЗГИБЕ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 24.03.04 Авиастроение и 15.03.03 Прикладная механика

Оренбург
2015

УДК 621.83.05(075.8)
ББК 34.445.72с
Ч 65

Рецензент – доцент, кандидат технических наук В. И. Юршев

Чирков, Ю. А.

Ч 65

Определение перемещений в балке при изгибе: методические указания / Ю. А. Чирков, С. Н. Горелов, В. М. Кушнарченко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2015. – 34 с.

Методические указания содержат краткое описание основных теоретических методов определения перемещений, усилий в опорах, порядок сборки наладки для исследования деформированного состояния и опытной проверки методов определения перемещений в сечениях балки.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы по курсам: «Сопротивление материалов», «Прикладная механика» по направлениям подготовки 24.03.04 Авиастроение и 15.03.03 Прикладная механика.

Методические указания подготовлены в рамках проекта «Совершенствование подготовки кадров для приоритетных направлений развития экономики Оренбургской области на основе кластерной модели»

УДК 621.83.05 (075.8)
ББК 34.445.72с

© Чирков Ю.А.,
Горелов С.Н.,
Кушнарченко В.М., 2015
© ОГУ, 2015

Содержание

Введение.....	4
1 Правила техники безопасности	5
2 Цель работы	5
3 Внеаудиторная подготовка к выполнению работы	6
4 Общие сведения	6
4.1 Определение деформаций балки	6
4.2 Сборка наладки.....	22
5 Порядок выполнения работы	24
6 Вопросы для самопроверки и контроля.....	30
Список использованных источников	32
Приложение А Содержание отчета	33
Приложение Б Перемещения и углы поворота сечений балки	34

Введение

Методические указания предназначены в помощь для практического изучения определения усилий в опорах, порядок сборки наладки для исследования напряженно-деформированного состояния в плоской раме при выполнении лабораторной работы по курсу «Сопротивление материалов» по направлениям подготовки 24.03.04 Авиастроение и 15.03.03 Прикладная механика.

Выполнение лабораторной работы способствует закреплению теоретических знаний и позволяет изучить методику экспериментального определения перемещений и углов поворота поперечных сечений балки. Наглядно применить различные методы расчета перемещений поперечных сечений: метод начальных параметров, интегралов Мора, правило Верещагина, а полученные знания можно использовать в дальнейшем при решении статически неопределимых балок.

В методических указаниях принята единая система физических единиц (СИ) со следующими отклонениями, допущенными в международных и межгосударственных стандартах на расчеты инженерных конструкций: размеры деталей передач выражаются в миллиметрах (мм), силы в ньютонах (Н), и соответственно напряжения в ньютонах, деленных на миллиметры в квадрате (Н/мм^2), т.е. мегапаскалях (МПа), а моменты в ньютонах, умноженных на миллиметр ($\text{Н}\cdot\text{мм}$). У отдельных групп формул даны соответствующие примечания.

После выполнения лабораторной работы рекомендуется пройти тест на компьютере, вызвав необходимую программу, указав `G:\KOP\KONTROL\start.exe`. В процессе ответов на контрольные вопросы дополнительно систематизируется материал и закрепляются полученные знания.

1 Правила техники безопасности

1. Прежде чем начать какое – либо действие, убедитесь, что оно не нанесет вреда окружающим.
2. Запрещается работать неисправным инструментом.
3. Снятые детали и узлы рамы следует класть на стол и т.д. таким образом, чтобы они не могли упасть от случайного толчка.
4. Передавая деталь другому студенту, убедитесь, что он ее держит, прежде, чем отпустить деталь самому.
5. При сборке наладки не подкладываете пальцы под детали во время их установки.
6. Обратите внимание на надежность крепления опорных и индикаторных стоек.
7. Для предупреждения опрокидывания стола и травматизма обратите особое внимание на укладку в ящики и выемку из них набора функциональных элементов. Разрешается выдвигать одновременно не более одного ящика. При необходимости выемки элементов из нескольких ящиков выдвигайте их поочередно.

2 Цель работы

1. Ознакомиться с конструкцией балки.
2. Выяснить назначение всех деталей наладки.
3. Собрать наладку в рекомендуемой последовательности.
4. Выяснить способы регулировок перемещений в опоре.
5. Определить перемещения поперечных сечений балки.
6. Определить реакции опор балки.
7. Оценить деформированное состояние балки, сравнить теоретические результаты с экспериментальными данными.

Работа выполняется в течение 2-х академических часов. Для выполнения работы необходимы: ключи гаечные рожковые, собранная наладка, журнал

лабораторных работ, линейка, карандаш, микрокалькулятор, блок измерения усилий.

3 Внеаудиторная подготовка к выполнению работы

В процессе подготовки студент должен изучить разделы курса «Сопротивления материалов», касающиеся выполнения данной работы по учебникам, рекомендованным в «Списке использованных источников», а также по конспектам лекций.

Пользуясь настоящими методическими указаниями, студент должен:

- 1) уяснить цель работы, её содержание и порядок выполнения;
- 2) выписать в тетрадь расчётные формулы (смотри ниже);
- 3) подготовить бланк отчёта (по форме, представленной в приложении А),

где необходимо:

- а) указать цель работы;
 - б) начертить расчетные схемы балки, проставить основные размеры балки и прикладываемые нагрузки;
 - в) построить эпюры моментов сил для различных схем нагружения балки;
 - г) составить и заполнить таблицу Б.1 приложения Б «Перемещения и углы поворота сечений балки» в соответствии с полученными данными при выполнении работы;
- 4) подготовить ответы на вопросы, приведенные на странице 30.

4 Общие сведения

4.1 Определение деформаций балки

Деформация балки при поперечном изгибе характеризуется двумя величинами: перемещением центра тяжести сечения по направлению,

перпендикулярному оси балки, которое называется **прогибом**, и **углом поворота сечения**. Существует несколько основных способов определения перемещений поперечных сечений: метод начальных параметров, с помощью интеграла Мора, по правилу Верещагина, по формуле Симпсона и др.

Метод начальных параметров позволяет определять перемещения, не прибегая к решению сложных систем уравнений. Метод основан на применении универсального уравнения упругой линии балки.

Рассмотрим балку, находящуюся под действием внешних сил, и введем ряд понятий и обозначений в соответствии с рисунком 1.

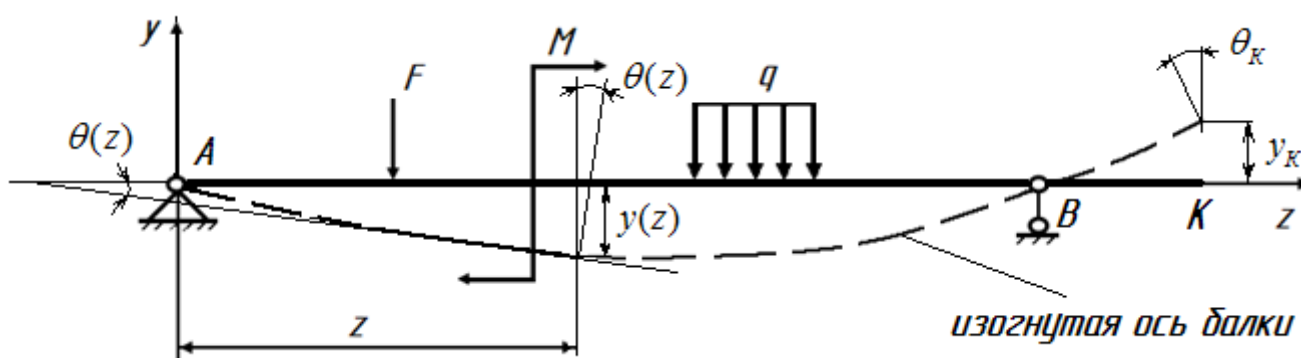


Рисунок 1 – Перемещения в балке под нагрузкой

Через $y(z)$ и y_K обозначим вертикальные перемещения соответственно произвольного сечения на расстоянии z от начала координат (опоры A) и сечения K недеформированной оси балки.

