Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра общей физики

Е.В. Цветкова, Е.В. Волков, Г.С. Якупов

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ МЕХАНИКИ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, профили: «Автомобили и автомобильное хозяйство», «Сервис транспортных и технологических машин и оборудования»

Оренбург
2015

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73
Ц 27

Рецензент – доцент, кандидат педагогических наук А.В. Дудко

Цветкова, Е.В.

Ц 27 Изучение законов механики: методические указания / Е.В. Цветкова, Е.В. Волков, Г.С. Якупов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2015. – 48 с.

Методические указания содержат методику выполнения трех лабораторных работ по механике.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Физика» для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, профили: «Автомобили и автомобильное хозяйство», «Сервис транспортных и технологических машин и оборудования».

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73

Содержание

1 Лабораторная работа № 104. Изучение движения твердого тела

1.1 Цель работы

1 Изучить основные понятия раздела кинематики.

2 Познакомиться с методами определения скорости скатывающихся тел в момент отрыва от наклонной плоскости.

3 Измерить скорости различных тел из законов кинематики и динамики.

1.2 Введение

Твердое тело может двигаться поступательно или вращательно, а может совершать и поступательно-вращательное движение. С некоторыми аспектами анализа движения твердого тела познакомимся на примере предлагаемой работы.

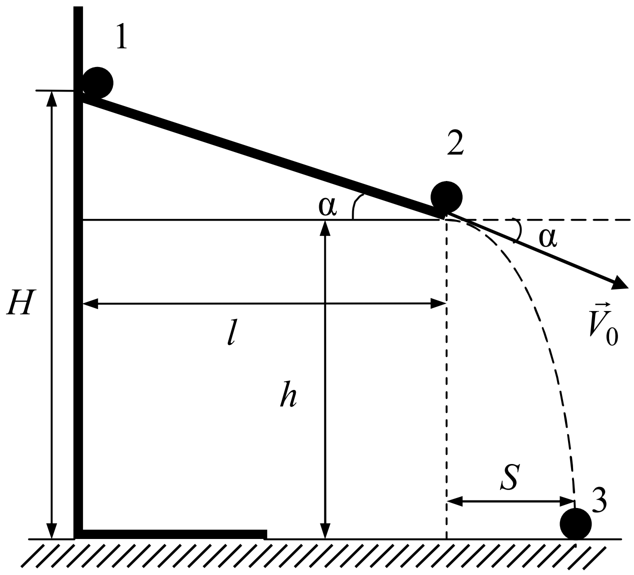

Рисунок 1.1

На рисунке 1.1 схематически изображена лабораторная установка. Твердое тело (цилиндр) скатывается по наклонной плоскости и в точке 2 имеет скорость $\vec{V}_0$, направленную под углом к горизонту. Далее свободно падает в поле тяготения Земли по параболической траектории, продолжая вращаться вокруг собственной оси симметрии.

В работе предлагается определить скорость $\vec{V}_0$ тела двумя способами:

1. Из законов кинематики, определяя в эксперименте значения дальности полета (S), высоты, с которой падает тело (h) и угла наклонной плоскости (α).

2. Из законов динамики, измерив высоту (h) и длину наклонной плоскости (l).

Оценив ошибки эксперимента, сравнить полученные значения скорости и сделать выводы по полученным результатам.

1.3 Определение скорости тела в момент отрыва от наклонной плоскости из законов кинематики

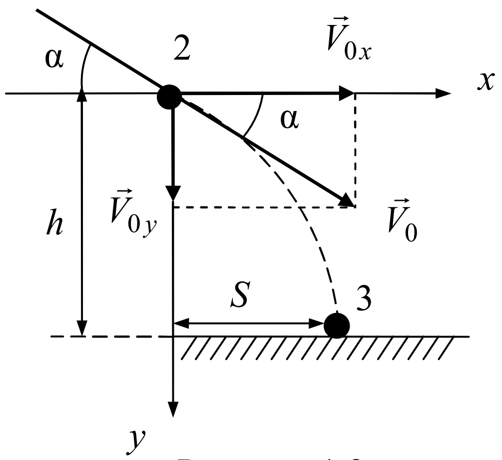

Рисунок 1.2

Будем считать, что после отрыва от наклонной плоскости движение тела является свободным падением, т.к. происходит только под действием силы тяжести (при этом мы не учитываем сопротивление воздуха и вращение тела). Скорость в момент отрыва будет начальной скоростью тела $\vec{V}_0$. Свяжем с точкой 2 на рисунке 1.2 систему координат (см. Приложение А). Движение тела происходит с постоянным ускорением свободного падения $\vec{g}$, направленным параллельно оси y. Поэтому вдоль оси y движение будет равноускоренным, а вдоль оси x – равномерным. Разложим начальную скорость на две составляющие:

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha \quad \text{и} \quad V_{0y} = V_0 \sin\alpha .$$

Время падения t, высота h, связаны соотношением:

$$h = V_{0y}t + \frac{gt^2}{2} = \left(V_0 \sin\alpha\right)t + \frac{gt^2}{2}, \tag{1.1}$$

а дальность полета по горизонтали (вдоль оси x) S:

$$S = V_{0x}t = \left(V_0 \cos\alpha\right)t . \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) составляют систему с общей переменной t.

Выражая из уравнения (1.2) время t и подставляя его в уравнение (1.1), получим формулу для вычисления начальной скорости тела:

$$V_0 = \frac{S}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\left(h - S\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)}}. \tag{1.3}$$

Таким образом, зная угол наклона плоскости α, высоту падения h и дальность полета S, можно найти скорость тела в момент отрыва от наклонной плоскости.

1.4 Определение скорости тела в момент отрыва от наклонной плоскости из законов динамики

Скорость в момент отрыва также можно определить, используя закон сохранения механической энергии. Здесь тоже сделали допущение, позволяющее упростить решение задачи. Закон сохранения механической энергии выполняется для консервативных систем (где нет сил трения). Но в отсутствии трения цилиндр должен соскальзывать (не вращаясь) с наклонной плоскости. Мы предположили, что потери механической энергии на работу по преодолению сил трения и сопротивление воздуха пренебрежимо малы.

Механическая энергия (E) есть сумма потенциальной ($E_{\text{пот.}}$) и кинетической энергий ($E_{\text{кин}}$): $E = (E_{\text{пот.}}) + (E_{\text{кин}})$. Потенциальную энергию определим из формулы $E_{\text{пот}} = mgh$. Обратите внимание: h – высота, на которую подняли тело, измеряется от некоторого, произвольно выбранного уровня. Следовательно, потенциальная энергия – величина относительная. Абсолютной является изменение энергии.

Так как цилиндр скатывается по наклонной плоскости, то надо учитывать кинетическую энергию поступательного движения $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ и кинетическую энергию вращательного движения $\left(\frac{J\omega^2}{2}\right)$, где J – момент инерции тела, ω – угловая скорость. Таким образом, формула для кинетической энергии имеет вид: $E_{\text{кин}} = \left(\frac{mv^2}{2}\right) + \left(\frac{J\omega^2}{2}\right)$.

В верхней точке наклонной плоскости (в точке 1 на рисунке 1.3) тело обладает запасом потенциальной энергии:

$$E_{\text{пот}} = mg\left(H - h\right) = E_1 \tag{1.4}$$

где m – масса тела, кг;

$\left(H - h\right)$ – высота в верхней точке наклонной плоскости, м;

g – ускорение свободного падения, м/с^2.

