Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

РАБОТА В СРЕДЕ MATHCAD

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 11.03.04 Электроника и наноэлектроника, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 15.03.06 Мехатроника и робототехника, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.03.04 Авиастроение

Оренбург
2016

УДК 004.42(076.5)
ББК 32.973-018.2я7
Р 13

Рецензент - кандидат физико-математических наук, доцент С.А Герасименко.

Авторы: О.А. Пихтилькова, Л.Б. Усова, Е.В. Мещерина, А.Н. Павленко

Р 13 Работа в среде MATHCAD: методические указания / О.А. Пихтилькова, Л.Б. Усова, Е.В. Мещерина, А.Н. Павленко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2016. – 65с.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 11.03.04 Электроника и наноэлектроника, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 15.03.06 Мехатроника и робототехника, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.03.04 Авиастроение. Пособие представлено в виде лабораторных работ по различным темам в среде MathCAD.

Данная разработка поможет студентам в усвоении соответствующего материала. Каждая лабораторная работа содержит теоретический блок, показывающий основные возможности и функции среды MathCAD. Сформулированы физические и математические задачи, которые предлагается решить, используя возможности данной среды. Для некоторых заданий приводится алгоритм решения.

УДК 004.42(076.5)
ББК 32.973-018.2я7

Содержание

Введение

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 11.03.04 Электроника и наноэлектроника, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 15.03.06 Мехатроника и робототехника, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.03.04 Авиастроение.. Они представляют собой лабораторные работы, выполненные в среде MathCAD, с примерами и задачами, относящимися к основным разделам линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа.

Выбор данного продукта обусловлен тем, что:

- математические выражения в среде MathCAD записываются в общепринятой форме, в том числе имеются возможности проводить вычисления с размерными единицами;
- имеется мощный математический аппарат, позволяющий решать сложные задачи без вызова внешних процедур;
- пакет имеет мощные средства графического представления информации;
- система снабжена средствами анимации, что позволяет рассматривать временную эволюцию математических моделей в динамике;
- пакет позволяет проводить символьные вычисления;
- обеспечивает возможность интеграции с современными информационными технологиями, в частности, не выходя из среды MathCAD, обращаться к документам, расположенным на других серверах.

Для удобства овладения основными навыками работы в среде MathCAD материал разбит на лабораторные работы. Каждая лабораторная работа посвящена конкретной теме или логически объединенным темам. Темы разбиты на теоретические блоки, показывающие основные возможности и функции среды MathCAD.

Для четкого представления о работе в среде MathCAD каждое задание формулируется как физическая или математическая задача, а после этого предлагается решить ее, используя возможности данной среды. Для некоторых заданий приводится алгоритм решения в среде MathCAD.

Методические рекомендации предназначены в первую очередь студентам физико-математических и инженерных направлений. Отдельная лабораторная работа посвящена разбору конкретных физических задач, проверке физических законов и моделированию некоторых физических явлений. Рассмотрено также программирование в среде MathCAD.

Рекомендации могут быть использованы студентами других направлений для овладения навыками вычисления и представления математических закономерностей.

Используемые в тексте обозначения

🕮 Изучить.

Задача_*i* - Формулировка физической или математической задачи номер *i*, которую необходимо решить, используя пакет MathCAD.

🖥 **-** выполнить указанную последовательность действий на компьютере. Если вслед за задачей номер *i* приведён план её решения, то он обозначен как 🖥_*i*.

1 Лабораторная работа №1. Работа с математическими выражениями, набранными с помощью наборных панелей, работа с текстовым редактором, работа со вставками (вставка функций)

Обзор главного меню системы

Общение пользователя с системой MathCAD происходит на некотором промежуточном математически ориентированном языке визуального программирования – **входном языке**. Многие математические записи в этом языке вводятся просто выводом шаблонов соответствующих операторов и функций. Необходимо лишь точное описание алгоритма решения задачи на привычном математическом языке. MathCAD ориентирован на автоматическое составление программ сложных математических вычислений вводом и заполнением шаблонов математических операций. Сама программа при этом генерируется автоматически.

Операторы – специальные символы, указывающие на выполнение тех или иных операций над данными – ***операндами***. Последние могут быть константами или переменными – объектами с именами, хранящие данные определенного типа и значения. Наиболее известны арифметические операторы, например, сложения +, вычитания -, умножения *, деления / и др.

Функция – объект входного языка, имеющий имя и параметры, указываемые в круглых скобках. Имя функции отождествляется с соответствующей математической функцией – например, $\sin(x)$ – это функция вычисления синуса аргумента x. Отличительной чертой функции является **преобразование данных**, представленных в виде **входных параметров**, и **возврат** значения (результата вычисления функции) в ответ на обращение к ней.

Операторы и функции используются для создания математических выражений – формул, которые могут вычисляться в численном или символьном виде.

Рассмотрим окно MathCAD. Верхняя строка содержит указание на имя пакета и название документа, в котором вы работаете. Далее идет главное меню, кнопки быстрого управления и окно редактирования, в котором можно создавать *документ*, представляющий собой набор формул для математических расчетов, текстовых областей и графических объектов.

Пункты главного меню:

File – работа с файлами, сетью Интернет и электронной почтой;

Edit – редактирование документов;

View – изменение средств обзора и включения/выключения элементов интерфейса;

Insert – установка вставок объектов и их шаблонов (включая графику);

Format – изменение формата (параметров) объектов;

Math – управление процессом вычислений;

Graphics – работа с графическим редактором;

Symbolic – выбор операций символьного процессора;

Window – управление окнами системы;

Books – работа с электронными книгами;

Help – работа со справочной базой данных о системе.

Основные возможности главного меню дублируются кнопками быстрого управления, размещенными в панелях. Их можно выводить на экран или убирать с него с помощью соответствующих опций позиции **View** главного меню. Имеются три такие панели:

1) панель вывода палитр математических знаков и функций;

2) панель инструментов дублирует наиболее распространенные команды и операции;

3) панель форматирования для выбора типа размера шрифтов и способа выравнивания текстовых комментариев.

🖳 - вызвать на экран все палитры математических символов, для чего выбрать команду меню **View⇒Toolbars** и «включить» каждую палитру:

Arithmetic – арифметические операции и элементарные функции;

Evaluation – знаки отношений, шаблоны операторов;

Graph – шаблон графиков различного типа;

Matrix – шаблон векторов и матриц и действий над ними;

Calculus – операторы производных, интегралов, сумм, произведений и др.;

Programming – средства программирования;

Greek – греческие буквы;

Symbolic – ключевые слова и операторы символьных вычислений;

Modifier – дополнительные операции палитры Symbolic.

🖳 Закрыть все панели, кроме **Math**, нажать каждую из кнопок с пиктографическим изображением на этой панели.

🕮 С помощью таких наборных панелей можно вводить в документы практически все известные математические символы и операторы. Для установки с их помощью необходимого шаблона (объекта) достаточно поместить курсор (красный крестик) в желаемое место окна редактирования и затем активизировать пиктограмму нужного шаблона, установив на нее курсор мышки и нажав ее левую клавишу. В составе сложных шаблонов присутствуют шаблоны, указывающие места ввода отдельных параметров и данных. Они имеют вид небольших черных прямоугольников.

🖳 Используя наборные панели вывести шаблоны $\times, +, \sin x, \cos x, \sqrt{x}, \sqrt[n]{x}, \int_a^b$.

Работа с формульным редактором. Система MathCAD интегрирует в себе три редактора: формульный, текстовый и графический. Для запуска формульного редактора достаточно установить курсор мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой клавишей. Появится **визир** в виде маленького красного крестика. Его можно перемещать клавишами перемещения курсора. Не путать визир с курсором мыши! Визир указывает место, с которого можно начинать набор формул – вычислительных блоков. В области формул визир превращается в синий уголок, указывающий направление и место ввода. При вводе бинарного оператора по другую сторону знака операции автоматически появляется заполнитель в виде черного прямоугольника. В это место вводят очередной операнд. Для управления порядком операций используют скобки. Чтобы выделить элементы формулы, которые в рамках операции должны рассматриваться как единое целое, используют клавишу **ПРОБЕЛ**. При каждом ее нажатии уголковый курсор «расширяется», охватывая элементы формулы, примыкающие к данному.

Блоки документа и порядок их выполнения. Каждое математическое выражение, график или текстовая область с комментариями образуют блоки. Блоки имеют обычно невидимые границы.

🕮 Опираясь на понятие блока можно сформулировать важный *принцип работы системы MathCAD* – блоки выполняются строго поочередно с просмотром их слева – направо и сверху – вниз. В ходе исполнения документа блоки просматриваются в указанном порядке, распознаются, компилируются и затем уже исполняются. Если в каком-то блоке N используются данные, получаемые в блоках N_i, то все блоки N_i при просмотре должны располагаться так, чтобы они были прочитаны и выполнены до обнаружения блока N. Каждая формула образует отдельный блок, обозначенный рамкой!

Пусть необходимо вычислить определенный интеграл.

1) Установить визир в то место экрана, где должен быть помещен шаблон.

2) Вывести панель операторов математического анализа и выбрать пиктограмму с изображением знака определенного интеграла.

3) В шаблоне определенного интеграла 4 черных прямоугольника: для ввода верхнего и нижнего пределов интегрирования, для задания подынтегральной функции и для указания имени переменной по которой идет интегрирование.

4) Для ввода данных необходимо установить указатель мыши на нужный шаблон и ввести данные.

5) Установите знак равенства после полученного выражения и увидите результат вычисления.

Задача_1. Вычислить а) $\int_2^5 2x+\sqrt{x^2+4}dx$; б) $\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx$; в) $\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{(x+1)^2}$.

Задача_2. Вычислить $1+\sqrt{23+425}-0{,}5\cdot 23{,}4+\dfrac{\sin^2(23)}{\cos(23)+2}-23$. Необходимо помнить о различиях между имеющимися математическими формулами и правилами, существующими в среде MathCAD: для разделения целой и дробной части используется точка; для возведения функции в степень, выражение функции берется в скобки, например, $(\sin(23))^2$.

Работа с текстовым редактором. Текстовый редактор позволяет задавать текстовые комментарии, что делает документ с формулами и графиками более понятным В простейшем случае для ввода текстового редактора достаточно ввести символ “ (кавычка) (на англ.яз.). В появившийся прямоугольник можно начать вводить текст. В текстовом блоке визир имеет вид красной вертикальной черты. Текст можно редактировать общепринятыми средствами. Рекомендуется выбрать нужный тип, начертание и размер шрифта перед началом ввода текста сразу после появления красной вертикальной черты - это можно сделать с помощью команды **FORMAT⇒Text**. Для редактирования текста или отдельной его части необходимо предварительно выделить требуемый фрагмент.

- Написать заголовок лабораторной работы шрифтом зеленого цвета, размером 14 пт, выбрав начертание – полужирный курсив.

Работа со вставками – Insert. Установка любого объекта в окно редактирования называется вставкой (**Insert**). MathCAD реализует различные механизмы вставки – от выводов шаблона объекта до вставки объекта с помощью связывания с приложением, создавшим объект. При активизации команды меню Insert появляется подменю со следующими операциями:

Graph – вставка шаблонов графики с выбором их из подменю;
Matrix . . . – вставка шаблонов матриц и векторов;
Function . . . – вставка шаблонов встроенных функций;
Unit . . . – вставка единиц измерения размерных величин;
Picture . . . – вставка шаблона рисунка;
Math Region – вставка в текстовую область шаблона математической области для создания неисполняемого комментария в виде математической формулы;
Text Region – вставка текстовой области;
Page Break – вставка линии обрыва страницы (горизонтальная черта);
Hyperlink – вставка гиперссылки;
Reference . . . – вставка обращения к заданному файлу;
Component . . – вставка других компонентов системы;
Object . . . – вставка объекта с установлением динамической связи с порождающим его приложением.

- Используя опцию **Text Region** набрать заголовок лабораторной работы шрифтом красного цвета, размером 12 пт.

📖 Вставка функций из окна с перечнем функций гарантирует синтаксически верное написание функции. Для вставки функции необходимо выбрать команду меню **INSERT⇒Function**. В появившемся окне в разделе **Function Category** (категории функций) выбрать нужный вам раздел. После чего выбрать нужную функцию из предложенной библиотеки в окне **Function Name**. В нижнем окне описывается формат выбранной функции. Например, для вычисления логарифмической функции необходимо набрать в круглых скобках вначале аргумент, а затем через запятую основание.

Задача_3. Вычислить

а) $\sqrt{12} + \arccos 23 - \arcsin 15 + \dfrac{8}{arctg 12}$;б) $\log_2 64 + \log_3 \dfrac{1}{81}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$.

Для вычисления предела использовать вместо знака равенства знак →. Для набора символа ∞ использовать сочетание клавиш Shift+Ctrl+Z.

🖳 Установите границы ваших блоков, используя команду меню **VIEW⇒Region**. Если ваши блоки перекрываются, устраните перекрытия командой меню **FORMAT⇒Separate Region** (разделить области).

🖳 Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_1.mcd**.

После завершения этой лабораторной работы необходимо владеть навыками

Вызова палитры математических символов; присваивания; разделения целой и дробной части; «расширения» уголкового курсора; вставки шаблонов; вставки функций; вычисления математических выражений.

🖳 Индивидуальные задания к лабораторной работе №1

I. Найти значения следующих выражений

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{2})^3; \quad (\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}})^2; \quad tg(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-0{,}5) + arctg 1);$$

$$\int_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}}dx; \quad \int_0^{\pi} \sin(3x - \frac{\pi}{6})dx; \quad \int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}; \quad \log_2 4; \quad \log_{0,5} 32; \quad \log_{0,5\sqrt[5]{2}} \frac{1}{32};$$

$$tg(arctg(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + arctg 1 + \arccos 0 + arctg\frac{1}{\sqrt{3}}); \quad \left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}; \quad \frac{4}{5}(1 + 9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}; \quad 27^{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 0{,}5 - \log_{27} 2};$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}.$$

II. Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_{-2}^{1}((x+2)^2+\sqrt{(x-1)^3})dx$; 2) $\int\limits_{0}^{3}x\sqrt{x^2+1}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\ln 3}e^{3x}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^3 xdx$;

5) $\int\limits_{1}^{4}\frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}dx$; 6) $\int\limits_{1}^{2}xe^{3x^2+1}dx$; 7) $\int\limits_{3}^{4}\frac{\sqrt{tgx+1}}{\cos^2 x}dx$; 8) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\sin^2 xdx$;

2 Лабораторная работа №2. Работа с переменными

Написать заголовок лабораторной работы. Шрифтом зеленого цвета, размером 14 пт, выбрав начертание – полужирный курсив.

Работа с переменными

Важным объектом входного языка MathCAD являются ***переменные*** – поименованные области памяти, несущие некоторые значения (численные, строковые или символьные), поскольку каждая переменная, использованная в выражении должна быть предварительно определена. С переменными связано понятие **присваивания** им значений. Символ присваивания **:=**.

Чтобы найти значение некоторого выражения при заданном значении *x* необходимо: присвоить переменной *x* нужное значение, записать выражение, используя переменную *x*. Для набора на клавиатуре символа присваивания необходимо набрать знак двоеточия.

Задача_1. Найдем значение выражения $\frac{1}{2}\ln(2x+3)$ при *x*=3.

_1. Для решения в среде MathCAD набрать в рабочей области:
x:=3
$\frac{1}{2}\ln(2x+3)=$.

Задача_2. Найти значения выражений: **а)** $\sqrt{2}\sin^2 2x+3\cos^5 x$ при $x=\pi$;
б) $\lg\lg x+\lg(\lg x^2-1)$ при $x=\sqrt{10^5}$; **в)** $\sqrt{5x^2+3x-1}-\frac{2}{x}$ при $x=2$.

Задание ранжированных переменных. Часто возникает необходимость в задании ряда значений. Например, для вычисления факториала *N*!=1·2·3·…·(*N*-1)·*N* нужно сформировать ряд чисел од 1 до *N* с шагом 1 и перемножить их. Упорядоченный ряд значений какой-то переменной (например, абсциссы *x*) нужен для построения графика функции – MathCAD строит графики по точкам, соединяя их отрезками прямой.

Для создания таких рядов используются ранжированные переменные. В самом простом случае для создания такой переменной используется выражение: **<Имя переменной>:=<Начальное значение>..<Конечное значение>**, символ **..** , указывающий на изменение переменной в заданных пределах (диапазон) выводится набором на клавиатуре символа точки с запятой **(;)**. Если **<начальное значение>** меньше **<конечного значения>**, то шаг изменения +1, в противном случае –1.

Для создания ранжированной переменной общего вида используется выражение:

<Имя переменной>:=<Начальное значение>, <Начальное значение + Шаг>..<Конечное значение>.

Шаг изменения переменной должен быть положительный.

Вывод на экран таблицы значений выражения, содержащего ранжированную переменную. Если после некоторого выражения с ранжированной переменной поставить знак равенства, то после щелчка левой клавишей мыши на экран будет выведена таблица значений этого выражения.

Задача_3. Задать ранжированную переменную i в диапазоне от 1 до 5 и вывести ее значения.

_3. 1) Задать i:=1..5.

2) Записать i=

3) Щелкнуть левой кнопкой мыши вне области формулы.

Задача_4. Задать ранжированную переменную *x* в диапазоне от 0 до 3 с шагом изменения 0,5. Вывести таблицу значений *x*.

Задача_5. Задать ранжированную переменную *z* в диапазоне от –0.5 до 0.5 с шагом изменения 0,25. Вывести таблицу значений *z*.