Изогнутую ось балки принято называть упругой линией, а перемещения y точек оси балки по нормали к ее недеформированной оси – прогибами балки.

При деформации балки ее поперечные сечения поворачиваются, оставаясь перпендикулярными к изогнутой оси, соответственно $\theta(z)$ и θ_K - углы поворота сечений.

Правила знаков для y и θ следующие:

1. Прогиб считается положительным, если точки ее оси перемещаются вверх.

2. Угол поворота положительный, если сечение поворачивается против хода часовой стрелки.

Следовательно, на рисунке 1 $y(z)$ и $\theta(z)$ - отрицательны, а y_K и θ_K - положительные.

Кривизна оси балки при изгибе записывается в виде:

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{M_x(z)}{E \cdot I_x}, \quad (1)$$

где $\rho(z)$ – радиус кривизны изогнутой оси балки в сечении z , м;

$M_x(z)$ – изгибающий момент в том же сечении, Н·м;

EI_x – жесткость поперечного сечения балки, МПа·м⁴.

Из высшей математики известно, что кривизна плоской кривой описывается уравнением:

$$\frac{1}{\rho(z)} = \pm \frac{\frac{d^2 y(z)}{dz^2}}{\sqrt{[1 + (\frac{dy(z)}{dz})^2]^3}}. \quad (2)$$

Знаменатель в уравнении (2) мало отличается от 1: $\frac{dy(z)}{dz} = \operatorname{tg} \theta$, при этом в самых наихудших случаях угол θ не превышает 1° , а $[\frac{dy(z)}{dz}]^2 = (\operatorname{tg} \theta)^2 \approx (0,02)^2 = 0,0004$, т. е. значительно меньше 1.

В результате, приравнявая правые части уравнений (1) и (2), с учетом вышеизложенного замечания получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в виде:

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EI_x}. \quad (3)$$

Уравнение (3) дважды проинтегрируем. После первого интегрирования получим угол поворота сечения:

$$\theta(z) = \frac{dy(z)}{dz} = \int \frac{M_x(z)}{EI_x} dz + C, \quad (4)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Интегрируя второй раз, находим прогиб:

$$y(z) = \int dz \int \frac{M_x(z)}{EI_x} dz + Cz + D, \quad (5)$$

где D – вторая произвольная постоянная интегрирования.

Постоянные интегрирования C и D находим из граничных условий, которые зависят от способов закрепления балки (отсутствие прогибов у шарнирных опор балок и углов поворота в жесткой заделке).

Метод непосредственного интегрирования для определения прогибов и углов поворотов сечений становится весьма трудоемким уже при наличии 3-х участков у балки, так как необходимо вычисление $2 \times 3 = 6$ произвольных постоянных интегрирования.

Трудоемкость решения таких задач можно существенно уменьшить, если применить специальный метод интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки – метод начальных параметров.

Если при составлении выражений для изгибающих моментов и интегрировании дифференциального уравнения изогнутой оси балки придерживаться определенных правил, то уравнение упругой линии балки будет содержать, лишь две произвольные постоянные независимо от числа участков интегрирования.

Рассмотрим консольную балку, нагруженную различными видами нагрузок: M , F и q . В рассматриваемой балке отсутствуют в начале отсчета сосредоточенные момент и сила (например, реакция опоры при ее наличии).

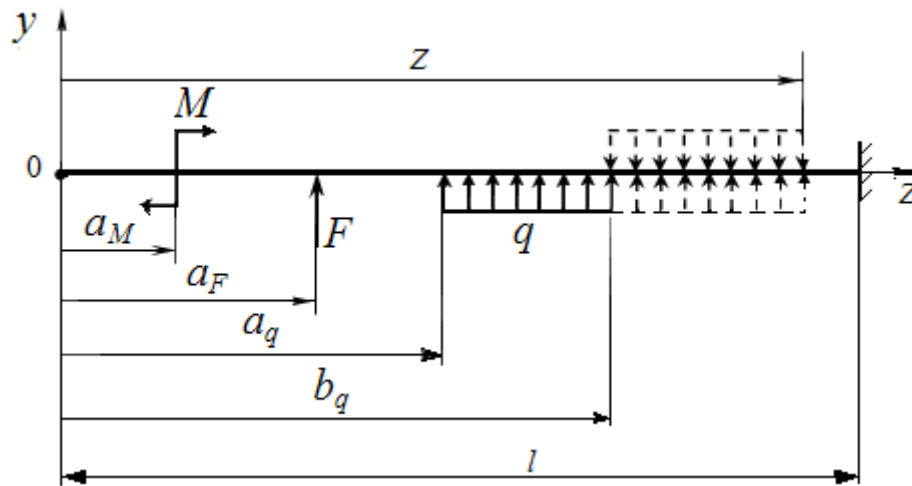


Рисунок 2 – Консольная балка с приложенными внешними нагрузками

1. Начало координат выбирают в крайней левой точке.
2. Выражение для изгибающего момента составляют для произвольного сечения последнего участка балки.
3. При включении в уравнение момента M , который приложен на расстоянии " a_M " от начала координат, его умножают на множитель $(z - a_M)^0$, который равен 1.
4. Любую распределенную нагрузку продлевают до конца балки, а для ее компенсации прикладывают нагрузку обратного направления.
5. Интегрирование полученного уравнения производят без раскрытия скобок (прием Клебша).

Для показанной на рисунке 2 балки запишем выражение для изгибающего момента в произвольном сечении z последнего участка балки:

$$M_x(z) = M \cdot (z - a_M)^0 + F \cdot (z - a_F) + \frac{q(z - a_q)^2}{2} - \frac{q(z - b_q)^2}{2}. \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение запишем в виде:

$$EI_x \frac{d^2 y(z)}{dz^2} = M_x(z). \quad (7)$$

Проинтегрируем полученное выражение дважды. В результате первого интегрирования получим выражение для углов поворотов сечений:

$$EI_x \theta(z) = EI_x \theta_0 + \frac{M \cdot (z - a_M)^1}{1} + \frac{F \cdot (z - a_F)^2}{2} + \frac{q(z - a_q)^3}{6} - \frac{q(z - b_q)^3}{6}. \quad (8)$$

Второе интегрирование дает уравнение для прогибов:

$$EI_x y(z) = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z + \frac{M \cdot (z - a_M)^2}{2} + \frac{F \cdot (z - a_F)^3}{6} + \frac{q(z - a_q)^4}{24} - \frac{q(z - b_q)^4}{24}. \quad (9)$$

Начальные параметры – это то, что мы имеем в начале координат, т.е. для указанной на рисунке 2 балки: $M_0=0$, $Q_0=0$, прогиб $y_0 \neq 0$, угол поворота $\theta_0 \neq 0$. y_0 и θ_0 находим из подстановки в уравнения (8) и (9) условия закрепления правой опоры (жесткая заделка): при $z=l$ имеем $y(z)=0$, $\theta(z)=0$.

