МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ МЕНЕДЖМЕНТА»

И. Г. Кирин

ФИЗИКА

ЧАСТЬ 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Оренбург
2014

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я73
К43

Кирин, И. Г.

К43 Физика. В 5 ч. Часть 1. Физические основы механики: учеб. пособие / И. Г. Кирин. – Оренбург: ОГИМ, 2014. – 91 с.

Учебное пособие содержит изложение основных разделов современной физики, подготовлено в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и включает пять разделов: физические основы механики, электричество и магнетизм, физика колебаний и волн, квантовая физика, статистическая физика и термодинамика.

Наряду с традиционными темами в нем рассматриваются неравновесная термодинамика, Фурье-оптика, основные положения теоретической физики.

В первой части предлагаемого пособия изложены физические основы механики.

Для студентов, бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов и преподавателей вузов всех форм обучения, а также для тех, кто изучает физику самостоятельно.

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я73

И. Г. Кирин

ФИЗИКА

ЧАСТЬ 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Корректор Л. В. Шамардина

Верстка Н. А. Целаева

Подп. в печать 01.07.14. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бум. офсетная. Гарнитура «Times». Печать цифровая.
Объем 2,76 уч.-изд. л. Тираж 50 экз. Заказ № *2076.*

Отпечатано в типографии ФГБОУ ВПО «ОГИМ»
460038, г. Оренбург, ул. Волгоградская, 16.
Тел./факс (3532) 30-50-00, доб. 127.

Лобовое сопротивление зависит от формы тела и его положения относительно потока, что учитывается безразмерным коэффициентом сопротивления C_x, определяемым экспериментально:

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где ρ – плотность среды; v – скорость движения тела; S – наибольшее поперечное сечение тела.

Составляющую R_x можно значительно уменьшить, подобрав тело такой формы, которая не способствует образованию завихрения.

Подъемная сила может быть определена формулой:

$$R_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где C_y безразмерный коэффициент подъемной силы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

7.6. Движение тел в жидкостях и газах

Пусть на А – тело, движущееся в жидкости или газе, действуют две силы (равнодействующую их обозначим R), одна из которых (R_x) направлена в сторону противоположную движению тела (в сторону потока) – лобовое сопротивление, а вторая (R_y) перпендикулярна этому направлению – подъемная сила (рис. 12).

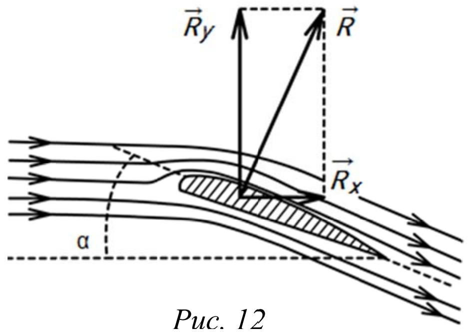

Рис. 12

Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, то на него действует только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае равна нулю. Можно доказать, что в идеальной жидкости равномерное движение происходит без лобового сопротивления. Если рассмотреть движение цилиндра в такой жидкости (рис. 13, то картина линий тока симметрична как относительно прямой, проходящей через точки A и B, так и относительно прямой, проходящей через точки C и D, т. е. результирующая сила давления на поверхность цилиндра будет равна нулю.

Иначе обстоит дело при движении тел в вязкой жидкости (особенно при увеличении скорости обтекания). Вследствие вязкости среды в области, прилегающей к поверхности тела, образуется пограничный слой частиц, движущихся с меньшими скоростями. В результате тормозящего действия этого слоя возникает вращение частиц и движение жидкости в пограничном слое становится вихревым. Если тело не имеет обтекаемой формы (нет плавно утончающейся хвостовой части), то пограничный слой жидкости отрывается от поверхности тела. За телом возникает течение жидкости (газа), направленное противоположно набегающему потоку. Оторвавшийся пограничный слой, следуя за этим течением, образует вихри, вращающиеся в противоположные стороны.

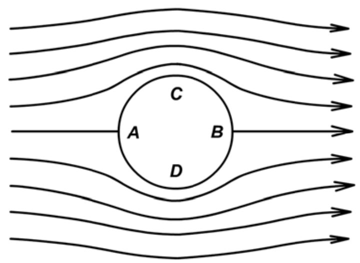

Рис. 13

7.5.2. Метод Пуазейля

Этот метод основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре. Рассмотрим капилляр радиусом R и длиной l. В жидкости мысленно выделим цилиндрический слой радиусом r и толщиной dr (рис. 11). Сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность этого слоя:

$$F = -\eta \frac{dv}{dr} dS = -\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr},$$

где dS — боковая поверхность цилиндрического слоя; знак минус означает, что при возрастании радиуса скорость уменьшается.

Для установившегося течения жидкости сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, уравновешивается силой давления, действующей на его основание:

$$-\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr} = \Delta p \pi r^3, \qquad dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr.$$

После интегрирования, полагая, что у стенок имеет место прилипание жид-кости, т. е. скорость на расстоянии R от оси равна нулю, получаем:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2).$$

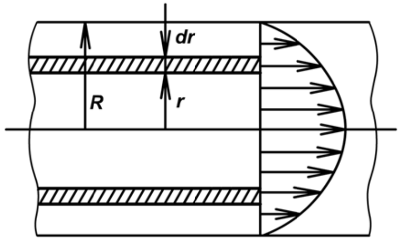

Рис. 11

Отсюда видно, что скорости частиц жидкости распределяются по параболическому закону, причем вершина параболы лежит на оси трубы.

За время $\underline{t}$ из трубы вытечет жидкость, объем которой:

$$V = \int_0^R vt \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p t}{4\eta l} \int_0^R r(R^2 - r^2) dt = \frac{\pi \Delta p t}{2\eta l} \left[\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8\eta l},$$

откуда вязкость:

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8Vt}.$$

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии содержится изложение основных положений общей физики.

Пособие разделено на пять частей. В первой части Физические основы механики, посвященной основам классической и релятивистской механики, рассмотрены: понятие состояния в классической механике, уравнения движения; кинематика твердого тела; динамика твердого тела; законы сохранения; принцип относительности в механике; основы релятивистской механики; кинематика и динамика жидкостей и газов. Во второй части, посвященной электричеству и магнетизму, рассмотрены: электростатика в вакууме; электростатика в веществе; магнитостатика в вакууме; магнитостатика в веществе; уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме; квазистационарные токи; принцип относительности в электродинамике. В третьей части, посвященной физике колебаний и волн, рассмотрены: гармонический и ангармонический осциллятор; физический смысл спектрального разложения; кинематика волновых процессов; нормальные моды; интерференция и дифракция волн; элементы Фурье-оптики. В четвертой части, посвященной квантовой физике, рассмотрены: корпускулярно-волновой дуализм; принцип неопределенности; понятие квантового состояния; принцип суперпозиции; квантовые уравнения движения; операторы физических величин; энергетический спектр атомов и молекул; природа химической связи. В пятой, заключительной части, посвященной статистической физике и термодинамике, равновесной и неравновесной термодинамике, рассмотрены: три начала термодинамики; термодинамические функции состояния; фазовые равновесия и фазовые превращения; элементы неравновесной термодинамики; классическая и квантовая статистики; кинетические явления; системы заряженных частиц; конденсированное состояние.

Пособие будет полезно студентам, обучающимся по всем специальностям, благодаря тому, что в нем содержится изложение базовых положений современной физики, изучение которых позволит успешно осваивать дисциплины, ориентированные на практическое использование в своей деятельности современных научных достижений.

Автор

ГЛАВА 1.ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. Понятие состояния в классической механике

В физике движение рассматривается в самом общем виде как изменение состояния физической системы. Для описания состояния вводится набор измеряемых параметров, к которым со времен Декарта относятся пространственно-временные координаты, или точки пространственно-временного континуума, образующего непрерывное множество. В физике используются и такие параметры состояния систем, как импульс, энергия, температура и др.

Основное достижение физики XVII века – создание классической механики. Основные законы этой науки сформулировал И. Ньютон.

При этом фундаментальное значение имело введенное Ньютоном понятие состояния, которое стало одним из основных для всех физических теорий.

Понятие состояния физической системы является центральным элементом физической теории. Оно подразумевает совокупность данных, характеризующих особенность рассматриваемого объекта или системы в данный момент времени.

Оказывается, что для описания поведения какого-либо объекта одних только законов природы недостаточно, важно знать также начальные условия, описывающие состояние данного объекта в начальный момент времени.

Состояние физической системы – это конкретная определенность системы, однозначно детерминирующая ее эволюцию во времени.

Для описания системы необходимо:

1) определить совокупность физических величин, описывающих данное явление и характеризующих состояние системы, – параметры состояния системы;

$$R_e = \frac{\rho < v > d}{\eta} = \frac{< v > d}{\nu},$$

где $\nu = \eta / \rho$ – кинематическая вязкость; ρ – плотность жидкости; $< v >$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($R_e \le 1000$) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области $1000 \le R_e \le 2000$, а при $R_e = 2300$ (для гладких труб) течение – турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

7.5. Методы определения вязкости

7.5.1. Метод Стокса

Этот метод определения вязкости основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы: сила тяжести $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ (ρ – плотность шарика), сила Архимеда $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$ (ρ' – плотность жидкости) и сила сопротивления, эмпирически установленная Дж. Стоксом: $F = 6\pi\eta r v$, где r – радиус шарика, v – его скорость. При равномерном движении шарика:

$$P = F_A + F \quad или \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta r v,$$

откуда:

$$v = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\eta}.$$

Изменив скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость жидкости (газа).

кий гелий переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется ламинарным (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и турбулентным (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы жидкости переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

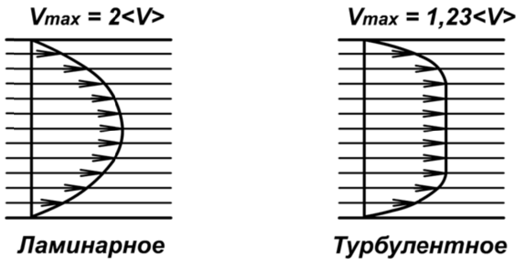

Рис. 10

Профиль усредненной скорости при турбулентном течении в трубах (рис. 10) отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения. Характер течения зависит от безразмерной величины, называемой числом Рейнольдса:

2) выделить начальные условия рассматриваемой системы (зафиксировать значения параметров состояния в начальный момент времени);

3) применить законы движения, описывающие эволюцию системы.

Параметрами, характеризующими состояния механистической системы, являются совокупность всех координат и импульсов материальных точек, составляющих эту систему.

Таким образом, задать состояние механической системы, значит, указать все координаты и импульсы всех материальных точек.

1.2. Уравнения движения

В механике и в классической физике считается, что все физические процессы обратимы. При этом в механике полностью исключается элемент случайности, все заранее жестко причинно-следственно обусловлено. Считается, что задать начальные условия можно абсолютно точно. Точное знание начального состояния системы и законов движения ее предопределяет попадание системы в заранее выбранное, «нужное» состояние.

Понятие причинности в классической физике связывается со строгим детерминизмом в соответствии с фундаментальным принципом Лапласа: «Существующее состояние Вселенной должно рассматриваться как следствие предыдущего состояния и как причину последующего. Если бы в данный момент были известны все силы, действующие в природе, и относительное положение всех составляющих ее частей и ввести в расчет все эти данные, то было бы охвачено одной и той же формулой движения крупнейших тел Вселенной и легчайших атомов, ничто не было бы недостоверным, и будущее, как и прошедшее, стояло бы перед глазами».

Тем самым, в соответствии с представлениями классической механики только динамические законы полностью отражают причинность в природе.

При этом нет места взаимопревращению необходимости и случайности. Случайность понимается как некая досадная помеха в получении истинного результата, а не как необходимость, проявленная в действительности.

При этом предполагает возможность дробления целого на составляющие его элементы вплоть до последнего «кирпичика», причем элемент целого обладает своими индивидуальными особенностями независимо от целостности, в которой он функционирует. При этом выделяется три основных момента механистической концепции целого и части:

а) целое рассматривается как простое соединение элементов. Возможно разложение, разделение целого на его элементы, то есть редукция сложного к простому;

б) элементы целого рассматриваются как неизменяющиеся, простые, неделимые;

в) элемент внутри и вне целого один и тот же. Это формирует представление об объекте познания с присущими ему характеристиками и свойствами, не зависит от условий познаний, а тем более от познающего его субъекта.

В классической физике предполагается абсолютное пространство и время – «абсолютное, истинное математическое время само по себе и самой своей сущности, безо всякого, отношения к чему-либо внешнему протекает равномерно и иначе называется длительностью». Время и пространство представляют собой как бы вместилища самих себя и всего существующего. Во времени все располагается в смысле порядка последовательности, в пространстве – в смысле порядка положения. По самой своей сущности они есть места, приписывать же первичным местам движения нелепо. Вот эти-то места и суть места абсолютные, и только перемещения из этих мест составляют абсолютные движения.

В соответствии с классической механикой движение имеет относительный характер, «относительное движение тела может быть и произведено и изменено без приложения сил к этому телу», то есть в зависимости от системы отсчета, относительно которой это движение рассматривается. При этом система отсчета должна обязательно либо покоиться, либо двигаться равномерно и прямолинейно по отношению к абсолютному пространству. При этом понятие силы вводится в качестве абсолютного элемента. Истинное абсолютное движение, в отличие от относительного, «не может ни произойти, ни из-

нее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

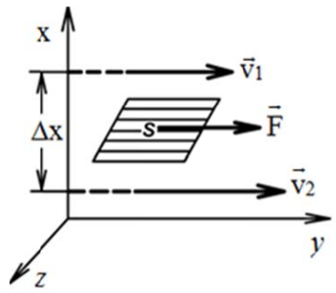

Рис. 9

Сила внутреннего трения F тем больше, чем больше рассматривается площадь поверхности слоя S (рис. 9), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слояк слою. На рисунке представлены два слоя, отстоящие друг от друга на расстоянии Δx и движущиеся со скоростями v_1 и v_2. При этом $v_1 - v_2 = \Delta v$. Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, перпендикулярно скорости течения слоев. Величина $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слояк слою в направлении x, перпендикулярном направлению движения слоев, и называется градиентом скорости. Таким образом, модуль силы внутреннего трения:

$$F = \eta\left|\frac{\Delta v}{\Delta x}\right|S, \qquad (4.1)$$

где коэффициент пропорциональности η, зависящий от природы жидкости, называется динамической вязкостью (или просто вязкостью).

