Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

А. Н. Павленко, О.А. Пихтилькова

# ТИПЫ ИНТЕГРАЛОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Оренбургский государственный университет»
в качестве методических указаний для преподавателей, работающих со студентами
по программам высшего образования

Оренбург
2016

УДК 517.3
ББК 22.161.1
П 12

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук С. А. Герасименко

**Павленко, А. Н.**
П 12 Типы интегралов: методические указания для подготовки опорных конспектов / А.Н. Павленко, О.А. Пихтилькова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2016. – 28 с.

Методические указания преподавателям для подготовки опорных конспектов «Типы интегралов» и «Простейшие свойства интегралов» по дисциплине «Математический анализ» для студентов направлений подготовки 03.03.02 Физика и 03.03.03 Радиофизика.

УДК 517.3
ББК 22.161.1

# Содержание

## Введение

Методические указания содержат необходимые материалы, предназначенные для изготовления опорных конспектов [1, 2] «Типы интегралов» и «Основные свойства интегралов» по дисциплине «Математический анализ» для студентов направлений подготовки 03.03.02 Физика и 03.03.03 Радиофизика. Опорные конспекты предполагается выполнить в виде плакатов (см. таблицу 1 и рисунок 1).

Первая строка таблицы (см. таблицу 1) опорного конспекта «Типы интегралов» содержит названия указанных подпунктов второго уровня данных методических указаний, а вместо обозначений подпунктов третьего уровня предполагается поместить их содержимое, приведенное в первом пункте методических указаний.

Таблица 1 – Схема для изготовления опорного конспекта «Типы интегралов»

| | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Задача, нетребующая для своего решения применения интегралов | 1.1.1 | 1.2.1 | 1.3.1 | 1.4.1 | 1.5.1 | 1.6.1 | 1.7.1 |
| Более сложная задача, для решения которой применяется данный интеграл | 1.1.2 | 1.2.2 | 1.3.2 | 1.4.2 | 1.5.2 | 1.6.2 | 1.7.2 |
| Разбиение геометрической фигуры на части, для каждой из которых можно приближенно применить решение простой задачи | 1.1.3 | 1.2.3 | 1.3.3 | 1.4.3 | 1.5.3 | 1.6.3 | 1.7.3 |
| Примерное значение искомой величины | 1.1.4 | 1.2.4 | 1.3.4 | 1.4.4 | 1.5.4 | 1.6.4 | 1.7.4 |
| Величина, характеризующая максимальный размер частей, на которые разбита геометрическая фигура | 1.1.5 | 1.2.5 | 1.3.5 | 1.4.5 | 1.5.5 | 1.6.5 | 1.7.5 |
| Точное значение искомой величины | 1.1.6 | 1.2.6 | 1.3.6 | 1.4.6 | 1.5.6 | 1.6.6 | 1.7.6 |
| Определение интеграла | 1.1.7 | 1.2.7 | 1.3.7 | 1.4.7 | 1.5.7 | 1.6.7 | 1.7.7 |
| Вычисление интеграла через ранее введенный интеграл | 1.1.8 | 1.2.8 | 1.3.8 | 1.4.8 | 1.5.8 | 1.6.8 | 1.7.8 |
| Виды величин, вычисляемые с помощью данного интеграла | 1.1.9 | 1.2.9 | 1.3.9 | 1.4.9 | 1.5.9 | 1.6.9 | 1.7.9 |

Опорный конспект «Простейшие свойства интегралов» (см. пункт 2 методических указаний) приведен на рисунке 1.

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ

1. Интеграл суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

3. Пусть область (отрезок, кривая) интегрирования разбита на части. Интеграл по всей области (отрезку, кривой) интегрирования равен сумме интегралов по всем частям разбиения.

4. Интеграл по ориентированному множеству меняет знак при изменении ориентации множества:

$$\int_a^b \ldots = -\int_b^a \ldots; \qquad \int_L \ldots = -\int_{L^-} \ldots \qquad \iint_{\Pi} \ldots = -\iint_{\Pi^-} \ldots$$

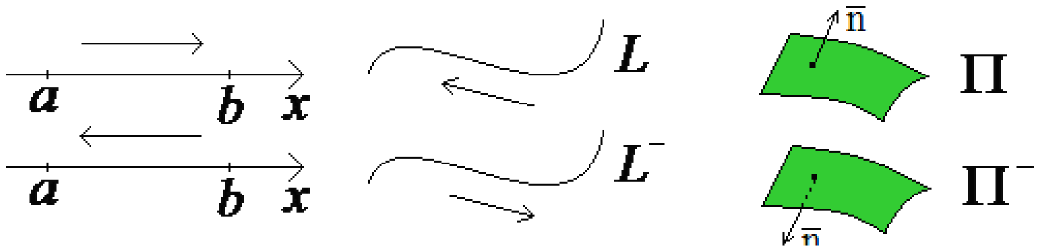



Рисунок 1

В данной работе приведено сжатое структурированное изложение основных сведений об определенных, двойных и тройных интегралах, криволинейных и поверхностных интегралах первого и второго рода, а также их простейшие свойства.

Несмотря на то, что для физико-математических направлений по данным темам математического анализа имеется ряд отлично зарекомендовавших себя учебников (например [3-11]), электронных гиперссылочных учебных пособий и презентаций, написание данных методических указаний представляется актуальным для выполнения следующих требований:

1) возможность использования опорных конспектов в аудиториях, необорудованных мультимедийным оборудованием;

2) однотипность изложения материала для всех типов интегралов упрощает использование студентами данных наглядных пособий;

3) наличие преимуществ [1, 2] использования в учебном процессе опорных конспектов.

Следует отметить, что данные методические указания могут быть использованы преподавателями математического анализа (высшей математики) и других физико-математических и инженерных направлений всех форм обучения.