На рисунке 3 указаны варианты закрепления балки.

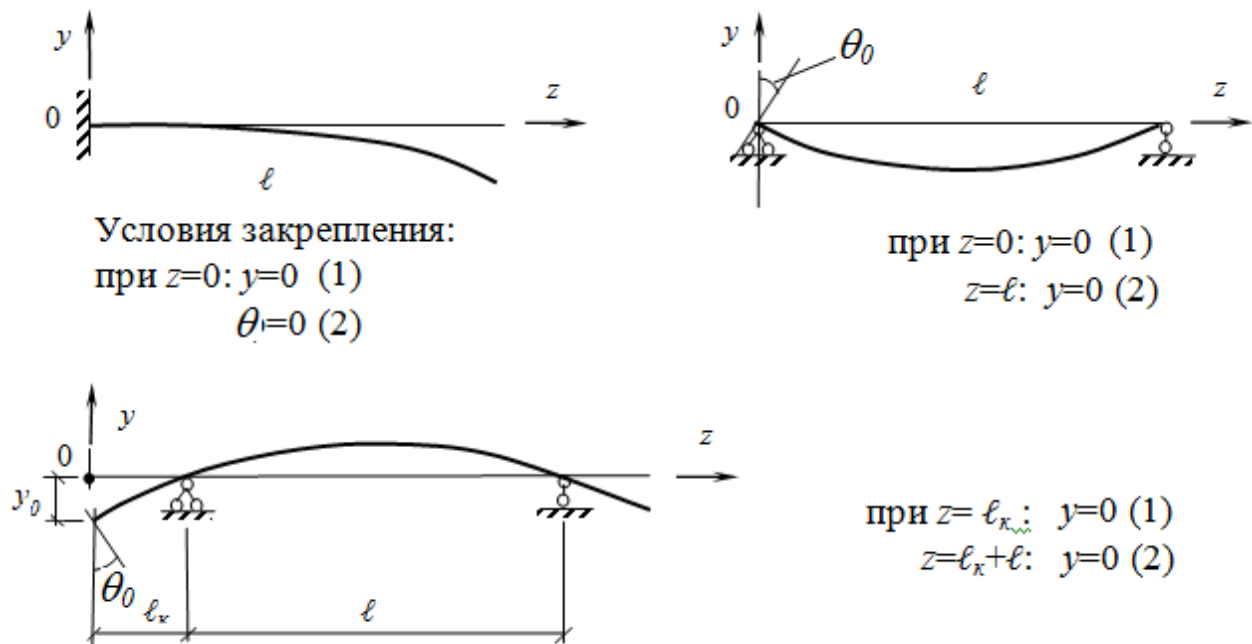


Рисунок 3 – Различные варианты закрепления балок

Порядок определения перемещений по универсальным формулам:

- 1) определить все опорные реакции;
- 2) поместить начало координат обязательно в крайнее сечение балки (левое или правое);
- 3) ось y направить вверх, ось z – вдоль балки;
- 4) найти начальные параметры из условий закрепления балки (возможные случаи показаны выше на рисунке 3);
- 5) зная начальные параметры y_0 и θ_0 , по универсальным формулам определить интересующие нас перемещения.

При использовании универсальных формул необходимо выполнять следующие требования:

- 1) в универсальные формулы включать только те внешние силы, которые действуют между началом координат (т.0) и сечением, в котором определяются перемещения. Следует помнить, что опорные реакции – тоже внешние силы;
- 2) каждая внешняя сила (M, F, q) вводится со знаком изгибающего момента, который эта сила вызывает в сечении, где определяется перемещение.

Пример 1.

Однопролетная балка находится под действием сосредоточенной силы F (рисунок 4).

Для балки записать дифференциальное уравнение упругой линии балки и найти максимальные прогибы и углы поворота методом начальных параметров.

Опорные реакции $R_b = R_d = F / 2$. Балка имеет два участка с различными выражениями для изгибающих моментов:

$$M_1 = R_b \cdot z_1 = \frac{F}{2} z_1, \quad M_2 = R_b z_2 - F \left(z_2 - \frac{l}{2} \right) = \frac{F}{2} z_2 - F \left(z_2 - \frac{l}{2} \right). \quad (10)$$

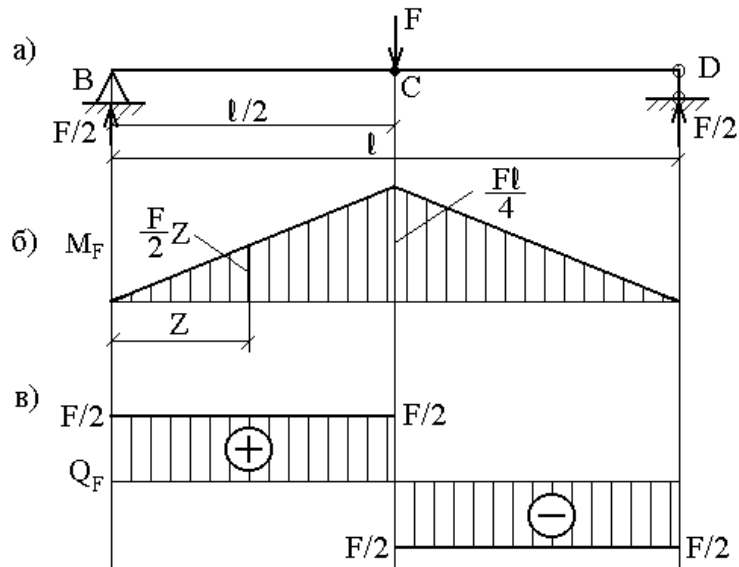


Рисунок 4 – Определение перемещений сечений балки методом начальных параметров

В этом случае дифференциальные уравнения изгиба на каждом из участков имеют различный вид:

$$EI_x \frac{d^2 y_1}{dz^2} = -\frac{F}{2} z_1, \quad EI_x \frac{d^2 y_2}{dz^2} = -\frac{F}{2} z_2 + F \left(z_2 - \frac{l}{2} \right). \quad (11)$$

Интегрирование этих уравнений приведет к выражениям для прогибов y_1 , y_2 , которые будут содержать четыре постоянные интегрирования. Для их определения нужно составить четыре граничных условия. Это вызовет определенные трудности при решении данной задачи. Метод начальных параметров существенно упрощает решение задачи по определению прогибов балки.

