Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

О. А. Тяпухина, Н. В. Кулиш

Предел и непрерывность функции одной переменной

Сборник заданий для проведения практических занятий

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика

Оренбург
2016

УДК 517.2(076.5)
ББК 22.161я7
Т 99

Рецензент – кандидат физико-математических наук Т.М. Отрыванкина

Т 99 **Тяпухина, О. А.**
Предел и непрерывность функции одной переменной. Сборник заданий для проведения практических занятий: методические указания / О. А. Тяпухина, Н. В. Кулиш; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2016. – 61 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Математический анализ», раздел «Пределы и непрерывность функции одной переменной». Содержат справочный материал по разделу, методические рекомендации по решению задач, типовые задания с подробными решениями, тренировочные тесты, варианты заданий для проверки полученных навыков и умений, выполнение которых является требованием образовательного стандарта.

Рекомендуется для студентов направления подготовки 38.03.01 Экономика.

УДК 517.2(076.5)
ББК 22.161я7

Содержание

Введение

Федеральные государственные образовательные стандарты третьего поколения предусматривают повышение качества подготовки специалистов экономического профиля, способных обосновывать и принимать эффективные управленческие решения, основанные, в том числе на качественных методах исследования результатов деятельности хозяйствующих субъектов. Одним из инструментов оптимизации управленческих решений является метод исследования непрерывности функций одной и более переменных, так как предельный анализ в экономике – это совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменении объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа их предельных значений.

Методические указания содержат необходимый теоретический минимум, включающий важнейшие определения, теоремы и формулы. Далее подробно разбираются несколько типовых задач, после чего предлагаются задания для самостоятельной работы (дома или на семинаре). В конце приводятся тренировочный тест и задания для проверки полученных знаний и умений.

Авторы надеются, что методические указания окажутся весьма полезными и для студентов других специальностей, изучающих данный раздел математики. Найдя нужный образец, по аналогии с ним студент может решить задачу из домашнего задания или типового расчета.

1 Числовая последовательность

1.1 Основные понятия

Определение. Бесконечной числовой последовательностью (или просто последовательностью) $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ называется функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или x_n, $n \in N$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ называются членами последовательности, x_n - общим или n-м членом последовательности. Чаще всего последовательность задается формулой общего члена последовательности, по которой можно определить любой член последовательности x_k, подставив формулу x_n вместо n число k.

Пример 1. Найти x_1, x_4, x_{n-1}, если $x_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$.

Решение: $x_1 = -\dfrac{1-1}{1} = 0$; $x_4 = \dfrac{4-1}{4} = \dfrac{3}{4}$; $x_{n-1} = (-1)^{n-1} \dfrac{n-1-1}{n-1} = (-1)^{n-1} \dfrac{n-2}{n-1}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число M>0, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$.

Пример 2. $x_n = \sin n$ - ограниченная последовательность, т.к. $|\sin n| \le 1$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей (убывающей)***, если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$). Если $x_{n+1} \ge x_n$ ($x_{n+1} \le x_n$), то последовательность – ***неубывающая (невозрастающая)***.

Такие последовательности называются *монотонными последовательностями*.

Пример 3. Последовательность 4,7,10,…,3n+1,… - возрастающая, т.к.

$x_{n+1} = 3n+4$, $x_n = 3n+1$ и $3n+4 > 3n+1$.

Пример 4. Последовательность $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{1}{n}, ...$ - убывающая, т.к.

$x_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$.

Пример 5. Доказать, что последовательность $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}$ убывающая.

Выпишем n-й и (n+1)-й члены последовательности:

$$x_n = \frac{n+1}{2n-1},\ x_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)-1} = \frac{n+2}{2n+1}.$$

Составим разность и оценим ее знак:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{n+1}{2n-1} = \frac{-3}{4n^2-1} < 0.$$

Итак, для любых натуральных значений n выполняется неравенство

$$x_{n+1} < x_n,$$

т.е. последовательность $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}$ - убывающая.

Задания для самостоятельной работы

Написать пять первых членов последовательности, заданной формулой общего члена:

1. $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$. **3.** $x_n = \dfrac{n+2}{n^3+1}$. **5.** $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$.