# 1 Типы интегралов

## 1.1 Определенный интеграл

### 1.1.1 Задача, нетребующая для своего решения применения интегралов

Найти площадь прямоугольника, изображенного на рис. 1.

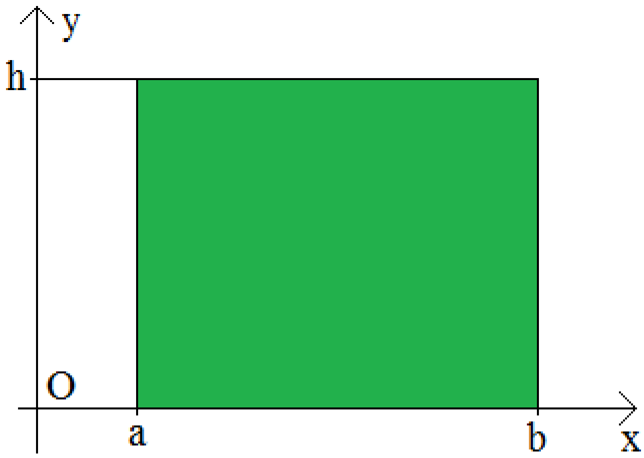



Рисунок 2

Ответ: $S = h(b - a)$.

### 1.1.2 Более сложная задача, для решения которой применяется данный интеграл

Найти площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 2.

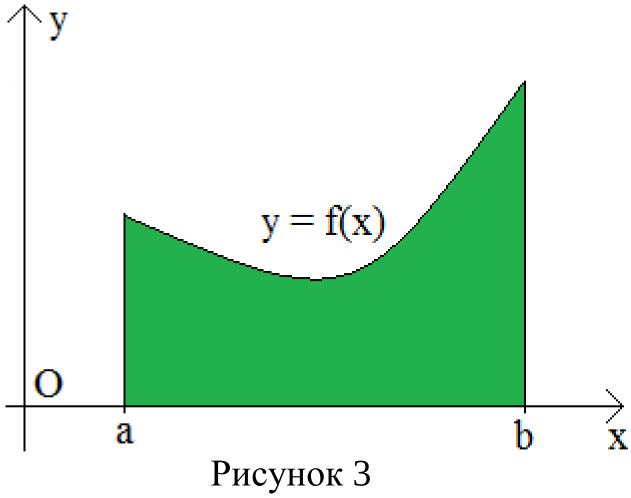



Рисунок 3

### 1.1.3 Разбиение геометрической фигуры на части, для каждой из которых можно приближенно применить решение простой задачи

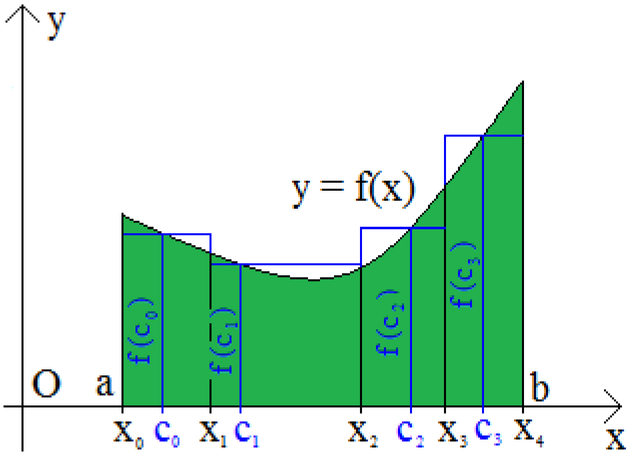



Рисунок 4

### 1.1.4 Примерное значение искомой величины

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i .$$

Здесь $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ - длина i-го отрезка разбиения.

### 1.1.5 Величина, характеризующая максимальный размер частей, на которые разбита геометрическая фигура

$$\lambda = \max_i \Delta x_i$$

### 1.1.6 Точное значение искомой величины

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i$$

### 1.1.7 Определение интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

### 1.1.8 Вычисление интеграла через ранее введенный интеграл

-

### 1.1.9 Виды величин, вычисляемые с помощью данного интеграла

Некоторые величины, определяемые функцией одной переменной, заданной на ориентированном отрезке:

1) геометрические приложения: площадь плоской фигуры; длина кривой, объем тела по площади параллельных сечений, объем тела вращения и т.д.;

2) приложения в физике: масса, статические моменты, центр тяжести и момент инерции криволинейной трапеции; работа переменной силы при перемещении материальной точки по прямолинейной траектории, работа при газовых процессах с переменным давлением, действующее значение периодического тока и т.д.

## 1.2 Двойной интеграл

### 1.2.1 Задача, нетребующая для своего решения применения интегралов

Найти объем цилиндра, изображенного на рис. 4.

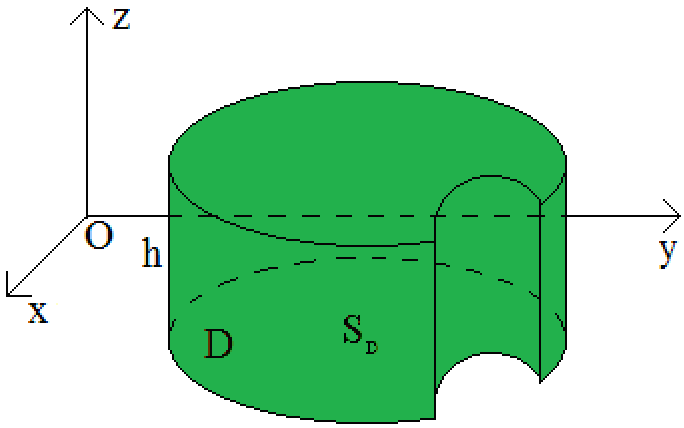



Рисунок 5

Ответ: $V = h \cdot S_D$.