Единица вязкости – паскаль-секунда (Па · с): 1 Па · с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает силы внутреннего трения 1 Н на 1 м^2 поверхности касания слоев (1 Па · с = 1 Н ·с/м^2).

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей η с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения. Особенно сильно от температуры зависит вязкость масел. Например, вязкость касторового масла в интервале 18–40° С падает в четыре раза. Российский физик П.Л. Капица открыл, что при температуре 2,17 К жид-

Рассмотрим два сечения (на уровне h_1 свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне h_2 выхода ее из отверстия) и напишем уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Так как давления p_1 и p_2 в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т. е. $p_1 = p_2$, то уравнение будет иметь вид:

$$\frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g h_2.$$

Из уравнения неразрывности (2.1) следует, что $\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}$, где S_1 и S_2 – площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если $S_1 >> S_2$, то членом $\frac{v_1^2}{2}$ можно пренебречь и:

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh,$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Это выражение получило название формулы Торричелли.

7.4. Вязкость. Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

Вязкость – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медлен-

мениться иначе, как от действия сил, приложенных непосредственно к движущемуся телу». Кроме того масса тела имеет также динамическую трактовку как индивидуальной характеристики тела по отношению к нетождественному ему пустому пространству. То есть понятия «силы» и «массы» в классической механике «надпространственные» понятия.

Под влиянием воздействия на элемент других элементов системы элемент может изменять ряд своих характеристик. Но при этом в классической физике предполагается, что это воздействие является контролируемым и может быть оценено с позиций жесткой причинно-следственной обусловленности результатов воздействия.

В механике Ньютона тела взаимодействуют на расстоянии, и взаимодействие происходит мгновенно. Именно эта мгновенность передачи взаимодействий и обуславливает ненужность какой-либо среды и утверждает принцип дальнодействия.

Кроме того, имеет место принцип «себетождественности» физического объекта – это принцип, который является следствием представлений о непрерывном пустом пространстве и непрерывном времени, в котором выделено индивидуальное тело. «Себетождественность» движущегося тела гарантируется непрерывным изменением координат и непрерывным изменением времени, что позволяет одновременно и зарегистрировать существование тела и определить его скорость между одним положением и другим. Отсюда вывод: перед нами одно и то же тело само себе тождественное.

Из непрерывности состояний «себетождественного» объекта вытекает существование дифференциальных уравнений, с помощью которых, зная начальные условия, составляется *уравнение движения – дифференциальное уравнение, связывающее кинематические переменные такие как скорость, ускорение, и динамических переменные, такие как сила момент силы.*

Зная уравнение движения, путем его интегрирования можно с абсолютной достоверностью предсказать все последующее движение тела. Затем производится интегрирование уравнения движения, имеющего дифференциальный вид. *Интегрирование дифференциальных уравнений сводится к вычислению траекторий движения частицы, которые дают полное описание поведения частицы как в про-*

шлом, настоящем, так и в будущем, то есть характеризуются свойствами детерминированности и обратимости.

Таким образом, достаточно точного задания начальных условий и уравнений движения тела, чтобы получить полное описание движения частицы. Собственно, основной задачей механики является определение траектории движения тела, то есть установление строгой причинной зависимости координат (положения тела в пространстве) в зависимости от времени. Траектория – это линия, которую описывает тело в пространстве при своем движении. Подчеркнем, что в механике движение тела происходит по строго определенным траекториям, то есть вследствие «себетождественности», индивидуальности физического объекта мы всегда можем одновременно измерить и его координату и его скорость.

Таким образом, траектория движения, полученная путем интегрирования дифференциальных **уравнений движения** и дает полное описание поведения частиц в прошлом, настоящем и будущем, то есть характеризуются свойствами детерминированности и обратимости.

Соответственно, основная задача динамики состоит в том, чтобы, зная начальное состояние системы и законы движения (законы-Ньютона), составить уравнение движения и далее однозначно определить состояние системы во все последующие моменты времени, то есть однозначно определить траектории движения частиц.

где ρ_0 – плотность жидкости в манометре. С другой стороны, согласно уравнению Бернулли разность полного и статического давлений равна динамическому давлению:

$$p_0 - p = \frac{\rho v^2}{2}. \tag{3.9}$$

Уменьшение статического давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу работы водоструйного насоса (рис. 7). Струя воды подается в трубку, открытую в атмосферу, так что давление на выходе из трубки равно атмосферному. В трубке имеется сужение, по которому вода течет с большей скоростью. В этом месте давление меньше атмосферного. Это давление устанавливается и в откачанном сосуде, который связан с трубкой через разрыв, имеющийся в ее узкой части. Воздух увлекается вытекающей с большой скоростью водой из узкого конца. Таким образом, можно откачивать воздух из сосуда до давления 100 мм рт. ст. (1 мм рт. ст. = 133,32 Па).

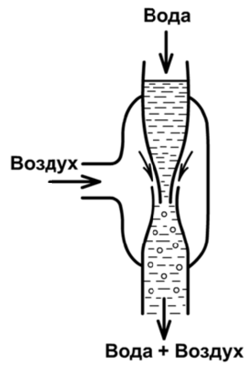

Рис. 7

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого на некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие (рис. 8).

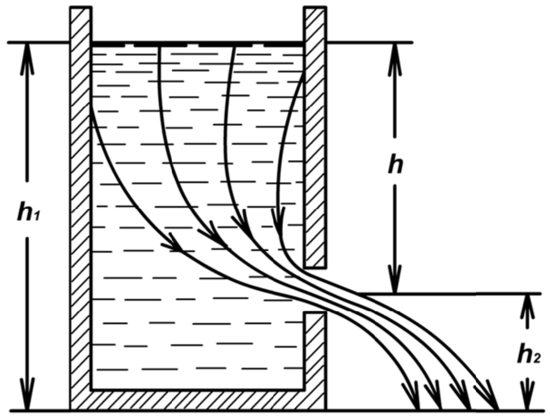

Рис. 8

Из уравнения Бернулли (3.6) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности (2.1) следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т. е. там, где скорость меньше. Это можно продемонстрировать, установив вдоль трубы ряд манометров (рис. 5). В соответствии с уравнением Бернулли опыт покалывает, что в манометрической трубке *B*, прикрепленной к узкой части трубы, уровень жидкости ниже, чем в манометрических трубках *A* и *C*, прикрепленных к широкой части трубы.

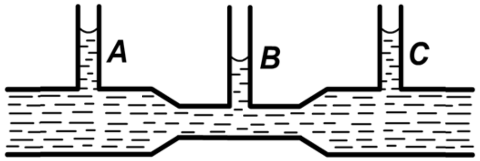

Рис. 5

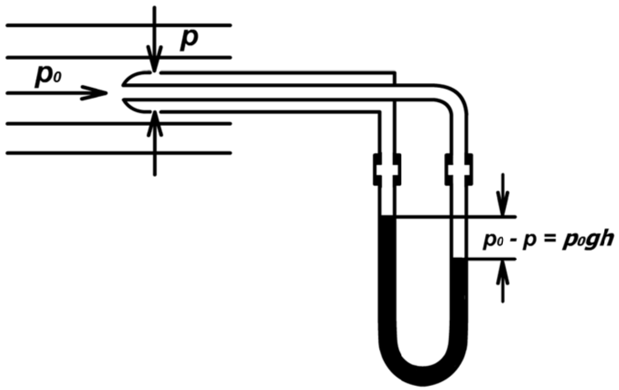

Рис. 6

Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяется трубка Пито–Прандтля (рис. 6). Прибор состоит из двух изогнутых под прямым углом трубок, противоположные концы которых присоединены к манометру. С помощью одной из трубок измеряется полное давление (ρ_0), с помощью другой – статическое (ρ). Манометром измеряется разность давлений:

$$p_0 - p = \rho g h_1, \qquad (3.8)$$

ГЛАВА 2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Модели в механике. Системы отсчета. Длина пути. Вектор перемещения.
2.2. Скорость.
2.3. Ускорение и его составляющие.
2.4. Угловая скорость и угловое ускорение.

2.1. Модели в механике. Системы отсчета. Длина пути. Вектор перемещения

Механика – часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Одним из разделов механики является кинематика.

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают. Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные физические модели.

Простейшей моделью является **материальная точка** – тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Понятие материальной точки – абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач.

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы сводится к изучению **системы материальных точек**. Сначала изучают движение одной материальной точки, а затем переходят к изучению движения системы материальных точек.

Под воздействием тел друг на друга тела могут деформироваться, т. е. изменять форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель – абсолютно твердое тело. **Абсолютно твердым телом** называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения**.

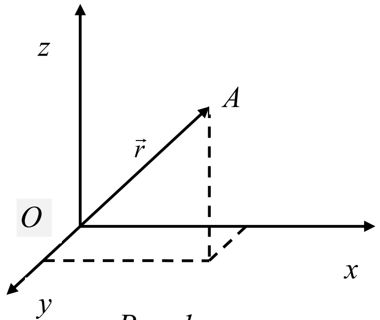

Рис. 1

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движение точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение (рис. 1)

Положение материальной точки определяется по отношению к какому-либо другому, произвольно выбранному телу, называемому **телом отсчета**. С ним связывается **система отсчета** – совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета. В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки *A* в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами *x, y, z* или радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала системы координат в данную точку.

При движение материальной точки ее координаты с течением времени меняются.

В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \qquad (1.1)$$

эквивалентными векторному уравнению:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1.2)$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.1) и приравнивая (3.1) к (3.2), получим:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1S_1v_1\Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2S_2v_2\Delta t. \qquad (3.5)$$

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (2.1), объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т. е.

$$\Delta V = S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t.$$

Разделив выражение (3.5) на ΔV, получим:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_{2,}$$

где S – плотность жидкости. Но так как сечения выбирались произвольно, то можем записать:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho \mathrm{gh} + \mathrm{p} = \mathrm{const}. \qquad (3.6)$$

Выражение (3.6) выведено швейцарским физиком Д. Бернулли и называется **уравнением Бернулли**. Как видно из его вывода, уравнение Бернулли — выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина ρ в формуле (3.6) называется **статическим давлением**, величина $\frac{\rho v^2}{2}$ – **динамическим давлением**. Величина $\rho \mathrm{gh}$ представляет собой **гидростатическое давление**.

Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$) выражение (3.6) принимает вид:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = const, \qquad (3.7)$$

где $\frac{\rho v^2}{2} + p$ называется **полным давлением**.

где E_1 и E_2 — полные энергии жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2 соответственно.

С другой стороны, A – это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2, за рассматриваемый малый промежуток времени Δt. Для переноса массы m от S_1 до S_1' жидкость должна переместиться на расстояние $l_1 = v_1 \Delta t$ и от S_2 до S_2' — на расстояние $l_2 = v_2 \Delta t$. Отметим, что l_1 и l_2 настолько малы, что всем точкам объемов, закрашенных на рис. 4, приписывают постоянные значения скорости v, давления p и высоты h. Следовательно:

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \tag{3.2}$$

где $F_1 = p_1 S_1$ и $F_2 = -p_2 S_2$ (отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости; рис. 4).

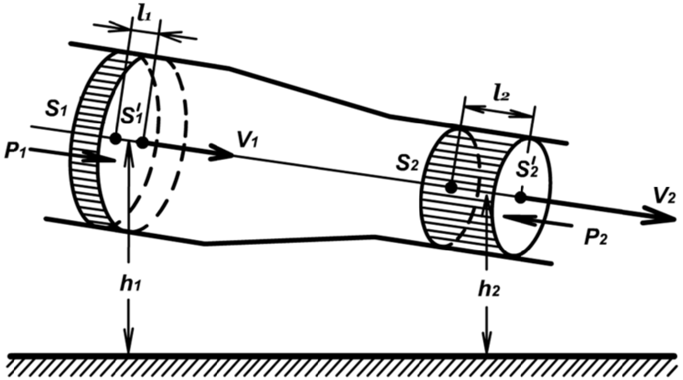

Рис. 4

Полные энергии E_1 и E_2 будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы m жидкости:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \tag{3.3}$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2, \tag{3.4}$$

Уравнения (1.1) и соответственно (1.2) называются **кинематическими уравнениями движения материальной точки.**

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется ***числом степеней свободы****. Если материальная точка свободно движется в пространстве, то она обладает тремя степенями свободы (координаты x, y, z); если она движется по некоторой поверхности, то двумя степенями свободы; если вдоль некоторой линии, то одной степенью свободы.*

Исключая t в уравнениях (1.1) и (1.2) получим уравнение траектории движения материальной точки. **Траектория** движения материальной точки – линия, описываемая этой точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

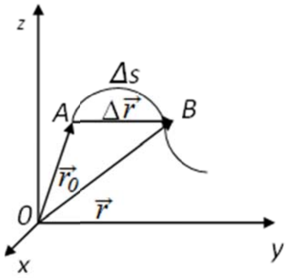

Рис. 2

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории. Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в точке A. Длина участка траектории ***AB***, пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется **длиной пути** Δs и является *скалярной функцией* времени: $\Delta s = \Delta s(t)$. *Вектор* $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), называется **перемещением.**

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta \vec{r}|$ равен пройденному пути Δs.

2.2. Скорость

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина – скорость, которая определяется как *быстрота* движения, так и его *направление* в данный момент времени.