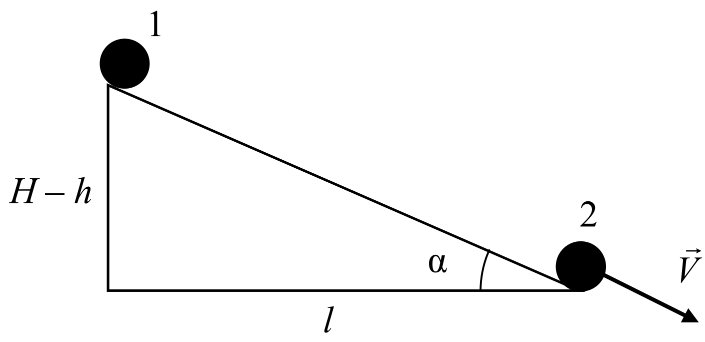

Рисунок 1.3

Кинетическая энергия равна нулю, т.к. тело покоится.

В точке 2 скатывающееся тело обладает кинетической энергией поступательного и вращательного движений, а потенциальная энергия равна нулю:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = E_2\,. \tag{1.5}$$

Если движение происходит без проскальзывания, то:

$$V = \omega R \tag{1.6}$$

где R – радиус тела, м.

Моменты инерции сплошного цилиндра (диска) и полого цилиндра можно вычислить по следующим формулам:

$$J_{\text{спл.цил.}} = \frac{1}{2} mR^2, \tag{1.7}$$

$$J_{\text{пол.цил.}} = \frac{1}{2} m\left(R_0^2 + R^2\right), \tag{1.8}$$

где R_0 – внешний радиус полого цилиндра, R – внутренний радиус, м.

Упростим выражение (1.8), учитывая, что $R = CR_0$.

Тогда получим следующее выражение для полого цилиндра:

$$J = \frac{1}{2} m\left(R_0^2 + C^2 R_0^2\right) = \frac{1}{2} mR_0^2\left(1 + C^2\right). \tag{1.9}$$

По закону сохранения механической энергии в замкнутой консервативной системе полная механическая энергия остается постоянной (без учета потерь на трение и сопротивление воздуха). Следовательно $E_1 = E_2$, или:

$$mg\left(H - h\right) = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \tag{1.10}$$

Отсюда, используя формулу (1.6), можно найти скорость V в момент отрыва от наклонной плоскости:

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(H - h\right)}{1 + \dfrac{J}{mR^2}}}. \tag{1.11}$$

Подставляя в формулу (1.11) выражения для момента инерции различных тел, можно определить их скорость.

1.5 Экспериментальная часть

1 Измерить высоту наклонной плоскости ($H - h$) до верхней точки и высоту h до точки отрыва от плоскости.

2 Измерить длину основания наклонной плоскости l.

3 Вычислить угол наклона α по формуле $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{H-h}{l}$.

4 Пустить с вершины наклонной плоскости сплошной цилиндр и по следу, оставленному на бумаге, определить дальность полета S. Это задание проделать 7 раз и результаты занести в таблицу 1.1.

5 Вычислить среднее значение $\overline{S}$, абсолютную ошибку ΔS и относительную ошибку ε по формулам:

$$\overline{S} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_7}{7}, \tag{1.12}$$

$$\Delta S = \sigma = \sqrt{\sigma_{np}^2 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(\Delta S_i\right)^2}{n\left(n-1\right)}}. \tag{1.13}$$

За $\sigma_{\text{пр}}$ принять цену деления линейки, а $\Delta S_i = \left(\overline{S} - S_i\right)^2$

Относительная ошибка:

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{\overline{S}}. \tag{1.14}$$

Результаты измерений S и вычислений $\overline{S}$, ΔS и ε занести в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7
S_i, м							
ΔS_i, м							
$\bar{S} =$ … м, $\Delta S =$ … м, $\varepsilon =$ …, $S = \bar{S} \pm \Delta S = \ldots \pm \ldots$ м.							

1 Измерить высоту падения цилиндра h и найти скорость $\bar{V}_0$ в момент отрыва по формуле (1.3):

$$\bar{V}_0 = \frac{\bar{S}}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\left(h - \bar{S}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)}}.$$

2 Принять относительную ошибку измерения скорости равной относительной ошибке измерения дальности полета, т.к. другие величины, входящие в формулу для $\bar{V}_0$, измерены с большей точностью. Вычислить абсолютную ошибку $\Delta V_0 = \bar{V}_0\varepsilon$ и записать результат в виде доверительного интервала $\bar{V} = \bar{V}_0 \pm \Delta V_0$ в таблицу 1.2.

3 Повторить пункты 4 – 7 для полого цилиндра.

4 Вычислить скорость цилиндра в момент отрыва от наклонной плоскости по формуле, которую получим из (1.11) и (1.7)

$$\bar{V}_{\text{спл.цил.}} = \sqrt{\frac{4}{3}g\left(H - h\right)}. \tag{1.15}$$

5 Вычислить абсолютную ошибку ΔV:

$$\Delta V = \frac{1}{2}\bar{V}\frac{\Delta h}{\left(H - h\right)}. \tag{1.16}$$

Абсолютную ошибку измерения высоты наклонной плоскости Δh принять равной 0,5 см. Результат записать в виде доверительного интервала в таблицу 1.2:

$$\bar{V} = \bar{V} \pm \Delta V . \tag{1.17}$$

6 Сравнить полученные результаты измерений V_0 и V для сплошного цилиндра и сделать вывод.

7 Повторить пункты 9 – 11 для полого цилиндра. Для вычисления скорости полого цилиндра необходимо ввести коэффициент пропорциональности между внешним и внутренним радиусами цилиндра:

$$C = \frac{R}{R_0} . \tag{1.18}$$

Значения R и R_0 даны на стенде.

Подставляя выражение (1.18) в формулы (1.9) и (1.11), получим выражение для скорости полого цилиндра:

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{4g(H-h)}{3+C^2}} . \tag{1.19}$$

Полученные результаты представить в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Сплошной цилиндр	Полый цилиндр
$V_0 = \ldots$ $\bar{V} = \ldots$	$V_0 = \ldots$ $\bar{V} = \ldots$

8 Сравнить полученные результаты и сделать выводы.

Приложение А

(обязательное)

Элементы кинематики

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения материальных точек (тел) без учета их массы и действующих на них сил.

Твердое тело характеризуется стабильностью формы. Изменение формы происходит под действием внешних сил. При этом в твердом теле возникают силы упругости. В механике под твердым телом обычно подразумевают абсолютно твердое тело, деформациями которого можно пренебречь в данной задаче.

Поступательное движение – движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая любые две точки этого тела перемещаясь, остается параллельной самой себе. При этом все точки тела имеют одинаковые траектории и одинаковые в каждый момент времени значения скорости и ускорения.

Вращательное движение твердого тела – это такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

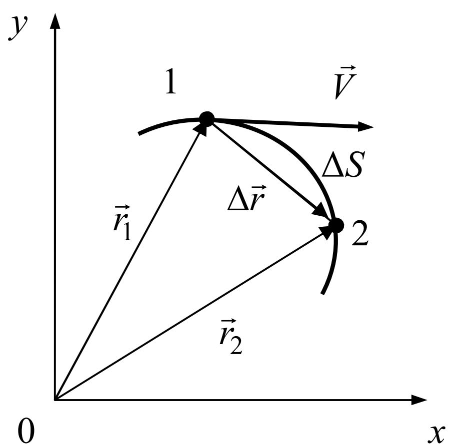

Рисунок А.1

Материальная точка – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. При своем движении материальная точка описывает некоторую кривую, называемую траекторией. Пусть материальная точка переместилась из положения 1, характеризуемого радиус-вектором $\vec{r}_1$ (радиус-вектор, проведенный из начала координат в данную точку), в положение 2, характеризуемое радиус-вектором $\vec{r}_2$, как показано на рисунке А.1.

Расстояние между точками 1 и 2, отсчитанное вдоль траектории, называется путем, обозначим его ΔS. А вектор, проведенный из точки 1 в точку 2, называется перемещением $\Delta\vec{r}$, перемещение – есть приращение радиус-вектора.