**1.2.2 Более сложная задача, для решения которой применяется данный интеграл**

Найти объем криволинейного цилиндра, изображенного на рис. 5.

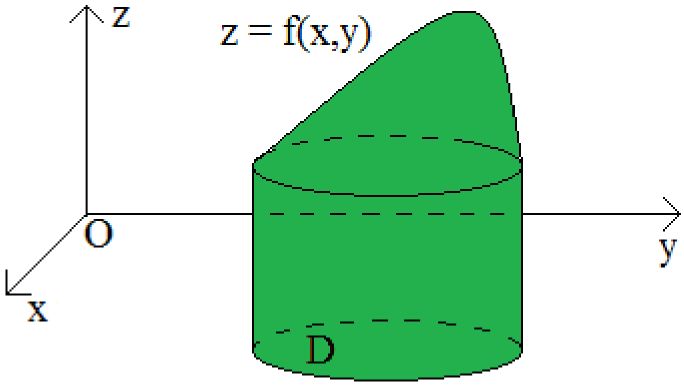



Рисунок 6

**1.2.3 Разбиение геометрической фигуры на части, для каждой из которых можно приближенно применить решение простой задачи**

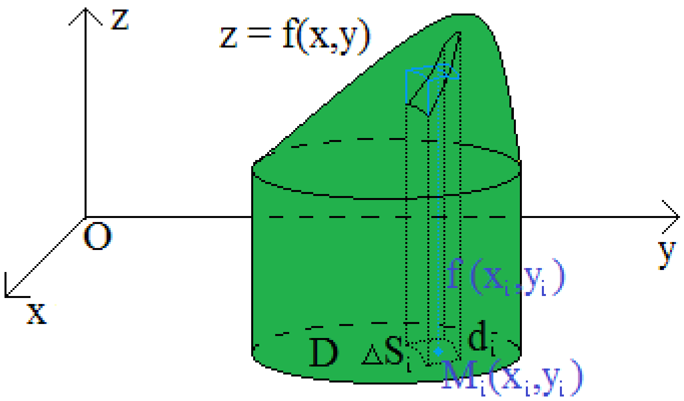



Рисунок 7

**1.2.4 Примерное значение искомой величины**

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

**1.2.5 Величина, характеризующая максимальный размер частей, на которые разбита геометрическая фигура**

$$\lambda = \max_i \operatorname{diam} d_i$$

**1.2.6 Точное значение искомой величины**

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

**1.2.7 Определение интеграла**

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

**1.2.8 Вычисление интеграла через ранее введенный интеграл**

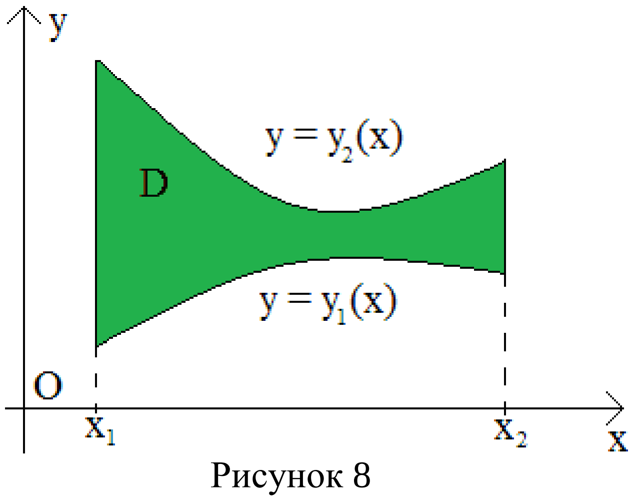



Рисунок 8

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

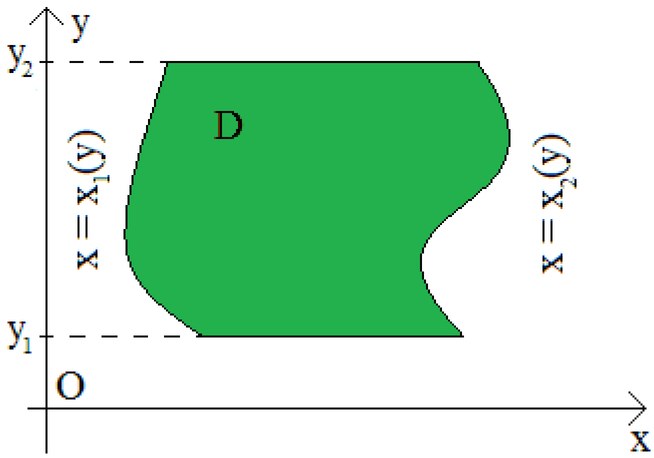



Рисунок 9

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

**1.2.9 Виды величин, вычисляемые с помощью данного интеграла**

Некоторые величины, определяемые функцией двух переменных, заданной на плоской области:

1) геометрические приложения: объем криволинейного цилиндра; площадь пространственной поверхности т.д.;

2) приложения в физике: масса, статические моменты, центр тяжести и момент инерции пластин и т.д.

## 1.3 Тройной интеграл

### 1.3.1 Задача, нетребующая для своего решения применения интегралов

Найти массу тела, имеющего постоянную плотность.