Составим выражения прогибов для каждого из участков, пользуясь методом начальных параметров:

$$y_1 = y_0 + \theta_0 z_1 + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{R_b z_1^3}{6} \right), \quad (12)$$

$$y_2 = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x} \left[\frac{R_b z_2^3}{6} - \frac{F z_2 - l/2}{6} \right]. \quad (13)$$

Начальные параметры определяем из граничных условий:

$$y_1 \ 0 = 0, \quad y_2 \ l = 0. \quad (14)$$

Подставляя $Z_1 = 0$ в (3) и $Z_2 = l$ в (4), согласно (5), находим:

$$y_1 = y_0 = 0, \quad y_2 = y_0 + \theta_0 l + \frac{1}{EI_x} \left[\frac{Fl^3}{12} - \frac{F l/2}{6} \right] = 0, \quad (15)$$

откуда получаем:

$$v_0 = 0, \quad \theta_0 = -\frac{Fl^2}{16EI_x}. \quad (16)$$

Подставляя значения v_0, θ_0 в (12), (13), получим выражения прогибов на каждом из двух участков. Максимальный прогиб находим из (12) либо (13) при $z_1 = z_2 = l/2$. В результате вычислений находим:

$$y_{\max} = -\frac{Fl^3}{48EI_x}. \quad (17)$$

Угол поворота на втором участке:

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{1}{EI_x} \left[\frac{R_A z_2^2}{3} - \frac{F z_2 - l/2}{3} \right]. \quad (18)$$

На правой опоре D при $z = l$ получаем:

$$\theta_B = -\frac{Fl^2}{16EI_x} + \frac{Fl^2}{8EI_x} = +\frac{Fl^2}{16EI_x}. \quad (19)$$

Определение прогиба балки в середине пролета (рисунок 5) по *формуле*

Мора:

$$\Delta_A = \int_0^l \left[\frac{N\bar{N}}{EF} + \frac{M_x\bar{M}_x}{EI_x} + \frac{M_y\bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_z\bar{M}_z}{GI_{кр}} + \eta \frac{Q_x\bar{Q}_x}{GF} + \eta \frac{Q_y\bar{Q}_y}{GF} \right] dz. \quad (20)$$

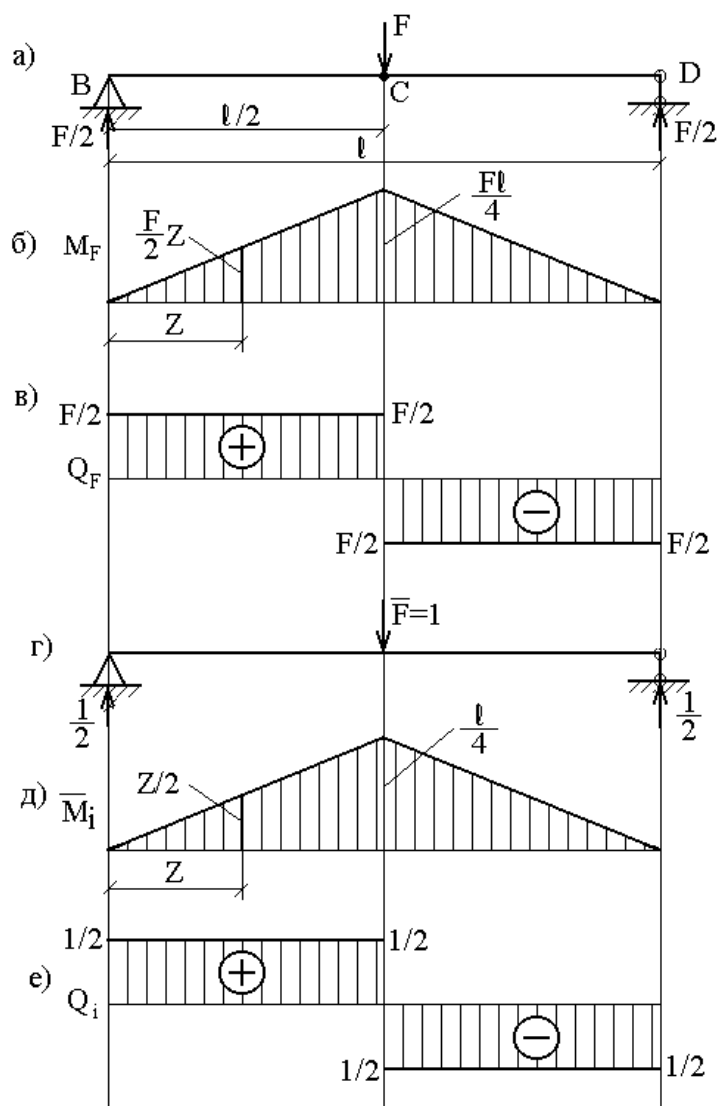


Рисунок 5 – Определение перемещений сечений балки по формуле Мора

Оценка влияния поперечной силы на общую величину прогиба.

Рассмотрим два состояния балки. Первое состояние (грузовое) – при действии силы F (рисунок 5, а); ему соответствует эпюры изгибающих моментов M_F (рисунок 5, б) и поперечных сил Q_F (рисунок 5, в).

Второе состояние (единичное) – при действии силы $\vec{F} = 1$ (рисунок 5, г); ему соответствуют эпюры изгибающих моментов \vec{M}_i (рисунок 5, д) и поперечных сил \vec{Q}_i (рисунок 5, е).

В связи с отсутствием продольных сил в поперечных сечениях балки интеграл Мора (20) принимает вид:

$$y_c = \sum \frac{1}{EI_{x_0}} \int_0^l M_F \bar{M}_i dz + \sum \frac{\eta}{GA_0} \int_0^l Q_F \bar{Q}_i dz = y_c M + y_c Q . \quad (21)$$

Подставляя значения изгибающих моментов и поперечных сил в сечении с координатой z (рисунок 5), для составляющих полного перемещения получим:

$$y_c M = \frac{2}{EI_x} \int_0^{l/2} \frac{z}{2} \cdot \frac{F}{2} z dz = \frac{Fl^3}{48EI_x},$$

$$y_c Q = \frac{2\eta}{GA} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{2} dz = \frac{Fl\eta}{4GA}. \quad (22)$$

Определим влияние поперечной силы на общую величину прогиба. Пусть рассматриваемая балка имеет прямоугольное поперечное сечение со сторонами b и h , при этом $h = 0,1l$.

Тогда площадь сечения и его осевой момент инерции равны:

$$A = bh = \frac{bl}{10}; \quad J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{bl^3}{12000}.$$

Будем считать, что $\eta = 1,2$; $G = 0,4E$, тогда:

$$\frac{y_c Q}{y_c M} = \frac{F\eta L 48 E J_x}{4 G A F L^3} = \frac{12 \eta E J_x}{G A L^2} = \frac{12 \cdot 1,2 \cdot E b L^3 \cdot 10}{12000 \cdot 0,4 E b L^3} = \frac{3}{100},$$

то есть прогиб, обусловленный деформацией сдвига, составляет 3 % от прогиба, обусловленного изгибом. Легко убедиться, что при увеличении отношения h/L влияние поперечных сил на величину прогиба становится еще менее значительным.

Недостатком метода Мора является необходимость получать значения внутренних силовых факторов, входящих в подынтегральные выражения формулы (20), в общем виде, как функций от z , что становится достаточно трудоемким уже при двух – трех участках разбиения в балках и особенно – в рамах.

Оказывается, что от этого недостатка можно уйти, если непосредственное интегрирование в формулах Мора заменить так называемым *перемножением эпюр*. Такая замена возможна в тех случаях, когда хотя бы одна из перемножаемых эпюр является прямолинейной. Этому условию соответствуют все системы, состоящие из прямолинейных стержней. Действительно, в таких системах эпюра, построенная от обобщенной единичной силы, всегда будет прямолинейной.

Способ вычисления интеграла Мора путем замены непосредственного интегрирования перемножением соответствующих эпюр называется *способом (или правилом) Верещагина*, которое заключается в следующем: чтобы перемножить две эпюры, из которых хотя бы одна является прямолинейной, нужно площадь одной эпюры (если есть криволинейная эпюра, то обязательно ее площадь) умножить на ординату другой эпюры, расположенную под центром тяжести первой.

Докажем справедливость этого правила.