Под средней скоростью перемещения материальной точки понимают отношение перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который произошло это перемещение: Вектор средней скорости: $\vec{V}_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, или в скалярном виде:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{A.1}$$

Мгновенной скоростью $\vec{V}$ материальной точки называется векторная величина, равная пределу отношения перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который это перемещение произошло, когда промежуток времени стремится к нулю. Т.е. скорость – есть производная радиус-вектора по времени:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_t\,'. \tag{A.2}$$

Поскольку в пределе при $\Delta t \to 0$, перемещение совпадает с касательной к траектории, то вектор скорости направлен по касательной к траектории.

Вычислим модуль скорости (А.2), учитывая, что в пределе бесконечно малого промежутка времени модуль вектора перемещения равен пути $\Delta S = \left|\Delta\vec{r}\right|$:

$$V = \left|\vec{V}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \tag{A.3}$$

Таким образом, модуль скорости перемещения равен модулю мгновенной скорости (производной от пути по времени).

Если модуль скорости перемещения при движении материальной точки не изменяется, то движение будет равномерным, причем направление скорости может изменяться. Когда направление вектора скорости неизменно, то движение – прямолинейное, в противном случае – криволинейное.

Скорость материальной точки может изменяться как по величине, так и по направлению. Предел отношения изменения вектора скорости $\Delta\vec{V}$ к промежутку времени Δt, за который произошло это изменение, когда промежуток времени стремится к нулю, называется ускорением; или ускорение – есть производная от скорости по времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \qquad \text{(A.4)}$$

Вектор скорости можно представить в виде произведения модуля скорости V на единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный вдоль вектора $\vec{V}$ (рисунок А.2):

$$\vec{V} = V\vec{\tau}. \qquad \text{(A.5)}$$

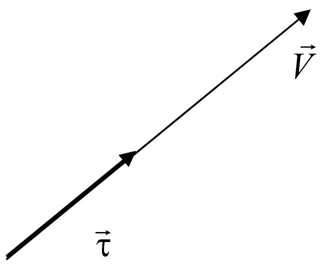

Рисунок А.2

Подставив в формулу (А.4) выражение (А.5), получим:

$$\vec{a} = \frac{d(V\cdot\vec{\tau})}{dt} = \frac{dV}{dt}\cdot\vec{\tau} + V\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad \text{(A.6)}$$

Т.е. вектор ускорения представим в виде суммы двух векторов. Один из них коллинеарен с вектором $\vec{\tau}$ и соответственно с вектором $\vec{V}$, и носит название тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$. Тангенциальное ускорение равно:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}. \qquad \text{(A.7)}$$

А его модуль равен dV/dt, т.е. характеризует быстроту изменения величины скорости. Если $dV/dt < 0$, то движение является замедленным и вектор $\vec{a}_\tau$ направлен противоположно вектору $\vec{V}$; если $dV/dt > 0$, движение – ускоренное и вектора $\vec{a}_\tau$ и $\vec{V}$ сонаправлены.

Другое слагаемое в выражении (А.6), равное:

$$\vec{a}_n = V\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{А.8}$$

называется нормальным ускорением $\vec{a}_n$. Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по направлению. Можно показать, что вектор $\vec{a}_n$ перпендикулярен вектору скорости $\vec{V}$. Расположение векторов $\vec{a}$, $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ показано на рисунке А.3. Модуль вектора $|\vec{a}| = a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_\tau}^2}$.

Если $\vec{a}_\tau = 0$, то $\vec{a} = \vec{a}_n$ и движение будет равномерным по окружности. Величина нормального ускорения определяется формулой:

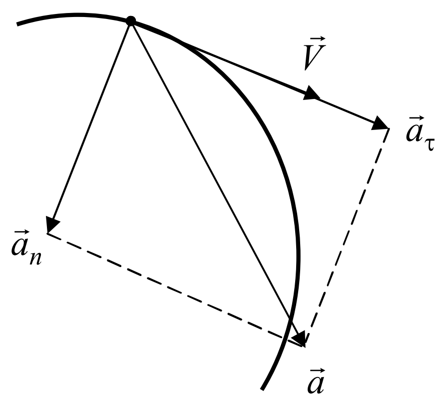

Рисунок А.3

$$a_n = \frac{V^2}{R}. \tag{А.9}$$

где V – величина скорости точки,

R – кривизна траектории в данной точке.

Радиус кривизны представляет собой радиус окружности, которая сливается в данном месте с кривой на бесконечно малом ее участке.

В случае $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a} = \vec{a}_\tau$ и величина $\vec{a}_\tau$ не изменяется, движение будет прямолинейным равноускоренным. При этом зависимость скорости материальной точки и пути, пройденного ею, от времени выражается следующими формулами:

$$V = V_0 + at, \quad (A.10)$$

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (A.11)$$

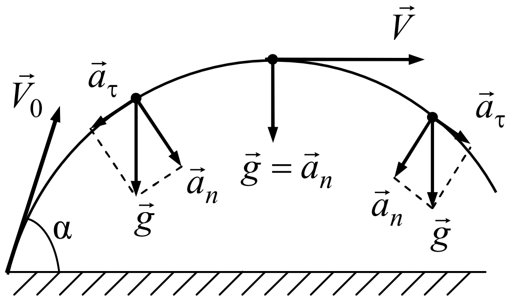

Рисунок А.4

где V_0 – скорость материальной точки в начальный момент времени, м/с.

В качестве примера рассмотрим движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{V}_0$ (рисунок А.4). Движение тела происходит с ускорением свободного падения $\vec{g}$, поэтому полное ускорение тела во время движения остается постоянным по величине и направлению. А нормальное и тангенциальное ускорения в каждой точке траектории различны. В частности, в верхней точке вектор скорости $\vec{V}$ перпендикулярен вектору $\vec{g}$, следовательно, в ней существует только нормальное ускорение $\vec{a}_n = \vec{g}$, до верхней точки движение замедленное, а затем – ускоренное.

2 Лабораторная работа №129. Изучение законов динамики с помощью машины Атвуда

2.1 Цель работы

1 Изучение законов равноускоренного движения.

2 Экспериментальная проверка законов с помощью машины Атвуда.

2.2 Теоретическое введение

Простейший вид движения – ***механическое движение*** – заключается в изменении пространственного положения тела с течением времени. Механическое движение тела может происходить только относительно других тел. ***Телом отсчета*** называют некоторое тело, условно принимаемое за неподвижное, относительно которого рассматривается движение других тел. Например, движение людей, автомобилей, самолетов удобно рассматривать относительно Земли, считая ее неподвижной.

Любое тело имеет конечные размеры. Поэтому разные его части занимают разные положения в пространстве. При поступательном движении достаточно рассматривать лишь одну точку движущегося тела. ***Поступательным*** называют движение, при котором прямая, соединяющая две произвольные точки тела, остается параллельной самой себе.

Материальная точка – это абстрактное физическое тело, обладающее массой, но не имеющее геометрических размеров. Материальная точка служит физической моделью тела, когда можно пренебречь его размерами, например, при поступательном движении.

Система отсчета – это совокупность тела отсчета, связанная с ним *система координат*, снабженная *часами*. В выбранной системе отсчета (СО) положение материальной точки задается радиусом вектором $\vec{r}$, который является направленным прямым отрезком, проведенным из начала отсчета к этой материальной точке (МТ).

Начало отсчета – это фиксированная точка тела отсчета, выбор которой произволен и диктуется соображениями удобства описания.

При движении материальной точки радиус вектор, связанный с ней, является функцией времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$, что равносильно системе функции координат

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{2.2}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы системы координат.

Траектория – реальная или воображаемая линия, вычерчиваемая в пространстве концом радиуса вектора $\vec{r}(t)$ при движении материальной точки.

Путь S – скалярная, положительная физическая величина, равная длине траектории.

Перемещение $\Delta\vec{r}$ – векторная величина $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, направленная от начального положения материальной точки к конечному положению.