Задача_6. Задав ранжированную переменную *u* в диапазоне от 0 до 3 с шагом изменения 0,5, вывести таблицу значений функции $f(u)=\frac{1}{u^2+1}$ на указанном промежутке изменения аргумента.

Задача_7. Задав ранжированную переменную *v* в диапазоне от –10 до 10 с шагом изменения 0,1. Вывести таблицу значений переменной *v* и функции $f(v)=\sin v$ на указанном промежутке. Используя полосу прокрутки просмотреть полученные значения функции.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_2.mcd**.

После завершения этой лабораторной работы необходимо владеть навыками

Задания переменной; вывод переменной; указания диапазона изменения значения ранжированной переменной.

Индивидуальные задания к лабораторной работе №2

I. Найти значения следующих выражений при *x* равном дате Вашего рождения.

1) $2x^3+3x^2-5\arcsin x$; 2) $arctg\left(\frac{7x-5}{x^2-9}\right)$; 3) $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+\sqrt{12-x-x^2}$;

4) $\frac{x+2}{|x|-2}$; 5) $\sqrt{x^2-4}$; 6) $\frac{\sqrt{x}}{\cos\pi x}$; 7) $\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}+\sqrt{9x-x^2}$.

3 Лабораторная работа №3. Построение двумерных графиков в декартовой и полярной системах координат

Написать заголовок работы шрифтом зеленого цвета, размером 14 пт, выбрав начертание – полужирный курсив.

Работа с двумерными графиками

Для создания двумерных графиков в системе MathCAD имеется программный графический процессор, позволяющий строить самые разные графики. Для их построения используются шаблоны, перечень которых содержится в подменю **Graph** опции меню **Insert**.

Графики любого вида, как любые другие объекты документа, можно выделять, заносить в буфер обмена, вызывать их оттуда и переносить в любое новое место документа. Их можно перетаскивать курсором мыши, растягивать по горизонтали, по вертикали и по диагонали, цепляясь за специальные маркеры (предварительно выделив) курсором мыши.

Упрощенное построение графиков в Декартовой системе координат. Согласно этому способу для построения графика достаточно выполнить следующие действия:

1) Вывести шаблон **X-Y Plot** с помощью команды меню **Insert⇒Graph** (или выбрать соответствующую пиктограмму панели **шаблонов графики**).

2) Появляющийся незаполненный шаблон представляет собой большой пустой прямоугольник с шаблонами данных в виде темных маленьких прямоугольников, расположенных около осей абсцисс и ординат будущего графика. В средние шаблоны данных надо ввести имя переменной *x* (по оси *Ox*), и выражение функции *f*(*x*) (по оси *Oy*). Крайние шаблоны данных служат для указания предельных значений аргумента и функции. Если оставить эти шаблоны

незаполненными, то масштабы по осям графика будут установлены автоматически.

3) Щелкнуть левой кнопкой мыши вне области графика – он будет построен.

Задача_1. Построить график функции $f(x) = x^3$.

Типовое построение графиков в Декартовой системе координат. Для этого способа надо вначале задать *ранжированную переменную*, например, *x*, указав диапазон ее изменения и шаг. Затем необходимо задать соответствующие функции и вывести шаблон двумерного графика. После чего выполняются те же шаги что и выше.

Задача_2. Построить график функции $f(x) = \sin x$.

_2. 1) Зададим ранжированную переменную *x* в диапазоне от -10 до 10 с шагом изменения 0,1. Для этого набрать x1:=-10,-9.9..10 (индекс 1 для переменной x необходим, так как уже есть выше график для переменной *x*) f(x):=sin(x).

2) Вывести шаблон **X-Y Plot**-графика. Заполнить шаблоны черных прямоугольников, введя переменную *x* по оси *Ox* и *f*(*x*) по оси *Oy*, поставить диапазоны для *x*.

3) Щелкнув мышкой в стороне от шаблона графика просмотреть результат.

Если в одном шаблоне строятся графики нескольких функций, то для их разделения в шаблоне вдоль оси OY следует использовать запятые.

Задача_3. Построить в одном шаблоне графики трех функций $f(x) = \sin x,\quad g(x) = \dfrac{\sin x}{x},\quad h(x) = \dfrac{x^3}{1000}$.

Задача_4. Пусть $f(x) = \sin x \cdot \cos x$. Построить на одном шаблоне графики функции *f*(*u*), *f*(*u*1), *f*(*u*2), *f*(*u*3), где $u = 0..10;\ u1 = 0{,}0.2..1;$ $u2 = a, a + \dfrac{b-a}{n}..b;\ u3 = b, b - \dfrac{b-a}{3n}..a$ и константы $a = 2;\ \ b = 12;\ \ n = 5$. Здесь, кроме уже выше сказанного, в шаблоне вдоль оси *Ox* необходимо перечислить переменные *u*, *u*1, *u*2, *u*3.

Форматирование двумерных графиков. Окно задания форматов графиков появляется, если дважды быстро щелкнуть левой клавишей мыши в области графика, либо выбрать команду меню **Format⇒Graph⇒ X-Y Plot.** В открывающемся окне имеются 4 вкладки, позволяющие менять основные параметры графиков и осуществлять различные установки:

X-Y Axes – установка параметров осей графиков. Эта вкладка позволяет установить логарифмический масштаб (**Log Scale**), вывести масштабную сетку из пунктирных линий (**Grid Lines**), задать вывод числовых данных по осям (**Numbered**), задать автоматическое масштабирование (**Autoscale**), показать маркеры (**Show Markers**) и задать автоматическое определение числа линий масштабной сетки (**Auto Grid**). Все это делается раздельно для осей X и Y. Можно задать оси в виде креста (**Crosed**), обрамляющего прямоугольник (**Boxed**), или не выводить их (**None**). Опция **Equal Scales** делает одинаковым масштаб по осям.

Для имеющихся графиков функций вывести оси в виде креста. Скопировать график функции $f(x) = x^3$. Для копии графика сделать одинаковый масштаб по осям, вывести масштабную сетку, убрав автоматическое определение числа линий масштабной сетки, задать вручную число линий масштабной сетки равное 10 по обеим осям. Просмотреть результат.

- **Traces** – установки параметров линий графиков. Эта вкладка выводит список кривых, которые могут быть на графике. Для каждой кривой можно установить метку – символ (**Symbol Label**), вид линии (**Line**), цвет (**Color**), тип линии (**Type**) и толщину линии (**Weight**). Можно установить опцию показа или скрытия аргумента у осей (**Hide Argumens**) и показа и скрытия «легенды» (**Hide Legend**). «Легенда» – список обозначений, которые реализуются на чертеже путем показа отрезков линий вместе с их именами – по умолчанию это **trace1**, **trace2**, . . ., имена можно заменить на пользовательские путем их ввода в соответствующие окна вместо trace1, trace2, . .

Для графиков трех функций определить для каждого толщину линий равную 2. Установить опцию показа легенды, заменить существующие имена trace1, trace2, trace3 на sin(x), sin(x)/x, (x^3)/1000.

Для графиков функции $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ изменить для каждой линии символ ее начертания, вид линии, тип линии и толщину.

- Вкладка **Labels** – установки титульной надписи (**Title**) и надписей по осям X (X-**Axis**) и Y (Y-**Axis**). Для ввода этих надписей имеются соответствующие поля. Титульную надпись можно установить сверху (**Above**) или снизу (**Below**) графика. Опция **Show Titel** позволяет показывать или не показывать титульную надпись.

Задать для графиков трех функций титульную надпись, введя «Grafics» и расположить ее выше графика.

- Вкладка **Defaults** – возврат к стандартным установкам (по умолчанию).

Специальные средства графики

Трассировка двумерных графиков. Предполагает выполнение действий:

1) Выделение графика.

2) Выбор команды меню **FORMAT⇒Graph⇒Trace**. Эта опция выводит окно трассировки двумерных графиков.

3) Трассировка начинает работать после выделения графика. При этом в окне графика появляется большое перекрестие из двух черных пунктирных линий.

4) С помощью курсора мыши пунктирное перекрестие можно перемещать по графику с дискретностью, определяемой заданным шагом абсциссы *x*. При этом координаты текущей точки на которую установлено перекрестие отображаются в окне трассировки. Это позволяет в первом приближении выявить координаты особых точек графика. Клавиши **Copy X** и **Copy Y** позволяют занести координаты текущей точки графика в буфер. После этого из буфера их можно перенести в документ.

Задача_5. Построить график функции $\frac{\sin(x)}{x}$. Где *x* изменяется от –10 до 10 с шагом 0,05. После задания переменной *x* вывести ее значения. Выделить график, вывести окно трассировки. Путем перемещения пунктирного перекрестия найти примерные координаты точек минимума. Скопировать их поочередно в буфер и вставить в рабочую область. Вставка объекта осуществляется набором клавиш Ctrl+V.

🕮 **Просмотр участков 2D-графиков.** Некоторые графики представляют довольно любопытные кривые. Команда **FORMAT⇒Graph⇒Zoom** выводит окно, с помощью которого можно растянуть любой участок графика – применительно к функциям времени такую возможность часто называют лупой времени. Чтобы воспользоваться этим окном, нужно иметь выделенный график. При указанных условиях перемещение мышки с нажатой левой клавишей приводит к появлению на графике прямоугольника из пунктирных линий. Этим прямоугольником намечается область просмотра графика. При этом в окне просмотра отображаются максимальные и минимальные значения X и Y, определяющие область просмотра. Кнопки **Zoom**, **Unzoom**, **Full View** позволяют просмотреть выделенную часть графика, снять выделение и задать полную область просмотра соответственно.

Задача_6. Построить график функции $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Разместить рядом второй экземпляр этого графика, на котором представить для просмотра область для X Min ≈-0,45; Max ≈ 0,45, для Y Min ≈-0,2; Max ≈ 0,1.

Построение графиков в полярной системе координат. В полярной системе координат каждая точка задается углом *W* и модулем радиус-вектора *R(W)*. График функции обычно строится при изменении угла W в определенных пределах, чаще всего от 0 до 2π. Опция **Polar Plot** (Полярный график) выводит шаблон таких графиков в форме окружности с шаблонами данных.

Типовое построение графика параметрически заданной функции в полярной системе координат предусматривает перед построением задать ранжированную переменную, например, *w*, изменяющуюся в необходимых пределах. После вывода шаблона следует ввести *w* в шаблон снизу и функцию *R*(*w*) в шаблон слева, а также указать нижний предел изменения длины радиус-вектора *R*(*w*) – *Rmin* в шаблоне справа внизу и верхний предел *Rmax* в шаблоне справа вверху.

Задача_7. Построить указанным образом график спирали R(W)=2W+1.

_7. 1) Набрать $W:=0,0.1\cdot\pi..4\cdot\pi$ $R(W):=2\cdot W+1$.

2) Вывести шаблон полярной графики и набрать в шаблонах заполнения W и R(W).

3) Просмотреть результат.

4) Изменить конечное значение масштаба на 6π.

5) Установить масштабные линии сетки.

Задача_8. Построить график $R(W)=2\sin\left(4\frac{W}{3}\right)$. При изменении угла от 0 до 6π с шагом 0,01.

Построение графика в полярной системе координат с использованием шаблона обычного графика в прямоугольной системе координат. Для этого надо по оси *Ox* установить R(W)· cos(W), а по оси *Oy* – R(W)· sin(W). Построение графиков в полярной системе координат с помощью шаблона обычной **X-Y Plot** двумерной графики в ряде случаев более предпочтительно, поскольку в математической литературе графики параметрически заданных функций чаще всего строятся именно таким образом. При задании даже простых функций *R*(*W*) графики в полярной системе координат могут иметь весьма причудливый вид.

Задача_9. Построить график спирали R(W)=2W+1 в прямоугольной системе координат.

_9. 1) К имеющимся значениям (задача_7) $W:=0,0.1\cdot\pi..4\cdot\pi$ $R(W):=2\cdot W+1$ набрать X(W):= R(W)· cos(W) Y(W):= R(W)· sin(W).

2) Вывести шаблон X-Y Plot – графики.

3) Набрать в шаблонах заполнения X(W) и Y(W). Просмотреть результат.

Задача_10. Построить график $R(W)=2\sin\left(4\frac{W}{3}\right)$ в прямоугольной системе координат.

Форматирование графиков в полярной системе координат выполняется также, как и в декартовой системе координат. График выделяется и двойным щелчком мышки (или с помощью опций меню) выводится окно форматирования. Вкладка окна форматирования **Polar Axes** (полярные оси) позволяет установить параметры для отображения радиус-вектора (**Radial**) и угла (**Angular**). Остальные вкладки практически аналогичны описанным выше.

Задача_11. Построить в одном шаблоне графики функций $\tau(v) = v + \frac{1}{v}$, $\phi(v) = v^2(v+1)\sqrt[3]{v-2}$. Задать оси в виде креста, сделать одинаковый масштаб по обеим осям. Увеличить для просмотра область с точками пересечения обоих графиков. Используя трассировку установить примерные координаты точки пересечения графиков.

Задача_12. Построить в полярной и прямоугольной системах координат графики функций. Установить экспериментально наиболее оптимальные для прочтения шаг и границы диапазона для каждого графика.

а) Построить частный случай Кохлеоиды: R(W)= $2 \times \frac{\sin W}{W}$.

б) Построить частный случай трехлепестковой розы: R(φ)=2sin3φ.

в) Построить улитку Паскаля: R(φ)=6cosφ+1.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_3.mcd**.

Индивидуальные задания к лабораторной работе №3

I. Построить графики функций в декартовой системе координат

1) $f(x) = \frac{x^3}{(x+2)(x^2-1)}$; $f(x) = \frac{x}{\sin x} + \sqrt{x}$; $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $f(x) = x + arctgx$

2) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9}$; $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$; $f(x) = e^{x^2-2x}$; $f(x) = arctg\,\frac{x-3}{x^2+4}$

3) $f(x) = \frac{x^3}{(x+3)(x^2-4)}$; $f(x) = \frac{\cos x}{x} + |\cos x|$; $f(x) = xe^{-x}$; $f(x) = \arcsin\frac{x}{x^2-1}$

4) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$; $f(x) = \sin x + \sin 2x$; $f(x) = x + e^{-x}$; $f(x) = x - arctg\sqrt{x}$

5) $f(x) = \frac{x^3}{(x+4)(x^2-1)}$; $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x$; $f(x) = e^{8x-x^2-14}$; $f(x) = arctg\,\frac{x^2-1}{x^2+1}$

6) $f(x) = \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^2}$; $f(x) = \sin^2 x + \cos x$; $f(x) = (1+x^2)e^x$; $f(x) = x + arctgx$

7) $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)(x^2-4)}$; $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; $f(x) = x^3e^{-x}$; $f(x) = arctg\,\frac{x-3}{x^2+4}$

8) $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-1}$; $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$; $f(x) = \frac{e^x}{16-x^2}$; $f(x) = \arcsin\frac{x}{x^2-1}$

9) $f(x) = \frac{x^3}{(x+5)(x^2-9)}$; $f(x) = \cos x - \cos^2 x$; $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $f(x) = x - arctg\sqrt{x}$

10) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$; $f(x)=\cos 3x-3\cos x$; $f(x)=x+\dfrac{\ln x}{x}$; $f(x)=arctg\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

11) $f(x)=\dfrac{1}{(x+4)(x^3-8)}$; $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$; $f(x)=x\ln(1+x^2)$; $f(x)=x+arctgx$

12) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$; $f(x)=(x+1)\ln^2(x+1)$; $f(x)=arctg\dfrac{x-3}{x^2+4}$

13) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-1}$; $f(x)=\dfrac{x}{\sin x+\sin 2x}$; $f(x)=(2+x^2)e^{-x^2}$ $f(x)=x-arctg\sqrt{x}$.

4 Лабораторная работа №4. Построение трехмерных графиков

Написать заголовок лабораторной работы шрифтом зеленого цвета, размером 14 пт, выбрав начертание – полужирный курсив.

Трехмерные, или **3D**-графики, отображают функции двух переменных вида Z(X,Y). Для представления таких графиков в достаточно наглядном виде используются аксонометрическое изображение поверхностей и фигур; построение линий равного уровня; применение функциональной окраски (например, зависящей от координаты Z); применение линий каркаса с удалением невидимых линий; имитация различных световых эффектов.

Команда меню **INSERT⇒Graph** открывает следующий перечень типов трехмерной графики: **Surface Plot** создать шаблон для построения трехмерного графика; **Contour Plot** – создать шаблон для контурного графика поверхности; **3D Scatter Plot** – создать шаблон в виде точек (фигур) в трехмерном пространстве; **Vector Field Plot** – создать шаблон для графика векторного поля на плоскости; **3D Bar Chart** – создать шаблон для изображения поверхности в виде совокупности столбцов в трехмерном пространстве. Можно использовать операцию **3D Plot Wizard…** - вывод Мастера создания 3D-графиков.

Операция **Surface Plot** служит для построения поверхности Z(X,Y) предварительно представленной матрицей **M** значений аппликат Z. При этом выводится шаблон графика, левый верхний угол которого помещается в место расположения курсора. В единственный шаблон данных надо занести имя матрицы со значениями аппликат точек поверхности. Перед построением графика его надо определить математически.

При построении трехмерных графиков можно выделить два способа: заданием функции и путем создания массива данных.

Задача_1. Построить график поверхности, заданной функцией $f(x, y)=(x^2\cdot y^2)$.

_1. Построим поверхность заданием функции.

1) Задать функцию *f*(*x*,*y*).

2) Вывести шаблон 3D-графика с помощью команды меню **INSERT⇒Graph⇒ Surface Plot**.