Интегралы Мора с точностью до постоянного множителя представляют собой интегралы от произведения двух функций вида:

$$J = \int_0^l f(z) \bar{f}(z) dz, \quad (23)$$

где, по крайней мере, одна из функций (рисунок 6) $\bar{f}(z) = kz + b$ является линейной (k, b – постоянные величины).

Возьмём, к примеру, интеграл

$$\int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_x(z) \bar{M}_x(z) dz, \quad (24)$$

где $\bar{M}_x(z)$ – момент от единичной обобщённой силы – линейная функция, $M_x(z)$ – в общем случае – криволинейная функция.

Подставляя выражение для $\bar{f}(z)$ в выражение для J и производя почленное интегрирование, найдём:

$$J = \int_0^l f(z) (kz + b) dz = k \int_0^l z f(z) dz + b \int_0^l f(z) dz. \quad (25)$$

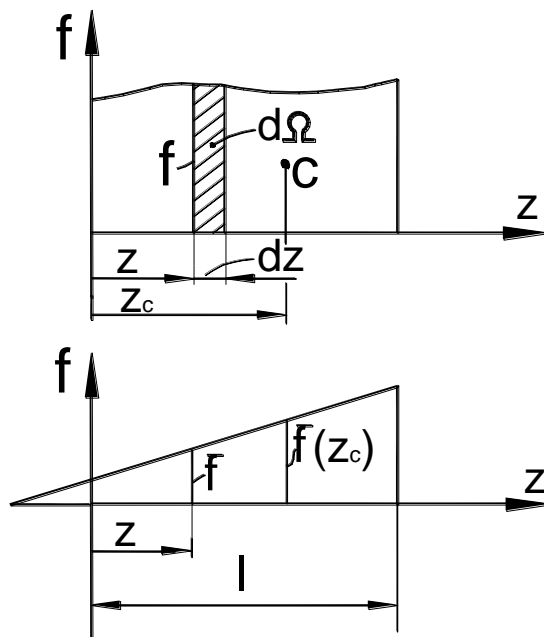


Рисунок 6 – Графическое представление вычисления интеграла Мора

Из рисунка 3 следует, что $fdz = d\Omega$ есть элементарная площадь криволинейной эпюры, $z fdz = z d\Omega$ - статический момент этой элементарной площади относительно оси f .

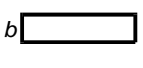

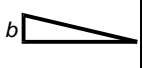
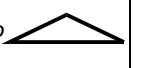



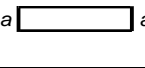
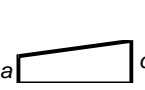
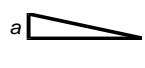
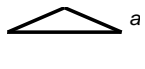


Поэтому:

$$J = k\Omega z_c + b\Omega = \Omega kz_c + b = \Omega f z_c . \quad (26)$$

Из полученной формулы (8) следует простое правило вычисления интегралов Мора: интеграл с точностью до постоянного множителя равен произведению площади Ω криволинейной эпюры f на ординату $\bar{f} z_c$, взятую из прямолинейной эпюры под центром тяжести криволинейной эпюры.

При помощи расчленения эпюр на части можно добиться того, чтобы при перемножении участвовали эпюры простой структуры, приведенные в таблице 1.

Таблица 1 – Перемножение простых эпюр

$M_2(x)$ $M_1(x)$							
	abl	$\frac{al}{2}(b+c)$	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{2}$	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{2abl}{3}$
	$\frac{bl}{2}(a+d)$	$\frac{l(ab+cd)}{6} + \frac{l(a+d)(b+c)}{6}$	$\frac{bl}{6}(2a+d)$	$\frac{bl}{4}(a+d)$	$\frac{bl}{12}(5a+3d)$	$\frac{bl}{12}(3a+d)$	$\frac{bl}{3}(a+d)$
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{bl}{6}(2b+c)$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{5abl}{12}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{abl}{3}$
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{bl}{4}(b+c)$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{17abl}{48}$	$\frac{17abl}{48}$	$\frac{5abl}{12}$
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{al}{12}(3b+5c)$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{17abl}{48}$	$\frac{11abl}{30}$	$\frac{2abl}{15}$	$\frac{7abl}{15}$
	$\frac{abl}{3}$	$\frac{al}{12}(b+3c)$	$\frac{abl}{12}$	$\frac{17abl}{48}$	$\frac{2abl}{15}$	$\frac{abl}{30}$	$\frac{abl}{5}$

При перемножении площади Ω эпюры от внешней нагрузки на ординату $\bar{M}_x z_c$ эпюры от единичной нагрузки следует руководствоваться правилом:

если эпюры лежат по одну сторону от оси балки, то они одного знака и потому дают знак плюс. В противном случае – знак минус.

Пример 2.

Балка на двух опорах нагружается консольно сосредоточенной силой F (рисунок 7). Для балки найти дифференциальное уравнение изгиба и найти максимальные прогибы и углы поворота методом начальных параметров.

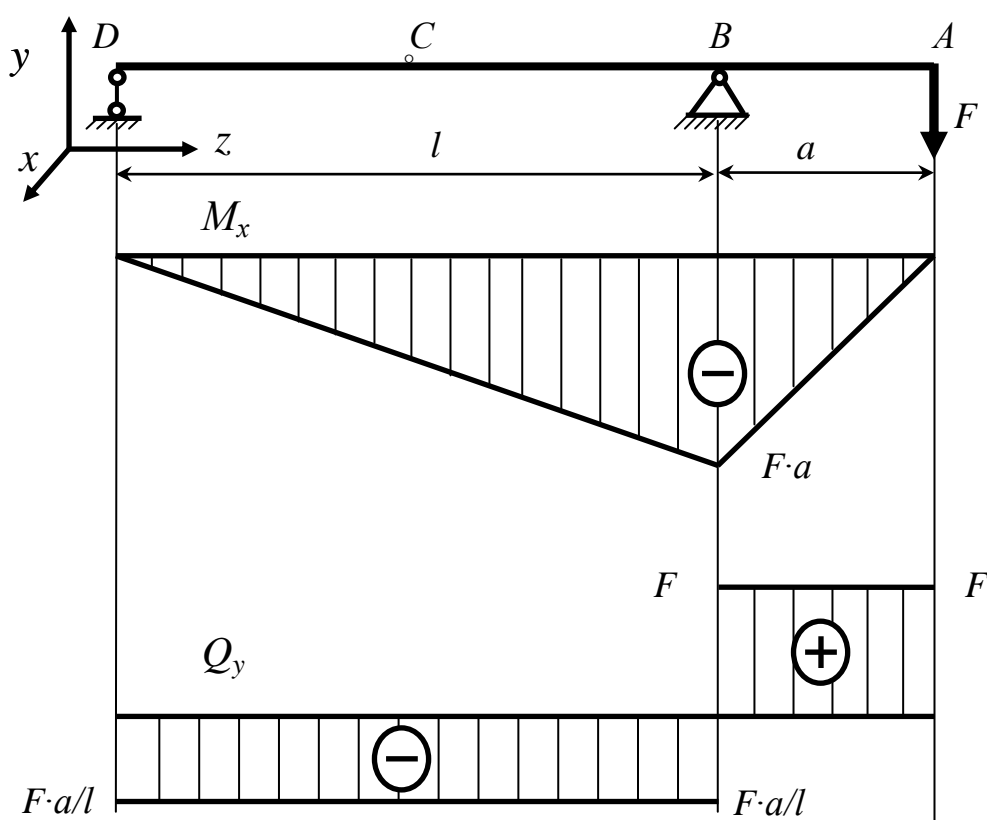


Рисунок 7 – Вычисление перемещений в консольной балке

Составим выражения прогибов для каждого из участков, пользуясь методом начальных параметров:

$$y_1 = y_0 + \theta_0 z_1 + \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{R_d z_1^3}{6} \right), \quad (27)$$

$$y_2 = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{R_d z_2^3}{6} + \frac{R_b z_2 - l^3}{6} \right],$$

$$y_2 = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{Faz_2^3}{6l} + \frac{F a + l z_2 - l^3}{6l} \right]. \quad (28)$$