Средняя путевая скорость – скалярная физическая величина, определяемая как отношение пройденного пути ΔS к промежутку времени Δt, за который этот путь пройден

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \tag{2.3}$$

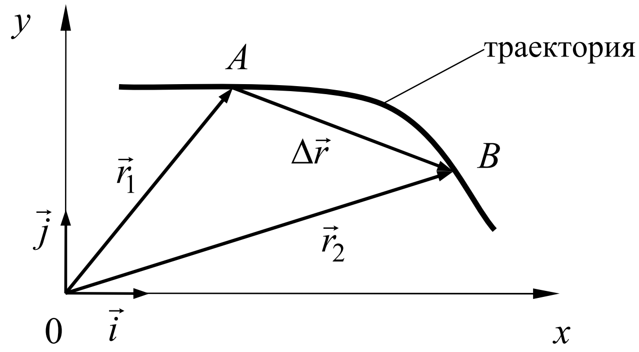

Рисунок 2.1 – Перемещение $\Delta\vec{r}$ и траектория AB материальной точки

Мгновенная путевая скорость – скалярная физическая величина, определяемая как первая производная по времени от пути

$$v = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \tag{2.4}$$

Средняя скорость перемещения – векторная физическая величина, определяемая как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который это перемещение произошло

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{2.5}$$

Мгновенная скорость перемещения – векторная физическая величина, определяемая как первая производная радиуса-вектора по времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \tag{2.6}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}. \qquad (2.7)$$

Равномерным прямолинейным движением называют механическое перемещение, при котором скорость постоянна по величине и направлению: $\vec{v} = const$.

Закон движения в этом случае можно представить функцией от времени одной координаты:

$$x = x_0 + vt, \qquad (2.8)$$

путь

$$S = vt, \qquad (2.9)$$

проекция скорости на ось x

$$v_x = v. \qquad (2.10)$$

При ***неравномерном*** движении скорость меняется во времени

$$\vec{v} = \vec{v}(t). \qquad (2.11)$$

Ускорение – векторная физическая величина, которая характеризует быстроту изменения скорости.

Среднее ускорение – векторная физическая величина, определяемая как отношение вектора изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt за который это изменение произошло

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (2.12)$$

Мгновенное ускорение – векторная физическая величина, определяемая как первая производная скорости по времени или вторая производная координаты по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\text{v}}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{2.13}$$

где

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{2.14}$$

Равнопеременным называют движение, при котором ускорение неизменно по величине и направлению: $\vec{a} = const$.

Движение равноускоренное прямолинейное, если $\vec{a} = const$, и векторы скорости и ускорения сонаправлены: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{v}$.

При ***равнозамедленном прямолинейном движении*** ускорение постоянно $\vec{a} = const$, вектора скорости и ускорения разнонаправлены: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}$.

Закон движения при равноускоренном прямолинейном движении имеет вид:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}, \qquad v = v_0 + at. \tag{2.15}$$

Путь в этом случае определяется соотношением

$$S = v_0t + \frac{at^2}{2}. \tag{2.16}$$

Причины, придающие движению тот или иной характер, изучает ***динамика.*** Основу динамики составляют законы Ньютона, которые представляют собой обобщение большого числа опытных фактов и наблюдений.

Первый закон Ньютона: *существуют такие системы отсчёта, называемые* ***инерциальными*** *(ИСО), в которых тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если равнодействующая сил, приложенных к телу, равна нулю:*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0. \tag{2.17}$$

Таким образом, в динамике отсутствует эквивалентность всех систем отсчёта. В произвольной системе отсчёта изменение скорости тела может происходить без взаимодействия с другими телами.

Сила **–** векторная физическая величина, характеризующая направление и количественную меру взаимодействия *двух тел.*

Физическая природа взаимодействия может быть различной. Существуют четыре типа сил: *гравитационные, электромагнитные, ядерные и слабые взаимодействия.* Но для всех видов взаимодействия количественная мера может быть выбрана единым образом – измерять силы различной природы можно в одних и тех же единицах с помощью одних и тех же эталонов. Благодаря такой универсальности механика успешно описывает движение под действием сил любой природы.

Существуют различные способы измерения сил. Один из наиболее распространенных способов основан на свойстве сил вызывать ***упругую деформацию*** твердых тел. Единица измерения силы в СИ: $\left[F\right]$ = 1 Н (Ньютон). 1 Н = 1 $\frac{кг \cdot м}{с^2}$.

Опыт показывает, что при одновременном действии на тело нескольких сил, результирующая сила равна векторной сумме этих сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n. \tag{2.18}$$

Второй закон Ньютона: *в инерциальной системе отсчёта ускорение тела прямо пропорционально результирующей всех действующих на него сил и обратно пропорционально массе тела:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n}{m}. \qquad (2.19)$$

В скалярной форме, т.е. в проекциях на оси выбранной ИСО получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} \end{cases} \qquad (2.20)$$

Эта система уравнений дополняется начальными условиями механического состояния тела, кинематическими и динамическими связями между физическими величинами.

Коэффициент пропорциональности m между силой и ускорением называется массой. Эта масса является мерой инертности тела. ***Инертностью*** называют свойства тела сопротивляться изменению его состояния покоя или движения. Наряду с инертной массой существует понятие ***гравитационной массы***, определяемой законом всемирного тяготения:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (2.21)$$

Современные эксперименты показывают, что инертная и гравитационная массы равны друг другу с точностью, не меньшей 10^{-12} их значения. ***Масса*** – величина скалярная, положительная и аддитивная, т.е. масса системы тел равна сумме масс тел этой системы:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i . \quad (2.22)$$

В замкнутой системе тел выполняется закон сохранения массы:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = const . \quad (2.23)$$

В релятивистской механике, т.е. при скоростях движения, соизмеримых и близких к скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, масса зависит от скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.24)$$

где m_0 – масса покоя. Однако имеет место закон сохранения релятивисткой массы.

Используя второй закон Ньютона, можно вычислить массу тела, измерив независимо силу и ускорение. На практике гораздо точнее и удобнее измерять массу с помощью весов, используя эталонные меры. Единицей массы в СИ является $[m]$ = 1 кг (килограмм).

Третий закон Ньютона: *в инерциальной системе отсчёта силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль соединяющей тела прямой:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \quad (2.25)$$

Этот закон справедлив независимо от физической природы взаимодействия тел. Однако в каждом конкретном случае в равенстве (2.25) обе фигурирующие силы имеют одну и ту же физическую природу, хотя и приложены к разным телам. Третий закон Ньютона является прямым обобщением экспериментальных фактов.

С помощью законов Ньютона мы можем не только объяснить наблюдаемые механические явления, но и предсказывать их течения, решая различные задачи.

Прямая (основная) задача механики материальной точки состоит в определении координат и скорости тела известной массы в любой момент времени по силам, действующим на тело, и по известным начальным условиям.

Прямую задачу механики часто приходится решать инженерам. Например, расчет траектории космического корабля и его скорости в произвольный момент времени с учётом гравитационных сил земли и других планет.

Обратная задача механики: зная, как движется тело, определить действующие на него силы.

Именно путём решения обратной задачи механики установлены многие фундаментальные законы природы, открыты действующие в природе силы.

Движение со связями. В динамике есть задачи, где задана только часть сил, действующих на рассматриваемое тело. Такая ситуация возникает, когда движение происходит по заданной траектории при наложенных ***связях.*** Примерами механических систем, совершающих такие движения, могут служить груз на нерастяжимой нити в поле тяжести; грузы, соединенные перекинутой через блок нитью.

2.3 Машина Атвуда

Изучение законов равноускоренного движения производится на основе анализа кинематических характеристик движения системы тел. Для проведения такого анализа используется машина Атвуда, с помощью которой можно получать различные, не слишком большие (по сравнению с ускорением свободного падения) ускорения.