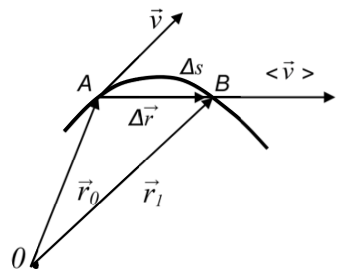

Рис. 3

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени t ей соответствует радиус-вектор r_0. В течении малого промежутка времени Δt точка пройдет путь Δs и получит (бесконечно малое) перемещение Δr.

Вектором средней скорости $<v>$ называется отношение приращения Δr радиуса-вектора точки к промежутку времени Δt:

$$<v>=\frac{\Delta r}{\Delta t}. \qquad (2.1)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением Δr, при неограниченном уменьшении Δt средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется **мгновенной скорость** v:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{dr}{dt}.$$

Мгновенная скорость v, таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор по скорости v направлен по касательной к траектории в сторону движения. По мере уменьшения Δt путь Δs все больше будет приближаться к $|\Delta r|$, поэтому модуль мгновенной скорости:

$$v=|v|=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta r|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

$$v=\frac{ds}{dt}. \qquad (2.2)$$

При **неравномерном движении** модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной $<v>$ – **средней скоростью** неравномерного движения:

$$<v>=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

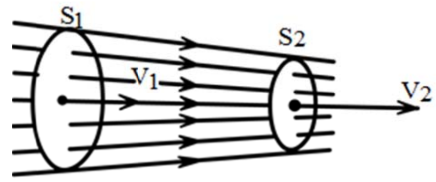

Рис. 3

За время Δt через сечение S проходит объем жидкости $S_2 v_2$, где v_2 – скорость течения жидкости в месте сечения S_2. Здесь предполагается, что скорость жидкости в сечении постоянна. Если жидкость несжимаема ($S = const$), то через сечение S_2 пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение S_1, т. е.:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = const. \qquad (2.1)$$

Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Соотношение (2.1) называется **уравнением неразрывности** для несжимаемой жидкости.

7.3. Уравнение Бернулли и следствия их него

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2, по которой слева направо течет жидкость (рис. 4). Пусть в месте сечения S_1 скорость сечения v_1, давление p_1 и высота, на которой это сечение расположено, h_1. Аналогично, в месте сечения S_2 скорость течения v_2, давление p_2 и высота сечения h_2. За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от сечения S_1 к сечению S_1', от S_2 к S_2'.

Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии $E_2 - E_1$ идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости:

$$E_2 - E_1 = A, \qquad (3.1)$$

Согласно формуле (1.1), сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая **законом Архимеда**: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho g V,$$

где ρ – плотность жидкости, V – объем погруженного в жидкость тела.

7.2. Уравнение неразрывности

Движение жидкостей называется течением, а совокупность частиц движущейся жидкости – потоком. Графически движение жидкостей изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 2). Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, т. е. можно определить состояние движения жидкости. Линии тока в жидкости можно «проявить», например, подмешав в нее какие-либо заметные взвешенные частицы.

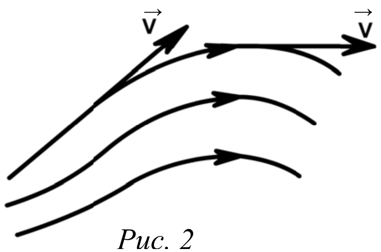

Рис. 2

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют **трубкой тока**. Течение жидкости называется установившимся (или стационарным), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. Выберем два ее сечения S_1 и S_2, перпендикулярные направлению скорости (рис. 3).

Если выражение $ds = vdt$ [см. формулу (2.2)] проинтегрировать по времени в пределах от t до $t+\Delta t$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время Δt: $\langle v\rangle > |\langle v\rangle|$, так как $\Delta s > |\Delta r|$, и только в случай прямолинейного движения $\Delta s = |\Delta r|$.

В случае **равномерного движения** числовое значение мгновенной постоянно, тогда выражение (2.3) примет вид:

$$s = v \int_{t}^{t+\Delta t} dt = v\Delta t.$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, дается интегралом:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

2.3. Ускорение и его составляющие

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является **ускорение**.

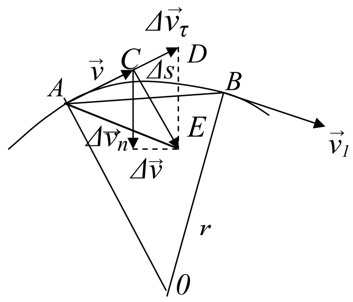

Рис. 4

Рассмотрим **плоское движение**, т. е. движение, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости. Пусть вектор v задает скорость точки A в момент времени t. За время Δt движущаяся точка перешла в положение B и приобрела скорость, отличную от v как по модулю, так и направленную и равную $v_1 = v + \Delta v$. Перенесем вектор v_1 в точку A и найдем Δv.

Средним ускорением неравномерного движения в интервале от t до $t+\Delta t$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости Δv к интервалу времени Δt: $\langle a\rangle = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

Мгновенным ускорением материальной точки в момент времени t будет предел среднего ускорения:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \langle a \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, ускорение есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени.

Разложим вектор Δv на две составляющие. Для этого из точки A по направлению скорости v отложи вектор $\overrightarrow{AD}$, по модулю равный v_1. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{CD}$, равный Δv_t, определяет изменение скорости за момент времени Δt по модулю: $\Delta v_t = v_1 - v$. Вторая же составляющая Δv_n вектора Δv характеризует изменение скорости за время Δt *по направлению.*

Тангенциальная составляющая ускорения:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

т. е. равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Найдем вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка B достаточно близка к точке A, поэтому Δs можно считать дугой окружности некоторого радиуса r, мало отличающейся от хорды AB. Тогда из подобия треугольников AOB и EAD следует $\frac{\Delta v_n}{AB} = \frac{v_1}{r}$, но так как $AB = v\Delta\tau$, то:

$$\frac{\Delta v_n}{AB} = \frac{v_1}{r}.$$

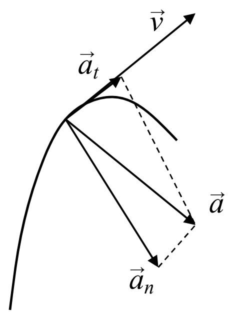

Рис. 5

В пределе при $\Delta t \to 0$ получим $v_1 \to v$.

Поскольку $v_1 \to v$, угол EAD стремится к 0, а так как треугольник EAD равнобедренный, то угол ADE между v и Δv_n стремится к прямому. Следовательно, при $\Delta t \to 0$ векторы v и Δv_n оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор Δv_n, перпендикулярный вектору скорости, направлен к центру

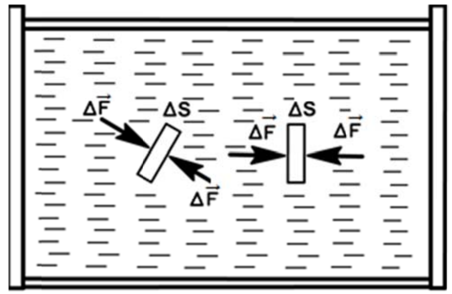

Рис. 1

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется давлением жидкости:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Единица измерения – паскаль (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2.

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется **закону Паскаля**: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S столба жидкости его высоте h, плотности S, весу P=$SgSh$ и давление на нижнее основание:

$$p = P / S = SgSh / S = Sgh, \qquad (1.1)$$

т. е. давление изменяется линейно с высотой. Давление ρgh называется гидростатическим.

ГЛАВА 7. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т. е. объем газа определяется объемом того сосуда, который он занимает.

Жидкость же, имея определенный объем, принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов, среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

7.1. Давление в жидкости и газе

В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как сплошные, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. Плотность же газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что сжимаемостью жидкости во многих задачах можно пренебречь и пользоваться единым понятием несжимаемой жидкости – жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент ΔS с силами ΔF, которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке ΔS, так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение (рис. 1).

ее кривизны. Вторая составляющая ускорения a_n называется **нормальной составляющей ускорения** и направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют также **центростремительным ускорением**).

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Итак, тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по модулю (направлена по касательной к траектории), а нормальная составляющая ускорения – быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории).

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

1. $a_\tau = 0,\ a_n = 0$ – прямолинейное равномерное движение;

2. $a_\tau = a = const,\ a_n = 0$ – прямолинейное равнопеременное движение. При таком виде движения:

$$a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Если начальный момент времени $t_1 = 0$, а начальная скорость $v_1 = v_0$, то, обозначив $t_2 = t$ и $v_2 = v$, получим:

$$a = \frac{(v - v_0)}{t},$$

откуда:

$$v = v_0 + at .$$

Проинтегрировав эту формулу в пределах от нуля до произвольного момента времени *t*, найдем, что длина пути, пройденного точкой, в случае равнопеременного движения:

$$s=\int_0^t v\,dt=\int_0^t (v_0+at)dt=v_0t+\frac{at^2}{2};$$

3. $a_\tau=f(t),\ a_n=0$ – прямолинейное движение с переменным ускорением.

4. $a_\tau=0,\ a_n=const$. При $a_\tau=0$ скорость по модулю не изменяется, а изменяется по направлению. Из формулы $a_n=\dfrac{v^2}{r}$ следует, что радиус кривизны должен быть постоянным.

5. $a_\tau=0,\ a_n\neq 0$ равномерное криволинейное движение;

6. $a_\tau=const,\ a_n\neq 0$ – криволинейное равнопеременное движение;

7. $a_\tau=f(t),\ a_n\neq 0$ – криволинейное движение с переменным ускорением.

2.4. Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса R. Ее положение через промежуток времени Δt зададим углом $\Delta\varphi$. Элементарные (бесконечно малые) повороты можно рассматривать как векторы (они обозначаются $\Delta\vec{\varphi}$ или $d\vec{\varphi}$). Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направление поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки окружности, т.е. подчиняется **правилу правого винта**. Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются **псевдовекторами,** или **аксиальными векторами**. Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

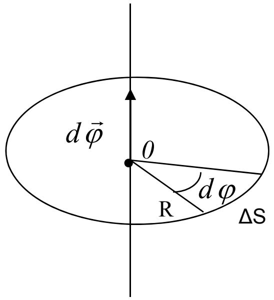

Рис. 6

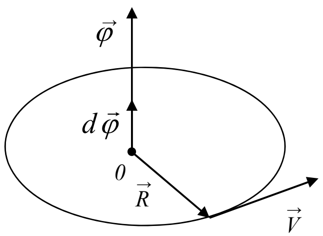

Рис. 7

Физический смысл выражения (2.6) состоит в том, что существует принципиальная возможность перехода материальных объектов, имеющих массу покоя, в электромагнитное излучение, не имеющее массы покоя; при этом выполняется закон сохранения энергии.

Классическим примером этого является аннигиляция электрон-позитронной пары и, наоборот, образование пары электрон – позитрон из квантов электромагнитного излучения:

$$2h\nu \rightleftarrows e^+ + e^-.$$

В релятивистской динамике значение кинетической энергии $E_к$ определяется как разность энергий движущегося E и покоящегося E_0 тела:

$$E_k=E-E_0=mc^2-m_0c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right). \tag{2.7}$$

При $v \ll c$ уравнение (2.7) переходит в классическое выражение:

$$E_k=\frac{m_0v^2}{2}.$$

Из формул (2.5) и (2.4) найдем релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом тела:

$$E^2=m^2c^4=m_0^2c^4+p^2c^2;\quad E=\sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2} \tag{2.8}$$

Закон взаимосвязи массы и энергии полностью подтвержден экспериментами по выделению энергии при протекании ядерных реакций. Он широко используется для расчета энергического эффекта при ядерных реакциях и превращениях элементарных частиц.

движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света в вакууме) скоростями.

Вследствие однородности пространства в релятивистской механике выполняется **закон сохранения релятивистского импульса**: релятивистский импульс замкнутой системы тел сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Изменение скорости тела в релятивистской механике влечет за собой изменение массы, а, следовательно, и полной энергии, т. е. между массой и энергией существует взаимосвязь. Эту универсальную зависимость – **закон взаимосвязи массы и энергии** – установил А. Эйнштейн:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что любой массе (движущейся m или покоящейся m_0) соответствует определенное значение энергии. Если тело находится в состоянии покоя, то его энергия покоя:

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Энергия покоя является внутренней энергией тела, которая складывается из кинетических энергий всех частиц, потенциальной энергии их взаимодействия и суммы энергий покоя всех частиц.

В релятивистской механике не справедлив закон сохранения массы покоя. Именно на этом представлении основано объяснение дефекта массы ядра и ядерных реакций.

В СТО выполняется **закон сохранения релятивистской массы и энергии**: изменение полной энергии тела (или системы) сопровождается эквивалентным изменением его массы:

$$\Delta m = \Delta E / c^2, \;\; \Delta E = \Delta m c^2. \qquad (2.6)$$

Таким образом, масса тела, которая в классической механике является мерой инертности или гравитации, в релятивистской механике является еще и мерой энергосодержания тела.

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т. е. так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$. Размерность угловой скорости $\dim\omega = \mathrm{T}^{-1}$, а ее единица – радиан в секунду (рад/с).

Линейная скорость точки:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

т. е.:

$$v = R\omega.$$

В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{R}\right].$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен $\omega R \sin \widehat{\vec{\omega} R}$, а направление совпадает с направление поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\omega}$ к $\vec{R}$.

Если $\omega = const$, то вращение равномерное и его можно характеризовать **периодом вращения** T – временем, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол 2π. Так как промежутку $\Delta t = T$ соответствует $\Delta\varphi = 2\pi$, то $\omega = \frac{2\pi}{T}$ откуда $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени называется **частотой вращения:**

$$\psi = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

откуда:

$$\omega = 2\pi\psi.$$

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

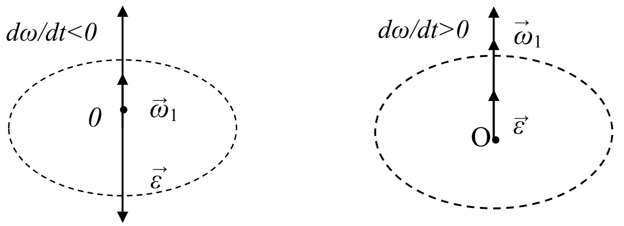

Рис. 8

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$, при замедленном – противонаправлен ему.