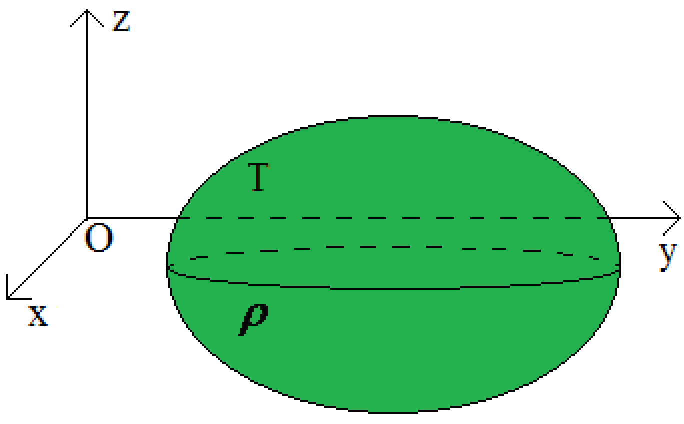



Рисунок 10

Ответ: $m=\rho V$ .

**1.3.2 Более сложная задача, для решения которой применяется данный интеграл**

Найти массу тела переменной плотности.

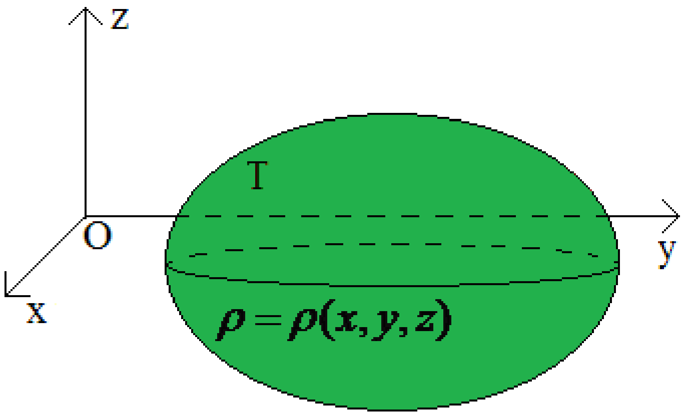



Рисунок 11

**1.3.3 Разбиение геометрической фигуры на части, для каждой из которых можно приближенно применить решение простой задачи**

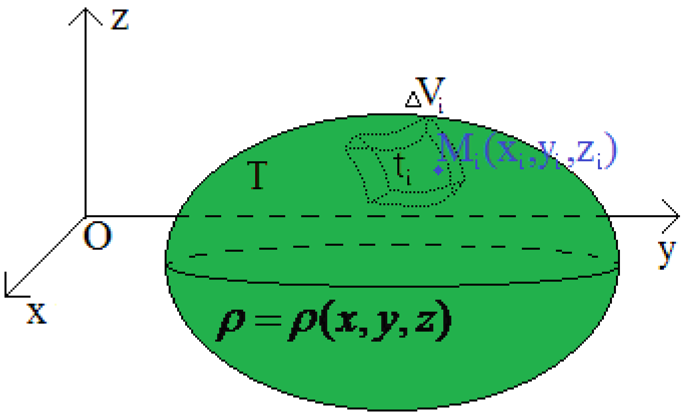



Рисунок 12

**1.3.4 Примерное значение искомой величины**

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

**1.3.5 Величина, характеризующая максимальный размер частей, на которые разбита геометрическая фигура**

$$\lambda = \max_i \operatorname{diam} t_i$$

**1.3.6 Точное значение искомой величины**

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

**1.3.7 Определение интеграла**

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

**1.3.8 Вычисление интеграла через ранее введенный интеграл**

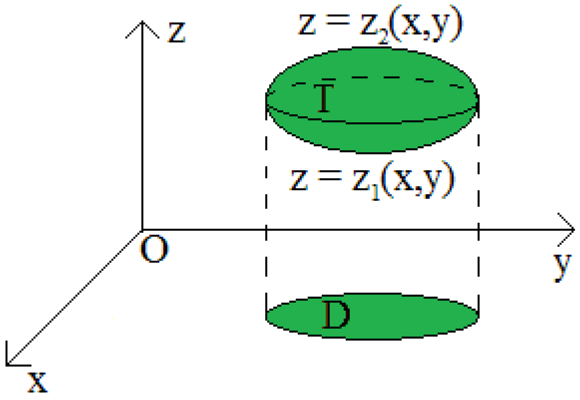



Рисунок 13

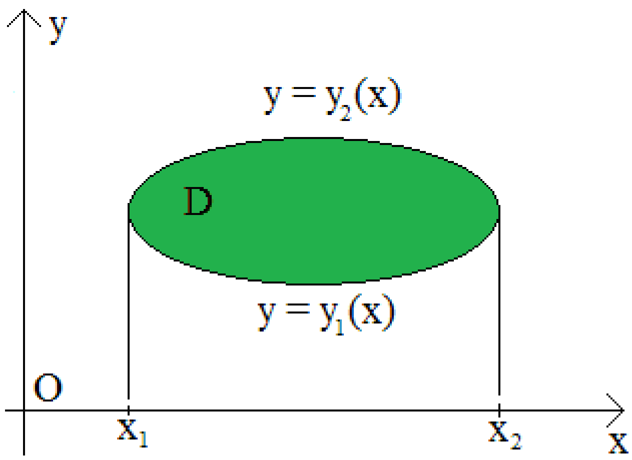



Рисунок 14

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

**1.3.9 Виды величин, вычисляемые с помощью данного интеграла**

Некоторые величины, определяемые функцией трех переменных, заданной на пространственной области.

Приложения в физике: масса тела, его статические моменты, центр тяжести и момент инерции, объемный электростатический потенциал.

## 1.4 Криволинейный интеграл первого рода

### 1.4.1 Задача, нетребующая для своего решения применения интегралов

Найти массу кривой, имеющей постоянную линейную плотность.