2. $x_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$. **4.** $x_n = \dfrac{5^n}{n^2}$. **6**. $x_n = \dfrac{\sin(n\pi/2)}{n}$.

Зная несколько первых членов последовательности, написать формулу общего члена последовательности:

1. $1; \dfrac{1}{3^2}; \dfrac{1}{5^2}; \dfrac{1}{7^2}; \ldots$

2. $1; \dfrac{1}{1\cdot 2}; \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}; \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}; \ldots.$

3. $1; 2\frac{1}{4}; 2\frac{7}{9}; 3\frac{1}{16}; 3\frac{6}{25}; \ldots$ **5.** $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \ldots$

4. 2; 10; 26; 82; 242; 730;…. **6.** -1; 1; -1; 1; -1; ….

Определить, являются ли ограниченными последовательности:

1. $\left\{\frac{2n^2-1}{n^2+2}\right\}$. **4.** $\left\{(-1)^n \cdot n\right\}$.

2. $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{1+n^2}}\right\}$. **5.** $\left\{\frac{(-1)^n+n}{3n-1}\right\}$.

3. $\left\{\frac{n-1}{\sqrt{n}}\right\}$. **6.** $\left\{(-1)^{\sin\frac{\pi n}{2}}\right\}$.

Доказать, что последовательность монотонна, начиная с некоторого номера:

1. $\left\{\frac{n+1}{3n-1}\right\}$. **3.** $\left\{\frac{4+3n}{2+n}\right\}$. **5.** $\left\{\frac{100^n}{n!}\right\}$.

2. $\left\{\frac{n^3}{n^2-4}\right\}$. **4.** $\left\{n^3-5n\right\}$. **6.** $\left\{\ln(n+1)-\ln n\right\}$.

1.2 Предел числовой последовательности

Определение. Число А называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа ε > 0 существует такой номер N = N(ε), зависящий от ε, что для всех *n*>Nвыполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

Другими словами, число А – предел последовательности, если в любой заранее выбранной окрестности точки А содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Это обозначают так:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ или $x_n \to A$ при $n \to \infty$ (читают: x_n стремится к A).

Используя логические символы, определение предела последовательности можно записать в виде

$$\text{A} = \lim_{\text{n}\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon .$$

При этом числовая последовательность называется *сходящейся*. В противном случае – *расходящейся.*

Сходящиеся последовательности обладают свойствами:

1) Сходящаяся последовательность ограничена.

2) Сходящаяся последовательность может иметь только один предел.

3) Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (теорема Вейерштрасса)

Пример 6. Доказать, что $\lim\limits_{\text{n}\to\infty} \dfrac{2n^3}{n^3 - 2} = 2$.

Решение: По определению число 2 называется пределом последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-2}\right\}$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \exists \text{N} = \text{N}(\varepsilon): \forall \text{n} > \text{N} \Rightarrow \left|\frac{2\text{n}^3}{\text{n}^3 - 2} - 2\right| < \varepsilon .$$

Найдем, при каких n справедливо неравенство

$$\left|\frac{2\text{n}^3}{\text{n}^3 - 2} - 2\right| < \varepsilon .$$

Для этого решим это неравенство относительно n.

$$\left|\frac{2\mathrm{n}^3-2(n^3-2)}{n^3-2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{4}{n^3-2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{n}^3-2>\dfrac{4}{\varepsilon} \\ n>1 \end{cases} \Leftrightarrow n>\sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon}+2}.$$

Неравенство имеет решение при $n>\mathrm{N}(\varepsilon)=\sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon}+2}$ для $\forall\varepsilon>0$.

Следовательно, $2=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-2}\right\}$.

Задания для самостоятельной работы

Используя определение предела, доказать, что:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3}=0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n-7}{n^3-n^2-n-2}=1$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{4n^2-2n+1}=\dfrac{1}{4}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n}=1$.

1.3 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность $\{\mathrm{x_n}\}$называется бесконечно большой, если для любого положительного числа M существует номер N такой, что при n>Nвыполняется неравенство $|\mathrm{x_n}|>\mathrm{M}$.