Тангенциальная составляющая ускорения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, v = \omega R \text{ и } a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

Нормальная составляющая ускорения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Таким образом, связь между линейными (длина пути s, пройденного точкой по дуге окружности радиуса R, линейная скорость v, тангенциальное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n) и угловыми величинами (угол поворота φ, угловая скорость ω, угловое ускорение ε) выражается формулами:

$$s = R\varphi,\ v = R\omega,\ a_\tau R\varepsilon, a_n = \omega^2 R.$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности ($\varepsilon = const$):

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

где m_0 – **масса покоя**, т. е. масса материальной точки, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой точка покоится; m – масса точки в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью v. Из принципа относительности Эйнштейна, утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует, что основной закон динамики Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

оказывается инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, если в нем справа стоит производная от **релятивистского импульса**:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}\right), \tag{2.2}$$

или:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2.3}$$

где:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}. \tag{2.4}$$

Из приведенных формул следует, что при скоростях, значительно меньших скорости света в вакууме, они переходят в формулы классической механики. Следовательно, условием применимости законов классической механики является условие $v << c$. Законы Ньютона получаются как следствие СТО для предельного случая $v << c$. Таким образом, классическая механика – это механика макротел,

6.2.4. Релятивистский закон сложения скоростей

Пусть материальная точка движется в системе K' вдоль оси x', а система K' движется относительно K со скоростью v (оси x и x' совпадают).

Тогда:

$$u_x = \frac{dx}{dt},\ u_x' = \frac{dx'}{dt'},\ dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ dt = \frac{dt' + v\,dx'/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Произведя вычисления, получим релятивистский закон сложения скоростей:

$K' \to K$, $\quad K \to K'$,

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + v u_x'/c^2},\quad u_x' = \frac{u_x - v}{1 - v u_x/c^2}.$$

Если скорости v, u'_x, u малы по сравнению со скоростью света, то эти формулы переходят в привычный закон сложения скоростей в классической механике. Релятивистский закон сложения скоростей не противоречит второму постулату Эйнштейна: если $u'_x = c$, то $u_x = c$, т. е. скорость c – предельная скорость, которую невозможно превысить.

6.2.5. Основной закон релятивистской динамики

Согласно представлениям классической механики, масса тела есть величина постоянная. Однако в конце XIX века на опытах с электронами было установлено, что масса тела зависит от скорости его движения, а именно возрастает с увеличением v по закону:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.1}$$

ГЛАВА 3. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1. Первый закон Ньютона. Масса. Сила

Динамика является основным разделом механика, в ее основе лежат три закона Ньютона, сформулированные им в 1687 году. Законы Ньютона играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта. Их рассматривают как систему взаимосвязанных законов и опытной проверке подвергают не каждый отдельный закон, а всю систему в целом.

Первый закон Ньютона: *всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние.* Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**. Поэтому первый закон Ньютона называют также законом **инерции.**

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются инерциальными системами отсчета. Инерциальной системой отсчета является такая система отсчета, относительно которой материальная точка, *свободная от внешних воздействий,* либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. *Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.*

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют скорость своего движения, т. е., иными словами, приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы).

Масса тела – физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерциальные (инертные масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная масса равны друг другу (с точностью, не меньшей 10^{-12} их значения).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость движения, т. е. приобретают ускорение (динамическое проявление сил), либо деформируются, т. е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил). В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Итак, **сила** – это величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

Таким образом:

$$\tau' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \tau < \tau',$$

т. е. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна. Следовательно, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов, т. е. ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся.

6.2.3. Длина тел в разных системах отсчета

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы K'. Длина стержня в системе K' равна $l'_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1, x'_2 – не изменяющиеся со временем t' координаты начала и конца стержня; индекс 0 показывает, что в системе K' стержень покоится. Определим длину стержня в системе K, относительно которой он движется со скоростью *v*. Для этого необходимо измерить координаты концов стержня x'_1 и x'_2 в системе *K* в один и тот же момент времени *t*. Их разность $l = x_2 - x_1$ и даст длину стержня в системе *K*:

$$l_0' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

т. е. $l_0' = \dfrac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Таким образом, размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения в $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ раз, т. е. лоренцево сокращение длины тем больше, чем больше скорость движения.

т. е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.

Если события в системе *К* пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), но одновременны ($t_1=t_2$), то в системе *К'*, согласно преобразованиям Лоренца:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$t_1' = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t_2' = \frac{t_2 - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x_1' \neq x_2', \quad t_1' \neq t_2'.$$

Таким образом, в системе *К'* эти события, **оставаясь пространственно разобщенными, оказываются и неодновременными**.

6.2.2. Длительность событий в разных системах отсчета.

Пусть в некоторой точке *А* с координатой *x*, покоящейся относительно системы *К*, происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события) $\tau = t_2 - t_1$, где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе *К'*:

$$\tau' = t_2' - t_1',$$

где: $$t_1' = \frac{t_1 - (v/c^2)x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} 14, \quad t_2' = \frac{t_2 - (v/c^2)x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

3.2. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона – *основной закон динамики поступательного движения* – отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Если рассмотреть действие различных сил на одно и то же тело, то оказывается, что ускорение, приобретаемое телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей приложенных сил:

$$\vec{a} \sim \vec{F}(m = const). \tag{2.1}$$

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными, а именно:

$$\vec{a} \sim 1/m(\vec{F} = const). \tag{2.2}$$

Используя выражение (2.1) и (2.2) и учитывая, что сила и ускорение – величины векторные, можем записать:

$$\vec{a} = k\vec{F}/m. \tag{2.3}$$

Соотношение (2.3) выражает **второй закон Ньютона:** ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

В СИ коэффициент пропорциональность *k=1.* Тогда:

$$\vec{a} = \vec{F}/m$$

или:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{2.4}$$

Учитывая, что масса материальной точки (тела) в классической механике есть величина постоянная, в выражении (2.4) ее можно внести под знак производной:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \tag{2.5}$$

Векторная величина:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \tag{2.6}$$

численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется **импульсом (количеством движения)** этой материальной точки.

Подставляя (2.6) в (2.5), получим:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{2.7}$$

Это выражение – **более общая формулировка второго закона Ньютона**: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Выражение (2.7) называется **уравнением движения материальной точки**.

Единица силы в СИ – **ньютона** (Н): 1 Н – сила, которая массе 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг м/с}^2.$$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Первый закон Ньютона можно получить из второго. Действительно, в случае равенства нулю равнодействующей сил (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение [см. (2.3)] также равно нулю. Однако *первый закон Ньютона* рассматривается как *самостоятельный закон* (а не как следствие второго закона), так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых только и выполняется уравнение (2.7).

В механике большое значение имеет **принцип независимости действия сил:** если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач. Например, действующая сила $\vec{F} = m\vec{a}$ разложена на два компонента: тангенциальную силу $\vec{F}_\tau$ (направлена по касательной к траектории) и нормальную силу $\vec{F}_n$ (направлена по нормали к центру кривизны). Используя выражение $\vec{a}_\tau = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ и $\vec{a}_n = \dfrac{\vec{v}^2}{R}$, а также $v = R\omega$, можно записать:

Таблица 3

Прямые Галилея	Преобразования Лоренца	Обратные Галилея	Преобразования Лоренца
$x' = x - v$	$x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$x = x' + vt$	$x' = \dfrac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
$y' = y$	$y' = y$	$y = y'$	$y = y'$
$z' = z$	$z' = z$	$z = z'$	$z = z'$
$t' = t$	$t' = \dfrac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$t = t'$	$t = \dfrac{t' - \left(v/c^2\right)x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Из преобразований Лоренца вытекает, что при малых скоростях (по сравнению со скоростью света) они переходят в преобразования Галилея. При $v>c$ выражения для x, t, x' и t' теряют физический смысл, т. е. движение со скоростью большей скорости света в вакууме невозможно. Кроме того, из табл. 3 следует, что как пространственные, так и временные преобразования Лоренца не являются независимыми: в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени – пространственные координаты, т. е. устанавливается взаимосвязь пространства и времени. Таким образом, релятивистская теория Эйнштейна оперирует не трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а рассматривает **неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время**.

6.2. Следствия из преобразований Лоренца

6.2.1. Относительность одновременности.

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. В системе K' им соответствуют координаты x'_1 и x'_2 и моменты времени t'_1 и t'_2. Если события в системе K происходят в одной точке (x_1=x_2) и являются одновременными (t_1=t_2), то, согласно преобразованиям Лоренца:

$$x_1' = x_2',\ t_1' = t_2',$$

здесь относительно произвольно выбранной инерциальной системы отсчета; физически эти состояния равноправны.

Второй постулат утверждает: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Анализ явлений в инерциальных системах отсчета, проведенный А. Эйнштейном на базе сформулированных им постулатов, показал, что преобразования Галилея несовместимы с ними и, следовательно, должны быть заменены преобразованиями, удовлетворяющими постулатам СТО.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета: *K* (с координатами *x, y, z*) и *K′* (с координатами *x′, y′, z′*), движущуюся относительно *K* вдоль оси *x* со скоростью $\vec{v}=const.$ Пусть в начальный момент времени ($t = t' = 0$), когда начала систем координат совпадают ($0 = 0'$), излучается световой импульс. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах одна и та же и равна *c*. Поэтому, если за время *t* в системе *K* сигнал дойдет до некоторой точки *A*, пройдя расстояние:

$$x = ct, \tag{1.1}$$

то в системе *K′* координата светового импульса в момент достижения точки *A* будет равна:

$$x' = ct', \tag{1.2}$$

где *t′* – время прохождения светового импульса от начала координат до точки *A* в системе *K′*. Вычитая (1.1) из (1.2), получим:

$$x' - x = c(t' - t).$$

Так как $x \neq x'$ (система *K′* перемещается относительно *K*), то получается, что $t \neq t'$, т. е. **отсчет времени в системах *K′* и *K* различен или имеет относительный характер** (в классической механике считается, что время во всех инерциальных системах отсчета протекает одинаково, т. е. $t \neq t'$).

А. Эйнштейн показал, что в СТО классические преобразования Галилея при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой заменяются преобразованиями Лоренца (1904 г.), удовлетворяющими первому и второму постулатам (табл. 3).

$$\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau = m\frac{d\vec{v}}{dt};$$

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = mv^2 / R = m\omega^2 R.$$

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, согласно принципу независимости действия сил, под $\vec{F}$ во втором законе Ньютона понимают результирующую силу.

3.3. Третий закон Ньютона

Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется **третьим законом Ньютона:** всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

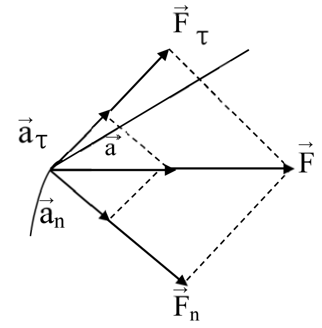

Рис. 1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \tag{3.1}$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй;

$\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парами* и являются *одной природы.*

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики *отдельной* материальной точки к динамике *системы* материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

3.4. Силы трения

Из опыта известно, что всякое тело, движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, при отсутствии действия на него других сил с течением времени замедляет свое движение и в конце концов останавливается. Это можно объяснить существованием **силы**

трения, которая препятствует скольжению соприкасающихся тел друг относительно друга. Силы трения зависят от относительных скоростей тел. Силы трения могут быть разной природы, но в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел.

$$\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau = m\frac{d\vec{v}}{dt};$$

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n;\, F_n = mv^2/R = m\omega^2 R.$$

Различают внешнее (сухое) и внутреннее (жидкое или вязкое) трение. **Внешним трением** называется трение, возникающие в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Если соприкасающиеся тела неподвижны друг относительно друга, говорят о **трении покоя**, если же происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости этих тел, то в зависимости от характера и относительного движения говорят о **трении скольжения, качения** или **верчения.**

Внутренним трением называется трение между частями одного и того же тела, например, между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В отличие от внешнего трения здесь отсутствует трение покоя. Если тела скользят относительно друг друга и разделены прослойкой вязкой жидкости (смазки), то трение происходит в слое смазки. В таком случае говорят о **гидродинамическом трении (**слой смазки достаточно толстый**)** и **граничном трении** (толщина смазочной прослойки =0.1 мкм и меньше).

Внешнее трение обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей; в случае же очень гладких поверхностей трение обусловлено силами межмолекулярного притяжения.

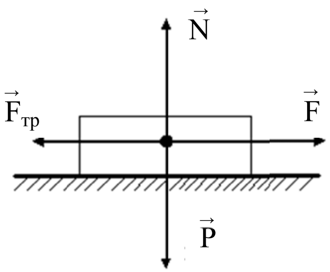

Рис. 2

Рассмотрим лежащее на плоскости тело, к которому приложена горизонтальная сила $\vec{F}$.

Тело придет в движение лишь тогда, когда приложенная сила $\vec{F}$ будет больше силы трения $\vec{F}_{тр}$. Французские физика Г.Амонтон (1663–1705) и Ш. Кулон (1736–1806) опытным путем установили следующий

ГЛАВА 6. ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

6.1. Постулаты специальной теории относительности

Специальная теория относительности представляет собой современную физическую теорию пространства и времени. В СТО, как и в классической механике, предполагается, что время однородно (инвариантность физических законов относительно выбора начала отсчета времени), а пространство однородно и изотропно (симметрично). Специальная теория относительности называется также **релятивистской теорией**, а явления, описываемые этой теорией, – **релятивистскими эффектами**.

В основу СТО легло положение, согласно которому никакая энергия, никакой сигнал не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме, а скорость света в вакууме постоянна и не зависит от направления распространения.