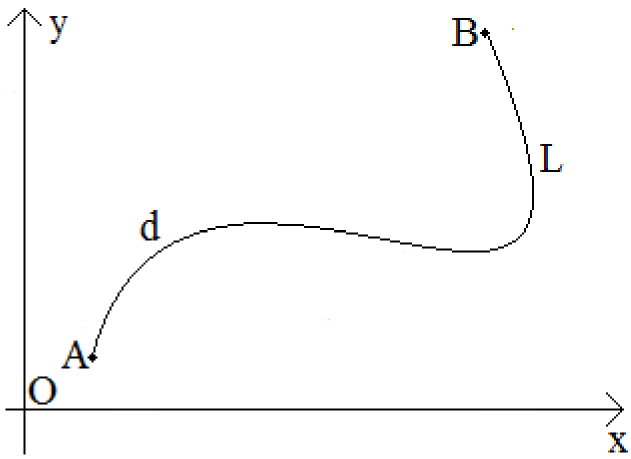



Рисунок 15

Ответ: $m = d \cdot \ell_L$

### 1.4.2 Более сложная задача, для решения которой применяется данный интеграл

Найти массу кривой с переменной линейной плотностью.

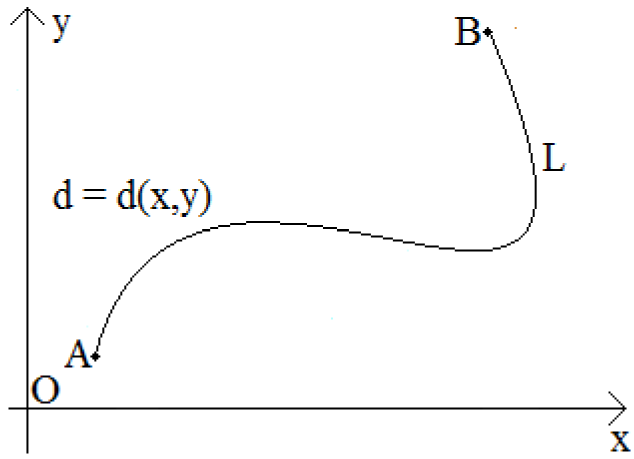



Рисунок 16

**1.4.3 Разбиение геометрической фигуры на части, для каждой из которых можно приближенно применить решение простой задачи**

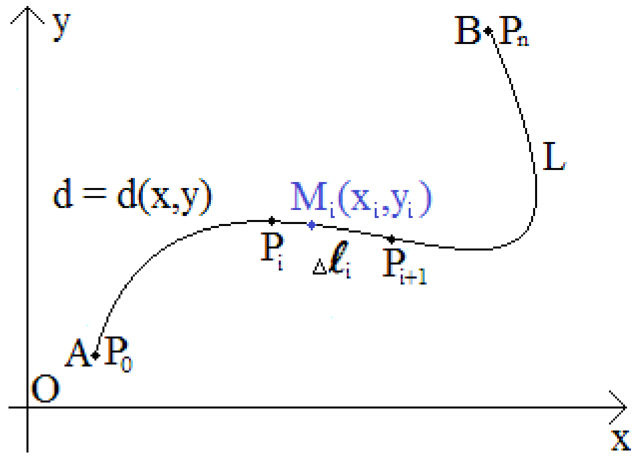



Рисунок 17

**1.4.4 Примерное значение искомой величины**

$$m \approx \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, y_i)\Delta\ell_i$$

**1.4.5 Величина, характеризующая максимальный размер частей, на которые разбита геометрическая фигура**

$$\lambda = \max_i \Delta\ell_i$$

### 1.4.6 Точное значение искомой величины

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, y_i)\Delta\ell_i$$

### 1.4.7 Определение интеграла

$$\int_L f(x, y)\,d\ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta\ell_i$$

### 1.4.8 Вычисление интеграла через ранее введенный интеграл

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (t \in [\alpha, \beta],\ \alpha < \beta)$$

$$\int_L f(x, y)\,d\ell = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

### 1.4.9 Примеры величин, вычисляемые с помощью данного интеграла

Некоторые величины, определяемые функцией двух (или трех) переменных, заданной на плоской (или пространственной) неориентированной кривой.

Приложения в физике: масса, статические моменты, центр тяжести и момент инерции кривых с переменной линейной плотностью.

## 1.5 Криволинейный интеграл второго рода

### 1.5.1 Задача, нетребующая для своего решения применения интегралов

Найти работу постоянной силы при перемещении материальной точки из точки А в точку В (см. рисунок 17).

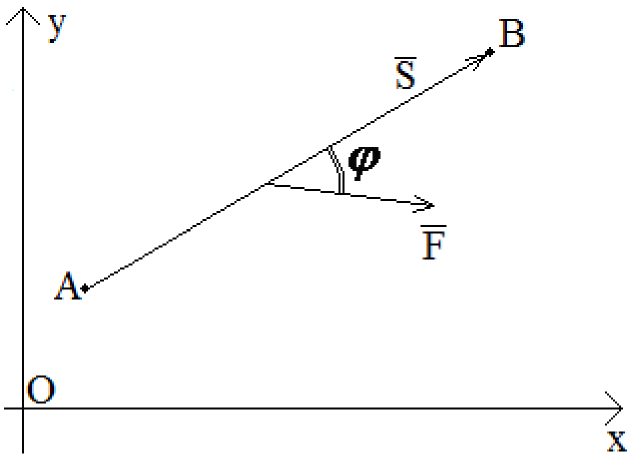


Рисунок 18

Ответ: $A = FS\cos\varphi = \overline{F} \cdot \overline{S}$ .

**1.5.2 Более сложная задача, для решения которой применяется данный интеграл**

Найти работу переменной силы при перемещении материальной точки вдоль кривой.