3) В левом нижнем шаблоне набрать имя функции *f*.

4) Щелкнув мышкой в стороне от графика просмотреть результат.

5) Щелкнув в области графика немного увеличить его размеры, растянув его границы за маркеры, удерживая нажатой левую клавишу мыши.

Задача_2. Построить график поверхности, заданной функцией $f(x, y) = \sin(xy)$.

_2. Построим поверхность путем создания массива данных.

1) Зададим i:=0..5; j:=0..7; x_i:=0.5·i; y_j:=0.2·j.

2) Зададим $Z_{i,j} := \sin(x_i \cdot y_j)$. Для набора нижних индексов при **Z** набрать после Z символ открывающейся квадратной скобки: Z **[** i , . . .

3) Вывести шаблон 3D-графика.

4) В левом нижнем шаблоне набрать имя матрицы аппликат **Z**.

5) Щелкнув мышкой в стороне от графика просмотреть результат.

Здесь два аргумента являются независимыми переменными, а функция – зависимой переменной.

Задача_3. Построить график поверхности, заданной функцией $f(x, y) = \sin(x^2+y^2)$ при изменении значений переменных *x* и *y* от 0 до 20.

_3. Вновь воспользуемся заданием массива данных.

1) Задать функцию f(x,y):= $\sin(x^2+y^2)$.

2) Задать границы изменения переменных *x* и *y*: x:=0..20, y:=0..20.

3) Задать матрицу аппликат поверхности: $M_{x,y} := f\left(\frac{x-10}{5}, \frac{y-10}{5}\right)$.

4) Вывести шаблон 3D-графика.

5) В левом нижнем шаблоне набрать имя матрицы аппликат **M**.

6) Щелкнув мышкой в стороне от графика просмотреть результат.

Вращение 3D-графика. Наглядность и реалистичность изображения на плоском рисунке поверхностей и тел в трехмерном пространстве зависит от углов обзора. Для вращения любой трехмерной фигуры достаточно выделить ее изображение и, нажав и удерживая левую клавишу мыши, начать перемещать мышь по поверхности стола.

🖳 Выполнить вращение построенного графика.

🕮 Можно использовать непрерывное вращение 3D-графика в выбранном направлении. Для этого начать вращение мышью при нажатой клавише **Shift**.

🖳 Выполнить непрерывное вращение построенного графика.

Форматирование трехмерных графиков. Для вывода окна форматирования трехмерных графиков достаточно поместить курсор мыши в выделенную область графика и быстро щелкнуть дважды левой клавишей мыши. Это окно имеет ряд вкладок и кнопки «**Ok**», «**Отмена**», «**Применить**» и «**Справка**». Кнопка «**Применить**» позволяет проверить немедленно все введенные установки форматирования, не выходя из окна форматирования.

🖳 Вызвать окно форматирования для построенного графика.

▪ Вкладка **General** – установка общих характеристик изображения. Наиболее важная опция (**Plot N**) расположена внизу окна – это переключатель вида фигур, выбирая нужную опцию и нажимая кнопку **Применить** можно просмотреть различные типы представления уже построенной поверхности (см. типы трехмерных графиков).

🖳 Просмотреть все типы. Вернуться к исходному виду. Применить опцию **Show Box** (поместить в ящик). Применить опцию, убирающую координатные оси: выбрать опцию **None** в разделе **Axes Stile**. Вернуться к исходному виду.

- Вкладка **Advanced** – установка расширенных опций (перспектива, цветовые эффекты, качество печати и т.д.).

🖳 Изучить возможности **Choose Colormap**, выбирая разные варианты и используя кнопку «Применить».

- Вкладка **Axes** – установка параметров координатных осей (тип, толщина и цвет линий осей, число отметок, их нумерация, масштаб и др.). Здесь представлены вкладки, позволяющие задавать параметры отдельно для каждой из осей.

🖳 Для оси *Ox* установим вручную число линий масштабной сетки равное 10, в разделе **Grids** выключив опцию **Auto Grid**. Покажем сетку по этой оси, для этого в разделе **Grids** выбрать **Draw Lines**. Цвет линий сетки – синий. Выполнить те же действия для осей Y и Z, меняя цвета. Вернуться к исходному виду поверхности. Для каждой оси убрать показ числовых значений, для этого выключить опцию **Show Numbers** в разделе **Axes Format**. Для каждой оси включить опцию показа разметки **Draw Ticks**.

- Вкладка **Appearance** – установка вида графика (параметров окраски, линий и типа точек, используемых при построении фигур и поверхностей).

Скроем невидимые части линий «каркаса», для этого выбрать опцию **Hide Lines** (погасить линии) в разделе **Line Options**. Просмотреть результат. Применим функциональную окраску: выбрать опцию **Fill Contours** в разделе **Fill Options**. Просмотреть результат. Покажем точки пересечения линий: включить опцию **Draw Points** в разделе **Point Options**, задать размер точек 1,5. В разделе **Color Options** выбрать **Colormap**.

- Вкладка **Back Planes** – установка параметров заднего плана.

- Вкладка **Lighting** – задание условий освещения и выбор схемы освещения.

Включить опцию **Enable Lighting** в разделе **Lighting**. Применив результат вернуться к исходному виду поверхности.

- Вкладка **Special** – задание специальных параметров (контурных линий, столбцов, интерполяции по цвету и др.).

- Вкладка **Title** – задание титульных надписей и их параметров.

Задать титульную надпись «3D Grafic», расположив ее выше графика.

Закрыть окно форматирования.

Построение многогранников. Всего можно построить 80 многогранников. Для построения полиэдра выведите на экран шаблон трехмерного графика и введите в шаблон ввода Polyhedron(“#N”), где *N* – целое число от 1 до 80.

Задача_4. Построить 16-тигранник. В окне редактирования графика на странице **Lighting** включить опцию **Enabled Lighting** и на странице **Appearance** выбрать **Fill Surface** в разделе **Fill Options**.

Задача_5. Построить 44-гранник.

Одновременное построение разных 3D-графиков одной функции. В ряде случаев одна и та же функция может отображаться графиками разного типа. Нередко повышению наглядности таких графиков способствует их совместное отображение. Для такого построения нужно ввести в шаблон задания матрицы ее имя два или более число раз и отформатировать каждый график под нужный тип с помощью вкладки **Special** окна форматирования **3D**-графика.

Задача_6. Построить поверхность, заданную функцией $f(x, y) = -\sin(x^2+y^2)$, с цветной окраской и под ней ту же поверхность в виде контурного графика.

_6. 1) Построить поверхность, используя матрицу аппликат.

2) В шаблоне графика к уже имеющемуся имени матрицы набрать через запятую имя матрицы **M**.

3) Щелкнуть мышкой вне графика.

4) В окне графика вызвать окно форматирования. Выбрать вкладку **General**.

5) Теперь на ней представлены возможности редактирования двух графиков (Plot 1 и Plot 2). Выбрать вкладку **Plot 2**, на ней выбрать опцию **Contour Plot**– контурный график - вторая поверхность.

6) Нажать **Ok**.

Для **построения на одном графике ряда пересекающихся фигур** надо задать матрицы соответствующих поверхностей и в поле вывода шаблона 3D-графика перечислить эти матрицы через запятую.

Задача_7. Построить в одном шаблоне графики поверхностей $h(x, y)= -\sin(x^2+y^2)$ и $g(x, y)= x^2+y^2-5$ при изменении значений переменных x и y от 0 до 20.

_7. Придерживаясь описанных выше инструкций, задать матрицы аппликат поверхностей: $L1$ и $L2$. При построении поверхностей, ввести в шаблон L1, L2.

Задача_8. В этом же шаблоне построить контурный график поверхности $g(x, y)= x^2+y^2-5$.

Задача_9. Построить график поверхности заданной функцией $f(x, y)= -\sin(x^2+y^2)$.

Для поверхности выбрать опцию **No Fill** в разделе **Fill Options**. В разделе **Line Options** включить опцию **Colormap.** В разделе **Point Options** включить опции **Draw Points** и **Colormap**, задав размер точек 2. Просмотреть результат.

Построение поверхности тела вращения. Аналитически тела вращения обычно описываются в сферических или цилиндрических координатах. MathCAD строит трехмерные графики в декартовых координатах. В таких случаях необходимо преобразовать исходные координаты в декартовы.

Задача_10. Построение поверхности шара. Для преобразования сферических координат в декартовы будем использовать аналитические формулы.

_10. 1) Задать n=40.

2) Задать ранжированные переменные i:=1..n, j:=1..n.

3) Задать $\alpha_i = i\dfrac{\pi}{n}$; $\beta_j = j\dfrac{2\pi}{n+5}$.

4) Задать матрицы координат $X_{i,j} = \sin(\alpha_i)\cos(\beta_j)$; $Y_{i,j} = \sin(\alpha_i)\sin(\beta_j)$; $Z_{i,j} = \cos(\alpha_i)$.

5) В шаблоне 3D-графика набрать (X, Y, Z).

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_4.mcd**.

Индивидуальные задания к лабораторной работе №4

I. Построить на разных шаблонах графики поверхностей. Выполнить их редактирование.

1) $f(x, y) = \cos(x^2+y^2)$. Задать матрицу аппликат $M_{x,y} := f\left(\frac{x-10}{5}, \frac{y-10}{5}\right)$. Исследовать поведение этого графика. Для этого изменять значение в знаменателях дробей для матрицы от 2 до 10.

2) Построить график функции Розенброка: $f(x, y)= 100(y - x^2)^2 +(1-x)^2$. Для этого задать функцию, после этого задать переменные i=0..100, j=0..100, $a_i := 0.01 \cdot i - 0.5$, $b_j := 0.01 \cdot j - 0.5$. Задать матрицу аппликат $M_{i,j} := f(a_i, b_j)$.

3) Построить график функции $f(x,y)= \cos(xy)$. Задать функцию, после этого задать переменные i:=0..20, j:=0..20, $x_i := 0.2 \cdot i - 2$, $y_j := 0.2 \cdot j - 2$. Задать соответствующую матрицу аппликат.

4) Используя быстрый способ построения графиков функций, построить поверхность $f(x, y) = x^2 + y^2 - 30$. В этом же шаблоне построить контурный график этой поверхности.

5) Используя быстрый способ построения графиков функций, построить график функции $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$. В этом же шаблоне построить контурный график этой поверхности.

5 Лабораторная работа №5. Работа с массивами, векторами, матрицами

Написать заголовок лабораторной работы шрифтом зеленого цвета, размером 14 пт, выбрав начертание – полужирный курсив.

Установка шаблонов матриц и векторов

Операция **Matrices** (Матрицы) обеспечивает задание векторов или матриц. MathCAD использует одномерные ***массивы – векторы*** и двумерные – ***матрицы***. Матрица характеризуется числом строк **Rows** и столбцов **Columns**. Таким образом, число элементов матрицы равно Rows ×Columns. Элементами матриц могут быть числа, константы, переменные, математические выражения.

🕮 Если выбрать опцию меню **Insert⇒Matrices**, то появится окно позволяющее задать мерность вектора и (или) число строк и столбцов матрицы. Для этого нужно указать число строк и столбцов. Нажав на клавиатуре клавишу **Enter** или в окошке кнопку **Insert** (вставить) можно вывести шаблон матрицы или вектора (у вектора либо число строк, либо число столбцов равно 1). Шаблон состоит из обрамляющих прямых скобок и маленьких прямоугольников для ввода значений. Сделать прямоугольник активным можно отметив его курсором мышки и щелкнув левой клавишей. Клавиша **Insert** при уже выведенном шаблоне матрицы позволяет расширить матрицу. Кнопка **Delete** позволяет удалить из матрицы строку или столбец.

Используя команду меню **Insert⇒Matrices** вывести матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. И вектор-столбец $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Вывести те же объекты используя палитру **Matrix**.

Задача_1. Найти результаты матричных операций:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 5 \\ 9 & -3 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -9 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Задача_2. Найти результат умножения вектора на число: $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 6{,}7$.

Задача_3. Построить поверхность, заданную матрицей $G(a,b) = \begin{pmatrix} (5 + 2\cos a)\cos b \\ (5 + 2\cos a)\sin b \\ 2\sin a \end{pmatrix}$.

Задание переменной в виде массива обеспечивает доступ к каждому его значению. Каждый элемент матрицы (двумерного массива) можно рассматривать как значение индексированной переменной, целочисленные значения индексов которой определяют положение элемента в матрице: один указывает номер строки, другой номер столбца. В отношении массивов и индексированных переменных действуют те же правила присваивания и вывода, что и для обычных переменных. Для набора индексированной переменной надо ввести ее имя, а для набора нижних индексов набрать символ открывающейся квадратной скобки: M **[**. . . первым указывается индекс, нумерующий строки, через запятую индекс, нумерующий столбцы].

Задача_4. Задав матрицу $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ вывести ее элементы: $M_{0,0}$, $M_{2,2}$, $M_{0,2}$, $M_{1,0}$.

Включить палитру **Matrix**.

Задача_5. Вычислить M^2 и M^T, $M \times M^T$, $M \times M^{-1}$, определитель $|M|$ матрицы. Используя знак $M^{<n>}$ вывести 1-ый столбец матрицы M и второй столбец матрицы M^2.

Задача_6. Вычислить определители: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 27 & 1 \\ 5 & 25 & 125 & 1 \end{vmatrix}$

Задача_7. Дан вектор $V = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 56 \end{pmatrix}$. Вычислить V^T, $V \times V^T$, $V \times V^{-1}$, модуль вектора $|V|$, V^3, вычислить сумму элементов вектора V.

🕮 С помощью операций присваивания можно создать массив (вектор или матрицу) заданного размера и заданного типа без ручного заполнения шаблонов.

Задача_8. Задать и вывести матрицу вида $M_{i,j} = i + \frac{j}{7}$.

_8. 1) Задать i:=0..4, j:=0..4, $M_{i,j} := i + \frac{j}{7}$.

2) Вывести матрицу M.

Задача_9. Даны векторы $V1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $V2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $V3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Найти $V1 + V2 + \text{-}V3$, $V4 = V1 \cdot V2$ (скалярное умножение), $V5 = V1 \times V2$ (векторное умножение) двух векторов.

Работа с векторными и матричными функциями.

length (V) – возвращает число элементов вектора.

max (V) – возвращает максимальный по значению элемент вектора или матрицы.

min (V) – возвращает минимальный по значению элемент вектора или матрицы.

cols (M) – возвращает число столбцов матрицы M.

rows (M) – возвращает число строк матрицы M

rank (M) – возвращает ранг матрицы M

tr (M) – возвращает след (сумму диагональных элементов) квадратной матрицы M.

Задача_10. Найти длину, максимальный и минимальный элементы вектора V, заданного выше.

Задача_11. Дана матрица $M=\begin{pmatrix}5 & 7 & 12 & 23\\ 4 & 2{,}4 & 6 & -7{,}3\\ 5 & -3 & -0{,}8 & 12{,}4\end{pmatrix}$. Найти ее максимальный и минимальный элементы, число строк, столбцов и ранг.

Задача_12. Найти ранги матриц: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 6 & 8 & 8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 7 & 1\\ 1 & 1 & 9 & 1\\ 1 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$

Решение систем линейных уравнений. Если задана матрица **A** и вектор **B** для системы линейных уравнений в матричной форме **A×X=B**, то вектор решения можно получить из выражения $\mathbf{X=A^{-1}B}$.

🕮 Для решения систем линейных уравнений введена встроенная функция **lsolve(A,B)**, которая возвращает вектор **X** при заданной матрице **A** коэффициентов и векторе свободных членов **B**.

Задача_13. Решить систему уравнений $\begin{cases}4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}8x_3 = 8\\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9\\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20\end{cases}$

🖳 1) Задать матрицу коэффициентов системы $A := \begin{bmatrix}4 & 0.24 & -0.08\\ 0.09 & 3 & -0.15\\ 0.04 & -0.08 & 4\end{bmatrix}$.

2) Задать вектор свободных членов: $B := \begin{bmatrix}8\\ 9\\ 20\end{bmatrix}$.

3) Выполним присваивание $X:=A^{-1}\cdot B$.

4) Вывести значения X на экран X=… .

Запишем второй способ решения системы

5) X1:=lsolve(A,B)

6) X1=… .

Задача_14. Решить двумя способами системы уравнений:

а) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6,\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8,\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2,\\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\ x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5=3,\\ x_1+x_2+x_3+4x_4+x_5=-2,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+5x_5=5,\end{cases}$

🖳 Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_5.mcd**.

🖳 Индивидуальные задания к лабораторной работе №5

I. Решить двумя способами системы линейных уравнений

$$1)\ \begin{cases}2x-y+z=2\\3x+2y+2z=-2\\x-2y+z=1\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}x+2y-3z=5\\2x-y-z=1\\x+3y+4z=6\end{cases}\qquad 3)\begin{cases}3x-y+2z=0\\2x+3y-5z=0\\x+y+z=0\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}2x-y+3z=0\\x+2y-5z=0\\3x+y-2z=0\end{cases}\qquad 5)\begin{cases}x-2y+z=4\\2x+3y+z=3\\4x-y+z=11\end{cases}\qquad 6)\begin{cases}2x-3y+z-2=0\\x+5y-4z+5=0\\4x+y-3z+4=0\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}2x-4y+3z=1\\x-2y+4z=3\\3x-y+5z=2\end{cases}\qquad 8)\begin{cases}3x+2y-z=0\\2x-y+3z=0\\x+3y-4z=0\end{cases}\qquad 9)\begin{cases}3x+2y-z=0\\2x-y+3z=0\\x+y-z=0\end{cases}$$

$$10)\begin{cases}x+2y+3z=4\\2x+y-z=3\\3x+3y+2z=7\end{cases}\qquad 11)\begin{cases}x+2y+3z=4\\2x+4y+6z=3\\3x+y+z=1\end{cases}\qquad 12)\begin{cases}x-2y+3z=4\\2x+y-z=3\\3x+3y+2z=10\end{cases}$$

II. Задав вектор-столбец $\mathrm{V}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$, где v_1 - день Вашего рождения, v_2 - последняя цифра года Вашего рождения, v_3 - месяц Вашего рождения, вычислить V^{T}, $\mathrm{V}\times\mathrm{V}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{V}\times\mathrm{V}^{-1}$, модуль вектора $|\mathrm{V}|$, V^3, вычислить сумму элементов вектора V.