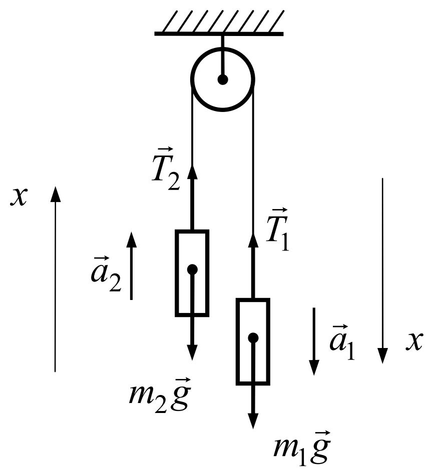

Рисунок 2.2 – Схема машины Атвуда

Экспериментальная установка, получившая название «машина Атвуда», представляет собой вращающийся с возможно малым трением легкий блок, через который перекинута тонкая нерастяжимая нить с грузами массой m_1 и m_2 (рисунок 2.2). На каждый груз действуют две силы – сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, под действием этих сил и начинают движение грузы. Меняя массы грузов, можно получать различные ускорения. В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов записываются в виде:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases} \tag{2.26}$$

Однако из этих уравнений невозможно определить все неизвестные величины, так как число неизвестных больше числа уравнений.

При дальнейшем анализе рассмотрим два случая. В обоих случаях предположим, что нить, соединяющая грузы, невесома и нерастяжима, сопротивление воздуха отсутствует. В первом случае предположим, что масса блока равна нулю и силы трения в оси блока отсутствуют, во втором случае учтем влияние массы блока и силы трения на движение грузов. Выберем системы координат так, как показано на рисунке 2.2.

1) В связи с тем, что нить нерастяжима, ускорения обоих грузов равны по модулю

$$a_1 = a_2 = a,$$

а также силы натяжения нитей одинаковы по модулю

$$T_1 = T_2 = T\ .$$

Тогда уравнения движения каждого груза в этих системах координат имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a \end{cases} \tag{2.27}$$

Пусть $m_2 = m$, $m_1 = m + \Delta m$, тогда, решая полученную систему уравнений (2.27), получаем значение ускорения

$$a = g\frac{\Delta m}{2m + \Delta m} \tag{2.28}$$

и величину силы натяжения нити

$$T = 2mg\frac{m + \Delta m}{2m + \Delta m}. \tag{2.29}$$

Ускорение тел системы всегда меньше ускорения свободного падения и меняется при изменении соотношения между массами обоих грузов. Для случая $m_1 = m_2 = m$, получим, что $a = 0$, т.е. грузы либо покоятся, либо движутся равномерно и прямолинейно, при этом сила натяжения нитей, действующих на груз равна:

$$T = mg\,. \tag{2.30}$$

2) Учтем наличие массы у блока и силы трения в оси блока. В этом случае ускорения грузов также равны по модулю

$$a_1 = a_2 = a,$$

однако силы натяжения нитей не одинаковы и уравнения движения грузов необходимо дополнить уравнением вращательного движения блока

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \\ T_1 R - T_2 R - M_{тр} = J\varepsilon \end{cases} \tag{2.31}$$

где T_2 и T_1 – силы натяжения левой и правой частей нити; J – момент инерции блока относительно оси вращения; $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ – угловое ускорение блока; R – радиус блока; $M_{тр}$ – момент силы трения в оси блока.

Пусть $m_2 = m$, $m_1 = m + \Delta m$, тогда решая систему уравнений (2.31), получаем значение ускорения грузов:

$$a = \frac{\Delta m g - \dfrac{M_{тр}}{R}}{2m + \Delta m + \dfrac{J}{R^2}}\,. \tag{2.32}$$

Если разность масс грузов Δm мала по сравнению с массами самих грузов и блока $\Delta m \ll 2m + \dfrac{J}{R^2}$, то можно считать, что

$$a\left(2m+\frac{J}{R^2}\right)=\Delta mg-\frac{M_{тр}}{R}. \qquad (2.33)$$

Так как момент силы трения величина постоянная, то из (2.33) следует, что ускорение грузов линейно зависит от величины Δmg. При равномерном движении $a=0$, тогда $\frac{M_{тр}}{R}=\Delta mg$.

2.4 Экспериментальная установка

Машина Атвуда (рисунок 2.3) состоит из вертикальной стойки со шкалой. На верхнем конце стойки расположен блок, через который перекинута нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза. На правый груз можно помещать дополнительные грузы в виде тонких пластин (перегрузы) для изменения ускорения системы грузов. На участке L_1 от верхней планки до фотодатчика 1 система грузов движется ускоренно. При прохождении грузом фотодатчика 1 с него кронштейном снимается перегруз и далее на участке L_2 система грузов движется равномерно до фотодатчика 2. В верхнем положении система грузов удерживается при помощи тормозного механизма, расположенного на оси блока.

Измерение времени равномерного движения на участке между фотодатчиками осуществляется с помощью электронного блока. При прохождении фотодатчика 1 секундомер запускается, при прохождении фотодатчика 2 – останавливается. Управление тормозным механизмом осуществляется с помощью выносной кнопки.

Перед выполнением эксперимента следует убедиться, что грузы могут свободно двигаться, не касаясь кронштейнов и фотодатчиков. В противном случае пригласить лаборанта для проведения необходимых регулировок.

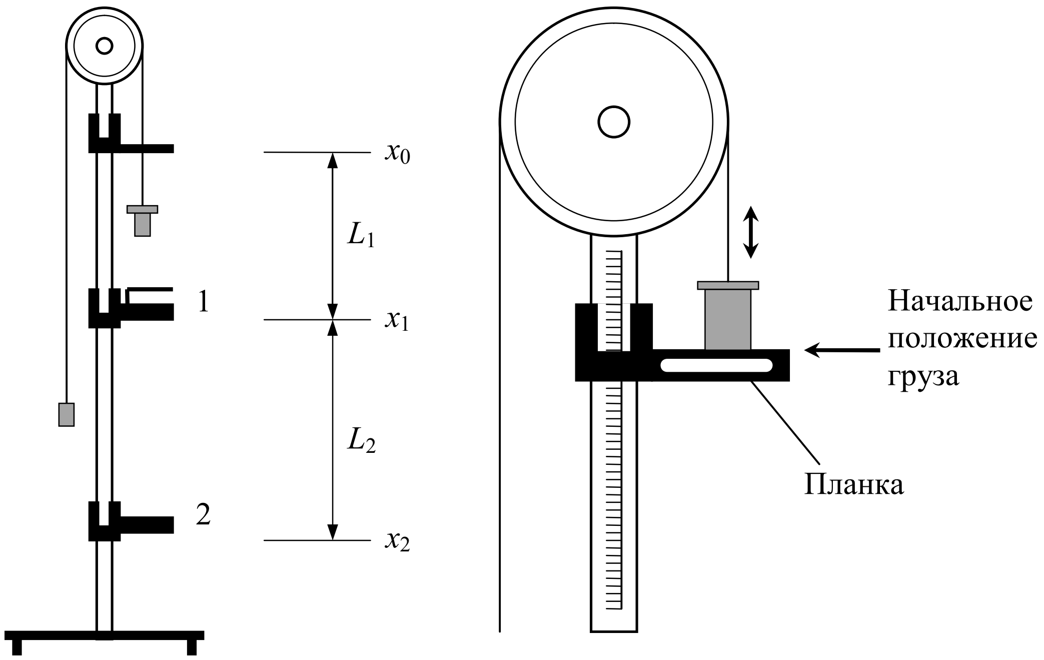

Рисунок 2.3 – Машина Атвуда

2.5 Проведение эксперимента

2.5.1 Упражнение 1. Анализ закона движения и определение ускорения

Если массы грузов одинаковы, то система может находиться в двух состояниях: либо покоиться либо двигаться с постоянной скоростью.