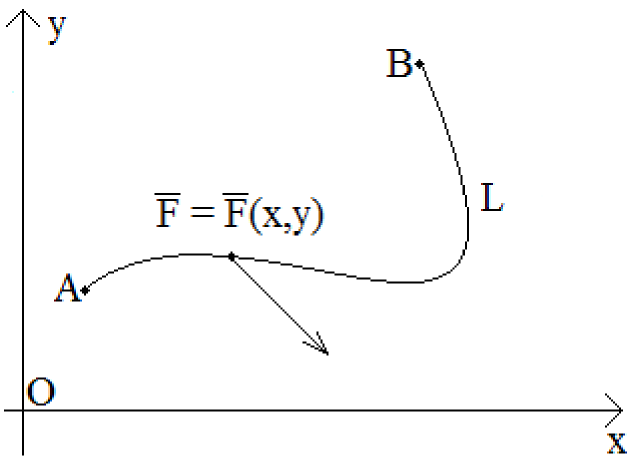


Рисунок 19

**1.5.3 Разбиение геометрической фигуры на части, для каждой из которых можно приближенно применить решение простой задачи**

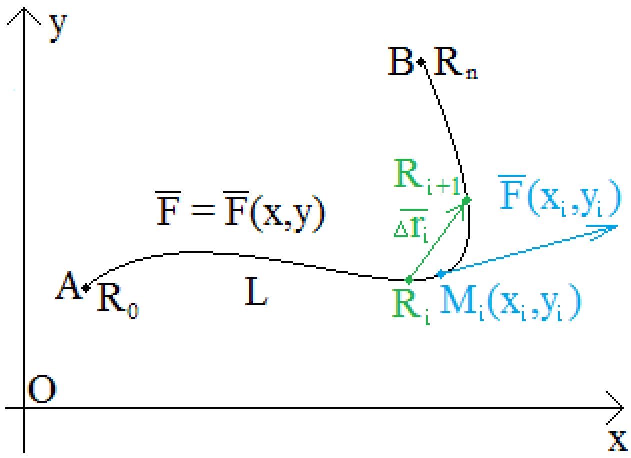



Рисунок 20

### 1.5.4 Примерное значение искомой величины

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} \overline{F}(x_i, y_i)\,\overline{\Delta r_i}$$

### 1.5.5 Величина, характеризующая максимальный размер частей, на которые разбита геометрическая фигура

$$\lambda = \max_i \left|\overline{\Delta r_i}\right|$$

### 1.5.6 Точное значение искомой величины

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{F}(x_i, y_i)\,\overline{\Delta r_i}$$

### 1.5.7 Определение интеграла

$$\int_L \overline{F}(x, y)\,\overline{dr} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{F}(x_i, y_i)\,\overline{\Delta r_i}$$

Другое обозначение:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \text{ где } \overline{F}(x,y) = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$$

### 1.5.8 Вычисление интеграла через ранее введенный интеграл

$L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ $(t \in [\alpha,\beta],$ $\alpha$ - значение параметра $t$, отвечающее началу кривой.)

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

### 1.5.9 Примеры величин, вычисляемые с помощью данного интеграла

Некоторые величины, определяемые векторной функцией двух (или трех) переменных, заданной на плоской (или пространственной) ориентированной кривой:

1) геометрическое приложение: площадь плоской фигуры;

2) приложения в физике: работа переменной силы при перемещении материальной точки вдоль данной кривой, количество тепла, поглощаемое газом в газовом процессе, характеризуемым кривой в координатах P, V; циркуляция вектора магнитной индукции.

## 1.6 Поверхностный интеграл первого рода

### 1.6.1 Задача, нетребующая для своего решения применения интегралов

Найти массу поверхности, имеющей постоянную поверхностную плотность.

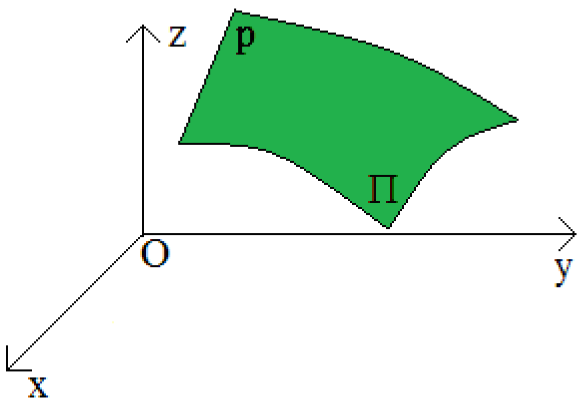



Рисунок 21

Ответ: $m = p \cdot S_{П}$

**1.6.2 Более сложная задача, для решения которой применяется данный интеграл**

Найти массу поверхности с переменной поверхностной плотностью.

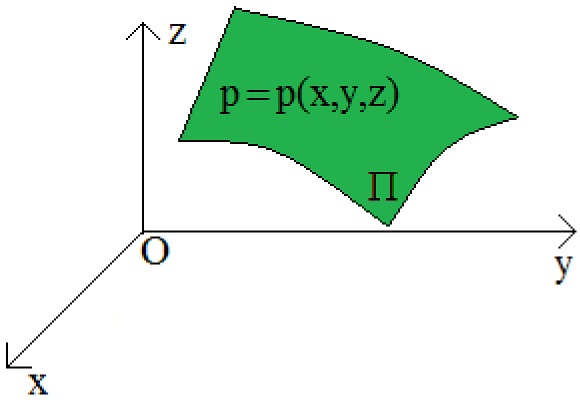



Рисунок 22

**1.6.3 Разбиение геометрической фигуры на части, для каждой из которых можно приближенно применить решение простой задачи**