Начальные параметры определяем из граничных условий:

$$y_1 \ 0 = 0, \quad y_2 \ l = 0. \quad (29)$$

Подставляя $Z_1 = 0$ в (27) и $Z_2 = (l)$ в (28), находим:

$$y_1 = y_0 = 0, \quad y_2 = y_0 + \theta_0 l + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{Fal^3}{6l} \right] = 0, \quad (30)$$

откуда получаем:

$$y_0 = 0, \quad \theta_0 = \frac{Fal}{6EI_x}. \quad (31)$$

Дифференцируя функцию перемещений, найдем функцию угла поворота сечений для каждого из участков балки:

$$\theta_1 = \frac{Fal}{6EI_x} + \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{Faz_1^2}{2l} \right), \quad \theta_2 = \frac{Fal}{6EI_x} + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{Faz_2^2}{2l} + \frac{F a + l z_2 - l^2}{2l} \right]. \quad (32)$$

В точке С при $Z_2 = l/2$ перемещение и угол поворота сечения находим:

$$y_c = \frac{Fal}{6EI_x} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{Fa(l/2)^3}{6l} \right], \quad \theta_c = \frac{Fal}{6EI_x} + \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{Fa(l/2)^2}{2l} \right),$$

$$y_c = \frac{Fal^2}{18EI_x}, \quad \theta_c = \frac{Fal}{24EI_x}. \quad (33)$$

В точке В при $Z_2 = l$ угол поворота сечения находим:

$$\theta_b = \frac{Fal}{6EI_x} + \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{Fal^2}{2l} \right), \quad \theta_b = -\frac{Fal}{3EI_x}. \quad (34)$$

В точке А при $Z_2 = (l+a)$ из перемещение и угол поворота сечения находим:

$$y_a = \frac{Fal}{6EI_x} a+l + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{Fa a+l^3}{6l} + \frac{F a+l a+l-l^3}{6l} \right] = 0,$$

$$y_a = -\frac{Fa^2}{3EI_x} a+l, \quad (35)$$

$$\theta_a = \frac{Fal}{6EI_x} + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{Fa a+l^2}{2l} + \frac{F a+l a+l-l^2}{2l} \right],$$

$$\theta_a = -\frac{Fa}{6EI_x} 3a+2l. \quad (36)$$

Максимальный прогиб:

$$\omega_{\max} = 0,0642 \frac{Pal^2}{EJ} \quad \text{при } z = 0,578l. \quad (37)$$

4.2 Сборка наладки

Установите на плиту стола 1 опорную стойку 2 и закрепите болтовыми соединениями - болт 6, гайка 7, шайба 8 (рисунок 8). Вставьте осевой конец подшипникового узла образца - балки в сборе 9 в отверстие стойки 2 и закрепите центральным болтом 11 рукоятки 10. Установите опорную стойку 3 под корпусом опоры 12 свободного конца балки 9, выверните опорный винт 13 до соприкосновения с корпусом опоры 12 и зафиксируйте контргайкой.

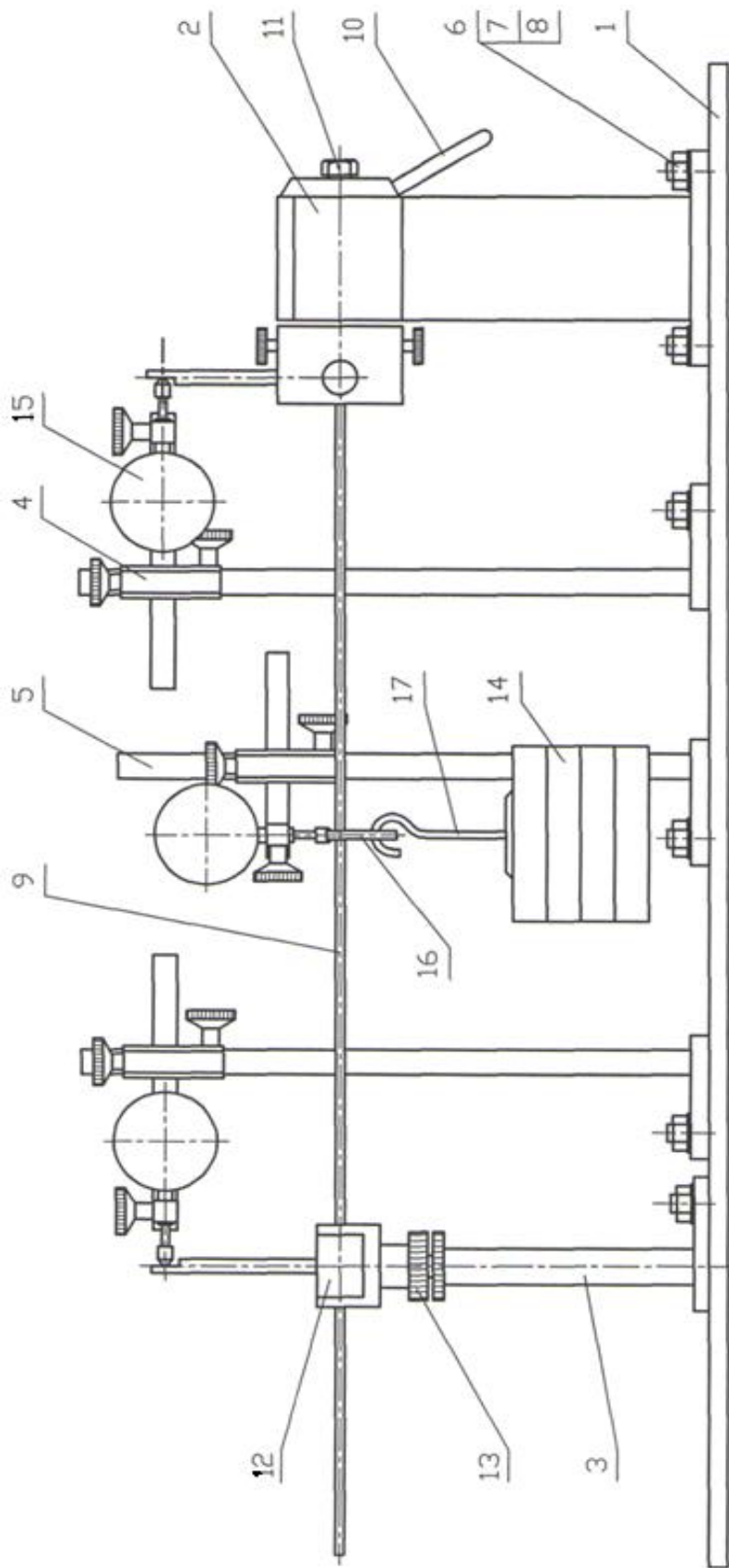


Рисунок 8 – Схема наладки

Закрепите стойку 3 к плите стола 1 болтовым соединением. Установите на плиту стола две высокие индикаторные стойки 4 и по центру пониже стойку 5 и закрепите болтовыми соединениями. Наденьте на них бобышки 14 и предварительно зафиксируйте. В отверстия бобышек 14 вставьте стержни 19, а в отверстия стержней – кронштейны 20 с закрепленными на них индикаторными головками 15. Выставьте систему так, чтобы ножки крайних индикаторов опирались на стойки корпусов балки 9, а средний - на саму балку, и закрепите. В районе ножки индикатора подвесьте груз 18, используя подвес 17 и серьгу 16. Производите разборку наладки в обратной последовательности.