Это положение формулируется в виде двух постулатов А. Эйнштейна: **принципа относительности** и **принципа постоянства скорости света**.

Первый постулат является обобщением механического принципа относительности Галилея **на любые физические процессы** и утверждает, что законы физики имеют одинаковую форму (инвариантны) во всех инерциальных системах отсчета: любой процесс протекает одинаково в изолированной материальной системе, находящейся в состоянии покоя, и в такой же системе, находящейся в состоянии равномерного прямолинейного движения. Состояние покоя или движения определяется

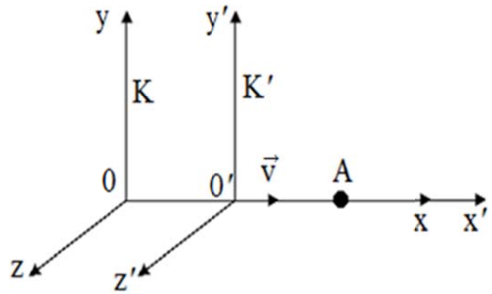

Рис. 1

заполнена материей в форме вещества и поля, а пространство выступает как всеобщее свойство материи. Время всегда связано с движением и развитием материи. Таким образом, **пространство** – это форма бытия материи, которая выражает ее протяженность и структурность; **время** – это форма бытия материи, характеризующая длительность существования всех объектов, полей и последовательность смены событий. Основными свойствами пространства и времени являются: а) единство и неразрывная связь материи, и времени; б) абсолютная непрерывность и относительная прерывность пространства и времени. Непрерывность проявляется в распространении материальных полей в пространстве всех тел и систем, в бесконечном следовании элементов длины при движении тела между двумя точками. Прерывность пространства относительна и проявляется в раздельном существовании материальных объектов и систем, каждая из которых имеет определенные размеры и границы. Прерывность времени характеризуется лишь временем существования качественных состояний материи, каждое из которых возникает и исчезает, переходя в другие формы; в) время обладает длительностью, однонаправленностью, необратимостью.

Последовательно развивая новые, отличные от классических, представления о пространстве и времени, А. Эйнштейн в начале XX века создал **специальную теорию относительности** (СТО). В рамках этой теории удалось согласовать принцип относительности с электродинамикой Максвелла. При этом новая теория не отменяла старую (ньютоновскую механику), а включала ее в себя как частный, предельный случай.

закон: сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ пропорциональна силе N нормального давления, с которой одно тело действует на другое:

$$\vec{F}_{тр} = f\vec{N},$$

где f – коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей.

Найдем значение коэффициента трения. Если тело находится на наклонной плоскости с углом наклона α, то оно приходит в движение, только когда тангенциальная составляющая $\vec{F}$ силы тяжести $\vec{P}$ больше силы трения $\vec{F}_{тр}$.

Следовательно, в предельном случае (начало скольжения тела) $\vec{F} = \vec{F}_{тр}$, или:

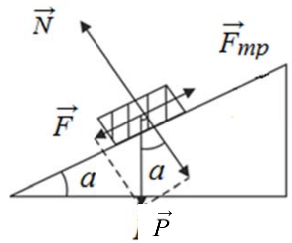

Рис. 3

$$P\sin\alpha_0 = fN = fP\cos\alpha_0,$$

откуда: $f = tg\,\alpha_0$.

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла α_0, при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

Для гладких поверхностей определенную роль начинает играть межмолекулярное притяжение. Для них применяется **закон трения скольжения:**

$$F_{тр} = f_{ист}(N + Sp_0),$$

где p_0 –добавочное давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения, которые быстро уменьшаются с увеличением расстояния между частицами; S – площадь контакта между телами; $f_{ист}$ – истинный коэффициент трения скольжения.

Трение играет большую роль в природе и технике. Благодаря трению движется транспорт, удерживается забитый в стену гвоздь и т. д.

В некоторых случаях силы трения оказывают вредное действие и поэтому их надо уменьшать. Для этого на трущихся поверхностях наносят смазку (сила трения уменьшается примерно в 10 раз), которая заполняет неровностями между этими поверхностями и располагается тонкими слоями между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, а скользят друг относительно друга отдельные слои жидкости. Таким образом, внешнее трение твердых тел заменяется значительно меньшим внутренним трением жидкости.

Радикальным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения трением качения (шариковые и роликовые подшипники и т. д.). Сила трения качения определяется по закону, установленному Кулоном:

$$\vec{F}_{тр} = f_к \vec{N} / \vec{r}, \tag{4.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус катящего тела; $f_к$ – коэффициент трения качения, имеющий размерность: $\dim f_k = L$.

Из (4.1) следует, что сила трения качения обратно пропорциональна радиусу катящего тела.

3.5. Уравнение движения тела переменной массы

Движение некоторых тел сопровождается изменением их массы, например масса ракеты уменьшается вследствие истечения газов, образующихся при сгорании топлива, и т. п.

Выведем уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты. Если в момент времени t масса ракеты m, а ее скорость $\vec{v}$, то по истечении времени dt ее масса уменьшится на dm и станет равной m – dm, а скорость станет равной $\vec{v} + d\vec{v}$. Изменение импульса системы за отрезок времени dt:

$$d\vec{p} = [(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + \vec{u})] - m\vec{v},$$

где u – скорость истечения газов относительно ракеты. Тогда:

$$d\vec{p} = m d\vec{v} + \vec{u} dm$$

(учли, что $dm \cdot dv$ – малый высшего порядка малости по сравнению с остальными).

Если на систему действует внешние силы, то $d\vec{p} = \vec{F} dt$, поэтому:

$$\vec{F} dt = m d\vec{v} + \vec{u} dm,$$

или:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \frac{dm}{dt} \tag{5.1}$$

классической механики (формула (1.4)), то при переходе от одной инерциальной системы к другой законы электродинамики должны меняться, так как должна меняться скорость света. Таким образом, обнаружились противоречия между электродинамикой и механикой Ньютона, законы которой согласуются с принципом относительности Галилея. Для преодоления возникших трудностей предлагались различные способы:

1. Принять несостоятельность принципа относительности применительно к электромагнитным явлениям. Еще со времен Фарадея электромагнитные явления рассматривались как процессы в особой, всепроникающей среде, заполняющей все пространство, – **эфире**. Согласно Х. Лоренцу, инерциальная система отсчета, покоящаяся относительно эфира, – это особая система, в которой законы электродинамики Максвелла справедливы. Лишь в этой системе отсчета скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям.

2. Считать ошибочными уравнения электродинамики Максвелла и попытаться изменить их таким образом, чтобы они при переходе от одной инерциальной системы к другой (в соответствии с классическими представлениями о пространстве и времени) не менялись. Такая попытка, в частности, была предпринята Г. Герцем, который считал, что эфир полностью увлекается движущимися телами, поэтому электромагнитные явления протекают одинаково, независимо от того, покоится тело или движется. Принцип относительности справедлив.

3. Отказаться от классических представлений о пространстве и времени, с тем, чтобы сохранить и принцип относительности, и законы Максвелла. С этой точки зрения оказываются неточными не уравнения электромагнитного поля, а законы механики Ньютона, согласующиеся со старыми представлениями о пространстве и времени.

Таким образом, изменять нужно законы классической механики, а не законы электродинамики Максвелла.

Вспомним, как трактовались пространство и время в классической физике. Пространство рассматривалось как бесконечная пустая протяженность, вмещающая в себе все тела и не зависящая от материи. Время рассматривалось как абсолютный фактор равномерного потока длительности, в котором все возникает и исчезает. При этом время не зависит ни от каких процессов в мире.

Развитие естествознания опровергло эти представления. Никакого абсолютного пространства и времени не существует. Вселенная откуда:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \qquad (1.4)$$

а также:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{u})}{dt} = \vec{a}'. \qquad (1.5)$$

Если на точку A другие тела не действуют, то $\vec{a}$ и согласно (1.5) $\vec{a}' = 0$, т. е. подвижная система K' является инерциальной – изолированная материальная точка либо движется относительно нее равномерно и прямолинейно, либо покоится. Из выражения (1.5) следует, что:

$$\text{или} \quad \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{или} \quad \frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = m,$$

т.е. уравнения Ньютона (уравнения динамики) для материальной точки одинаковы во всех инерциальных системах отсчета или инварианты по отношению к преобразованиям Галилея. Этот результат часто формулируют следующим образом: **равномерное и прямолинейное движение системы как целого не влияет на ход протекающих в ней механических процессов**.

Классическая механика Ньютона достоверно описывает движение макроскопических тел, движущихся со скоростями, намного меньшими скорости света. В конце XIX века было установлено, что выводы классической механики противоречат некоторым опытным данным. В частности, при изучении движения быстрых заряженных частиц оказалось, что их движение не подчиняется законам Ньютона. Далее возникли затруднения при попытках применить классическую механику для объяснения распространения света. Согласно законам электродинамики, скорость распространения электромагнитных волн в вакууме одинакова по всем направлениям и приблизительно равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Но в соответствии с законами классической физики скорость света может равняться c только в одной избранной системе отсчета. В любой другой системе отсчета, движущейся относительно избранной системы со скоростью v, она должна уже равняться c-v, или c+v. Это означает, что если справедлив закон сложения скоростей

Второе слагаемое в правой части (5.1) называется **реактивной силой** $\vec{F}_p$. Если $\vec{u}$ противоположен $\vec{v}$ по направлению, то ракета ускоряется, а если совпадает с $\vec{v}$, то тормозится.

Таким образом, мы получили **уравнение движения тела переменной массы:**

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p, \qquad (5.2)$$

которое впервые было выведено И. В. Мещерским (1859–1935).

Идея применения реактивной силы для создания летательных аппаратов высказывалась в 1881 году Н. И. Кибальчичем (1854–1881). К. Э. Циолковский (1857–1935) в 1903 году опубликовал статью, где предложил теорию движения ракеты и основы теории жидкостного реактивного двигателя. Поэтому его считают основателем отечественной космонавтики.

Применим уравнение (5.1) к движению ракеты, на которую не действуют никакие внешние силы. Полагая F=0 и считая, что скорость выбрасываемых газов относительно ракеты постоянна (ракета движется прямолинейно), получим:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt}$$

откуда:

$$\vec{v} = -\vec{u}\int\frac{dm}{m} = -\vec{u}\ln m + C.$$

Значение постоянной интегрирования С определим из начальных условий. Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее стартовая масса m_0, то С = $u \ln m_0$. Следовательно,

$$\vec{v} = \vec{u}\ln(m_0/m). \qquad (5.3)$$

Это соотношение называется **формулой Циолковского**. Она показывает, что: 1) чем больше конечная масса ракеты m , тем больше должна быть стартовая масса ракеты m_0; 2) чем больше скорость истечение газов $\vec{u}$, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

Выражение (5.2) и (5.3) получены для нерелятивистских движений, т. е. для случаев, когда скорость v и u малы по сравнению со скоростью распространения света в вакууме.

3.6. Энергия, работа, мощность

Единая мера различных форм движения материи называется **энергией**. Энергия системы материальных тел характеризует систему с точки зрения возможных в ней количественных и качественных превращений движения. Эти превращения обусловлены как взаимодействием тел системы между собой, так и с внешними по отношению с системе телами.

Движение является неотъемлемым свойством материи. Поэтому всякое тело обладает энергией, являющейся мерой его движения. Для количественной характеристики качественно различных форм движения, изучаемых в физике, вводятся соответствующие им виды или формы энергии – механическая, внутренняя, электромагнитная и другие.

Причиной изменения состояния механического движения тела, а, следовательно, и его энергии, является взаимодействие тела с другими телами. Для характеристики воздействия этих тел на рассматриваемое тело в механике введено понятие силы. Поэтому можно говорить, что изменение движения и энергии вызывается силами. Процесс изменения энергии тела под действием силы называется **процессом свершения работы**, а приращение энергии тела в этом процессе называется **работой**, совершенной силой. Опыт показывает, что сила, приложенная к телу, совершает работу только тогда, если тело при этом перемещается.

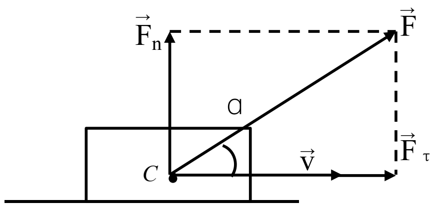

Рис. 4

Из курса физики средней школы известно, что при прямолинейном поступательном движении тела работа, совершаемая постоянной силой $\vec{F}$, тем больше, чем больше составляющая силы $\vec{F}_\tau$, касательная к траектории и чем больше путь s, пройденный телом за время действия силы:

$$A = F_\tau s = Fs \cdot cosa \qquad (6.1)$$

В проекциях на оси координат векторное уравнение (1.1) записывается в виде, называемом **преобразованиями Галилея**:

$$\begin{cases} x = x' + u_x t, \\ y = y' + u_y t,. \\ z = z' + u_z t. \end{cases} \qquad (1.2)$$

В частном случае, когда система K' движется со скоростью $\bar{v}$ вдоль положительного направления оси x системы K, преобразования координат Галилея имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z'. \end{cases} .$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета. Поэтому система уравнений (1.2) дополняется еще одним соотношением:

$$t = t'. \qquad (1.3)$$

Соотношения (1.2) – (1.3) справедливы лишь в случае $u << c$. При скоростях, сравнимых со скоростью света, преобразования Галилея заменяются более общими преобразованиями Лоренца.

Продифференцируем уравнение (1.1) по времени и, учитывая, что $\bar{u} = const$, найдем соотношения между скоростями и ускорениями точки A относительно обеих систем отсчета:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{u}\frac{dt}{dt},$$

ГЛАВА 5. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В МЕХАНИКЕ

5.1. Принцип относительности в механике

5.1. Принцип относительности в механике

Если системы отсчета движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно и в одной из них справедливы законы динамики Ньютона, то эти системы являются инерциальными. **Во всех инерциальных системах отсчета законы классической динамики имеют одинаковую форму (инвариантны)**; в этом состоит суть механического принципа относительности или принципа относительности Галилея.