III. Задав матрицу $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&b_1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&b_2\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&b_3\end{pmatrix}$, найти ее максимальный и минимальный элементы, число строк, столбцов и ранг. (a_{ij} взять из задания I).

6 Лабораторная работа №6. Символьные вычисления

Написать заголовок лабораторной работы шрифтом зеленого цвета, размером 14 пт, выбрав начертание – полужирный курсив.

Символьные вычисления

Операции, относящиеся к работе символьного процессора, содержатся в подменю **SYMBOLICS** главного меню. Они выполняются в командном режиме.

Чтобы символьные операции выполнялись процессору необходимо указать, над каким выражением это должно проводиться, т.е. надо выделить выражение. Для некоторых операций следует не только указать выражение, к которому она относится, но и наметить (выделить) переменную, относительно которой выполняется символьная операция. Само выражение в таком случае не выделяется.

🕮 Символьные вычисления можно также выполнять, используя палитру **Symbolic**, вызываемую командой меню **VIEW⇒Toolbars⇒Symbolic**. В этом случае после набранного выражения, нужно вызвать на палитре нужную команду. Если действие выполняется надо всем выражением, то его необходимо выделить уголковым курсором. Если действие выполняется над некоторой переменной (или выражением), то справа от выбранной команды появляется черный шаблон, в котором необходимо указать переменную (выражение) относительно которой выполняются преобразования. В некоторых командах этот шаблон рекомендуется удалять.

Операции с выражениями:

🕮 **Evaluate** (выбор: **SYMBOLIC⇒Evaluate**) – вычислить выражение с выбором способа вычисления из подменю:

- **Evaluate⇒ Evaluate Symbolically** – выполнить символьное вычисление выражения;
- **Evaluate⇒ Floating Point Evaluation** – вычислить арифметическое выражение, используя числа с плавающей точкой;
- **Evaluate⇒ Complex Evaluation** – выполнить вычисления в комплексном виде.

🕮 **Simplify –** упростить выделенное выражение с выполнением сокращения подобных слагаемых, приведения к общему знаменателю, использования основных тригонометрических тождеств и т.д.

Задача_1. Упростить выражение $\frac{-5}{x}+\frac{5}{x-1}-\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{6}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^4}$.

💻_1.

I способ. 1) Набрать выражение, выделить его.

2) Вызвать палитру **Symbolic** командой меню **VIEW⇒Toolbars⇒Symbolic**.

3) Выбрать в палитре операцию **Simplify**, после того как появится знак → нажать клавишу Enter.

II способ. 1) Набрать выражение и выделить его.

2) Выбрать опцию меню **SIMBOLICS⇒ Simplify**.

Задача_2. Упростить выражения двумя способами:

а) $\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$; б) $\frac{(ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2))((ax+by)^2-4abxy)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$

в) $\frac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha+\cos 10\alpha-\cos 14\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha+\sin 10\alpha+\sin 14\alpha}$

🕮 **Expand** – раскрыть выражение.

Задача_3. Раскрыть выражение $\sin 5x$.

1) Набрать выражение.

2) Вызвать палитру **Symbolic**.

3) Выбрать в палитре операцию **Expand**, после слова Expand в появившемся черном квадратике указать значение переменной – x.

4) Нажать клавишу Enter.

🕮 **Factor** - разложить число или выражение на множители.

Задача_4. Разложить на множители многочлены.

_4. Выполнить указанные операции двумя способами: используя команду меню **SIMBOLICS⇒Factor** и палитру **Symbolic** (после выбора команды **Factor** на палитре удалите черный шаблон ввода справа от **Factor** и нажмите клавишу **Enter**).

а) x^3+y^3;б) $\dfrac{2x^3-3x+1}{x^3+2x^2-9x-18}$; в) $2a^2y^5+aby^5-aby^3-2a^2y^3$; г) $\dfrac{\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{1}{3-x}}$

🕮 **Collect** – собрать слагаемые, подобные выделенному выражению, которое может быть отдельной переменной или функцией со своим аргументом.

Задача_5. В следующих выражениях приведите подобные слагаемые отдельно по каждой переменной

_5. Выполнить указанные операции двумя способами: используя команду меню **SIMBOLICS⇒ Collect** и палитру **Symbolic**:

а) $x+2x-3y+4y+xy-2x^2y-3xy^2$; б) $x^2-ayx^2+2y^2x-x$.

🕮 **Variable** (операции с выделенными переменными). Для ряда операций надо знать относительно какой переменной они выполняются. В этом случае нужно выделить переменную, установив на ней маркер ввода. После этого становятся доступными следующие операции:

- **Solve** – найти значения выделенной переменной, при которых содержащее ее выражение становится равным нулю;

Задача_6. Решить уравнение $4x^4+3x^2-1=0$.

_6. 1) Вызвать палитру Symbolic.

2) Набрать выражение, выбрать в палитре операцию **Solve**

3) После слова Solve в появившемся черном квадратике указать значение переменной – x, нажать клавишу Enter.

Задача_7. Решить уравнения: а) $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$;

б) $\sqrt{2x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x-2}=2$;в) $3\sin^2 x+5\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$;г) $\sin z=\dfrac{1}{3}tgz$

- **Substitute** – заменить указанную переменную содержимым буфера обмена;
- **Differintiate** – дифференцировать выражение, содержащее выделенную переменную, по этой переменной (т.е. вычислить частную производную по данной переменной);

Задача_8. Найти частные производные функции $f(x,y)=x^2\sin y$.

_8. Найдем частную производную по x:

1) Набрать выражение $x^2\sin y$.

2) Выделить в нем переменную x.

3) Выбрать опцию меню **SYMBOLICS⇒Variable⇒ Differintiate**.

Аналогично найти частную производную по y.

Задача_9. Найти частные производные функций

а) $f(x,y)=x^y$; б) $f(x,y,z,t)=x^2+y^2+xtz^3$.

- **Integrate** – интегрировать выражение, содержащее выделенную переменную, по этой переменной;

Задача_10. Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{x+3}$.

_10. 1) Набрать выражение $\frac{1}{x+3}$.

2) Выделить в нем переменную x.

3) Выбрать опцию меню **SYMBOLICS⇒Variable⇒Integrate**.

Задача_11. Вычислить неопределенные интегралы. В последнем выражении привести подобные слагаемые относительно $\sin 2x$ и $\cos 2x$.

а) $\int\cos 7x dx$; б) $\int(2x^3-3\sin x+5\sqrt{x})dx$; в) $\int(x^2+7x-5)\cos 2x dx$.

- **Expand to Series** – найти несколько первых членов разложения выражения в ряд Тейлора по степеням выделенной переменной;
- **Convert to Partial Fraction** – разложить на элементарные дроби выражение, которое рассматривается как рациональная дробь относительно выделенной переменной.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_6.mcd**.

Индивидуальные задания к лабораторной работе №6

I. Найти частные производные следующих функций

1) $z=x^2\sin^2 y$; $z=x^3+xy^2-2y^3$; 2) $z=x^{y^2}$; $z=\frac{1}{x^3-y^3}$.

3) $z = arctg(xy)$; $z=\sqrt{x^2+xy+y^2}$; 4) $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; $z=\ln(5+x-y)$;

5) $z=\sin(x+y-7)$; $z=\sqrt{3-x^2-(y+2)^2}$; 6) $z=\dfrac{x}{3y-2x}$; $z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

7) $z=\ln(\cos x-y)$; $z=\sqrt{5-(x+1)^2-y^2}$; 8) $z=\arcsin(x+y)$; $z=\ln(\sin(xy))-x^2y+xy$;

9) $z=\cos(\ln(x+y))$; $z=\sqrt{6-(x+1)^2-(y-2)^2}$; 10) $z=\arcsin(t\sqrt{x})$; $u=e^{x/y}+e^{z/y}$;

11) $z=tg(x+y)$; $z=6x^3-2y+xy$; 12) $z=\ln\sin(x-2t)$; $u=x^{x^2+y^2+z^2}$.

13) $z=\cos(ax-by)$; $u=\sin^2(x+y)-\sin^2 x-\sin^2 y$.

14) $z=\sqrt{x-1}+\sqrt{y+3}$; $z=\cos(x+5xy+\dfrac{x}{y})$.

II. Вычислить неопределенные интегралы

1) $\int(x+\sqrt{x})dx$; $\int\dfrac{dx}{1+(x+2)^2}$; $\int\sqrt{4x-1}dx$; $\int\cos^3 x\cdot\sin x dx$;

2) $\int(\sin 5x+\cos x)dx$; $\int\dfrac{x-2}{x^3}dx$; $\int e^{2x}dx$; $\int\dfrac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}dx$;

3) $\int arctgx dx$; $\int\dfrac{3x-4}{x^2-4}dx$; $\int(\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}}{4})dx$; $\int\dfrac{2x+3}{x-2}dx$;

4) $\int\dfrac{dx}{4+(2x+1)^2}$; $\int\cos(\dfrac{\pi}{6}+2x)dx$; $\int\sqrt[3]{x^3-8}x^2dx$; $\int\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx$;

5) $\int e^{\sin x}\cos x dx$; $\int\dfrac{\sqrt{tgx+1}}{\cos^2 x}dx$; $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$; $\int\dfrac{5x+1}{\sqrt{9-x^2}}dx$;

6) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; $\int\dfrac{5x-1}{x^3-3x-2}dx$; $\int(x^2+5x)e^x dx$; $\int x\cdot\ln x dx$;

7) $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{x}}$; $\int\dfrac{3x+1}{2x+3}dx$; $\int\sqrt{x^2+1}x dx$; $\int\dfrac{tgx}{\cos^2 x}dx$;

8) $\int\dfrac{dx}{3+(2-5x)^2}$; $\int tg^2 x dx$; $\int\dfrac{e^x dx}{3+4e^x}$; $\int\dfrac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}dx$;

9) $\int(5x^3-8x+2)e^x dx$; $\int\ln(1-x)dx$; $\int\dfrac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$; $\int\dfrac{3x+2}{\sqrt{2+x^2}}dx$;

10) $\int(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x\sqrt{x}}+2)dx$; $\int\dfrac{x^2}{x^2-3}dx$; $\int\sqrt[3]{1+3x}dx$; $\int\dfrac{\cos x}{\sqrt{2\sin x+1}}dx$;

11) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$; $\int\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; $\int e^{4\cos x-1}\sin x dx$; $\int\dfrac{arctgx}{1+x^2}dx$;

12) $\int(x+8)\sin 2x dx$; $\int\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$; $\int(2x^2-5x+7)e^x dx$; $\int\dfrac{x^5+x-1}{x-2}dx$;

13) $\int (x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx$; $\int \frac{dx}{9x^2+45}$; $\int \sqrt[6]{1-2x^3}\,x^2 dx$; $\int \frac{\cos 2x}{(2+3\sin 2x)^3} dx$;

7 Лабораторная работа №7. Решение нелинейных уравнений и систем. Решение дифференциальных уравнений

Написать заголовок лабораторной работы шрифтом зеленого цвета, размером 14 пт, выбрав начертание – полужирный курсив.

Решение нелинейных уравнений и систем

Функция поиска корня нелинейного уравнения – root. Уравнения могут не иметь аналитических решений. Тогда они решаются численными методами с заданной погрешностью. Для простейших уравнений вида $F(x) = 0$ решение находится с помощью функции **root(выражение, имя_переменной)**. Эта функция возвращает значение переменной, при котором выражение равно 0 с заданной точностью. Можно задать начальное значение переменной, что полезно, если возможно несколько решений.

Задача_1.Найти корни полинома третьей степени $F(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, при значениях коэффициентов $a_3 = 1$, $a_2 = -6$, $a_1 = 21$, $a_0 = -52$.

_1. 1) Задать коэффициенты полинома.

2) Задать полином.

3) Задать начальное значение x:=0.

4) Задать формулу для нахождения первого действительного корня: x1:=root(F(x),x).

5) Вывести значение x1.

6) Два других корня могут оказаться комплексными, поэтому далее необходимо задать $i := \sqrt{-1}$ $x := 1+1\cdot i$. Для поиска второго корня $x2$ первый исключается делением $F(x)$ на $(x\text{-}x1)$ (т.е. теперь функция root применяется к функции $F(x)/(x\text{-}x1)$). Соответственно для поиска третьего корня $x3$ $F(x)$ делится еще и на $(x\text{-}x2)$. Найти остальные корни полинома.

Задача_2. Найти корни многочлена третьей степени $x^3 - 5x - 1 = 0$, задав начальное приближение x=0.

Функция поиска всех корней многочлена – polyroots. Для поиска корней обычного полинома $p(x)$ степени n MathCAD содержит функцию **polyroots(V)**, которая возвращает вектор всех корней многочлена (полинома) степени n, коэффициенты которого находятся в векторе V, имеющем длину n+1. Не рекомендуется пользоваться этой функцией, если степень полинома выше пятой-шестой, т.к. тогда трудно получить малую погрешность вычисления корней.

Задача_3. Найдем корни полинома из задачи_1, используя эту функцию.

Задача_4. Найти корни полинома $F(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, при значениях коэффициентов $a_3 = 1$, $a_2 = 6$, $a_1 = 30$, $a_0 = 25$, используя две описанные выше функции.

Задача_5. Используя функцию **polyroots** найти корни полиномов:
а) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$; **б)** $x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 22x - 12$

Директива Given для подготовки блока решения уравнения или системы уравнений. При решении систем нелинейных уравнений используется специальный вычислительный блок, открываемый служебным словом – директивой **Given** – и имеющий следующую структуру:

Начальные условия (вида var:=value)
Given
Уравнения (вида expr_left=expr_right)
Ограничительные условия
Выражения с функциями **Find**, **Minerr**, **Maximize** и **Minimize**

🕮 Начальные условия определяют начальные значения искомых переменных. Они задаются обычным присваиванием переменным заданных значений. Если переменных несколько, то используется векторное представление для начальных условий. Уравнения задаются в виде expr_left=expr_right с применением жирного знака равенства (палитра **Boolean**) между левой и правой частью каждого уравнения. Ограничительные условия обычно задаются в виде неравенств или равенств, которые должны удовлетворяться при решении системы уравнений.

В блоке используется одна из следующих двух функций:

Find(v1,v2, . . . ,vn) – возвращает значение одной или ряда переменных для точного решения. Эта функция используется, когда решение реально существует (при решении системы уравнений – графики функций пересекаются).

Minerr(v1,v2, . . . ,vn) – возвращает значение одной или ряда переменных для приближенного решения (при решении системы уравнений – графики функций не имеют общих точек). Эта функция пытается найти максимальное приближение к несуществующему решению путем минимизации среднеквадратичной погрешности решения.

Задача_6. Решить уравнение $x^2 = 3$.

🖳**_6.** 1) Задать начальное значение для поиска: присвоим переменной *x* значение 10.

2) Откроем блок словом Given.

3) Запишем уравнение, используя жирный знак равенства.

4) Присвоим x0:=Find(x).

5) Выведем x0. Решить это же уравнение, используя функцию Minerr.

Задача_7. Используя функцию Given решить уравнения:

а) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$; б) $4^x+25^x=29$.

Решение систем уравнений

Задача_8. Найти точки пересечения параболы $v=u^2$ и прямой $v=8+3u$.

_8. Построить в одном шаблоне графики функций, при этом *u* изменяется от –5 до 5, а *v*(*u*) от 0 до 30.

Задачу нахождения точек пересечения можно интерпретировать следующим образом: решить систему из двух уравнений с ограничительными условиями, задающими область поиска корня ($u<0$ и $u>0$). Решим систему с помощью функции Find. Решим систему уравнений $v=u^2$ и $v=8+3u$ при ограничении $u<0$.

1) Зададим начальное приближение для *u* и *v*: u:=-2 (область описка корня u<0) v:=0.

2) Откроем блок словом Given.

3) Запишем два уравнения, используя жирный знак равенства:

$v = u^2 \qquad v = 8 + 3 \cdot u$

4) Зададим первое ограничение на область поиска корня: u<0.

5) Зададим вектор решений системы

$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(u, v)$

6) Вывести вектор решений на экран.

Аналогично найти решения из области u>0.

Задача_9. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ x+y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=25 \\ x+y=17 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=25 \\ x+y=20 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x^2yz^2=144 \\ x^2y^2z=48 \\ xy^2z^2=36 \end{cases}$

При решении системы уравнений в) функция Find не сможет найти решения (показать это), отсюда будет следовать, что эллипс и прямая не пересекаются. Найдите приближенные решения, используя функцию Minerr. Для решения системы уравнений г) задать начальное приближение $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Функции Maximize и Minimize. Для поиска значений переменных *x*1, *x*2, . . . ,*xn*, при которых некоторая функция *f*(*x*1, *x*2, . . . ,*xn*) имеет максимальное или минимальное значение используются функции **Maximize(f, x1, x2, . . . ,xn)**

и **Minimize(f, x1, x2, . . . ,xn)**. Они возвращают вектор неизвестных, при котором заданная функция имеет максимальное или минимальное значение, соответственно.