Общий вид собранной наладки приведен на рисунке 9.

5 Порядок выполнения работы

Определение перемещений в балке при изгибе: экспериментальное определение значений прогибов и углов поворота сечений балки и их сравнение с теоретическими значениями.

Теория расчета стержней (балок), работающих на изгиб, основывается на ряде допущений. Линейные перемещения (прогибы) малы по сравнению с пролетом балки, а линейные перемещения вдоль продольной оси пренебрежимо малы. Поперечные сечения считаются нормальными к оси балки и после изгиба, при этом угол наклона касательной к оси изогнутой балки равняется углу поворота сечения, что соответствует пренебрежению деформации сдвига. Таким образом, положение каждого поперечного сечения балки, работающей на изгиб, характеризуется двумя перемещениями: прогибом (перемещением в направлении, перпендикулярном к оси балки) и углом поворота.

Сравниваются результаты, полученные теоретически и экспериментально для балки, нагружаемой между опорами и консольно.



а)



б)

Рисунок 9 – Общий вид собранной наладки: а) нагружение балки между опорами; б) консольное нагружение балки

Прогибы y балки в соответствии с изложенными допущениями определяются из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \quad (38)$$

а углы поворота φ сечений - из выражения:

$$\varphi = \frac{dy}{dz}. \quad (39)$$

Прогиб балки в данной точке практически равен разнице показаний индикатора прогибомера до и после нагружения.

Углы поворота опорных сечений определяются из соотношений:

$$\theta_b \approx \operatorname{tg} \theta_b = \frac{\delta_b}{H_b}, \quad \theta_d \approx \operatorname{tg} \theta_d = \frac{\delta_d}{H_d} \quad (40)$$

где δ_b , δ_d – разности отсчетов индикаторов соответственно на опоре В и D;

H – расстояние от оси балки до ножки индикатора, 100 мм.

Порядок выполнения работы.

- 1) соберите наладку согласно рисунку 8;
- 2) снимите показания индикаторов 15, закрепленных в сечениях В – δ_b^0 , С – δ_c^0 и D – δ_d^0 ;
- 3) нагрузите балку между опорами силой 40 Н и снимите показания указанных в пункте (2) индикаторов 15 – δ_b^F , δ_c^F и δ_d^F ;
- 4) вычислите перемещения по показаниям индикаторов в сечениях В – $\delta_b = \delta_b^F - \delta_b^0$; С – $\delta_c = \delta_c^F - \delta_c^0$; D – $\delta_d = \delta_d^F - \delta_d^0$ (принимать значения δ_b – отрицательное, δ_c – отрицательное, δ_d – положительное);

- 5) определите углы поворота опорных сечений В и D по формуле (40);
- 6) разгрузите балку и измените наладку согласно рисунку 10,б;
- 7) снимите показания индикаторов 15, закрепленных в сечениях А – δ_a^0 , В – δ_b^0 , С – δ_c^0 и D – δ_d^0 ;
- 8) нагрузите балку консольно силой 20 Н и снимите показания указанных в пункте (7) индикаторов 15 - δ_a^F , δ_b^F , δ_c^F и δ_d^F ;

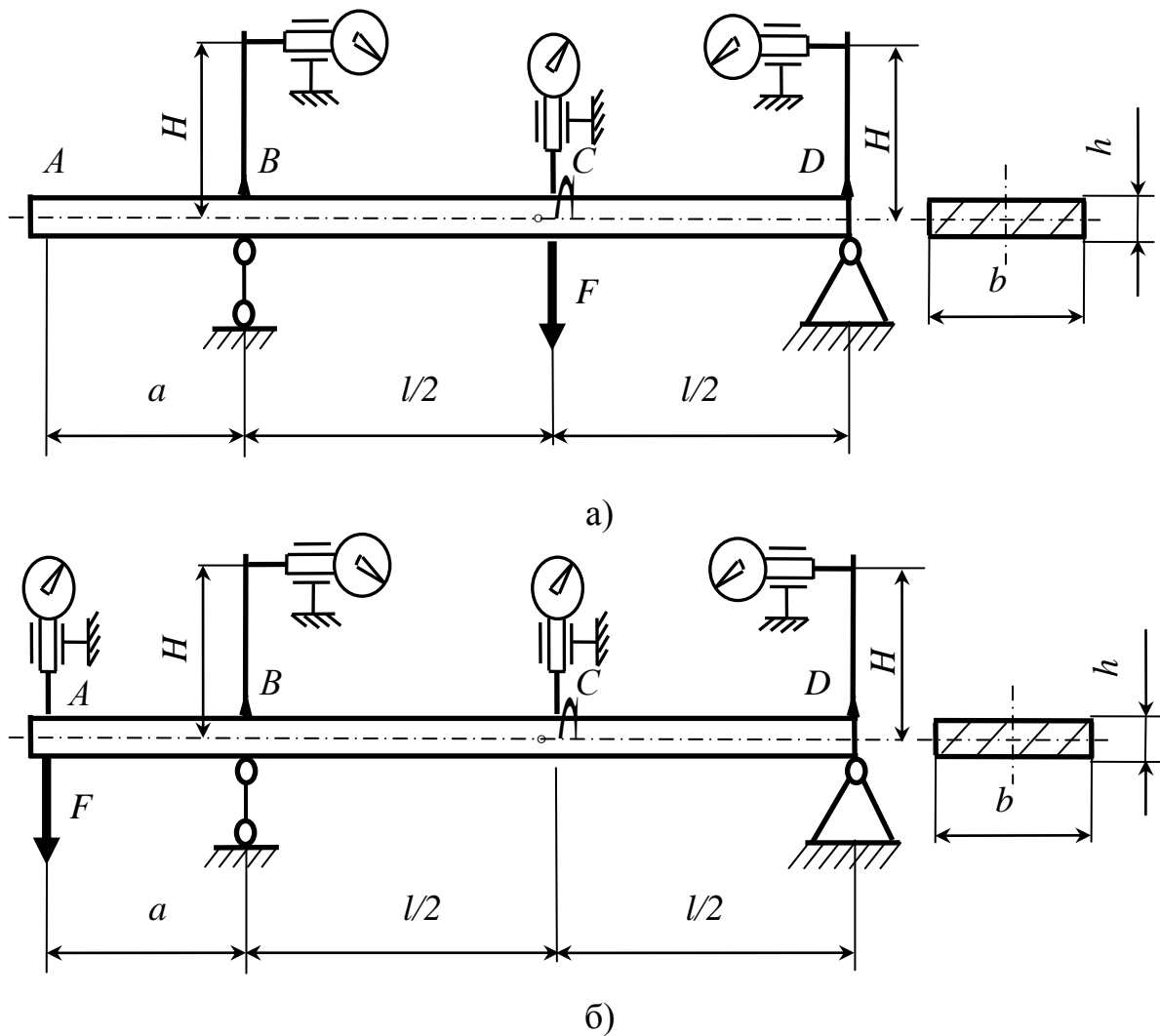


Рисунок 10 – Нагружение балки: а) нагружение балки между опорами;
 б) консольное нагружение балки

- 9) вычислите перемещения по показаниям индикаторов в сечениях

А – $\delta_a = \delta_a^F - \delta_a^0$; В – $\delta_b = \delta_b^F - \delta_b^0$; С – $\delta_c = \delta_c^F - \delta_c^0$; D – $\delta_d = \delta_d^F - \delta_d^0$
 (принимать значения δ_a – положительное, δ_b – положительное, δ_c –
 положительное, δ_d – отрицательное);

10) результаты измерений занесите в таблицу Б.1, приложение Б.