При добавлении на один из грузов дополнительного груза (перегруза) система начинает двигаться с ускорением. Движение груза с перегрузом на участке L_1 является равнопеременным. В этом случае закон движения, т.е. зависимость координаты тела от времени, будет иметь вид

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}, \tag{2.34}$$

где x_0 – координата, от которой груз начинает свое движение. Учитывая, что при равнопеременном движении скорость меняется по закону

$$v = at,$$

получаем

$$L_1 = x_1 - x_0 = \frac{v_1^2}{2a}, \qquad (2.35)$$

где v_1 – скорость груза в момент снятия перегруза и включения таймера; x_1 – координата верхнего фотодатчика. Если считать что в системе отсутствуют силы трения, то с этой же скоростью груз будет проходить расстояние между фотодатчиками после снятия с него перегруза

$$v_1 = \frac{L_2}{t_2}, \qquad (2.36)$$

где $L_2 = x_2 - x_1$ – расстояние между двумя фотодатчиками (x_2 – координата нижнего фотодатчика); t_2 – время движения на этом участке пути.

Из формулы (2.35) следует, что $v_1^2 = a2L_1$. Т.е. $v_1^2 = f\left(2L_1\right)$ – квадрат скорости прямо пропорционален величине $2L_1$, ускорение a является коэффициентом наклона графика.

Подставив формулу (2.36) в (2.35) получим выражение для ускорения

$$a = \frac{L_2^2}{2t_2^2 L_1}. \qquad (2.37)$$

Порядок измерений.

1 Установить верхний фотодатчик с закрепленным на нем кронштейном на отметке x_1 так, чтобы расстояние между датчиками L_2 составляло 20 см. В дальнейшем величина L_2 не изменяется.

2 Установить планку и груз в верхнем положении x_0 как показано на рисунке 2.3 и положить на него один из перегрузов. При этом система должна быть заторможена электромагнитным тормозом.

3 Систему тел привести в движение, отключая электромагнитный тормоз кнопкой, и определить по секундомеру время движения t_2 груза между фотодатчиками.

4 Изменить координаты начального положения x_0 груза. Для нового значения L_1 повторить измерения в соответствии с пунктом 2 с тем же перегрузом.

Результаты измерений занести в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

n	L_1, м	$2L_1$, м	t_2, с	v_1, м/с	v_1^2, м^2/с^2
1	0,10				
2	0,14				
3	0,18				
4	0,22				
5	0,26				
L_2 = 0,20 м g = 9,81 м/с^2		m = … кг Δm = … кг		$a = g\dfrac{\Delta m}{2m+\Delta m} = \ldots$ м/с^2 $a = \dfrac{L_2^2}{2t_2^2 L_1} = \ldots$ м/с^2 $a = \dfrac{\Delta\left(v_1^2\right)}{\Delta\left(2L_1\right)} = \ldots$ м/с^2	

Обработка результатов измерений.

1 Для каждого значения L_1 определить значение скорости v_1 по формуле (2.36) и квадрата скорости v_1^2. Результаты вычислений занести в таблицу 2.1.

2 По результатам измерений построить зависимость $v_1^2 = f\left(2L_1\right)$. Убедиться, что эта зависимость близка к пропорциональной зависимости, т.е. движение груза с перегрузом на участке L_1 является равноускоренным и выполняется соотношение (2.35). По наклону прямой найти значение ускорения груза с перегрузом a по формуле

$$a = \frac{\Delta\left(v_1^2\right)}{\Delta\left(2L_1\right)}, \tag{2.38}$$

где $\Delta\left(v_1^2\right)$ и $\Delta\left(2L_1\right)$ – изменения соответственно ординаты и абсциссы на графике $v_1^2 = f\left(2L_1\right)$.

3 Сравнить полученное по формуле (2.38) значение ускорения с найденным по формулам (2.28) и (2.37). Результаты вычислений занести в таблицу 2.1. Сделать выводы.

2.5.2 Упражнение 2. Определение ускорения с учетом массы блока и силы трения в оси блока

Порядок измерений.

1. Установить верхний фотодатчик с закрепленным на нем кронштейном на отметке x_1 так, чтобы расстояние между датчиками L_2 составляло 20 см. Установить планку на расстоянии L_1 равном 20 см. В дальнейшем величины L_2 и L_1 не изменяются.

2. Установить груз в верхнем положении x_0 как показано на рисунке 2.3 и положить на него один из перегрузов. При этом система должна быть заторможена электромагнитным тормозом.

3. Систему тел привести в движение, отключая электромагнитный тормоз кнопкой, и определить по секундомеру время движения t_2 груза между фотодатчиками. Повторить измерения в соответствии с п.2 и 3 три раза.

4. Провести измерения времени t_2 в соответствии с п. 2 и 3 для трех различных масс Δm перегрузов.

Результаты измерений занести в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

<table>
<tr><th>Δm</th><th>n</th><th>t_2, с</th><th>$\overline{t_2}$, с</th><th>a, м/с^2</th><th>Δmg, Н</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Δm_1</td><td>1</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Δm_2</td><td>1</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Δm_3</td><td>1</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta m_1 = \ldots$ кг
$\Delta m_2 = \ldots$ кг
$\Delta m_3 = \ldots$ кг</td><td colspan="4">$J = 0{,}73 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2
$R = 66{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
$g = 9{,}81$ м/с^2</td></tr>
</table>

Обработка результатов измерений.

1 По экспериментальным данным для каждой из трех величин перегрузов определить среднее значение времени движения между фотодатчиками $\overline{t_2}$ с использованием формулы

$$\overline{t_2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_{2i}\,, \tag{2.39}$$

где $N = 3$ – число измерений.

Используя формулу (2.37) для каждого Δm вычислить значения ускорений a:

$$a = \frac{L_2^2}{2\left(\overline{t_2}\right)^2 L_1} \tag{2.40}$$

и произведений Δmg.

Результаты вычислений внести в таблицу 2.2.

2 По результатам измерений построить зависимость $a = f(\Delta mg)$. Отрезок на оси абсцисс от начала координат до точки ее пересечения с графиком $a = f(\Delta mg)$ равен величине $\frac{M_{тр}}{R}$. Найти из графика величину этого отрезка и определить момент сил трения $M_{тр}$ на оси блока. Сделать выводы.

3 Лабораторная работа № 130. Изучение закона сохранения момента импульса при абсолютно упругом ударе

3.1 Цель работы

1 Познакомиться с теоретическим описанием характеристик твердого тела при плоском движении.

2 Познакомиться с методом измерения сохраняющихся физических характеристик.

3 Исследовать физические характеристики на примере абсолютного упругого соударения твердых тел.

3.2 Краткая теория

3.2.1 Момент *M* силы

Вращающее действие силы определяется ее моментом. Моментом $\vec{M}_O$ силы $\vec{F}$ относительно какой-либо точки *O* называется векторное произведение

$$\vec{M}_O = \left[\vec{r} \cdot \vec{F} \right], \tag{3.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки *O* в точку приложения силы;

$\vec{F}$ – вектор силы.

Единица измерения момента силы [*M*] = Н·м.

Величина момента силы

$$M_O = rF \sin \alpha, \tag{3.2}$$

где *r* – модуль радиус-вектора $\vec{r}$;

F – модуль вектора силы;

α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Можно записать

$$M_O = Fl\,, \tag{3.3}$$

где l – плечо силы (кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы);

F – модуль вектора силы.

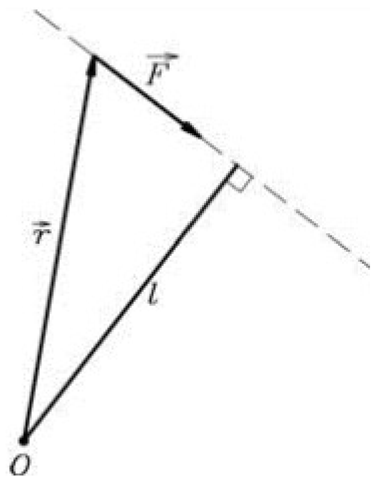

Рисунок 3.1 – К определению плеча силы

На рисунке 3.1 показано, как определяется плечо силы. Момент силы относительно какой-либо точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку.