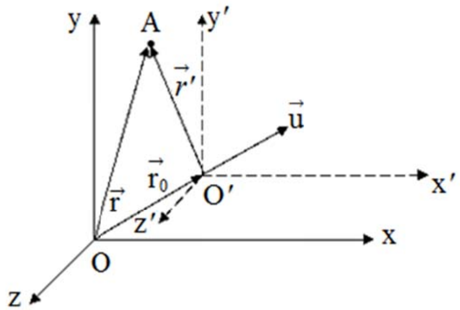

Рис. 1

Для доказательства этого принципа рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему *K* (с координатами *x, y, z*), которую условно будем считать неподвижной, и подвижную систему K' (с координатами x', y', z'), движущуюся относительно *K* равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{u} = const$. Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ начала *O* и обеих систем координат совпадают. Расположение систем координат в произвольный момент времени *t* имеет вид, изображенный на рис. 1. Скорость $\vec{u}$ направлена вдоль прямой OO', а радиус-вектор, проведенный из точки *O* в точку O', равен $\vec{r}_0 = \vec{u}t$. у

Координаты произвольной материальной точки *A* в неподвижной и подвижной системах отсчета определяются радиусами-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$, причем:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 = \vec{r}\,' + \vec{u}t \qquad (1.1)$$

В общем случае сила может изменяться как по величине, так и по направлению, поэтому формула (6.1) является лишь одним из частных случаев. Однако если рассматривать достаточно малое перемещение, то движение материальной точки можно считать прямолинейным, а силу – постоянной. Поэтому элементарная работа, совершаемая силой $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$, равна:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F\cos a \cdot ds = F_\tau ds. \qquad (6.2)$$

Работа, совершаемая силой $\vec{F}$, на конечном пути s (путь 1–2 на рис. 5), равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках:

$$A = \int_0^S F\cos a \cdot ds = \int_0^S F_\tau ds.$$

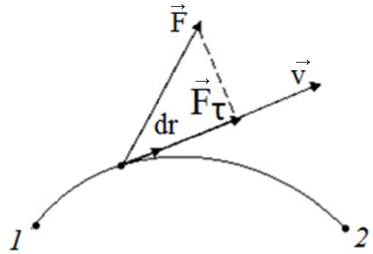

Рис. 5

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость $\vec{F}_\tau = f(s)$. Очевидно, что работа, совершаемая силой $\vec{F}$ на пути 0 – s, численно измеряется площадью, заштрихованной на рис. 3.3. Если сила $\vec{F}_\tau$ не зависит от *s* ($F_\tau = const$), то $A = F_\tau s$.

Из выражения (6.1) следует, что сила, действующая на тело, не совершает работу, если:

а) тело покоится (*s*=0); б) сила перпендикулярна к направлению перемещения тела $\alpha = 90°$, $F_\tau = 0$. Если угол $\alpha < 90°$, то работа силы $\vec{F}$ положительна (составляющая $\vec{F}_\tau$ совпадает по направлению с вектором скорости $\vec{v}$), поэтому в данном случае силу $\vec{F}$ называют **движущей силой**. Если угол $\alpha > 90°$, то работа силы

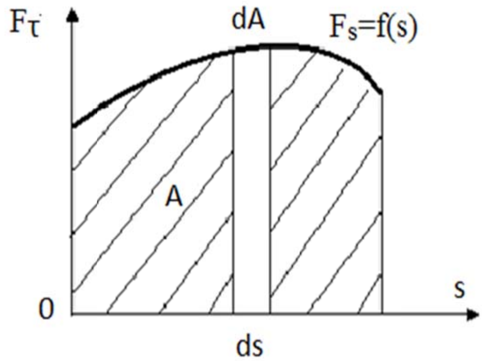

Рис. 6

$\vec{F}$ отрицательна ($\vec{F}_\tau$ и $\vec{v}$), противоположны по направлению) и силу $\vec{F}$ называют **силой сопротивления** (например, сила трения).

Единица работы – **джоуль** (Дж): 1 Дж – это работа, совершаемая силой в 1 Н на пути в 1 м:

1 Дж = 1 Н·м.

Если на тело, движущееся поступательно, одновременно действует несколько сил (рис. 7), то работа равнодействующей силы равна алгебраической сумме работ составляющих сил:

$$F_\tau \cos a = F_{1\tau} \cos a_1 + F_{2\tau} \cos a_2;$$

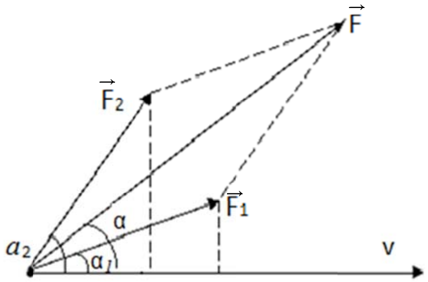

Рис. 7

$$dA = F_\tau \cos a \cdot ds = F_{1\tau} \cos a_1 ds + F_{2\tau} \cos a_2 ds = dA_1 + dA_2.$$

Если работа, совершаемая силой $\vec{F}$ при перемещении точки из одного произвольного положения 1 в другое произвольное положение 2 (рис. 8), не зависит от траектории перемещения, то есть выполняется условие $A_{1\text{-}2} = A_{1\text{-}a\text{-}2} = A_{1\text{-}b\text{-}2}$, то такая сила называется **консервативной (или потенциальной)**.

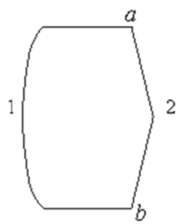

Рис. 8

Из уравнения (6.2) следует, что изменение направления движения вдоль траектории на противоположное вызывает изменение знака работы ($\cos\alpha$ меняет свой знак). Поэтому при перемещении материальной точки вдоль замкнутой траектории L, например:1–a–2–b–1, работа консервативной силы тождественно равна нулю:

$$\int_L (\vec{F} d\vec{r}) = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} \equiv 0 \qquad (6.3)$$

Примерами консервативных сил являются силы всемирного тяготения, силы упругости, силы электростатического взаимодействия.

Таблица 2

Поступательное движение	**Вращательное движение**
Масса m	Момент инерции Jz
Скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\varpi}}{dt}$
Сила $\vec{F}$	Момент силы M_z
Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса $L_z = J_z\varpi$
Основное уравнение динамики: $\vec{F} = m\vec{a}, \text{или } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики: $M_z = J_z\varepsilon, \text{или } \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа $dA = F_x ds$	Работа вращения $dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия $E_k = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращения $E_{kz} = \frac{J_z\varpi^2}{2}$

скамье, держит в вытянутых руках гимнастические гантели и приво- ω_2 дится во вращение вместе со скамьей вокруг оси OO_1 с угловой скоростью ω_1. Приближая гантели к себе, человек уменьшает момент инерции системы, а так как момент внешних сил равен нулю, момент импульса системы сохраняется и угловая скорость ее вращения возрастает. Тогда по закону сохранения момента импульса относительно оси OO_1 можно записать:

$$\left(J_0+2mr_1^2\right)\cdot\omega_1=\left(J_0+2mr_2^2\right)\omega_2, \qquad (3.5)$$

где J_0 – момент инерции человека и скамьи; $2mr_1^2$ и $2mr_2^2$ – моменты инерции гантелей в первом и втором положениях; m – масса одной гантели; r_1, r_2 – расстояния от гантелей до оси OO_1.

Изменение момента инерции системы связано с изменением ее кинетической энергии:

$$\Delta E_k=E_{k2}-E_{k1}=\frac{\left(J_0+2mr_2^2\right)\omega_2^2}{2}-\frac{\left(J_0+2mr_1^2\right)\omega_1^2}{2}.$$

Используя выражение для ω_2, полученное из (3.5):

$$\omega_2=\frac{J_0+2mr_1^2}{J_0+2mr_2^2}\cdot\omega_1,$$

после преобразований получим:

$$\Delta E_k=\frac{J_0+2mr_1^2}{2}\cdot\omega_1\cdot\left(\omega_2-\omega_1\right)\neq 0.$$

Это изменение кинетической энергии системы численно равно работе, совершенной человеком при перемещении гантелей.

В таблице 2 сопоставлены основные физические величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение.

Все силы, не удовлетворяющие условию (6.3) (т. е. работа этих сил зависит от траектории перемещения точки), называются **неконсервативными** или **диссипативными**. Примером таких сил являются силы трения, которые всегда направлены в сторону, противоположную направлению движения ($\cos a=-1$). Поэтому работа сил трения при перемещении материальной точки вдоль замкнутой траектории всегда отрицательна и никогда не равна нулю.

Для характеристики скорости совершения работы силой $\vec{F}$, вводится понятие **мощности**, численно равной работе, совершаемой силой за единицу времени:

$$P=\frac{dA}{dt}. \qquad (6.4)$$

Подставляя в (6.4) выражение (6.1) для элементарной работы, получим:

$$P=F\cos a\cdot\frac{ds}{dt}=F\cos a\cdot v=F_l v=\vec{F}\cdot\vec{v}. \qquad (6.5)$$

Следовательно, мощность (мгновенная мощность) силы равна произведению касательной составляющей силы и скорости движения, т. е. скалярному произведению векторов силы и скорости. Если $P\neq$const, то пользуются понятием средней мощности за некоторый промежуток времени t, в течение которого сила совершила работу A:

$$P_{cp}=\frac{A}{t}. \qquad (6.6)$$

Единица мощности – **ватт** (Вт): 1 Вт – мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж:

1 Вт = 1 Дж/с.

3.7. Виды механической энергии

В механике различают два вида энергии: кинетическую и потенциальную. **Кинетической энергией** называют механическую энергию всякого свободно движущегося тела и измеряют ее той работой, которую могло бы совершить тело при его торможении до полной остановки.

Пусть тело B, движущееся со скоростью $\vec{v}$, начинает взаимодействовать с другим телом C и при этом тормозится. Следовательно, тело B действует на тело C с некоторой силой $\vec{F}$ и на элементарном участке пути ds совершает работу:

$$dA = F_\tau ds.$$

По третьему закону Ньютона на тело B одновременно действует сила $\vec{F}$, касательная составляющая которой $\vec{F}_\tau$, вызывает изменение численного значения скорости тела. Согласно второму закону Ньютона:

$$F_\tau = m\frac{dv}{dt}.$$

Следовательно,

$$dA = -m\frac{dv}{dt}\cdot ds = -m\frac{ds}{dt}dv = -mvdv.$$

Работа, совершаемая телом до полной его остановки равна:

$$A = \int_v^0 -mvdv = \frac{mv^2}{2}.$$

Итак, кинетическая энергия поступательно движущегося тела равна половине произведения массы этого тела на квадрат его скорости:

$$E_k = A = \frac{mv^2}{2} \tag{7.1}$$

Из формулы (7.1) видно, что кинетическая энергия тела не может быть отрицательной $E_k \geq 0$. Если система состоит из n поступательно движущихся тел, то для ее остановки необходимо затормозить каждое из этих тел. Поэтому полная кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в нее тел:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{7.2}$$

в неподвижной точке (уравнение 9.3 раздела «Уравнение динамики вращательного движения твердого тела»), и состоит в следующем:

Если результирующий момент внешних сил относительно неподвижной точки тождественно равен нулю, то момент импульса тела относительно этой точки с течением времени не изменяется.

Действительно, если $\vec{M} = 0$, то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ откуда:

$$\vec{L} = const. \tag{3.3}$$

Другими словами, момент импульса замкнутой системы с течением времени не изменяется.

Из основного закона динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z (уравнение 3.2), следует **закон сохранения момента импульса тела относительно оси:**

Если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тела тождественно равен нулю, то момент импульса тела относительно этой оси не изменяется в процессе движения, т. е. если M_z=0, то $\frac{dL_z}{dt} = 0$, откуда:

$$L_z = cons, \text{ то } L_z\omega = const. \tag{3.4}$$

Закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом природы. Справедливость этого закона обусловливается свойством симметрии пространства – его **изотропностью**, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

Справедливость закона сохранения момента импульса относительно неподвижной оси вращения можно продемонстрировать на опыте со скамьей Жуковского. Скамьей Жуковского называется горизонтальная площадка, свободно вращающаяся без трения вокруг неподвижной вертикальной оси OO_1. Человек, стоящий или сидящий на данной оси. Значение момента импульса L_z не зависит от положения точки 0 на оси z.

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью $\bar{v}_i$. Скорость $\bar{v}_i$ и импульс $m_i\bar{v}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора $m_i\bar{v}_i$.

Поэтому можно записать, что момент импульса отдельной точки относительно оси z равен:

$$L_{iz} = m_i v_i r_i.$$

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных его точек:

$$L_z = \sum_{I=1}^{n} m_i v_i r_i.$$

Учитывая связь между линейной и угловой скоростями $(\bar{v}_i = \omega r_i)$, получим следующее выражение для момента импульса тела относительно неподвижной оси:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \omega, \tag{3.1}$$

т. е. момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

Продифференцировав выражение (3.1) по времени, получим:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_z. \tag{3.2}$$

Это еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело.

Закон сохранения момента импульса вытекает из основного уравнения динамики вращательного движения тела, закрепленного

Из формулы (7.2) видно, что E_k зависит только от величины масс и скоростей движения, входящих в нее тел. При этом неважно, каким образом тело массой m_i приобрело скорость v_i. Другими словами, **кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения**.

Скорости v_i существенно зависят от выбора системы отсчета. При выводе формул (7.1) и (7.2) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, т. к. иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. Однако, в разных инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга, скорость v_i i-го тела системы, а, следовательно, его E_{ki} и кинетическая энергия всей системы будут неодинаковы. Таким образом, кинетическая энергия системы зависит от выбора системы отсчета, т. е. является величиной **относительной**.