🕮 Если необходимы различные ограничительные условия в виде равенств или неравенств, то эти функции должны использоваться в составе блока решения, открываемого словом Given.

Задача_10. Найти максимум и минимум функции $h(t) = 2t^3 - 16t + 5$. Найти значения функции в этих точках. Постройте график данной функции.

_10. Построим график функции $h(t)$.

1) Для поиска максимума функции задать начальное приближение t:=-2.

2) Задать xMax как функцию Maximize, вывести максимальное значение и найти значение функции в точке максимума:

$xMax := Maximize(h, t)$

$xMax = -1.633 \qquad h(xMax) = 22.419$

3) Для поиска минимума зададим начальное приближение t:=5.

4) В блоке Given запишем ограничение t>0, задать xMin как функцию Minimize, вывести минимальное значение и найти значение функции в точке минимума:

Given

$t > 0$

$xMin := Minimize(h, t)$

$xMin = 1.633 \qquad h(xMin) = -12.419$

Задача_11. Построить график поверхности $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ и найти значение функции $f(x, y)$ в точке минимума.

_11. 1) Построить график поверхности.

2) Задать начальное приближение для обеих! переменных.

3) В блоке Given минимум определится как вектор от (x, y):

$P := Minimize(f, x, y)$

4) Вывести значение вектора P на экран и найти значение функции в точке минимума.

Задача_12. Построить график поверхности $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - 9y^2$ и найти значение функции $f(x, y)$ в точке максимума.

Решение задач линейного программирования. Функции **Maximize** и **Minimize** могут широко применяться при решении задач линейного программирования, которые широко используются в экономических и производственных расчетах.

Задача_13. Пусть цех малого предприятия должен изготовить 100 изделий трех типов. Каждого изделия нужно сделать не менее 20 штук. На изделия уходят соответственно 4; 3,4 и 2 кг. металла при его общем запасе 340 кг, а также по 4,75; 11 и 2 кг пластмассы при ее общем запасе 700 кг. Сколько изделий каждого типа *x*1, *x*2 и *x*3 надо выпустить для получения максимального объема выпуска в денежном выражении, если цена изделий составляет по калькуляции 4, 3 и 2 рубля.

_13. Задача сводится к вычислению максимума функции $f(x1,x2,x3)=4\cdot x1+3\cdot x2+2\cdot x3$.

1) Зададим функцию, а также начальные приближения для *x*1, *x*2, *x*3 равные 1.

2) Откроем блок Given.

3) Так как каждого изделия нужно сделать не менее 20 штук, то зададим ограничения вида:

$x1 \ge 20 \qquad x2 \ge 20 \qquad x3 \ge 20$

4) Из условий задачи запишем еще два ограничения:

$4 \cdot x1 + 3.4 \cdot x2 + 2 \cdot x3 \le 340$

$4.75 \cdot x1 + 11 \cdot x2 + 2 \cdot x3 \le 700$

5) Из условия задачи известно всего деталей должно быть 100 штук, т.е.

$x1 + x2 + x3 = 100$

6) Зададим некоторый вектор, например, *R*, как функцию максимума

$R := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2, x3)$

7) Вывести значение этого вектора на экран.

Решение дифференциальных уравнений

Напомним, что обыкновенным дифференциальным уравнением *n*-го порядка называется уравнение вида $F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0$, где $y = y(x)$ - искомая функция. Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая данное уравнение в тождество, называется решением этого уравнения, а график этой функции – интегральной кривой.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$. Решив это уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$, получим $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Как известно из курса математического анализа, последнее уравнение определяет тангенс угла наклона интегральной кривой в точке $(x; y)$.

MathCAD предоставляет широкие возможности для решения обыкновенных дифференциальных уравнений ОДУ (в такое уравнение входят производные только по одной переменной). Поскольку решение дифференциальных уравнений состоит в интегрировании, чтобы обеспечить однозначность решения, необходимо задавать дополнительные условия для определения постоянных интегрирования.

🕮 MathCAD решает ОДУ двух типов:

- Задачи Коши – ОДУ с начальными условиями (задаются значения функции и ее производных в начальной точке интервала интегрирования);

- Краевые задачи – ОДУ с граничными условиями (задаются значения функции и ее производных в начале и в конце интервала интегрирования).

Начиная с версии MathCAD 2000, для решения дифференциальных уравнений и их систем появилась функция **Odesolve.** Она позволяет записывать уравнение в блоке решения в привычном виде, как обычно записывают уравнение на листе бумаги. Функция Odesolve возвращает решение дифференциального уравнения в виде функции.

🕮 Перед обращением к функции Odesolve необходимо записать слово Given. После этого записывается само дифференциальное уравнение и начальные или граничные условия к нему (или система дифференциальных уравнений и условия к ней). Далее идет сама функция Odesolve(x, xk, n), где x – имя переменной, относительно которой решается уравнение, xk – конец интервала интегрирования (начало интервала интегрирования указывается в начальных условиях), n – необязательный внутренний параметр, определяющий число шагов интегрирования, за которые должно быть найдено решение дифференциального уравнения. Чем больше n, тем с большей точностью будет решено уравнение, тем больше будет время решения.

Задача_14.Решить дифференциальное уравнение $\frac{d^3}{dx^3}y(x)+x^2\frac{d}{dx}y(x)+xy(x)=e^x\cos x$. С начальными условиями $y(0)=-8, y'(0)=3, y''(0)=3$.

🖳**_14.** 1) Записать ключевое слово Given.

2) Записать уравнение

$y'''(x)+x^2\cdot y'(x)+x\cdot y(x)=e^x\cdot\cos(x)$ (символ «апостроф» для обозначения производной – Ctrl+F7).

3) Задать начальные условия:

$y(0)=-8 \qquad y'(0)=3 \qquad y''(0)=3$

4) Задать функцию *y* = Odesolve(*x*, 5) и переменную *x*

$y := \mathrm{Odesolve}(x,5) \qquad x := 0, 0.1 .. 5$

5) Построить график функции *y*(*x*).

Задача_15. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{d^3}{dx^3}y(x)-2^{-x}\frac{d}{dx}y(x)=x\sin x$. С начальными условиями $y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=-0.5$. Конец интервала интегрирования – 7. Построить график найденной функции.

🕮 В качестве еще одного примера для решения обыкновенного дифференциального уравнения рассмотрим функцию **rkfixed (y,x1,x2,k,D)**. В отличие от рассмотренной выше функции Odesolve, она возвращает матрицу решений методом Рунге-Кутта. При решении обыкновенного дифференциального уравнения ***y*** – вектор из *n* (*n* – степень уравнения) элементов $y, y', y'', y''',...y^{(n-1)}$, определяющих начальные условия для искомой функции и ее производных:

$$y = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ y''(x_0) \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

D **-** символьный вектор, состоящий из n элементов:

$$D(x, y) = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ ... \\ y^{(n)} \end{bmatrix}$$

***x*1**, ***x*2** – границы интервала интегрирования,

k – число шагов.

Задача_16. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx} + y = x\cos x$ и имеющую значение 0 при *x*=0.

Применительно к данной задаче дадим общий план решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием функции rkfixed.

_16. 1) Зададим уравнение, используя жирный знак равентсва.

2) Зададим начальные условия как элемент вектора *y*: $y_0 = 0$;

3) Зададим функцию D(*x*, *y*), содержащую вектор первых производных от неизвестных функций. В нашем случае $D(x, y) = -y_0 + x\cos x$;

4) Определим начальное и конечное значение отрезка интегрирования. В нашем случае это $x1 = 0$; $x2 = 12\pi$ соответственно;

5) Укажем число шагов интегрирования. *n*=20.

6) Задать матрицу решения Z = rkfixed (y,x1,x2,n,D). Матрица содержит два столбца, первый из которых содержит значения независимой переменной, а второй соответствующие значения функции.

7) В большинстве случаев желательно представление решения в графическом виде. Присвоим векторам X и Y соответствующие значения столбцов матрицы: $X := Z^{\langle 0 \rangle}; Y := Z^{\langle 1 \rangle}$. Построить в декартовой системе координат график, отражающий решения данной системы. Вывести значения для Y.

Заметим, что можно не задавать отдельно *x*1, *x*2, *n*, а указать их сразу при определении функции rkfixed. Т.е. в нашем случае можно было записать Z=rkfixed(y, 0, 12π, 20, D).

Задача_17. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x+4}-0{,}4$ и имеющую начальное значение 1,7. Задать отрезок интегрирования от 3 до 5 и число шагов 10. Построить график, отражающий решение данной системы.

Задача_18. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $y'+3y=0$ и имеющую начальное приближение 4 при x=0. Задать отрезок интегрирования от 0 до 4 и число шагов 50. Построить график, отражающий решение данной системы.

Рассмотрим теперь на примере решение дифференциальных уравнений порядка выше первого.

Задача_19. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{d^4}{dx^4}y(x)-2x\frac{d^2}{dx^2}y(x)+\sin x\cdot y(x)=0$.

_19. 1) Задать уравнение.

2) Задать отрезок интегрирования от $x1$=10 до $x2$=11 и число шагов 20. Граничные условия: $y(0)=0,\ \ y'(0)=1, y''(0)=2, y'''(0)=3$

3) Зададим вектор y начальных условий и вектор производных $D(x,y)$:

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad D(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 2x\cdot y_2 - \sin(x)\cdot y_0 \end{pmatrix}$$

4) Зададим матрицу решений Z

$Z := \mathrm{rkfixed}(y, x1, x2, n, D)$

5) Построить график, отражающий решение данной системы. На одном графике должна быть представлена зависимость всех столбцов 1-4 (производные с первой по четвертую) от нулевого столбца.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_7.mcd**.

Индивидуальные задания к лабораторной работе №7

I. Решить уравнения:

1) $x^3-3x=0$; $\sqrt{5x^2+3x-1}-2x=1$; $2\sin^2 x+3\sin x=2$

2) $x^4-5x^2-36=0$; $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4$; $3\cos^2 x+2\cos x=1$

3) $2x^4-5x^2+3=0$; $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$; $tg(2x+1)=\sqrt{3}$

4) $(x^2-x-3)(x^2-x-2)=12$; $\sqrt{2x-15}+\sqrt{x+16}=-1$; $4\cos^2 x+\sin x+1=0$

5) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$; $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=4$; $\sin^2 x+\sin 2x=0$

6) $x^3-3x^2-4x=-12$; $\sqrt{x^3-5x^2+4}=x-2$; $2\sin x+3\cos x=0$

7) $x^2+\frac{1}{x^2}+2(x-\frac{1}{x})=6$; $\sqrt{5x^2+3x-1}-2x=1$; $2\cos^2 x+3\sin x\cos x=5\sin^2 x$

8) $(x^2-2x)^2-2x^2+4x-3=0$; $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=4$; $4\sin^2 x+3\sin x\cos x=2$

9) $\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{(x-3)^2}=0$; $\sqrt{2x-15}+\sqrt{x+16}=-1$; $\sin 2x+\sin^2 x=\cos^2 x$

II. Решить дифференциальные уравнения с помощью функции rkfixed:

1) $y'=\dfrac{y}{\ln y\cos x}$, $y(0)=0$;

2) $100\dfrac{d^2}{dt^2}x(t)+10\dfrac{d}{dt}x(t)+101x(t)=50\cos(\dfrac{1}{4}t)$, $x(0)=0, x'(0)=1$;

3) $y'''\cdot(x-1)-y''=0$, $y(2)=2, y'(2)=1, y''(2)=1$

III. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке

1) $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x-1}$, $[4;\ 6]$; 2) $y=\dfrac{x^3+2x^2}{x-2}$, $[-1;\ 1]$; 3) $y=\dfrac{e^{-x}}{x}$, $[-1;3]$.

8 Лабораторная работа №8. Использование функций с условиями сравнения. Проведение линейной и сплайновой аппроксимации. Статистическая обработка данных. Выполнение регрессии. Функции сглаживания данных. Экстраполяция.

Использование функций с условиями сравнения

Существует ряд встроенных функций, у которых возвращаемый ими результат зависит от знака или значения аргумента. К числовым функциям с условиями сравнения относятся:

Ceil (x) – наименьшее целое, большее или равное x;

Floor (x) - наибольшее целое, меньшее или равное x;

mod (x,y) – остаток от деления x/y со знаком x;

Ф(x) – функция Хейвисайда – дает 0 при x<0 и 1 в противном случае;

$\delta(m,n)$ – функция, именуемая символом Кронекера, возвращающая 1 при n=m и 0 в противном случае.

Задача_1. Найти остатки от деления 274 на 56; 4678 на 23; 23817 на 51.

Задача_2. Вычислить $1+\sqrt{23+425}-0{,}5\cdot 23{,}4+\dfrac{\sin^2(34)}{\cos(8{,}2)+2}-23$ и с помощью функции Хейвисайда установить знак. Для набора Ф использовать панель греческих символов.

🕮 Рассмотрим ряд встроенных логических функций:

csgn(z) – функция знака, аргумент комплексное число (возвращает 0, если z=0, 1 – если Re(z)=0 и Im(z)>0, -1 в иных случаях);

round(x,n) – при n>0 возвращает округленное значение x с n десятичными разрядами. При n<0 возвращает округленное значение x с n цифрами слева от десятичной точки. При n=0 возвращает округленное до ближайшего целого значение x. x – скаляр типа real scalar или целое число;

sign(x) – функция знака (возвращает 0 если x=0, 1 – если x>0 и –1 в ином случае);

signum(z) – возвращает 1, если z=0 и $z/|z|$ в ином случае;

trunc(x) – целая часть от действительного числа x.

Функция условных выражений if: if(Условие, Выражение 1, Выражение 2). Если в этой функции условие выполняется, то будет вычисляться выражение 1, в противном случае – выражение 2.

Задача_3. Приведем пример применения функции if для моделирования процесса однополупериодного выпрямления, который используется в электротехнике для преобразования переменного тока в пульсирующий одной полярности.

_3. 1) Задать значения переменной x от 0 до 12 с шагом 0,1.

2) Задать $f(x) = \sin x$, $y(x) := \mathrm{if}(f(x) \geq 0, f(x), 0)$.

3) Построить график зависимости y(x).

Задача_4. Смоделируем периодический пилообразный сигнал с помощью рекурсивно заданной функции.

_4. 1) Используем заданные значения переменной x от 0 до 12 с шагом 0,1.

2) Задать $F(x) = 1 - x$;

3) Присвоить T значение 3;

4) Задать P(x) следующим образом: если x<T, то P(x) есть F(x), иначе P(x) есть P(x-T).

5) Построить график зависимости P(x).

Проведение линейной и сплайновой аппроксимации

Одномерная линейная аппроксимация. Для представления физических закономерностей и при проведении научно-технических расчетов часто используются зависимости вида y(x), причем число точек этих зависимостей ограничено. Возникает задача приближенного вычисления значений функции в промежутках между узловыми точками (интерполяция) и за их пределами (экстраполяция). Эта задача решается аппроксимацией исходной зависимости, т.е. ее подменой какой-либо достаточно простой функцией. Система MathCAD предоставляет возможность аппроксимации двумя важными типами функций: кусочно-линейной и сплайновой.

🕮 При кусочно-линейной интерполяции вычисления дополнительных точек выполняются по линейной зависимости. Графически это означает просто соединение узловых точек отрезками прямых, для этого используется функция **linterp**(VX,VY,*x*).

🕮 Для заданных векторов VX и VY узловых точек и заданного аргумента x **linterp**(VX,VY,*x*) возвращает значение функции при ее линейной аппроксимации. При экстраполяции используются отрезки прямых, проведенных через две крайние точки.

Задача_5. Рассмотрим использование этой функции на примере. Пусть задаются 10 точек: по оси Ox – целые числа, их значение по оси Oy есть случайная величина.

_5. 1) Зададим начальные значения и массив экспериментальных данных (X,Y), исходный массив данных Y задается генератором случайных чисел **rnd**:

$n := 10 \qquad i := 0..n \qquad X_i := i \qquad Y_i := \mathrm{rnd}(10)$

2) Вычислим интерполирующее значение в одной точке X=5:

$Y1 := \mathrm{linterp}(X, Y, 5) \qquad Y1 = 1.741$

3) Самостоятельно вычислить интерполирующее выражение в точке 6,23.

4) Построить график зависимости Y от X. Выбрать тип линии – точки (points), толщиной – 3.

5) Зададим теперь массив Ym интерполирующих значений массива Y в m точках. Задать перед графиком:

$$m := 7 \qquad j := 0..m \qquad Xm_j := X_1 + j \cdot \frac{(X_n - X_1)}{m + 1} \qquad Ym := \mathrm{linterp}(X, Y, Xm)$$

6) Построить на имеющемся графике еще одну зависимость –Ym от Xm. Выбрать тип линии – точки (points), толщиной – 3, изменив символы точек. Просмотреть и проанализировать результат.

7) Наконец, перед графиком зададим непрерывную интерполирующую функцию, которую назовем Ylin, которая пройдет через все точки от 0 до max(X):

$t := 0, 0.1..\max(X) \qquad Ylin(t) := \mathrm{linterp}(X, Y, t)$

8) Построить на имеющемся графике зависимость Ylin от t.

🕮 При небольшом числе узловых точек гораздо лучшие результаты дает сплайн-аппроксимация. При ней исходная функция заменяется отрезками кубических полиномов, проходящих через три смежные узловые точки. Коэффициенты полиномов рассчитываются так, чтобы непрерывными были первая и вторая производные. Линия, которую описывает сплайн-функция напоминает по форме гибкую линейку, закрепленную в узловых точках.