Если последовательность $\{\mathrm{x_n}\}$ бесконечно большая, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Говорят, что бесконечно большая последовательность имеет бесконечный предел (при вычислении пределов символ ∞ является символом бесконечно большой величины).

Пример 7. Последовательность $\{3^{\sqrt{n}}\}: 3, 3^{\sqrt{2}}, 3^{\sqrt{3}}, \ldots$ является бесконечно большой, т.к. при неограниченном возрастании n значение членов последовательности будет также неограниченно возрастать. Значит для любого числа M выполняется неравенство $\left|3^{\sqrt{n}}\right| > M$ для некоторого $n \in$ N.

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при n>N выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Если последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Говорят, что бесконечно малая последовательность имеет предел, равный нулю (при вычислении пределов символ 0 является символом бесконечно малой величины).

Пример 8. Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ - бесконечно малая последовательность, т.к. для любого $\varepsilon > 0$ из неравенства $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ получаем $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - целое число, не превосходящее $\frac{1}{\varepsilon}$).

Теорема 5 (о связи бесконечно малой и бесконечно большой).

Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая последовательность, $x_n \neq 0$, то последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - бесконечно малая, и, обратно, если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, $\alpha_n \neq 0$, то последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ - бесконечно большая.

На символьном языке пишут так: $\frac{1}{\infty} = 0; \frac{1}{0} = \infty$.

Следствие. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^m} = 0.$$

1.4 Основные теоремы о пределах числовых последовательностей

Для вычисления пределов последовательности применяют следующие теоремы:

Теорема 1. $\lim_{n\to\infty} C = C$, где С = const.

Теорема 2. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim_{n\to\infty} y_n = B$, тогда

а) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B;$$

б) предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B;$$

в) предел частного равен частному пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

Теорема 3. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim_{n\to\infty} z_n = A$ и для всехn выполняются неравенства $x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

Теорема 4. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и последовательность $\{y_n\}$ - ограниченная, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0.$$

1.5 Примеры вычисления пределов числовой последовательности

При вычислении пределов будем применять приведенные выше свойства и теоремы и вместо переменной n в функцию подставлять знак ∞.

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(3n^4+5n-1)$.

Решение: Применим теорему 2 (о пределе суммы). Т.к. последовательности $\{3n^4\}$ и $\{5n\}$ – бесконечно большие, их сумма также является бесконечно большой и при сложении с постоянной величиной остается бесконечно большой, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(3n^4+5n-1) = 3\lim_{n\to\infty} n^4 + 5\lim_{n\to\infty} n - \lim_{n\to\infty} 1 = \infty + \infty - 1 = \infty$$

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n\cdot\dfrac{1}{n^2+1}\right)$.

Решение: Применим теорему 3 (о пределе произведения):

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{1}{\infty} = 0$, последовательность $\{\sin n\}$ на бесконечности стремится к (+1) или к (-1), следовательно, по свойству сходящейся последовательности предела не имеет, но является ограниченной ($|\sin n| \le 1$), а значит, по теореме 4 произведение равно нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin n\cdot\frac{1}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\sin n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = 0.$$

Иногда подстановка предельного значения переменной не приводит к нахождению значения предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностью. Неопределенности бывают следующих видов:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ \left[\frac{0}{0}\right],\ [0\cdot\infty],\ [\infty-\infty],\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[\infty^{0}\right],\ \left[0^{\infty}\right].$$

Устранить неопределенность часто удается с помощью алгебраических преобразований.

Рассмотрим примеры с неопределённостью $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пусть функция, стоящая под знаком предела, имеет вид $\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$. Здесь

$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ - многочлен степени k (бесконечно большая последовательность порядка n^k),

$Q_m(n) = b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0$ - многочлен степени m (бесконечно большая последовательность порядка n^m).

В числителе и знаменателе вынесем за скобку n^s,где s = max(*k*,*m*), и сократим дробь на эту величину(или, другими словами, разделим числитель и знаменатель дроби на n^s) .