Потенциальная энергия – это механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Численно потенциальная энергия системы в данном ее положении равна работе, которую произведут действующие на систему силы при перемещении системы из этого положения в то, где потенциальная энергия условно принимается равной нулю ($E_n = 0$). Понятие «потенциальная энергия» имеет место только для консервативных систем, т. е. систем, у которых работа действующих сил зависит только от начального и конечного положения системы. Так, для груза весом P, поднятого на высоту h, потенциальная энергия будет равна $E_n = P \cdot h\,(E_n = 0\ при\ h = 0)$; для груза, прикрепленного к пружине,

$$E_n = k\Delta l^2 / 2,$$

где Δl – удлинение (сжатие) пружины, k – ее коэффициент жесткости ($E_n = 0$ при $l = 0$); для двух частиц с массами m_1 и m_2, притягивающимися по закону всемирного тяготения,

$$E_n = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r},$$

где γ – гравитационная постоянная, r – расстояние между частицами ($E_n = 0\ при\ r \to \infty$).

Рассмотрим потенциальную энергию системы Земля – тело массой m, поднятого на высоту h над поверхностью Земли. Уменьшение потенциальной энергии такой системы измеряется работой сил тяготения, совершаемой при свободном падении тела на Землю. Если тело падает по вертикали, то:

$$-\Delta E_n = E_n - E_{no} = P \cdot h = mgh,$$

где E_{no} – потенциальная энергия системы при $h = 0$ (знак «–» показывает, что работа совершается за счет убыли потенциальной энергии).

Если это же тело падает по наклонной плоскости длиной l и с углом наклона α к вертикали ($l \cdot \cos\alpha = h$), то работа сил тяготения равна прежней величине:

$$A = P \cdot l \cos a = mgh$$

Если, наконец, тело движется по произвольной криволинейной траектории, то можно представить себе эту кривую состоящей из n малых прямолинейных участков Δl_i. Работа силы тяготения на каждом из таких участков равна:

$$\Delta A_i = P \cdot \Delta l_i \cos a_i = P \cdot \Delta h_i$$

На всем криволинейном пути работа сил тяготения, очевидно, равна:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} P \Delta h_i = P \cdot h = mgh$$

Итак, работа сил тяготения зависит только от разности высот начальной и конечной точек пути.

Таким образом, тело в потенциальном (консервативном) поле сил обладает потенциальной энергией. При бесконечно малом изменении конфигурации системы работа консервативных сил равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = -dE_n.$$

Таким образом, при неупругом ударе полная механическая энергия системы уменьшается, т. е. часть ее рассеивается на деформацию соударяющихся тел. На деформацию тел затрачивается работа, равная убыли полной механической энергии системы:

$$A = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Если второе тело до удара было неподвижно ($v_2 = 0$), то:

$$A = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot E_{k1}. \qquad (2.11)$$

Неупругий удар на практике применяется для целей двоякого рода. Во-первых, для изменения формы тела – ковки и штамповки металла, раздробления тел. В этом случае важно, чтобы возможно большая часть кинетической энергии первого тела затрачивалась на работу деформации [формула (2.11)], т. е. чтобы масса неподвижного тела m_2 (например, наковальни вместе с куском металла) была во много раз больше массы ударяющего тела m_1 (например, молота).

Вторая цель состоит в перемещении тел после удара и преодолении при этом сопротивлений (забивка свай в землю, вбивание клиньев и т. п.). В этом случае выгодно, чтобы работа, затрачиваемая на деформацию, была как можно меньше и чтобы общая кинетическая энергия обоих тел после удара $\frac{\left[(m_1 + m_2) \cdot u^2\right]}{2}$ была наибольшей. Для этого необходимо, чтобы масса ударяющего тела m_1 (молота) была во много раз больше массы второго тела m_2 (сваи, гвоздя).

4.3. Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки 0 и $$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \qquad (2.10)$$

Если шары движутся в горизонтальной плоскости, то их потенциальная энергия E_n остается неизменной. Полная механическая энергия системы до удара:

$$W = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + E_n.$$

После удара она будет равна:

$$W_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2} + E_n,$$

или, с учетом (2.10):

$$W_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)^2} + E_n = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_1)} + E_n.$$

Найдем изменение полной механической энергии системы в результате неупругого удара:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2 - (m_1 + m_2) m_1 v_1^2 - (m_1 + m_2) m_2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_1^2 - m_1 m_2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2 - m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= -\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} < 0.$$

В свою очередь работа dA выражается как скалярное произведение силы $\vec{F}$ на перемещение $d\vec{r}$ поэтому последнее выражение можно записать следующим образом:

$$\vec{F} d\vec{r} = -dE_k \qquad (7.3)$$

Следовательно, если известна функция $E_n(r)$, то из выражения (7.3.) можно найти силу $\vec{F}$ по модулю и направлению.

Для консервативных сил:

$$F_x = -\frac{\partial П}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial П}{\partial y}, \quad F_Z = -\frac{\partial П}{\partial z},$$

или в векторном виде:

$$\vec{F} = -grad \cdot П,$$

где

$$grad\, П = \frac{\partial П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial П}{\partial z}\vec{k}. \qquad (7.4)$$

Вектор, определяемый выражением (7.4), называется **градиентом скалярной функции** $П$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей (орты).

Конкретный вид функции $П$ (в нашем случае E_n) зависит от характера силового поля (гравитационное, электростатическое и т. п.), что и было показано выше.

Полная механическая энергия W системы равна сумме ее кинетической и потенциальной энергий:

$$W = E_k + E_n.$$

Из определения потенциальной энергии системы и рассмотренных примеров видно, что эта энергия, подобно кинетической энергии, является функцией состояния системы: она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам. Следовательно, полная механическая энергия системы также является функцией состояния системы, т. е. зависит только от положения и скоростей всех тел системы.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.8. Характеристики динамики вращательного движения

Всякое твердое тело можно рассматривать как систему из *n* материальных точек и масса *m* тела есть сумма масс всех этих точек:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Будем считать, что тело абсолютно твердое, т. е. расстояния между любыми двумя его материальными точками не изменяются в процессе движения, и рассмотрим движение твердого тела, закрепленного о одной неподвижной точке О, вокруг которой тело может свободно вращаться. Эта точка называется центром вращения тела. Совместим с этой точкой начало неподвижной системы координат. Тогда положение в пространстве *i*-точки тела определяется радиусом-вектором $\vec{r}_i$, проведенным из центра О в эту точку.

Обозначим через $\vec{F}_{ik}$ силу, действующую на *i*-ю точку тела со стороны *k*-ой его точки, и через $\vec{F}_i$ – равнодействующую всех внешних сил, приложенных к *i*-й точке. По второму закону Ньютона уравнение движения этой материальной точки имеет следующий вид:

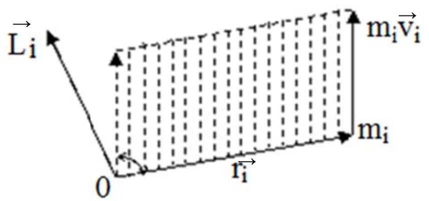

Рис. 9

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k=i}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i$$

($k \neq i$, т. к. *i*-я точка сама на себя не действует).

Умножим обе части этого уравнения векторно на r_i:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i\right] = \left[\vec{r}_i \sum_{\substack{k=1 \\ k=i}}^{n} \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right]. \tag{8.1}$$

При центральном ударе векторы скоростей $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, и $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ направлены вдоль одной прямой. Поэтому в уравнении (2.7) можно перейти от векторов к их модулям:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \cdot \tag{2.8}$$

Решая совместно уравнения (2.6) и (2.8), получим:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \\ u_2 = \dfrac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Анализ уравнений (2.9) позволяет сделать следующие выводы:

1) Если массы шаров одинаковы ($m_1=m_2=m$), то $u_1=v_2$ и $u_1=v_2$, т. е. при ударе шары обмениваются скоростями;

2) если масса второго шара $m_2>>m_1$, то:

$$u_1 = \frac{-v_1 m_2 + 2m_2 v_2}{m_2} \approx 2v_2 - v_1;$$

$$u_2 \approx v_2.$$

Если при этом второй шар был до удара неподвижен ($v_2=0$), то $u_1 \approx -v_1$; $u_2=0$, т. е. первый шар отскакивает от неподвижного массивного шара и движется в обратную сторону со скоростью $\vec{u}_1 = -\vec{v}_1$.

Как отмечалось, система тел называется диссипативной, если ее механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. В качестве примера рассмотрим диссипацию энергии при абсолютно неупругом прямом центральном ударе двух поступательно движущихся шаров (удар называется **абсолютно неупругим**, если после удара тела движутся как одно целое, т. е. с одной и той же скоростью).

Общая скорость обоих шаров после удара по закону сохранения импульса равна:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = u \cdot (m_1 + m_2)$$

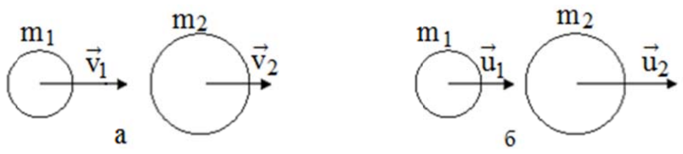

Рис. 16

Рассмотрим применение закона сохранения энергии в механике к расчету абсолютно упругого прямого центрального удара двух шаров. **Абсолютно упругим** называется такой удар, в результате которого не происходит превращения механической энергии системы соударяющихся тел в другие виды энергии.

Пусть два абсолютно упругих шара массами m_1 и m_2 до удара движутся поступательно со скоростями v_1 и v_2, направленными в одну сторону вдоль линии их центров, причем $v_1 > v_2$ (рис. 16 а). Требуется найти скорости шаров u_1 и u_2 после их соударения (рис. 16 б).

По закону сохранения энергии в механике имеем:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + E_П + \frac{m_2 v_2^2}{2} + E_П = \frac{m_1 u_1^2}{2} + E_П' + \frac{m_2 u_2^2}{2} + E_П'. \qquad (2.5)$$

Шары движутся в горизонтальной плоскости, поэтому их потенциальная энергия в поле тяготения Земли при ударе не изменяется, т.е.

$$E_{k1} + E_{k2} = E_{k1}' + E_{k2}'.$$

Тогда из уравнения (2.5) получаем:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \qquad (2.6)$$

С другой стороны, по закону сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \qquad (2.7)$$

Векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}_i$ материальной точки на ее импульс $m_i v_i$ называется **моментом импульса** этой материальной точки относительно точки О:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] \qquad (8.2)$$

Вектор $\vec{L}_i$ называют также **моментом количества движения** материальной точки. Он направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через векторы $\vec{r}_i$ и $m_i \vec{v}_i$, и образует с ними правую тройку векторов: при наблюдении из конца $\vec{L}_i$ видно, что вращение от $\vec{r}_i$ к $m_i \vec{v}_i$ по кратчайшему расстоянию происходит против часовой стрелки.

Векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}_i$, проведенного из центра *O* в точку приложения внешней силы (рис. 10), на эту силу, называется **моментом** $\vec{M}_i$ **силы** $\vec{r}_i$ относительно точки О (рис. 9):

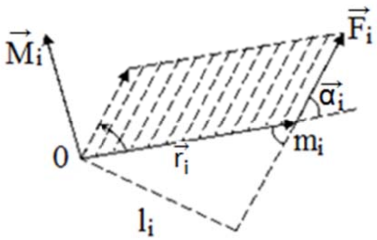

Рис. 10

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \qquad (8.3)$$

Векторы $\vec{r}_i$, F_i и $\vec{M}_i$ также образуют правую тройку. Модуль момента силы, как следует из рисунка, равен:

$$M_i = F_i l_i = F_i r_i \sin a_i.$$

где l_i – плечо силы F_i, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки *O* на линию действия силы.

Моментом инерции тела относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс *n* материальных точек тела на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \qquad (8.4)$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу:

$$J_z = \int r^2 dm,$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина r в данном случае есть функция положения точки с координатами x, y, z.

Неподвижная ось вращения z может проходить как через центр инерции тела (ось вращения маховика, ротора турбины и т. п.), так и вне его (например, ось вращения самолета, выполняющего мертвую петлю). Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс (инерции), то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера** (теоремой о переносе осей инерции): момент инерции тела J_z относительно произвольной оси вращения z равен сумме момента инерции тела относительно оси OO_1, проведенной через центр инерции С тела параллельно оси z и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями (рис. 11):

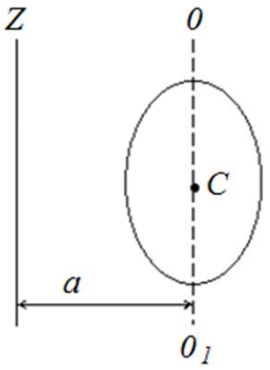

Рис. 11

$$J_z = J_c + ma^2. \tag{8.5}$$

Таким образом, с удалением центра инерции тела от его оси вращения момент инерции тела относительно этой оси возрастает. Из формул (8.4) и (8.5) видно, что момент инерции тела зависит не только от его массы, но и от ее распределения относительно оси вращения. В табл. 1 приведены значения моментов инерции для некоторых однородных тел.

Таблица 1

Тело	Положение оси *вращения*	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

В общем случае потенциальная кривая может иметь достаточно сложный вид, например с несколькими максимумами и минимумами (рис. 15). Проанализируем эту потенциальную кривую в предположении, что система консервативна и в ней выполняется закон сохранения энергии в форме (2.1). Если

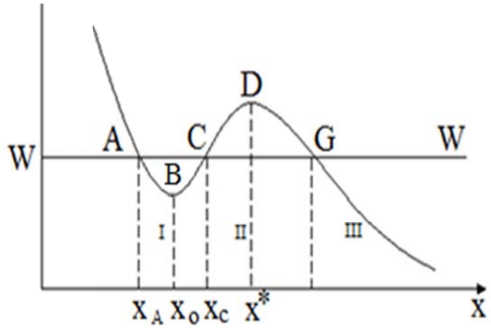

Рис. 15

W – заданная полная энергия тела, то тело может находиться только там, где $E_n(x) \leqslant W$, т. е. в областях I и III. Переходить из области I в область III и обратно тело не может, так как ему препятствует **потенциальный барьер** *CDG*, ширина которого равна интервалу значений x, при которых $E_n > W$, а его высота определяется разностью $E_{n\ max} - W$. Для того чтобы тело смогло преодолеть потенциальный барьер, ему необходимо сообщить дополнительную энергию, равную высоте барьера или превышающую ее. В области I тело с полной энергией W оказывается «запертым» в потенциальной яме *ABC* и совершает колебания между точками с координатами xA и xC.