Для осуществления сплайновой аппроксимации система MathCAD предлагает функции:

interp(VS,VX,VY,x) – возвращает значение y(x) для заданных векторов VS, VX, VY и заданного значения x, при этом

VS – вектор вторых производных, созданный функцией cspline(X,Y), pspline(X,Y) или lspline(X,Y);

VX – вектор опытных значений аргумента, расположенных в порядке возрастания;

VY – вектор опытных значений функции;

x – значение аргумента, при котором вычисляется интерполирующее значение функции.

🕮 Для определения вектора VS используется одна из следующих функций:

cspline(VX,VY) – возвращает VS вектор коэффициентов кривой, которая приближается к кубической параболе в граничных точках;

pspline(VX,VY) – возвращает VS вектор коэффициентов кривой, которая приближается к квадратичной параболе в граничных точках;

lspline(VX,VY) – возвращает VS вектор коэффициентов кривой, которая приближается к прямой линии в граничных точках;

Сплайн-аппроксимация проводится в два этапа:

1) С помощью функции **cspline, pspline** или **lspline** отыскивается вектор VS вторых производных функции y(x), заданной векторами VX, VY ее значений (абсцисс и ординат).

2) Для каждой искомой точки вычисляется значение y(x) с помощью функции **interp**.

Задача_6. Применим описанные функции к рассмотренному выше примеру и сравним получающиеся результаты.

🖳**_6.** 1) Задать

$VS1 := \mathrm{lspline}(X, Y) \qquad VS2 := \mathrm{pspline}(X, Y) \qquad VS3 := \mathrm{cspline}(X, Y)$

2) Задать аппроксимирующие функции, используя каждый их этих векторов. Назовем функции Ylsp(t), Ypsp(t), Ycsp(t), где t, как и выше, ранжированная переменная:

$Ylsp(t) := \mathrm{interp}(VS1, X, Y, t) \qquad Ypsp(t) := \mathrm{interp}(VS1, X, Y, t) \qquad Ycsp(t) := \mathrm{interp}(VS1, X, Y, t)$

3) Для сравнения результатов, построить график зависимости Y от X (отобразить точки). На этом же графике построить зависимости Ylin, Ylsp, Ypsp, Ycsp от t.

Задача_7. Пусть задается вектор исходных данных

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2.5 \\ 4.5 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Задать линейно-интерполирующую функцию и сплайн-итерполирующую функцию. Построить графики и сравнить результаты.

🕮 Функция **csort** (M,n) переставляет строки матрицы таким образом, чтобы отсортированным оказался n-ый столбец.

_7. 1) Так как вектор X – это нулевой столбец матрицы V, упорядочим его функцией **csort** (V,0).

2) Присвоим векторам X и Y значения из нулевого и из первого столбца матрицы соответственно:

$$X := V^{\langle 0 \rangle} \qquad Y := V^{\langle 1 \rangle}$$

3) Задать интерполирующую (линейно) функцию lint(x) и вычислить ее значения в точках 2 и 7,71.

4) Сплайн-интерполяция: зададим вектор SV, используя cspline(X,Y).

5) Задать интерполирующую функцию fits(x) и вычислим fits(2) и fits(7,71).

6) Определим индексы i и j: i изменяется от 0 до длины вектора X минус 1;

7) Введем переменную q равную 100; зададим j в диапазоне от 0 до q. Вычислим $x_j = \min(X) + j \cdot \frac{\max(X) - \min(X)}{q}$.

8) Представим графически данные массива и линейно-интерполирующую функцию и данные массива и сплайн-интерполирующую функцию. Построить в одном шаблоне графики функций Y(X) и lint(x_j); в другом шаблоне Y(X) и fits(x_j). Для первого графика задать точечный тип линии.

Статистическая обработка данных

При выполнении физических экспериментов данные обычно представляются с той или иной случайной погрешностью. Поэтому их обработка нуждается в соответствующих статистических методах. Рассмотрим функцию **rnd**(x) – функция генерации случайных чисел. При каждом обращении к ней она возвращает случайное число с равномерным распределением на отрезке [0,1]. Эта функция широко применяется при статистическом моделировании различных физических процессов. Числа являются не строго случайными, в действительности, это повторяющиеся последовательности из большого количества чисел, распределение которых близко к нормальному.

Рассмотрим некоторые функции, относящиеся к вычислению основных статистических параметров одномерного массива данных – вектора:

mean(V) возвращает среднее значение элементов вектора V;

var(V) – возвращает дисперсию (вариацию) для элементов вектора V;

stdev(V) – задает стандартное отклонение элементов вектора V;

Задача_8. Применим описанные функции. Зададим 1000 случайных чисел, т.е. сгенерируем вектор X из 1000 случайных чисел: задать i в диапазоне от 1 до 1000; задать x_i как rnd(10). Построить график распределения случайных чисел: зависимость x_i от i (использовать точечное представление типа «линий»). Вычислить среднее значение для элементов вектора X, дисперсию, максимальное и минимальное значения и стандартное отклонение.

Выполнение регрессии

Широко распространенной задачей обработки данных является представление их совокупности некоторой функцией $y(x)$. Задача регрессии заключается в получении параметров этой функции такими, чтобы функция приближала «облако» исходных точек (заданных векторами VX, VY) с наименьшей среднеквадратичной погрешностью.

Выполнение линейной регрессии. Чаще всего используется линейная регрессия, при которой функция $y(x)$ имеет вид: $y(x)=a+bx$ и описывает отрезок прямой.

Для проведения линейной регрессии используются функции:

corr(VX,VY) – возвращает скаляр – коэффициент корреляции Пирсона.

intercrpt(VX,VY) – возвращает значение параметра a (смещение линии регрессии по вертикали);

slope(VX,VY) – возвращает значение параметра (угловой коэффициент линии регрессии).

Чем ближе коэффициент корреляции к 1, тем точнее представленная исходными точками зависимость приближается к линейной.

Задача_9. Выполним линейную регрессию для векторов VX, VY. Найти коэффициент Пирсона. Построить график функции регрессии и исходных точек.

_9. 1) Зададим векторы VX, VY

$$VX := \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.8 \\ 2.9 \\ 4.1 \\ 4.1 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 4.2 \\ 11 \\ 15 \\ 19 \\ 26 \end{pmatrix}$$

2) Установим опцию (столбцы матрицы нумеруются с 1)

$ORIGN := 1$

3) Вычислим значения параметров a и b для задания функции в виде $y(x)=a+bx$:

$a := \mathrm{intercept}(VX, VY) \qquad b := \mathrm{slope}(VX, VY)$

Вывести значения параметров на экран.

4) Зададим теперь некоторое i от 1 до 5 и зададим функцию $y(x)$.

5) Вычислим коэффициент корреляции Пирсона:

$\mathrm{corr}(VX, VY) = 0.948$

6) Построить график, на котором отобразить зависимость VYi от VXi и y от i.

Выполнение линейной регрессии общего вида. При выполнении регрессии такого вида заданная совокупность точек приближается функцией вида:

$F(x, K_1, K_2, ..., K_n) = K_1 F_1(x) + K_2 F_2(x) + ...K_n F_n(x)$. Таким образом, функция регрессии является линейной комбинацией функций $F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$, причем сами эти функции могут быть нелинейными. Для реализации линейной регрессии общего вида используется функция:

linfit(VX,VY,F) – возвращает вектор коэффициентов линейной регрессии общего вида *K*, при котором среднеквадратичная погрешность приближения «облака» исходных точек, координаты которых хранятся в векторах VX, VY, оказывается минимальной. Вектор *F* должен содержать функции $F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$, записанные в символьном виде.

Расположение координат точек исходного массива может быть любым, но вектор VX должен содержать абсциссы, упорядоченные в порядке возрастания. Вектор VY должен содержать ординаты, соответствующие абсциссам в векторе VY.

Задача_10. Выполним линейную регрессию общего вида для заданных значений.

_10. 1) Зададим векторы VX, VY и F(x):

$$VX := \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4.8 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 12 \\ 7.5 \\ 9.4 \\ 16.2 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad F(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x^2 \\ \exp(x) \end{pmatrix}$$

2) Задать i, вектор коэффициентов, задать функцию g(*t*) как искомую и равную произведению *K*1*F*1 (см. выше определение), т.е. в нашем случае:

$i := 0..4 \qquad K := \mathrm{linfit}(VX, VY, F) \qquad g(t) := F(t) \cdot K \qquad r := 1, 1.125..5$

3) Построить график зависимости VYi от VXi и *g* от *r*.

Функции сглаживания данных

Данные большинства экспериментов имеют случайные составляющие. Поэтому часто возникает необходимость статистического сглаживания данных. Для этого имеется ряд функций, в названии которых имеется слово **smooth** (гладкий):

medsmooth(VY,n) – для вектора с m действительными числами возвращает m-мерный вектор сглаженных данных по методу скользящей медианы, параметр n задает ширину окна сглаживания.

ksmooth(VX,VY,n) – возвращает n-мерный вектор сглаженных VY, вычисленных на основе распределения Гаусса. VX, VY - n-мерные векторы действительных чисел.

supsmooth(VX,VY) – возвращает n-мерный вектор сглаженных VY, вычисленных на основе использования процедуры линейного сглаживания методом наименьших квадратов по правилу k-ближайших соседей с адаптивным выбором k.

Задача_11. Пусть задается массива значений $z_i=\sin(a_i)+\mathrm{rnd}(1)$, где $a_i=i/2$ и i меняется от 1 до 30. Выполнить сглаживание данных.

_11. 1) Задать

$i := 0..30 \qquad a_i := i \cdot 0.5 \qquad z_i := \sin(a_i) + \mathrm{rnd}(1)$

$\mathrm{sup} := \mathrm{supsmooth}(a, z) \qquad \mathrm{med} := \mathrm{medsmooth}(z, 31) \qquad k := \mathrm{ksmooth}(a, z, 1)$

2) Построить графики, указав по оси *Ox* – a_i; по оси *Oy* – $z_i, \sup_i, med_i, k_i$.

Задача_12. Для 50 чисел задать значения

$U_i := \mathrm{rnd}(1) + i \qquad W_i := \cos(U_i) \cdot e^{\frac{i}{2}}$

Сформировать вектор сглаженных данных и построить график исходных и сглаженных данных.

Задача_13. Самостоятельно выполнить сглаживание функции $zed_i = 0{,}5rnd(2) + d_i$, где $d_i = arctg(i)$. Построить график исходных и сглаженных данных.

Применение функции предсказания (экстраполяции)

Функция предсказания **predict (*L, k, N*)**, где *L* – вектор данных, *k* – степень полинома регрессии (число последовательных значений *L*, на основании которых функция predict возвращает *N* предсказанных значений *L*). Она по ряду заданных равномерно расположенных точек позволяет рассчитать некоторое число *N* последующих точек, т.е. осуществляет экстраполяцию произвольной (но достаточно гладкой и предсказуемой) зависимости.

Задача_14. Пусть задается массив из 50 точек (i, y_i), где i меняется от 0 до 50, а $y_i = 10e^{-0{,}03i}\sin(0{,}2i)$. Предскажем значения еще 100 точек.

_14. 1) Зададим массив из *n* точек:

$n := 50 \qquad i := 0..n \qquad y_i := 10 \cdot e^{-0.03 \cdot i} \cdot \sin(0.2 \cdot i)$

2) Предскажем значения еще *q* точек

$m := 30 \qquad q := 100 \qquad yp := \mathrm{predict}(y, m, q) \qquad k := 0..q$

3) Построить график, указав через запятую по оси *Ox* – *i*, *k*+*n*+1 (добавить 1 необходимо, т.к. у нас новая последовательность точек должна начаться с 51); а по оси *Oy* – y_i, yp_k.

_15. Зададим 100 точек исходной зависимости k от 0 до 100. Зададим вектор данных $L_k = e^{\frac{-k}{200}} \sin(\frac{k}{10})$ (для каждого k разное значение функции). С помощью функции predict задаем вычисление еще 100 точек.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_8.mcd**.

9 Лабораторная работа №9. Задание программных модулей

Написать заголовок лабораторной работы шрифтом зеленого цвета, размером 14 пт, выбрав начертание – полужирный курсив.

Задание программных модулей

Программный модуль выделяется в тексте документа жирной вертикальной чертой. Модуль может вести себя как безымянная функция без параметров, но возвращающая результат. С другой стороны программный модуль может выполнять и роль тела функции пользователя с именем и параметрами.

Набор программных элементов осуществляется с помощью палитры **Programming**.

Add Line – создает и при необходимости расширяет жирную вертикальную линию, справа от которой задается запись программного блока.

← - символ локального присваивания (в теле модуля). Например, выражение x **←** 123 присваивает переменной x значение 123. Локальный характер присваивания означает, что такое значение сохраняется только в теле программы. Простейшее использование программных модулей показано ниже.

$$\left| \begin{array}{l} x \leftarrow 12 \\ \sqrt{x} \end{array} \right. = 3.464$$

$$FP(x,y,z) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow x + y \cdot z \\ \dfrac{x+y+z}{a} \end{array} \right. \qquad FP(2,3,5) = 0.588 \qquad FP(1,5,3) = 0.563$$

Задача_1. Используя программный модуль, вычислить

$$\frac{x^2+2y+\sin x}{\sqrt{x^2+2y+\sin x+\cos x}} - arctg(x^2+2y+\sin x)$$ при $(x, y) \in \{(1,4); (7,12); (-3,0)\}$.

Условия

if – оператор условного выражения. Он задается в виде: Выражение **if** <**Условие**>. Если условие выполняется, то возвращается значение выражения.

📖 **otherwise** – оператор иного выбора;

Например, функция нахождения модуля числа x – abs(x):

$$\mathrm{abs}(x) := \left| \begin{array}{l} (-x) \ \ \text{if} \ \ x < 0 \\ x \ \ \text{otherwise} \end{array} \right.$$

Совместно с этим оператором часто используются операторы прерываний и иного выбора.

Вообще в MathCAD возможно запись условия тремя различными способами:

- с помощью условного оператора программирования if;
- с помощью булевых операторов;
- с помощью функции if. В этом случае оператор имеет следующую конструкцию: **if[*Условие*, Оператор1, Оператор 2]**. Если ***Условие*** истинно, то выполняется **Оператор 1**, в противном случае выполняется **Оператор 2**. Примеры использования данных операторов показаны ниже.

Задача_2. Пусть необходимо вычислить $f(11)$ при $f(a) = \begin{cases} \ln\sqrt{a}, & a < 3 \\ 2, & 3 \le a \le 5 \\ (a+1)^2 - a, & a > 5 \end{cases}$.

Обратите внимание на двойной способ задания функций:

💻**_2. I.** с помощью оператора if

$a := 11$

$y2 := \mathrm{if}\left[(a) < 3, \ln\left(\sqrt{a}\right), \mathrm{if}\left[(3 \le a \le 5), 2, (a+1)^2 - a\right]\right]$

$y2 = 133$

$y2(a) := \mathrm{if}\left[(a) < 3, \ln\left(\sqrt{a}\right), \mathrm{if}\left[(3 \le a \le 5), 2, (a+1)^2 - a\right]\right]$

$y2(11) = 133$

💻**_2. II.** с помощью булевых операторов;

$a := 11$

$y1 := \left[\ln\left(\sqrt{a}\right)(a < 3) + 2(3 \le a \le 5) + \left[(a+1)^2 - a\right](a > 5)\right]$

$y1 = 133$

$y1(a) := \left[\ln\left(\sqrt{a}\right)(a < 3) + 2(3 \le a \le 5) + \left[(a+1)^2 - a\right](a > 5)\right]$

$y1(11) = 133$

💻**_2. III.** Использование панели Programming

$a := 11$

$$y := \begin{array}{|l} \text{if } a < 3 \\ \quad \begin{array}{|l} b \leftarrow \sqrt{a} \\ \ln(b) \end{array} \\ 2 \ \text{ if } \ 3 \le a \le 5 \\ \text{otherwise} \\ \quad \begin{array}{|l} c \leftarrow a + 1 \\ c^2 - a \end{array} \end{array}$$

$y = 133$

$$y(a) := \begin{array}{|l} \text{if } a < 3 \\ \quad \begin{array}{|l} b \leftarrow \sqrt{a} \\ \ln(b) \end{array} \\ 2 \ \text{ if } \ 3 \le a \le 5 \\ \text{otherwise} \\ \quad \begin{array}{|l} c \leftarrow a + 1 \\ c^2 - a \end{array} \end{array}$$

$y(11) = 133$

Задача_3. Найти значения заданных функций в указанных точках.

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ x+1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$.

Используя булевы операторы и панель Programming, вычислить $f(0)$; $f(\frac{1}{2})$; $f(1)$; $f(2)$;

б) $h(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & -1 \le x < 0, \\ \cos^2 x, & 0 \le x \le \pi, \\ \dfrac{x-1}{x+1}, & \pi < x \le 6 \end{cases}$ **в)** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+5}}{x+5}, & x \ge 3 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+2}, & 0 < x < 3 \\ \dfrac{x^2+16}{x^3-64}, & x \le 0 \end{cases}$

б) Используя панель Programming, вычислить $h(-1)$; $h(0)$; $h(\pi)$; $h(6)$

в) Используя все три формы записи условного оператора, вычислить $g(-5)$; $g(1)$; $g(3)$; $g(6)$

Циклы

for – оператор задания цикла с фиксированным числом повторений. Он записывается в виде: **for Var ∈ Nmin…Nmax**. Эта запись означает, что выражение, помещенное в шаблон, будет выполняться для значений переменной **Var**, меняющихся с шагом **+1** от **Nmin** до **Nmax**.