Проекция вектора $\vec{M}_O$ на какую-либо ось, например, ось z, называется моментом $\boldsymbol{M_z}$ силы $\vec{F}$ относительно этой оси. Чтобы определить момент силы $\vec{F}$ относительно оси, сначала проецируют силу на плоскость, перпендикулярную оси (это показано на рисунке 3.2), а затем находят момент этой проекции относительно точки пересечения оси с перпендикулярной ей плоскостью. Если линия действия силы параллельна оси, или пересекает ее, то момент силы относительно этой оси равен нулю.

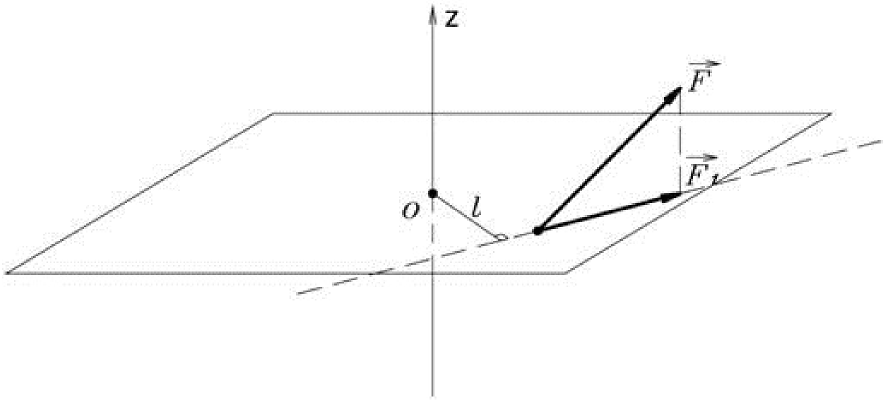

Рисунок 3.2 – К определению проекции момента силы на ось z

3.2.2 Момент инерции тела

Моментом инерции J_z тела относительно какой-либо оси z называется сумма произведений масс точек этого тела на квадраты расстояний от этих точек до оси

$$J_z = \sum m_i r_i^2 , \tag{3.4}$$

где m_i – масса i-той точки;

r_i – кратчайшее расстояние от i-той точки до оси z.

Для сплошных тел момент инерции определяется через интеграл

$$J_z = \int r^2 dm , \tag{3.5}$$

где r – расстояние от элемента dm массы тела до оси z.

Моменты инерции однородных тел простой геометрической формы обычно рассчитывают по формуле (3.5), а сложной определяют экспериментально.

Теорема Штейнера. Если для какого-либо тела известен его момент инерции J_{xC} относительно оси x_C, проходящей через центр масс C тела, то момент инерции этого тела относительно оси x_1, параллельной x_C, равен

$$J_{x1} = J_{xC} + ma^2, \tag{3.6}$$

где m – масса тела;

a – кратчайшее расстояние между осями x_1 и x_C.

3.2.3 Основной закон динамики вращательного движения

Для тела, вращающегося вокруг оси z,

$$J_z \varepsilon = \sum M_{zi}, \tag{3.7}$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z;

ε – угловое ускорение тела;

$\sum M_{zi}$ – сумма моментов сил, приложенных к телу, и рассчитанных относительно оси вращения;

i – индекс суммирования.

Уравнение (3.7) представляет собой основной закон динамики вращательного движения.

3.2.4 Момент импульса *L*

Моментом $\vec{L}_O$ импульса материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, относительно какой-либо точки отсчета O, называют векторное произведение

$$\vec{L}_O = [\vec{r} \cdot m\vec{v}], \tag{3.8}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки (рисунок 3.3);

$\vec{p} = m\vec{v}$ – ее импульс.

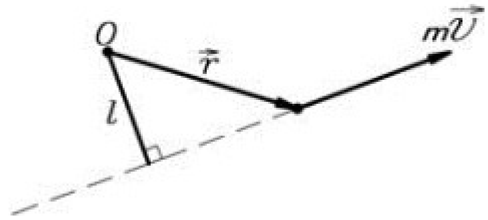

Рисунок 3.3 – К определению плеча момента импульса материальной точки

Величина момента импульса материальной точки

$$L_O = mvl, \tag{3.9}$$

где l – кратчайшее расстояние от линии вектора $\vec{p} = m\vec{v}$ до точки O.

На рисунке 3.3 показано, как определяется плечо момента импульса.

Для вращающегося тела момент импульса L_z относительно оси вращения z равен

$$L_z = J_z\omega, \tag{3.10}$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z;

ω – угловая скорость тела.

Скорость изменения момента импульса системы тел равна сумме моментов сил, приложенных к этой систем

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{zi}, \tag{3.11}$$

где $\frac{dL_z}{dt}$ – производная по времени от проекции момента импульса на ось z;

$\sum M_{zi}$ – проекция суммарного момента сил приложенных к телу;

i – индекс суммирования.

Тогда $L_{z2} - L_{z1} = \int\limits_0^{\Delta t} \sum M_{zi}\, dt$. Если моменты сил постоянны, то предыдущее уравнение можно записать в виде $L_{z2} - L_{z1} = M_{zi}\,\Delta t$, т.е. изменение момента импульса системы тел относительно какой-либо оси z равно сумме моментов сил, действующих на эту систему, умноженной на время $\Delta t = t_2 - t_1$.

Отсюда следует закон сохранения момента импульса: момент импульса L_z системы тел относительно оси z сохраняется, если сумма моментов сил, действующих на эту систему, равна нулю.

Изучение закона сохранения момента импульса производится на основе анализа динамических характеристик твердых тел представленных экспериментальной установкой (рисунок 3.4).

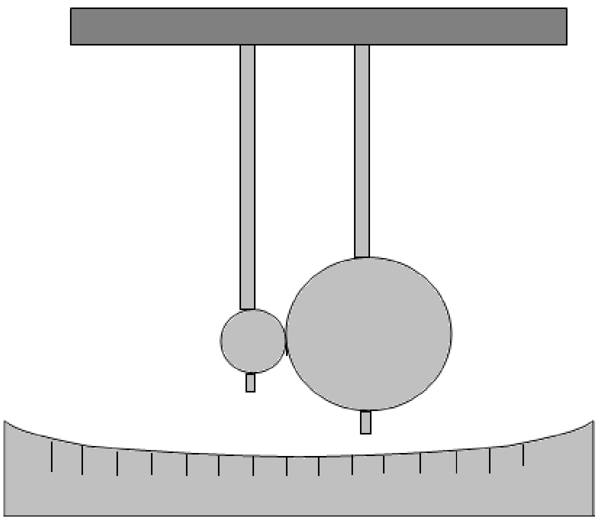

Рисунок 3.4 – Экспериментальная установка

Запишем закон сохранения энергии при соударении двух шаров, подвешенных на металлических стержнях (здесь и далее по тексту m_0 – масса металлического стержня, m_1 – масса большого шара, m_2 – масса малого шара, α_0 – угол отклонения большого шара до соударения, α_1 – угол отклонения большого шара после соударения, α_2 – угол отклонения малого шара после соударения):

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2+\frac{1}{2}J\omega_0^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}J\omega_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}J\omega_2^2, \qquad (3.12)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2+\frac{1}{2}J\omega_0^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}J\omega_1^2+\frac{1}{2}J\omega_2^2, \qquad (3.13)$$

так как $J=\frac{1}{3}m_0l^2$ и $\omega_0=\frac{v_0}{l}$, а также $\omega_1=\frac{v_1}{l}$ и $\omega_2=\frac{v_2}{l}$, тогда

$$m_1v_0^2+\frac{1}{3}m_0v_0^2=m_1v_1^2+m_2v_2^2+\frac{1}{3}m_0v_1^2+\frac{1}{3}m_0v_2^2, \qquad (3.14)$$

$$\left(m_1+\frac{1}{3}m_0\right)v_0^2-\left(m_1+\frac{1}{3}m_0\right)v_1^2=\left(m_2+\frac{1}{3}m_0\right)v_2^2, \qquad (3.15)$$