Вычислите при нагрузке $F=40\text{Н}$, приложенной посередине между опорами, (рисунок 10, а) теоретические значения прогиба y_c^T , сечения С балки и угла поворота θ_b^T опорного сечения В по формулам:

$$y_c^T = -\frac{F \cdot l^3}{48E \cdot I_x}, \quad \theta_b^T = -\frac{F \cdot l^2}{16E \cdot I_x}, \quad \theta_d^T = -\theta_b^T, \quad (41)$$

где l – длина балки между опорами, $l = 600\text{мм}$;

I_x – момент инерции сечения балки, $I_x = b \cdot h^3 / 12$, мм^4 ;

E – модуль упругости материала балки, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{МПа}$.

Таким образом, смещению δ_c соответствует значение y_c^T , углу поворота сечения θ_b соответствует θ_b^T и θ_d соответствует θ_b^T .

Сопоставьте опытные данные δ_c , θ_b , θ_d с результатами теоретического расчета y_c^T , θ_b^T , θ_d^T и вычислите погрешность эксперимента.

Результаты занесите в таблицу Б.1, приложение Б.

Вычислите при нагрузке $F=20\text{Н}$, приложенной консольно, (рисунок 10, а) теоретические значения прогиба балки y_a^T сечения А по формуле (35) и y_c^T , сечения С по формуле (33), углы поворота θ_b^T опорного сечения В по формуле (34) и θ_d^T опорного сечения D по формуле (31).

Таким образом, смещению δ_a соответствует значение y_a^T , δ_c соответствует значение y_c^T , углу поворота сечения θ_b соответствует θ_b^T и θ_d соответствует θ_d^T .

Сопоставьте опытные данные δ_a , δ_c , θ_b , θ_d с результатами теоретического расчета y_a^T , y_c^T , θ_b^T , θ_d^T и вычислите погрешность эксперимента.

Результаты занесите в таблицу Б.1, приложение Б.

Сделайте выводы.

6 Вопросы для самопроверки и контроля

1. Что такое чистый изгиб балки ?
2. Что такое поперечный изгиб балки ?
3. Какие типы опор применяются для закрепления балок к основанию?
4. Какие эпюры строят при поперечном изгибе ?
5. Что такое нейтральный слой и нейтральная линия, и как они расположены при изгибе ?
6. По какой формуле определяются нормальные напряжения в поперечном сечении балки при чистом изгибе и поперечном изгибе, и как они меняются по высоте балки ?
7. Запишите формулу Журавского Д.И. для вычисления касательных напряжений при изгибе. Как меняются касательные напряжения по высоте балки ?
8. Что называется осевым моментом сопротивления и осевым моментом инерции при изгибе, и какова их размерность ?
9. Что такое жесткость сечения при изгибе? От чего она зависит ?
10. При каком условии балка с поперечным сечением, не имеющим ни одной оси симметрии, будет находиться в условиях чистого прямого изгиба ?
11. От каких параметров зависит величина прогиба балки ?
12. От каких параметров зависит величина угла поворота балки ?
13. Как можно уменьшить прогиб балки при постоянной величине силы ?
14. Как можно уменьшить угол поворота сечений балки при постоянной величине силы ?
15. При увеличении прогиба балки увеличивается или уменьшается угол поворота сечения балки ?
16. Какие перемещения получают поперечные сечения балок при прямом изгибе ? Как эти перемещения определяются ?

17. Как определяются опытные значения прогибов балки в данной работе?

18. Как определяются опытные значения углов поворота сечений балки в данной работе ?

19. Почему имеет место расхождение между опытными и расчетными значениями напряжений и перемещений в данной работе ?

20. Изложите порядок определения лишней неизвестной опытным путем в выполняемой лабораторной работе.

21. Какие параметры отличают статически неопределимую систему от статически определимой системы ?

22. Какие приемы используют для решения статически неопределимой системы ?

23. Какова разница в моментах инерции поперечного сечения одного и того же элемента статически определимой и статически неопределимой системы ?

24. Как рассчитывают изгибающий момент в статически определимой и статически неопределимой раме ?

25. В каких случаях статически неопределимые системы могут быть эффективными ?

Список использованных источников

1. Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений / под ред. В. К. Качурина. – 2-е изд., испр., стер. – Москва: Альянс, 2014. – 432 с.: ил. – ISBN 978-5-903034-39-1.
2. Степин, П. А. Сопротивление материалов / П. А. Степин. – С-Пб.: Лань, 2010. – 304 с.
3. Ромашов, Р. В. Сопротивление материалов: учеб. пособие для вузов / Р. В. Ромашов; М-во образования Рос. Федерации, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования «Оренбург. гос. ун-т». – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 286 с. – ISBN 978-5-7410-0948-2.
4. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов / Р. В. Ромашов и [др.]. – Оренбург: Изд-во ИПК ГОУ ОГУ, 2009. – 122 с. – ISBN 978-5-7410-0949-9.
5. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов: учебник / В. И. Феодосьев. - 14-е изд., испр. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 592 с. – (Механика в техническом университете; т. 2). – ISBN 978-5-7038-3024-6.
6. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с. : ил – ISBN 5-06-003732-0.

Приложение А

(рекомендуемое)

Содержание отчёта

Лабораторная работа

Определение перемещений в балке при изгибе

студент

группа

дата выполнения

проверил

1. Цель работы.
2. Схема и основные размеры балки, прикладываемые нагрузки.
3. Эпюры моментов сил при различных нагружениях балки.
4. Расчетные формулы.
5. Результаты эксперимента и теоретических расчетов.
6. Нагрузки, перемещения и напряжения в балке (таблица Б.1, приложение Б) (1 лист).
7. Выводы

Приложение Б

(рекомендуемое)

Перемещения и углы поворота сечений балки

Таблица Б.1

Нагружение балки между опорами силой $F=40$ Н							Погрешность	
Экспериментальные значения					Расчетные значения		Абсолютная	%
Без нагрузки		С нагрузкой		Результат				
δ_b^0		δ_b^F		θ_b		θ_b^T		
δ_d^0		δ_d^F		θ_d		θ_d^T		
δ_c^0		δ_c^F		δ_c		y_c^T ,		
Консольное нагружение балки силой $F=20$ Н							Погрешность	
Экспериментальные значения					Расчетные значения		Абсолютная	%
Без нагрузки		С нагрузкой		Результат				
δ_b^0		δ_b^F		θ_b		θ_b^T		
δ_d^0		δ_d^F		θ_d		θ_d^T		
δ_c^0		δ_c^F		δ_c		y_c^T ,		
δ_a^0		δ_a^F		δ_a		y_a^T ,		