Рассмотрим примеры использования цикла **for** для вычисления суммы и произведения n последовательных чисел.

$$\text{sum}(n) := \begin{array}{|l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad s \leftarrow s + i \end{array}$$

$\text{sum}(10) = 55$

$\text{sum}(20) = 210$

$$\text{prod}(n) := \begin{array}{|l} p \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad p \leftarrow p \cdot i \\ p \end{array}$$

$\text{prod}(5) = 120$

$\text{prod}(10) = 3.629 \times 10^6$

Задача_4. Используя оператор цикла составить модули для вычисления

а) $S = \sin x + \sin\sin x + ... + \underbrace{\sin\sin ...\sin x}_{n \text{ раз}}$; б) $P = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{6})...(1-\frac{1}{2n})$.

while – оператор задания цикла типа «пока» (цикл выполняется, пока выполняется некоторое условие). Этот оператор записывается в виде: while Условие. Выполняемое выражение записывается на место шаблона.

break – оператор прерывания (обеспечивает выход из цикла и продолжение работы программы);

continue – оператор продолжения (возвращает программу к началу цикла);

return – оператор возврата (обеспечивает выход из программы);

on error – оператор обработки ошибок.

Рассмотрим примеры использования цикла *while* для вычисления факториала числа.

$$\mathrm{Fact}(n) := \left|\begin{array}{l} f \leftarrow 1 \\ \text{while } n \leftarrow n-1 \\ \quad f \leftarrow f \cdot (n+1) \\ f \end{array}\right. \qquad \mathrm{F}(n) := \left|\begin{array}{l} f \leftarrow n \\ \text{while } 1 \\ \quad \left|\begin{array}{l} f \leftarrow f \cdot (n-1) \\ n \leftarrow n-1 \\ (\text{break}) \text{ if } n = 1 \end{array}\right. \\ f \end{array}\right.$$

$\mathrm{F}(3) = 6$ $\mathrm{F}(10) = 3.629 \times 10^6$

$\mathrm{Fact}(3) = 6$ $\mathrm{Fact}(10) = 3.629 \times 10^6$

Задача_5. Используя оператор цикла while, составить модуль для решения задачи: даны числовой ряд и некоторое число ε. Найти сумму тех членов ряда a_n, модуль которых больше или равен заданному ε. $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_9.mcd**.

Индивидуальные задания к лабораторной работе №9

I. Пусть даны *x*, *n*. Составить программный модуль для вычисления

1) $y = \cos x + \cos x^2 + \cos x^3 + ... + \cos x^{30}$;

2) $y = 1! + 2! + 3! + ... + n!, n > 1$;

3) $y = \sin 1 + \sin 1{,}1 + \sin 1{,}2 + ... + \sin 2$;

4) $y = \sin x + \sin^2 x + ... + \sin^n x$;

5) $y = \frac{(x-2)(x-4)...(x-2n)}{(x-1)(x-3)...(x-2n-1)}$.

10 Лабораторная работа №10. Анимация в MathCAD

MathCAD предусматривает возможность видео-воспроизведения графиков и результатов вычислений путем создания видео-файлов и вставки их в документ MathCAD. Созданные видео-файлы воспроизводятся встроенными в Windows средствами.

Для создания видео-клипов среда MathCAD имеет встроенную переменную **FRAME**, которая принимает целочисленные значения от 0 до задаваемого *n*. Переменная FRAME должна быть включена в расчетные выражения так, чтобы с ее изменением менялся вид графика. Можно сказать, что значение переменной FRAME является номер кадра. Значение этой переменной обычно задается в диалоговом окне, которое вызывается командой меню **View⇒Animate**. Перед созданием клипа необходимо включить опцию **Math⇒Automatic Calculation**.

Рассмотрим процесс создания анимации для некоторого графика в полярной системе координат.

1) Ввести переменную FRAME в математическое выражение, определяющее вида графика:

$$x := 0, 0.1 .. 30 \qquad r(x) := x + FRAME$$

2) Построить в полярной системе координат график $r(x)$.

3) Выбрать опцию меню View⇒Animate.

4) Обвести курсором мышки график или только нужный фрагмент изображения.

5) В диалоговом окне Animate задайте общее число кадров, которое определяет диапазоном от (**From**) и до(**To**), например, от 0 до 15. И установите частоту воспроизведения (**At**)– 2-3 кадра в секунду.

6) Щелкнув на кнопке «**Animate**», просмотрите создаваемые кадры. После завершения этого процесса появится окно проигрывателя видео-файлов. Сохраните созданный клип в своей папке, щелкнув на кнопке «**Save As**» в окне Animate.

7) Вставьте видео-файл в документ MathCAD. Для этого выберите опцию меню **Insert⇒Object**, в появившемся диалоговом окне установите переключатель «**Создать из файла»**, используя кнопку «**Обзор»**, выберите нужный файл. Установите флажок «**Связь»** – это позволит редактировать видео-файл непосредственно из документа MathCAD.

Индивидуальные задания к лабораторной работе №10

Используя приложение к лабораторной работе №10, создать соответствующие анимационные клипы.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_10.mcd**.

11 Лабораторная работа №11. MathCAD в физических расчетах

Работа с размерными переменными

Данные и переменные могут быть размерными, т.е. характеризоваться не только своим значением, но и указанием физической величины, значение которой они хранят. Для присваивания таким переменным значений используются обычные знаки присваивания, но после численного значения со знаком умножения или пробела указывается единица измерения. Ее удобно выбирать из окна размерных величин, которое появляется при активации на стандартной панели инструментов кнопки с изображением *мерной кружки* или выбрав опцию **Insert⇒Unit**.

Задача. Вычислим высоту, которую достигает камень, брошенный вертикально вверх с начальной скоростью $v0 = 10 м/с$ по формуле $h = \frac{v0^2}{2g}$, где $g = 9{,}807 м/с^2$.

Задать начальные значения скорости и ускорения свободного падения. Записать формулу. Вывести значение высоты на экран.

Задача. Найдите силы токов в каждой ветви электрической цепи, схема корой показана на рис.1. $\varepsilon 1 = 6{,}5$ В; $\varepsilon 2 = 3{,}9$ В; $R1 = R2 = R3 = R4 = R5 = R6 = 10$ Ом. Внутренние сопротивления источников не учитывать.

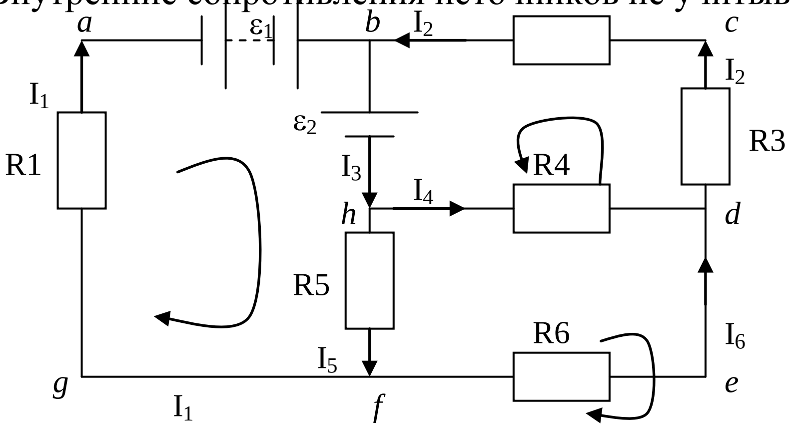


Рис.1

Зададим произвольно направления токов (см. рис 1). Применим первое правило Кирхгофа для узлов *b, h, f* (модули силы токов обозначим через I_1, I_2, I_3 и т.д.):

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$ для узла *b*;

$I_3 - I_4 - I_5 = 0$ для узла *h*;

$I_5 - I_1 - I_6 = 0$ для узла *f*;

Теперь применим второе правило Кирхгофа для контуров. Выберем произвольно направление обхода контуров: контуров *abfg, hdef* – по часовой стрелке; контура *bcdh* – против часовой стрелки:

$I_1R1 + I_5R5 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ – контур *abfg*;

$I_2(R2 + R3) + I_4R4 = -\varepsilon_2$ – контур *bcdh*;

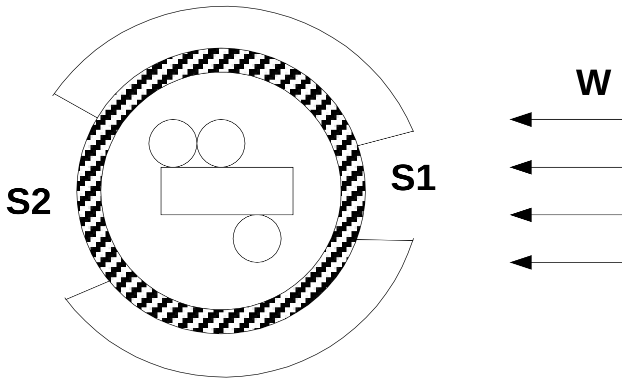
$I_4R4 - I_6R6 - I_5R5 = 0$ – контур *hdef* ;

Учитывая, что $R1 = R2 = R3 = R4 = R5 = R6 = R$, получим в итоге следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_3 - I_4 - I_5 = 0, \\ I_5 - I_1 - I_6 = 0, \\ I_1 + I_5 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R}, \\ 2I_2 + I_4 = \dfrac{-\varepsilon_2}{R}, \\ I_4 - I_6 - I_5 = 0, \end{cases}$$

Решить данную систему, используя пакет MathCAD. Ответ получить в амперах.

Задача. Теплоизолированный космический аппарат, находящийся на орбите Земли, имеет на борту приборы с электрической мощностью, которая может изменяться в ходе работы от $N_1 = 75$ Вт (дежурный режим) до $N_2 = 200$ Вт (сеанс связи).



С целью обеспечения предсказуемого теплового режима в теплоизоляции сделано отверстие площадью S_1, на которое попадает поток солнечной энергии W = 1400 Вт/м^2. Полученная энергия излучается через это отверстие и через дополнительное отверстие в теплоизоляции с площадью S_2 в режиме «черного тела».

Каковы должны быть площади отверстий, если допустимый диапазон температур для оборудования, расположенного в аппарате, составляет 20-30°С?

Минимальная температура аппаратуры соответствует режиму минимального теплового выделения. В этом случае *поступающая* мощность $Q_1 = WS_1 + N_1$. *Излучаемая* мощность $Q_2 = \sigma T_1^4 (S_1 + S_2)$, где T_1 - минимальная допустимая температура в градусах Кельвина. В условиях теплового баланса, очевидно, эти мощности должны быть равны:

$$WS_1 + N_1 = \sigma T_1^4 (S_1 + S_2)$$

Режим максимального теплового выделения соответствует максимальной температуре аппаратуры (T_2). В этом случае, очевидно,

$$WS_1 + N_2 = \sigma T_2^4 (S_1 + S_2).$$

Найдите площади отверстий S_1 и S_2, используя пакет MathCAD. Ответ получить в метрах в квадрате.

Изменяя значения переменной W, исследуйте, как изменяются требования к такому методу терморегуляции при удалении аппарата от Солнца и приближении к нему (на орбите Венеры W = 2700 Вт/м^2; на орбите Марса W = 500 Вт/м^2) .

Зависимость атмосферного давления и плотности воздуха от высоты

Рассмотрим расчет атмосферного давления и плотности воздуха. Атмосферное давление вычислим по двум формулам: упрощенной $ph(h) = p0 \cdot e^{\frac{-h}{7{,}99}}$, где h – высота в километрах, и у нас в задаче она будет меняться от 0 до 11, $p0$=101,325 при условии постоянства температуры и воздуха; и по точной: $p(h) = 101{,}3(1 - \frac{6{,}5h}{288})^{5{,}255}$, учитывающей различие температуры. Они позволяют рассчитать плотность воздуха $r0(h) = 1{,}2255(1 - \frac{6{,}5h}{288})^{4{,}255}$.

Для построения требуемой зависимости зададим начальное значение $p0$, зададим в виде функций зависимости $ph(h)$ и $p(h)$. Зададим как ранжированную переменную диапазон изменения высоты h. Построить график зависимостей атмосферного давления от высоты и график зависимости плотности воздуха от высоты.

Преодоление самолетом звукового барьера

Задача. В момент преодоления звукового барьера реактивным самолетом слышны звуки, похожие на раскаты грома. Известна функция $M(u, h)$, определяющая так называемое число Маха, зависящее от скорости полета самолета u и высоты h. В момент преодоления звукового барьера $M(u, h)$ становится равной 1. Скорость, на которой преодолевается звуковой барьер, падает с увеличение высоты полета.

Итак, самолет преодолевает звуковой барьер, если $M(u, h)$ достигает 1. Для вычисления этой функции по формуле введем коэффициенты: a=1225,5; b=6,875·10^{-6}; c=0,3048; d=-5,2656; e=0,286. Запишем функцию для вычисления $M(u, h)$: $M(u,h) = \sqrt{5\left[\left[\left[\left[\left[1 + 0{,}2(\frac{u}{a})^2\right]^{3{,}5} - 1\right](1 - b\frac{h}{c})^d\right] + 1\right]^e - 1\right]}$, где u (км/ч) – скорость, h (м) – высота полета. Вычислим функцию $M(u, h)$ при скорости 1000 и высоте 500 и при скорости 1500 и высоте 1000. Отметить в каком случае звуковой барьер преодолен!

Для построения графика функции $M(u, h)$ зададим ранжированную переменную: скорость изменяется от 200 до 1500 с шагом 50. Задать 4 различный значения высот: h1=500, h2=1000, h3=2000, h4=5000. Построить зависимости

$M(u, h)$ от скорости полета для заданных четырех значений. Указать уровень единицы, соответствующий достижению скорости звука.

Из условия $M(u, h)=1$ полезно получить зависимость скорости преодоления звукового барьера $u(h)$ от высоты h. Для поиска корня условия $M(u, h)-1=0$ воспользуемся функцией **root**:

1) зададим ранжированную переменную i, изменяющуюся от 0 до 10,

2) зададим $h_i = 2500i$,

3) зададим начальное значение $u = 100$,

4) используя функцию **root**, найдем корень уравнения $M(u, h_i)-1$.

Построить график зависимости u_i от h_i.

Траектория движения точки

Задача. Колесо электровоза, движущегося со скоростью V=10м/с, имеет радиус R=1м. Надо рассчитать и построить траекторию точки, лежащей на расстоянии r=0,5м от оси колеса. Считаем, что в начальный момент времени точка находилась в самом нижнем положении. Надо указать на траектории места, где находилась точка в момент времени t = 0,4с и t = 0,8 с. Для этих же моментов надо указать скорости рассматриваемой точки.

1) Задать начальные условия.

2) Ввести значение момента времени t = 0,8с.

3) Записать кинематические уравнения вектора скорости в заданный момент времени: $x(t) = Vt - r\sin(\frac{Vt}{R})$, $y(t) = R - r\cos(\frac{Vt}{R})$.

4) Продифференцировав эти выражения по t, выразить проекции вектора скорости на оси x и y: $vx(t)$, $vy(t)$ и задать $v(t) = \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}$.

5) Ввести ранжированную размерную переменную t с начальным значением 0с, шагом 0,01с и конечным значением 2с.

6) Для построения вектора скорости на графике траектории движения точки в момент $t0$ введем коэффициент масштабирования n=0,3sec. Тогда приведенное значение проекции вектора скорости на ось Оx имеет вид: $i = vx(t0)n$. Зададим ранжированную переменную, определяющую проекцию вектора скорости на ось Оx: $sk := 0, \frac{(vx(t0)\cdot n)}{100} .. vx(t0)\cdot n$.

7) Из введенных выражений получаем коэффициент наклона вектора скорости $k = \frac{vy(t0)\cdot n}{vx(t0)\cdot n}$.

8) Зададим функции пользователя, определяющие составляющие вектора скорости в момент времени $t0$ по осям x и y, заданные параметрически с параметром sk: $vx(sk) = x(t0) + sk$, $vy(sk) = y(t0) + k\cdot sk$.

9) Вычислить значение скорости в момент времени t0=0,8с.

10) Построить график на котором будут изображены траектория движения точки (зависимости $y(t)$, $x(t)$), ее положение в момент $t0$ (зависимости $y(t0)$, $x(t0)$ – для этой линии задать точечное представление), вектор скорости в мо-

мент t0 (зависимости *vy*(*sk*), *vx*(*sk*)), зависимость *vy*(*i*), *vx*(*i*) – задать проекции на соответствующих осях.

11) Вычислить значение скорости в момент времени *t*0=0,4с и построить второй график для начального момента времени *t*0=0,4 с.

Решение систем нелинейных уравнений

Задача. Пусть утка летит по горизонтальной прямой с постоянной скоростью *u*. В нее бросает камень охотник, причем бросок сделан без упреждения, т.е. в момент броска камень был направлен прямо в утку под углом α к горизонту. Охотник промазал, но при определенной высоте полета утки *h* камень на излете может попасть в птицу. Решение этой задачи сводится к решению системы нелинейных уравнений.

Зададим начальные значения: ускорение свободного падения g=9,8м/с^2, скорость камня v=15м/с, скорость утки u=7м/с и угол α=50deg, под которым брошен камень. Составим систему из двух уравнений, одно из которых – траектория полета утки, другое – камня. Если они пересекаются – утке не повезло. Чтобы система имела решение зададим начальные приближения для неизвестных, входящих в систему: t=11с, h=10м. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} v \cdot t \cdot \cos(\alpha) = h \cdot ctg(\alpha) + u \cdot t \\ v \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \dfrac{g \cdot t^2}{2} = h \end{cases}$$

найти значения высоты (H) полета утки, при котором возможно попадание, и соответствующий момент времени (T).