следовательно

$$\left(m_1+\frac{1}{3}m_0\right)\left(v_0-v_1\right)\left(v_0+v_1\right)=\left(m_2+\frac{1}{3}m_0\right)v_2v_2. \qquad (3.16)$$

Если $m_0\to 0$, то

$$\frac{m_1v_0^2}{2}=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_1v_2^2}{2}. \qquad (3.17)$$

Запишем закон сохранения момента импульса при абсолютно упругом соударении двух шаров, подвешенных на металлических стержнях:

$$lm_1v_0+\frac{1}{3}m_0l^2\omega_0=lm_1v_1+lm_2v_2+\frac{1}{3}m_0l^2\omega_1+\frac{1}{3}m_0l^2\omega_2, \qquad (3.18)$$

где $v_0 = \omega_0 l$ – скорость металлического стержня;

$v_1 = \omega_1 l$ – скорость большого шара;

$v_2 = \omega_2 l$ – скорость малого шара;

l – длина стержня.

$$m_1 v_0 + \frac{1}{3} m_0 l \omega_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \frac{1}{3} m_0 l \omega_1 + \frac{1}{3} m_0 l \omega_2, \tag{3.19}$$

$$\left(v_0 - v_1\right)\left(m_1 + \frac{1}{3} m_0\right) = \left(m_2 + \frac{1}{3} m_0\right) v_2. \tag{3.20}$$

Учитывая выражение (3.16)

$$\left(m_1 + \frac{1}{3} m_0\right)\left(v_0 - v_1\right)\left(v_0 + v_1\right) = \left(m_2 + \frac{1}{3} m_0\right) v_2 v_2 \tag{3.21}$$

получим

$$\left(v_0 + v_1\right)\left(m_2 + \frac{1}{3} m_0\right) v_2 = \left(m_2 + \frac{1}{3} m_0\right) v_2 v_2. \tag{3.22}$$

Сократив выражение (3.22) на $\left(m_2 + \frac{1}{3} m_0\right)$ получим $v_0 + v_1 = v_2$, тогда выражение (3.15) примет иной вид

$$\left(m_1 + \frac{1}{3} m_0\right)\left(v_0 - v_1\right) v_2 = \left(m_2 + \frac{1}{3} m_0\right) v_2 v_2, \tag{3.23}$$

$$\left(v_0 - v_1\right) = v_2 \frac{m_2 + \frac{1}{3} m_0}{m_1 + \frac{1}{3} m_0}, \tag{3.24}$$

$$v_0 + v_1 = v_2 . \tag{3.25}$$

Для нахождения v_0 сложим уравнение

$$2v_0 = v_2 \left(1 + \frac{m_2 + \frac{1}{3} m_0}{m_1 + \frac{1}{3} m_0} \right), \tag{3.26}$$

$$2v_1 = v_2 \left(1 - \frac{m_2 + \frac{1}{3} m_0}{m_1 + \frac{1}{3} m_0} \right). \tag{3.27}$$

Найдем отношение, учитывая, что $m_1 > m_2$

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{m_1 + m_2 + \frac{2}{3} m_0}{m_1 - m_2}. \tag{3.28}$$

Принимая $v_0 \sim \frac{\alpha_0}{2}$ и $v_1 \sim \frac{\alpha_1}{2}$ находим что

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{m_1 + m_2 + \frac{2}{3} m_0}{m_1 - m_2}. \tag{3.29}$$

Так как $v = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{m+\frac{1}{2}m_0}{2m+\frac{1}{3}m_0}gl}$ (получить самостоятельно), то $\alpha_0 \sim 20°...25°$.

Тогда $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ в радианной мере.

3.3 Методика и порядок измерения

1 Внимательно рассмотрите рисунок.

2 Закрепите большой шар (m_1) на железном стержне (m_0) справа от положения равновесия.

3 Закрепите малый шар (m_2) слева от положения равновесия.

4 Отклоните большой шар на угол (α_0) 20° и отпустите его, чтобы произошло упругое взаимодействие с малым шаром.

5 Измерьте угол отклонения малого шара от положения равновесия (α_2).

6 Измерьте угол отклонения большого шара (α_1) после соударения.

7 Повторите опыт 7 раз и занесите полученные данные в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Массы шаров и углы их отклонений

№	α_0 m_1 = 50 г	α_1 m_1 = 50 г
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
	$\bar{\alpha}_0 =$	$\bar{\alpha}_1 =$

По полученным результатам измерения углов отклонения шаров вычислите средне значение углов α_0, α_1, α_2 и составьте соотношение $\dfrac{\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_1}$ и сравните с теоретическим соотношением $\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} = \dfrac{m_1 + m_2 + \frac{2}{3}m_0}{m_1 - m_2}$.

8 Повторите опыт 7 раз с малым шаром и занесите полученные данные в таблицу 3.2.

9 По полученным результатам измерения углов отклонения шаров вычислите средне значение углов α_0, α_1, α_2 и составьте соотношение $\dfrac{\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_2}$ и сравните с теоретическим соотношением (при $m_2 < m_1$)

$$-\frac{\alpha_0}{\alpha_2} = \frac{m_1 + m_2 + \frac{2}{3}m_0}{m_2 - m_1}. \tag{2.30}$$

10 Вывод: если выполняются оба соотношения, то закон сохранения момента импульса шаров, висящих на железных стержнях выполняется с точностью до равенства относительной ошибки измерения углов и относительной ошибки измерения масс $\dfrac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}} \approx \dfrac{\Delta m}{m_1} + \dfrac{\Delta m}{m_2} + \dfrac{\Delta m}{m_0}$ величин, где $\Delta m \sim 1$ г, а $\Delta\alpha \sim 2°$.

Таблица 3.2 – Массы шаров и углы их отклонений

№	α_0 $m_1 = 15$ г	$-\alpha_2$ $m_1 = 15$ г
1		
…		
7		
	$\bar{\alpha}_0 =$	$\bar{\alpha}_2 =$

4 Контрольные вопросы

1 Дать определение траектории, пути и перемещения.

2 Дать определение поступательного и вращательного движений.

3 Что такое ускорение?

4 Написать формулы зависимости скорости и пути от времени при прямолинейном равноускоренном движении.

5 Дать определение кинетической, потенциальной и полной механической энергий.

6 Сформулировать закон сохранения механической энергии.

7 Какие силы называются консервативными?

8 Что называется кинетической энергией поступательного и вращательного движений?

9 Записать формулы для моментов инерции сплошного и полого цилиндров?

10 Рассказать о двух способах определения скорости скатывающегося тела в момент отрыва от наклонной плоскости.

11 Что такое инерциальные и неинерциальные системы отсчета? Сформулировать 1-й закон Ньютона.

12 Что такое масса, как ее измерить?

13 Что такое сила, как ее измерить?

14 Сформулировать 2-й закон Ньютона.

15 Сформулировать 3-й закон Ньютона.

16 Что называется моментом силы относительно неподвижной оси?

17 Что называется моментом инерции тела относительно неподвижной оси?

18 Что называется моментом импульса материальной точки относительно неподвижной точки?

19 Что называется моментом импульса материальной точки (твердого тела) относительно неподвижной оси?

20 Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.

21 Сформулируйте теорему Штейнера.

22 Сформулируйте закон сохранения момента импульса.

23 Как определяется направление вектора момента импульса?

Список использованных источников

1 Савельев, И.В. Курс общей физики: учебное пособие для вузов В 5 кн. Кн. 1. / И.В. Савельев. – М.: Астрель, 2005. – 928 с.

2 Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2004. – 544 с.

3 Сивухин, Д. В. Общий курс физики В 5 т. Т.1 / Д. В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2005. – 560 с.