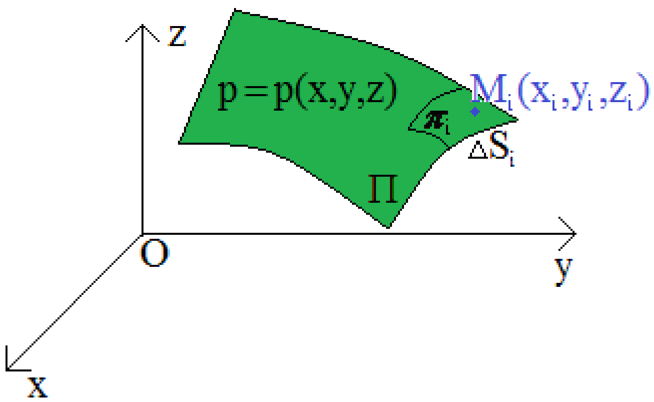



Рисунок 23

**1.6.4 Примерное значение искомой величины**

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

**1.6.5 Величина, характеризующая максимальный размер частей, на которые разбита геометрическая фигура**

$$\lambda = \max_i \ \mathrm{diam}\ \pi_i$$

**1.6.6 Точное значение искомой величины**

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

**1.6.7 Определение интеграла**

$$\iint_{\Pi} f(x, y, z)\,dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

**1.6.8 Вычисление интеграла через ранее введенный интеграл**

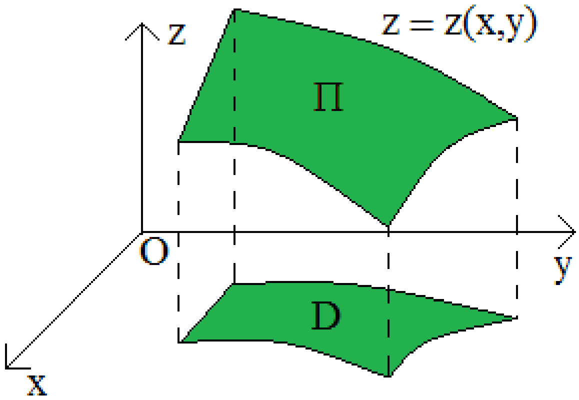



Рисунок 24

$$\iint_{\Pi} f(x, y, z)\,dS = \iint_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(z'_x(x, y)\right)^2 + \left(z'_y(x, y)\right)^2}\,dxdy$$

**1.6.9 Виды величин, вычисляемые с помощью данного интеграла**

Некоторые величины, определяемые функцией трех переменных, заданной на неориентированной поверхности.

Физические приложения: масса, статические моменты, центр тяжести и момент инерции пространственной поверхности с переменной поверхностной плотностью; электростатический потенциал простого слоя.

## 1.7 Поверхностный интеграл второго рода

### 1.7.1 Задача, нетребующая для своего решения применения интегралов

Найти магнитный поток через плоскую поверхность $\Pi$.

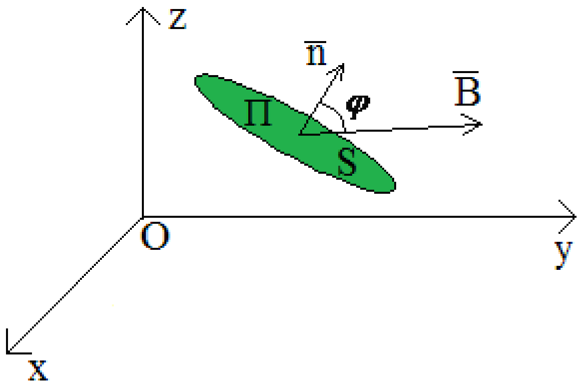



Рисунок 25

Ответ: $\Phi = BS\cos\varphi = \overline{B} \cdot \overline{S}$.

### 1.7.2 Более сложная задача, для решения которой применяется данный интеграл

Найти магнитный поток для случая переменного вектора магнитной индукции через поверхность $\Pi$.

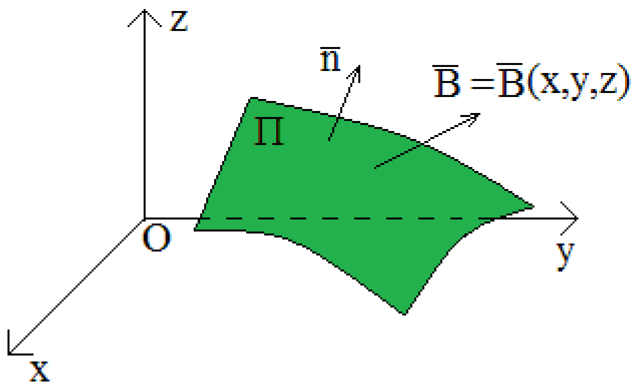



Рисунок 26

**1.7.3 Разбиение геометрической фигуры на части, для каждой из которых можно приближенно применить решение простой задачи**

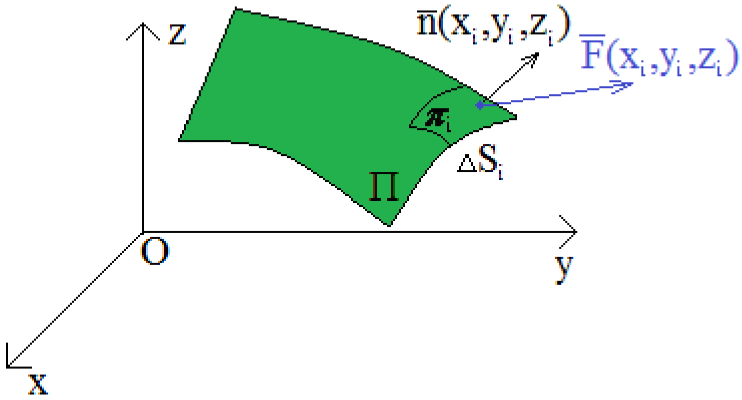



Рисунок 27

**1.7.4 Примерное значение искомой величины**

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \bar{n}(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

**1.7.5 Величина, характеризующая максимальный размер частей, на которые разбита геометрическая фигура**

$$\lambda = \max_i \ \mathrm{diam}\ \pi_i$$

**1.7.6 Точное значение искомой величины**

$$\Phi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \bar{n}(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