Построим совмещенный график траектории полета камня и утки. Для этого вычислим расстояние по горизонтали между охотником и уткой в момент бросания по формуле: $S = H \cdot ctg\alpha$. Найдем *S*. Расстояние, которое пролетел камень по горизонтали до попадания в утку: $D = H \cdot T \cdot \cos\alpha$. Найдем *D*. Зависимость высоты полета камня и утки от координаты *x* зададим в виде:

$$f(x) = x \cdot tg\alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos(\alpha)^2}, \text{ c(X)=H.}$$

Для построения графика зададим пределы изменения координаты *x*. X изменяется, начиная от расстояния между охотником и уткой в момент броска с соответствующим шагом, а x изменяется от 0 до момента попадания камня в утку: $X := S, S + \frac{(D-S)}{30} .. D$ $x := 0, 0.1 .. D$. Построим график зависимости $f(x)$ и $c(X)$.

Распад радиоактивного элемента

Задача. Пусть короткоживущий радиоактивный элемент А, распадаясь, создает долгоживущий, но также распадающийся элемент В.

Для решения задачи необходимо:

1) Определить единицы массы (грамм) и времени (год): $gm \equiv 1M \quad yr \equiv 1T$ и начальную массу элемента A0=100gm. Тогда время жизни элемента A выражается формулой: thalfA=10yr, а время жизни элемента B: thalfB=100yr.

2) Ввести коэффициент отношения атомарных весов: α=1,1 и постоянные распада элементов: $kA = \dfrac{\ln 2}{\text{thalfA}}$, $kB = \dfrac{\ln 2}{\text{thalfB}}$. Тогда временная функция распада элемента A выражается формулой: $A(t) = A0 \cdot e^{-(kA \cdot t)}$, $B(t) = -\alpha \cdot A0 \cdot e^{-(kB \cdot t)} \cdot \left[e^{-(kA \cdot t)} - 1\right]$.

3) Ввести ранжированную переменную *t* от 0yr до 120yr с шагом 2yr.

Построить график, иллюстрирующий временные функции распада элементов A и B.

Колебания и резонанс в механической системе

Рассмотрим пример, описывающие поведение механической системы под воздействием внешнего гармонического колебания. Поведение системы определяется амплитудой *Ym* вынужденных колебаний системы и сдвигом по фазе *a* колебаний системы относительно внешних колебаний. Эти параметры зависят от частоты внешних колебаний *w* и коэффициента затухания системы δ.

Задача. Пусть на механическую систему с массой *m*=0,1 и частотой собственного резонанса *w*0=1 действует косинусоидальное воздействие с максимальной силой *Fm*=1. Явление резкого возрастания амплитуды колебаний в колебательных системах, на которые воздействуют внешние колебания с частотами, близкими к частоте собственных колебаний системы, называется **резонансом**. А частота собственных колебаний поэтому часто называется резонансной. Если коэффициент затухания системы δ, то амплитуда колебаний и аргумент (фаза) определяются по формулам:

$$Ym(w,\delta) = \frac{Fm}{\sqrt{m^2 \cdot (w0^2 - w^2)^2 + (2 \cdot m \cdot \delta)^2 \cdot w^2}}$$

$$a(w,\delta) = if\,(w < w0, tg(\frac{2 \cdot w \cdot \delta}{w0^2 - w^2}), tg(\frac{2 \cdot w \cdot \delta}{w0^2 - w^2}) + 3{,}142$$

Зададим вектор w как ранжированную переменную, изменяющуюся от 0,5 до 1,5 с шагом 0,05. Тогда временная зависимость вынужденных колебаний определяется выражением

$$y(w,\delta,t) = Ym(w,\delta) \cdot \cos(w \cdot t - a(w,\delta)).$$

Построить на одном графике зависимости амплитуды вынужденных колебаний системы от частоты при трех значениях затухания, равных 0,2; 0,4 и 1. Построить на одном графике зависимости фазы вынужденных колебаний системы от частоты при трех значениях затухания, равных 0,2; 0,4 и 1.

Обработка результатов эксперимента
Экспериментальная проверка закона Стефана-Больцмана

Задача. Рассмотрим обработку результатов конкретного опыта. В лабораторной работе на специальной установке экспериментально определялась зависимость мощности излучения нити лампы накаливания от ее температуры. Измерялась потребляемая лампой накаливания мощность, примерно пропорциональная излучаемой мощности ($P = RS$, здесь S – площадь излучающей поверхности, R – энергетическая светимость нити накала лампы) и температура нити. Излучающая площадь нитей накаливания S – равна 1см^2.

При работе на этой установке была получена следующая зависимость

$t°$,C	700	800	900	1000	1100	1200	1300
P, Вт	11	17	23	35	47	61	82

$t°$,C	1400	1500	1600	1700
P, Вт	105	130	170	210

Где P – мощность излучения лампы.

Необходимо обработать эти данные методом наименьших квадратов, найти значения σ и n и проверить, выполняется ли закон Стефана-Больцмана.

1) Задать векторы T и P с исходными данными: первая и вторая строка таблицы соответственно.

2) Переведем температуру в градусы Кельвина: для этого зададим ранжированную переменную i от 0 до 10 (по числу температур в таблице) и зададим $TK_i = T_i+273$.

Для аппроксимации нашей зависимости применим кубическую сплайн-интерполяцию, которая позволит нам найти функцию, проходящую через полученные точки.

3) Определить вектор VS вторых производных аппроксимирующей кривой в заданных точках.

4) Задать диапазон изменения температуры L от 900 до 2000 с шагом 10.

5) Найти аппроксимирующую кривую Yint(L), используя функцию interp.

6) Построить в одном шаблоне график экспериментальных данных (зависимость P_i от T_i) и график сплайн-функции.

Сведем ожидаемую зависимость $\frac{P}{S} = R = \sigma T^n$ к линейной (нам необходимо получить линию вида $ax+b$, расположенную предельно близко к экспериментальным точкам):

1) Задать площадь поверхности нити накаливания и соответствующее уравнение, взяв логарифм от обеих частей и используя понятие логарифма произведения:

$$S := 1 \cdot 10^{-4} \qquad \log\left(\frac{P}{S}\right) = \log(\sigma) + n \cdot \log(T)$$

2) Определим векторы, между которыми ожидается линейная зависимость:

$$y_i := \log\left(\frac{P_i}{S}\right) \qquad x_i := \log(TK_i)$$

3) Из полученной зависимости определим значения σ и n методом наименьших квадратов:

$$g := \mathrm{slope}(x, y) \qquad k := \mathrm{intercept}(x, y)$$

4) Определить значения g и k.

5) Так как $\log_{10}(\sigma) = k$, то $\sigma = 10^k$ и $n = g$.

6) Вывести полученное расчетное значения σ и n и сравнить с точными значениями (σ=5,67·10^{-8} n=4,0).

Очевидно, что найденные значения отличаются от точных, так как нить накала лампы не является абсолютно черным телом.

Визуализация физических процессов средствами MathCAD

Средства графики MathCAD открывают неисчерпаемые возможности по наглядной графической визуализации физических процессов.

Кольца Ньютона

Задача. Изобразим интерференционные картины, получающиеся при освещении оранжевым светом (с длиной волны $\lambda = 0{,}6 \cdot 10^{-6}\,м$) плоской пластины с прижатыми к ней плосковыпуклыми линзами радиусом кривизны выпуклой поверхности $R = 5м$. Для решения этой задачи воспользуемся формулой для интенсивности света при интерференции двух лучей.

1) Задать начальные условия для λ, R.

2) Выразить разность фаз интерферирующих волн через λ, R и расстояние до центра интерференционной картины: $\phi(r) = \dfrac{2\pi r^2}{\lambda R}$.

3) Выразить зависимость яркости интерференционной картины I от расстояние до ее центра r: $I(r) = 2(1 + \cos(\phi(r)))$.

4) Ввести ранжированную переменную r с начальным значением $5 \cdot 10^{-4}\,м$, шагом $0{,}01 \cdot 10^{-4}\,м$ и конечным значением - $0{,}4 \cdot 10^{-2}\,м$.

5) Построить график (декартова система координат) интенсивности отраженного света как функции от расстояния r до центра интерференционной картины. Задать линии сетки.

6) Построение графика в полярной системе координат дает возможность оценить изменение интенсивности отраженного света при изменении разности фаз. Задать линии сетки.

Теперь моделируем интерференционную картину.

1) Для ее построения зададим матрицу из 60 строк и столбцов.

2) Задать N=60, ввести ранжированные переменные i и j с начальными значениями 0 и конечными значениями N.

3) Задать максимальный размер наблюдаемой интерференционной области на экране - $rm = 7 \cdot 10^{-3}\,м$.

4) Для построения графика поверхности формируем матрицу значений фазы $\phi_{i,j}$ и матрицу значений интенсивности отраженного света $I_{i,j}$. Для этого выражаем координаты x и y через размер интерференционной картины rm: $x_i = \frac{rm}{N} \cdot i - \frac{rm}{2}$, $y_j = \frac{rm}{N} \cdot j - \frac{rm}{2}$. Выражение для разности фаз через координаты x и y: $\phi_{i,j} = \frac{2\pi((x_i)^2 + (y_j)^2)}{\lambda \cdot R}$ и для интенсивности: $I_{i,j} = 2(1 + \cos(\phi_{i,j}))$.

5) Построить график зависимости интенсивности отраженного света от координат в виде графика поверхности. Этот график дает наглядное представление об интерференционных кольцах Ньютона.

6) Представить второй экземпляр этого графика в виде карты линий уровня.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_11_1.mcd**.

Создать новый документ в среде MathCAD.

Дифракция на щели

Задача. Построим график распределения интенсивности света по экрану, находящемуся на расстоянии $L = 4м$ от щели. Пусть I_0=1 – интенсивность в центре экрана, ширина щели $b = 0{,}1мм$, длина волны $\lambda = 0{,}55 \cdot 10^{-6}\,м$.

Зададим перечисленные начальные значения и, считая угол дифракции как ϕ, зададим его начальное значение равное 0. Тогда $x = L\phi$, $\Theta(x) = \frac{\pi b \sin(\frac{x}{L})}{\lambda}$. При дифракции в параллельных лучах от одной щели распределение интенсивности света по экрану (по координате x) выражается формулой: $I(x) = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \Theta(x)}{\Theta(x)^2}$. После задания этих формул зададим ранжированную переменную x с начальным значением –80*мм*, шагом 0,9*мм* и конечным значением 80*мм*. Построить график распределения интенсивности падающего на экран света.

Построим график поверхности распределения интенсивности падающего на экран света. Для этого:

1) задать размеры матрицы координат: N=51,

2) ввести ранжированные переменные i и j с начальными значениями 0 и конечными значениями N.

3) задать максимальный размер наблюдаемой картинки на экране - $xm = 160мм$.

4) выразить координаты x и y: $x_i = \frac{xm}{N} \cdot i - \frac{xm}{2}$, $y_j = \frac{xm}{N} \cdot j$. Выразить через них Θ и интенсивность падающего на экран света по формулам: $\Theta_{i,j} = \frac{\pi \cdot b \cdot \sin(\frac{x_i}{L})}{\lambda}$, $I_{i,j} = I_0 \cdot \frac{\sin(\Theta_{i,j})^2}{(\Theta_{i,j})^2}$.

5) построить график поверхности, характеризующий распределение интенсивности падающего на экран света в пространстве.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_11_2.mcd**.

Создать новый документ в среде MathCAD.

Построение трехмерных графиков

Задача. Изобразить на графике приблизительную форму электронных облаков в атомах. Согласно современным знаниям, электронные уровни в атоме определяются четырьмя квантовыми числами. Форма электронного облака определяется двумя из этих чисел:

- Число l определяет тип орбитали (значения 0-3 соответствуют s-, p-, d-, f- орбиталям);
- Число m определяет магнитный момент электрона и может меняться в диапазоне от $-l$ до l.

При m =0 форма электронного облака определяется на основе многочленов Лежандра первого рода $P(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l$. В этом случае $Y(\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left| P(\cos\phi) \right|$. Параметрическое задание соответствующей поверхности имеет вид:

$x(\theta,\phi) = Y(\phi)\sin\phi\cos\theta$;

$y(\theta,\phi) = Y(\phi)\sin\phi\sin\theta$;

$z(\theta,\phi) = Y(\phi)\cos\phi$, где θ,ϕ изменяются в диапазоне от 0 до 2π.

1) Задать l равное 3.

2) Построение поверхности будет происходить по точкам, поэтому зададим два диапазона, i и j, оба от 0 до 100, которые будут определять изменение параметров θ,ϕ, задающих поверхность.

3) Произведем перемасштабирование: $\theta_i = i\frac{2\pi}{100}, \phi_j = j\frac{2\pi}{100}$.

4) Задать многочлен Лежандра и $Y(\phi)$.

5) Определить двумерные матрицы, определяющие значения координат:

$X0_{i,j} = Y(\phi_j)\sin\phi_j \cos\theta_i$;

$Y0_{i,j} = Y(\phi_j)\sin\phi_j \sin\theta_i$;

$Z0_{i,j} = Y(\phi_j)\cos\phi_j$.

6) Построить поверхность, заданную матрицей выше. Выполним некоторые преобразования графика поверхности. На вкладке **General**, включить опцию Equal Scales (равный масштаб; на вкладке Appearance включить опцию Fill Surface (заливка поверхности); на вкладке **Lighting** включить опцию Enable Lighting (включить подсветку) и отключите все источники света, кроме первого.

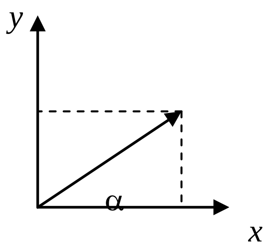
Задача. Изменяя значение *l*, покажите форму электронных облаков для разных орбиталей.

Движение заряженной частицы в магнитном поле

Задача. При использовании других типов трехмерных графиков, кроме рассмотренных ранее, необходимо образовывать матрицу, в которой строки и столбцы соответствуют значениям *x* и *y*, а величина элемента матрицы определяет координату *z*. При построении точечного графика можно непосредственно определять координаты (*x*, *y*, *z*) любой совокупности точек. Примером использования такого типа графика является моделирование траектории движения заряженной частицы в магнитном поле.

Частица массой $M = 9 \cdot 10^{-31}$ *кг* и зарядом $q = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл* влетает в магнитное поле индукцией *B*=0,1 Тл под углом $\alpha = 30^\circ$ к линии поля. Проанализируем траекторию движения частицы при начальной скорости $v = 0{,}2 \cdot 10^7$ *м/с*.

Зададим указанные начальные значения. Как видно из рисунка



проекции вектора скорости частицы на оси будут задаваться выражениями $vx = v\cos\alpha$, $vy = v\sin\alpha$.

На частицу действует сила Лоренца. Эта сила всегда перпендикулярна скорости, следовательно, ускорение будет только нормальным; скорость не будет меняться по величине, но будет меняться по направлению. Траектория – винтовая линия, радиус которой можно найти из уравнения движения: $\frac{m(vy)^2}{r} = qvyB$, где *vy* – перпендикулярная к вектору *B* компонента скорости.

Таким образом, необходимо задать: $r = \frac{Mvy}{qB}$. В данном случае поле с индукцией $\vec{B}$ действует только на составляющую vy вектора скорости v , а по оси x движение будет равномерным со скоростью vx.

Зададим N=100, i от 1 до N-1 и $\phi_i = \frac{8\pi}{N} i$. Пусть $T = 1 \cdot 10^{-10} c$ - время полета частицы.

Тогда координаты – это вектора X, Y, Z, соответственно: $X_i = vx \cdot i \cdot \frac{T}{N}$, $Y_i = r \sin \phi_i$, $Z_i = r(1 - \cos \phi_i)$.

Представить траекторию движения точки в пространстве в виде трехмерного точечного графика, установив при этом опцию, соединяющую линией получающиеся точки.

Сохранить лабораторную работу в своей папке под именем **Лаб_11.mcd**.

12 Литература, рекомендуемая для выполнения лабораторных работ

1 Макаров, Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15 / Е.Г. Макаров. - Санкт-Петербург : Питер, 2011. - 400 с. - ISBN 978-5-459-00357-4.

2 Берков, Н. А. Применение пакета MathCad: практикум / Н.А. Берков, Н.Н. Елисеев. - Москва : МГИУ, 2006. - 132 с. - ISBN 5-276-00960-0.

3 Охорзин, В. А. Компьютерное моделирование в системе Mathcad: учеб. пособие для вузов / В.А. Охорзин. - М.: Финансы и статистика, 2006. - 144 с. - ISBN 5-279-03037-6.

4 Ивановский, Р. И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCAD Pro: учеб. пособие для для вузов / Р.И. Ивановский. - М. : Высш. шк., 2003. - 431 с.- ISBN 5-06-004434-3.

5 Плис, А. И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов : учеб. пособие для вузов / А.И. Плис, Н.А. Сливина.- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2003. - ISBN 5-279-02550-X.

6 Охорзин, В. А. Прикладная математика в системе MATHCAD: учеб. пособие для вузов / В.А. Охорзин .- 3-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2009. - ISBN 978-5-8114-0814-6.

7 Дьяконов, В. П. Mathcad 11/12/13 в математике: справочник / В.П. Дьяконов. - М. : Горячая линия-Телеком, 2007. - ISBN 5-93517-332-8.