В точке B с координатой x_O потенциальная энергия тела минимальна. Так как действующая на тело сила $\frac{\partial E_п}{\partial x} = 0$ условие минимума потенциальной энергии $F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x}$ то в точке B F_x=0. При смещении тела из положения x_O в результате малых возмущений в системе оно испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение x_O является положением **устойчивого равновесия**. Указанные условия не выполняются и для точки x* (для $E_{п\ max}$). Эта точка соответствует положению **неустойчивого равновесия**, так как при малых возмущениях в системе появляется сила, стремящаяся удалить тело от этого положения. Таким образом, в состоянии устойчивого равновесия замкнутой консервативной системы ее потенциальная энергия имеет минимальное значение, а в состоянии неустойчивого равновесия – максимальное значение.

При переходе системы из состояния 1 в какое-либо состояние 2:

$$\int_1^2 d\left(E_k + E_n\right) = A_{12} ,$$

т. е., изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то из (2.4) следует, что:

$$d\left(E_k + E_n\right) = 0,$$

откуда:

$$E_k + E_n = const,$$

что и требовалось доказать.

Закон сохранения механической энергии связан с **однородностью времени**, т.е. инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами**. Системы, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие виды энергии, называются **диссипативными** (диссипация – рассеяние энергии). Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными и в них закон сохранения механической энергии нарушается. Однако при изменении механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, **энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой**. В этом состоит физическая сущность закона сохранения и превращения энергии – сущность неуничтожимости материи и ее движения.

Во многих задачах рассматривается одномерное движение тела, потенциальная энергия которого является функцией лишь одной переменной (например, координаты x), т. е. $E_n = f(x)$. График зависимости потенциальной энергии от некоторого аргумента называется **потенциальной кривой**, анализ которой позволяет определить характер движения тела.

3.9. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Выведем уравнение динамики вращательного движения тела. Из выражений (8.1), (8.2) и (8.3) следует, что скорость изменения момента импульса *i*-й материальной точки определяется следующим образом:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ k=i}}^{n} \vec{F}_{ik}\right] + \vec{M}_i . \tag{9.1}$$

Сложим почленно уравнения (9.1), записанные для каждой из материальных точек тела:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ k=i}}^{n} \vec{F}_{ik}\right] + \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i . \tag{9.2}$$

Векторная сумма моментов $\vec{M}_i$ всех внешних сил, приложенных к телу, называется **результирующим**, или **главным**, моментом $\vec{M}$ внешних сил относительно точки O:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i$$

Векторная сумма моментов импульса $\vec{L}_i$ всех материальных точек тела называется **моментом импульса** $\vec{L}$ **тела** относительно точки O:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i$$

Так как производная от суммы равна сумме производных от всех слагаемых, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

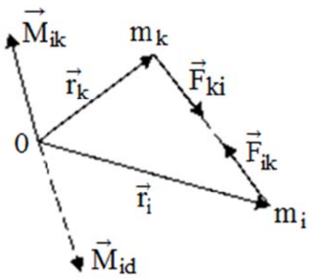

Рис. 12

Наконец, векторная сумма моментов относительно точки О всех внутренних сил $\vec{F}_{ik}$ взаимодействия между точками тела равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i,\sum_{\substack{k=1\\k=i}}^{n}\vec{F}_{ik}\right]=0$$

так как по третьему закону Ньютона силы $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$ численно равны, имеют общую линию действия, но направлены в противоположные стороны (рис. 12). Поэтому их моменты $\vec{M}_{ik}=\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{ik}\right]$ и $\vec{M}_{ki}=\left[\vec{r}_k,\vec{F}_{ki}\right]$ относительно точки *O* численно равны и противоположны по направлению (на рис. 4.4 точки m_i, m_k и О лежат в горизонтальной плоскости, а векторы $\vec{M}_{ik}$ и $\vec{M}_{ki}$ перпендикулярны этой плоскости). Действительно, $\vec{r}_k=\vec{r}_i+\vec{r}_{ki}$, где $\vec{r}_{ki}$ – вектор, проведенный из точки m_i в точку m_k. Поэтому $\vec{M}_{ki}=\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{ki}\right]+\left[\vec{r}_{ki},\vec{F}_{ki}\right]=\left[-\vec{r}_i,\vec{F}_{ki}\right]=-\vec{M}_{ik}$ так как векторное произведение векторов $\vec{r}_{ki}$ и $\vec{r}_{ki}$, направленных вдоль одной прямой, равно нулю.

На основании изложенного уравнение (9.1) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M} \qquad (9.3)$$

Таким образом, скорость изменения момента импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равна результирующему моменту относительно этой точки всех внешних сил, приложенных к телу.

Полученный результат называется **основным законом динамики вращательного движения тела, закрепленного в одной неподвижной точке.** Момент импульса является основной динамической характеристикой твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Учитывая, что:

$$\vec{v}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt},$$

$$d\vec{r}_i=\vec{v}_i dt,$$

получим:

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_1 d\vec{v}_1)-(\vec{F}_1{}'+\vec{F}_1)d\vec{r}_1=\vec{f}_1 d\vec{r}_1; \\ m_2(\vec{v}_2 d\vec{v}_2)-(\vec{F}_2{}'+\vec{F}_2)d\vec{r}_2-\vec{f}_2 d\vec{r}_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n(\vec{v}_n d\vec{v}_n)-(\vec{F}_n{}'+\vec{F}_n)d\vec{r}_n=\vec{f}_n d\vec{r}_n. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot(\vec{v}_i d\,\vec{v}_i)-\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i{}'+\vec{F}_i\right)d\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i d\vec{r}_i. \qquad (2.3)$$

Первый член левой части (2.3) представляет собой приращение кинетической энергии системы:

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}d\left(\frac{m_i\vec{v}_i^{\,2}}{2}\right)=dE_k.$$

Второй член $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i{}'+\vec{F}_i\right)d\vec{r}_i$ равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, т.е. равен элементарному приращению потенциальной энергии $dE_к$. Правая часть уравнения (2.3) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему. Таким образом, имеем:

$$d\left(E_k+E_n\right)=dA \qquad (2.4)$$

Для вывода этого закона рассмотрим систему материальных точек максами m_1, m_2, …, mn, движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n$.

Пусть $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \cdots \vec{F}_n'$ – равнодействующие внутренних консервативных сил, действующие на каждую из этих точек, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ – равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действует еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим $f_1, f_2, ..., f_n$. При $v << c$ материальных точек постоянны и уравнения движения этих точек по второму закону Ньютона имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1' + \vec{F}_1 + \vec{f}_1'; \\ m_2 \dfrac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_2' + \vec{F}_2 + \vec{f}_2'; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n \dfrac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n' + \vec{F}_n + \vec{f}_n'. \end{cases} \quad (2.2)$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени dt совершают перемещения $d\bar{r}_1, d\bar{r}_2, ..., d\bar{r}_n$. Умножим каждое уравнение системы (2.2) на соответствующее перемещение:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d\vec{v}_1}{dt} d\vec{r}_1 - (\vec{F}' + \vec{F}_1) d\vec{r}_1 = \vec{f}_1 d\vec{r}_1; \\ m_2 \dfrac{d\vec{v}_2}{dt} d\vec{r}_2 - (\vec{F}' + \vec{F}_2) d\vec{r}_2 = \vec{f}_2 d\vec{r}_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n \dfrac{d\vec{v}_n}{dt} d\vec{r}_n - (\vec{F}' + \vec{F}_n) d\vec{r}_n = \vec{f}_n d\vec{r}_n. \end{cases}$$

3.10. Кинетическая энергия и работа при вращении тела

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Если мысленно разбить это тело на n точек массами m_1, m_2, …, m_n, находящихся на расстояниях r_1, r_2, …, r_n от оси вращения, то при вращении они будут описывать окружности и двигаться с различными линейными скоростями v_1, v_2, …, v_n. Так как тело абсолютно твердое, то угловая скорость вращения точек будет одинакова:

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots = \frac{v_n}{r_n}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела есть сумма кинетических энергий его точек, т. е.

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Учитывая связь между угловой и линейной скоростями, получим:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2} \quad (10.1)$$

Сопоставление формулы (10.1) с выражением для кинетической энергии тела, движущегося поступательно со скоростью v, показывает, что **момент инерции является мерой инертности тела во вращательном движении.**

Если твердое тело движется поступательно со скоростью v и одновременно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр инерции, то его кинетическая энергия определяется как сумма двух составляющих:

$$E_k = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} \quad (10.2)$$

где v_c – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно произвольной точки 0 данной оси. Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки 0 на оси z (рис. 13).

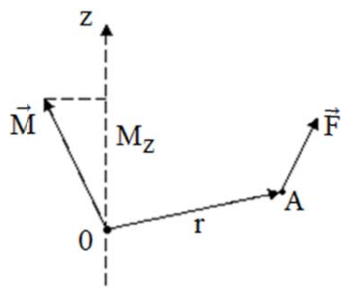

Рис. 13

Если ось z совпадает с направлением вектора $\vec{M}$, то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью:

$$\vec{M}_z = \left\lfloor \vec{r}\vec{F} \right\rfloor_z .$$

Найдем выражение для работы при вращении тела. Пусть сила $\vec{F}$ приложена к точке B, находящейся от оси вращения на расстоянии r (рис. 4.6); α – угол между направлением силы и радиусом-вектором $\vec{r}$. Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела.

При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения B проходит путь $ds = rd\varphi$, и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

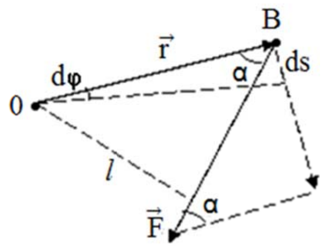

Рис. 14

$$dA = F\sin\alpha \cdot rd\varphi.$$

Учитывая, что $Fr\sin a = M_z$ можно записать $dA = M_z d\varphi$, где M_z – момент силы относительно оси вращения. Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота. Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dE_k,$$

где $$dE_k = d\left(\frac{J_z\omega^2}{2}\right) = J_z\omega d\omega$$

т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Подставив выражении (1.2) в уравнение (1.1), получим

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n, \qquad (1.3)$$

т. е. центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе. Выражение (1.3) представляет собой **закон движения центра масс**.

В соответствии с (1.2) из закона сохранения импульса вытекает, что *центр масс замкнутой системы лидо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.*

4.2. Закон сохранения энергии

Путь к правильному пониманию переходов движения из одной формы в другую был намечен М.В. Ломоносовым, который сформулировал закон сохранения массы вещества при химических превращениях и закон сохранения материи и движения. Количественную формулировку **закона сохранения и превращения энергии** дали немецкие ученые Ю. Майер и Г. Гельмгольц (XIX в.): **в замкнутой системе энергия может переходить из одних видов в другие и передаваться от одного тела к другому, но ее общее количество остается неизменным**.

Закон сохранения и превращения энергии является одним из фундаментальных законов природы, справедливым как для систем макроскопических тел, так и для систем элементарных частиц. Он является выражением вечности и неуничтожимости движения в природе, которое лишь переходит из одной формы в другую.

В замкнутой системе тел силы взаимодействия между которыми консервативны (потенциальны), отсутствуют взаимные превращения механической энергии в другие виды энергии. Такие системы называются **замкнутыми консервативными** и для них справедлив **закон сохранения энергии в механике: механическая энергия замкнутой консервативной системы не изменяется в процессе ее движения**:

$$W = E_k + E_\Pi = const. \qquad (2.1)$$

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства – его однородности. **Однородность пространства** заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физического свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

Отметим, что, согласно (1.1), импульс сохраняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю.

В механике Галилея–Ньютона из-за независимости массы от скорости импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. **Центром масс** (или **центром инерции**) системы материальных точек называется воображаемая точка С, положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-й материальной точки; n – число материальных точек в системе; $m=\sum m_i$ – масса системы.

Скорость центра масс:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{m}.$$

Учитывая, что $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ а $\sum \vec{p}_i$ есть импульс $\vec{p}$ системы, можно написать:

$$\vec{p} = m\vec{v}_c, \qquad (1.2)$$

тогда $M_z d\varphi = J_z \omega\, d\omega$, или

$$M_z = \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}$$

Учитывая, что $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, получим:

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon \qquad (10.3)$$

Уравнение (10.3) представляет собой **уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси**.

ГЛАВА 4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

4.1. Закон сохранения импульса. Центр масс

Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется **механической системой.** Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются **внутренними**. Силы, с которыми на материальные точки системы действует внешние тела, называются **внешними**. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется **замкнутой** (или **изолированной**). Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т. е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n тел, масса и скорость которых соответственно равны $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Пусть $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \ldots, \vec{F}_n'$ – равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ – равнодействующие внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из n тел механической системы:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{F}_1' + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = \vec{F}_2' + \vec{F}_2,$$

$$\frac{d}{dt}(m_n\vec{v}_n) = \vec{F}_n' + \vec{F}_n.$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots.. + m_n\vec{v}_n) = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \ldots... + \vec{F}_n' + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots... + \vec{F}_n.$$

Но так как геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots. + m_n\vec{v}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n, \qquad (1.1)$$

где $p=\sum m_i v_i$ – импульс системы.

Таким образом, производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствии внешних сил (рассматриваем замкнутую систему):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = 0, \text{ т. е. } \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = const.$$

Последнее выражение и является **законом сохранения импульса**: импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются законам квантовой механики). Этот закон носит универсальный характер, т.е. закон сохранения импульса – *фундаментальный закон природы.*