**1.7.7 Определение интеграла**

$$\iint_{\Pi} \bar{f}(x, y, z)\, d\bar{S} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \bar{n}(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

Другие обозначения:

$$\iint\limits_{\Pi} (\bar{F}, \bar{n})\, dS;$$

$$\iint\limits_{\Pi} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy, \text{ где}$$

$$\bar{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\bar{i} + Q(x,y,z)\,\bar{j} + R(x,y,z)\,\bar{k}$$

### 1.7.8 Вычисление интеграла через ранее введенный интеграл

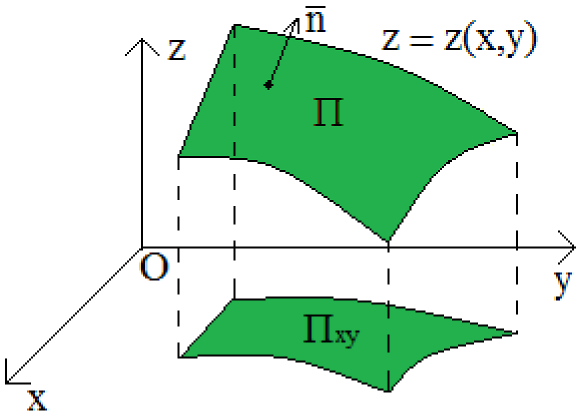



Рисунок 28

$$\iint\limits_{\Pi} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{\Pi_{xy}} \left[ -z'_x(x,y)\,P(x,y,z(x,y)) - z'_y(x,y)\,Q(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y)) \right] dxdy.$$

Знак «+» берется, если угол между вектором $\bar{n}$ и положительным направлением оси z острый, а если угол тупой, то берется знак «-».

$$\iint\limits_{\Pi} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$\pm \iint\limits_{\Pi_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dydz \pm \iint\limits_{\Pi_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,dxdy \pm \iint\limits_{\Pi_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy$$

### 1.7.9 Виды величин, вычисляемые с помощью данного интеграла

Некоторые величины, определяемые векторной функцией трех переменных, заданной на ориентированной поверхности.

Физические приложения: расход жидкости, поток вектора напряженности электрического поля, магнитный поток, электростатический потенциал двойного слоя.

## 2 Простейшие свойства интегралов

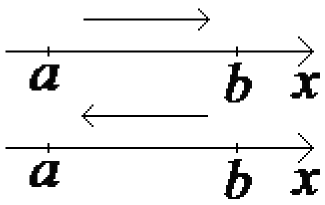
1. Интеграл суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

3. Пусть область (отрезок, кривая) интегрирования разбита на части. Интеграл по всей области (отрезку, кривой) интегрирования равен сумме интегралов по всем частям разбиения.

4. Интеграл по ориентированному множеству меняет знак при изменении ориентации множества:

$$\int_a^b \ldots = -\int_b^a \ldots; \qquad \int_L \ldots = -\int_{L^-} \ldots \qquad \iint_\Pi \ldots = -\iint_{\Pi^-} \ldots$$




Рисунки 29

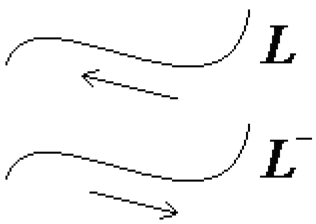



Рисунок 30

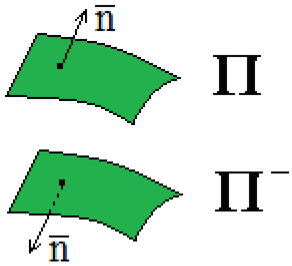



Рисунок 31

## Список использованных источников


1 Педагогический энциклопедический словарь / гл. ред. Б.М. Бим-Бад - М. : Большая Рос. энцикл., 2009. - 527 с. : ил. - ISBN 978-5-85270-230-2.

2 Педагогика профессионального образования: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Е.П. Белозерцев, А.Д. Гонеев, А.Г. Пашков и др. / под ред. В.А. Сластёнина. – 4-е изд., стер. - М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 368 с. - ISBN 978-5-7695-5254-0.

3 Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. пособие / Г. М. Фихтенгольц. - 7-е изд., стер. - М.: Наука, 1969. Т. 2. - 800 с.: ил.

4 Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. пособие для ун-тов и пед. вузов / Г. М. Фихтенгольц. - 3-е изд., стер. - М.: Физматгиз, 1963. Т. 3. - 656 с.: ил.

5 Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу: учебник для студентов вузов, обучающихся по направлениям и специальностям физико-математического профиля / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков.- 6-е изд., стер. - Москва: Дрофа, 2008. - 640 с. - (Высшее образование. Современный учебник). - Библиогр.: с. 628-629. - ISBN 978-5-358-05925-2.

6 Никольский, С. М. Курс математического анализа: учебник для вузов / С. М. Никольский .- 6-е изд. стер. - М.: Физматлит, 2001. - 592 с. - Предм. указ. - 591 с. - ISBN 5-9221-0160-9.

7 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2008. - ISBN 978-5-9221-0183-7. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. 2008. - 400 с. - Предм. указ.: с. 395-399. - ISBN 978-5-9221-0184-4.

8 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / Л.Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2008.. - ISBN 978-5-9221-0183-7. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих

переменных. Гармонический анализ. 2008. - 424 с. - Предм. указ.: с. 420-424. - ISBN 978-5-9221-0185-1.

9 Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002. – 992 с.

10 Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович .- 11-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2005. - 736 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 736. - ISBN 5-8114-0499-9.

11 Шипачев В. С. Математический анализ. Теория и практика: учебное пособие / В.С. Шипачев. - 3-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-010073-9.

Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=469727