Пример 11. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-2}{3n^2+1}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{3n^2+1}=\frac{\infty-2}{\infty+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\frac{2}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{3+\frac{1}{\infty}}=\frac{0-0}{3}=\frac{0}{3}=0.$$

Пример 12. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+1}{5-7n^3}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+1}{5-7n^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{5}{n^3}-7\right)}=\frac{2-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\frac{5}{\infty}-7}=\frac{2-0+0}{0-7}=-\frac{2}{7}.$$

Пример 13. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^3-3n^7+1}{5n^4-2n^3}$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^3-3n^7+1}{5n^4-2n^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^7\left(\frac{6}{n^4}-3+\frac{1}{n^7}\right)}{n^7\left(\frac{5}{n^3}-\frac{2}{n^4}\right)}=\frac{\frac{6}{\infty}-3+\frac{1}{\infty}}{\frac{5}{\infty}-2}=\frac{0-3+0}{0-0}=-\frac{3}{0}=\infty.$$

Используя тот же прием, что и в примерах 11-13, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0}{b_mn^m+b_{m-1}n^{m-1}+\ldots+b_1n+b_0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}0, & k<m;\\ \frac{a_k}{b_m}, & k=m;\\ \infty, & k>m.\end{cases}.$$

Назовем это «правилом сравнения степеней». Пользуясь этим правилом можно быстро вычислить следующие пределы:

Пример 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^8+6}}{n^2+\sqrt{n}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\infty$.

Здесь выражению в числителе можно условно приписать степень $k=\frac{8}{3}$, а в знаменателе степень m = 2, так как степень числителя выше степени знаменателя, то предел равен бесконечности.

Пример 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n^2+4)(n^3+7n^5)}{4+\sqrt[4]{n^{28}}}=$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5 + 21n^7 + 4n^3 + 28n^5}{4 + \sqrt[4]{n^{28}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{21n^7 + 31n^5 + 4n^3}{4 + n^7} = \frac{21}{1} = 21,$$

так как степень k числителя равна степени m знаменателя и равна семи.

Пример 16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2-3)^6}{4+n^{25}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0$,

так как, раскрывая в числителе по формуле бинома Ньютона шестую степень двучлена, получим многочлен степени 12; степень числителя k = 12 меньше степени знаменателя m = 25, значит, предел равен нулю.

В следующем примере используется выражение $n!$(читается: n факториал).

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$;

$(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)$;

$(n+3)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)(n+2)(n+3)$.

Пример 17. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+n!}{(n+3)!}$.

Разделим числитель и знаменатель дроби на выражение $(n+3)!$, которое быстрее стремится к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+n!}{(n+3)!} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+3)!} + \dfrac{n!}{(n+3)!}}{\dfrac{(n+3)!}{(n+3)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+2)(n+3)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{1} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 0 + 0 = 0.$$

Рассмотрим примеры с неопределенностью $[\infty - \infty]$.

Пример 18. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2-2}\right)$.

По правилу сравнения степеней дроби в скобке дают неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\infty$, так как степени числителя больше степени знаменателя. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n+1}-\frac{n^3}{n^2-2}\right)=[\infty-\infty]$. Приведем дроби к общему знаменателю и еще раз применим правило сравнения степеней.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n+1}-\frac{n^3}{n^2-2}\right)=[\infty-\infty]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)(n^2-2)-n^3(n+1)}{(n+1)(n^2-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2-2n}{n^3+n^2-2n-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=0\,.$$

Пример 19. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

Попытка вычислить предел приводит неопределенности вида $[\infty-\infty]$. Для устранения неопределенности умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}$, приводящее к разности квадратов:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2+n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Решаем далее подобно примерам 11-13, т.е. вынесем за скобку в числителе и знаменателе n в наибольшей степени (s=1):

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1.$$

Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $\left[1^{\infty}\right]$.

Пусть функция, стоящая под знаком предела имеет вид $y(n)=f(n)^{g(n)}$.В этом случае выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой степенно-показательную функцию. Если в основании можно выделить целую часть дроби, равную единице, то неопределенность можно устранить при помощи «*второго замечательного предела*», который записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,$$

где *e* является иррациональным и приблизительно равно 2,71828.

Число *e* принято за основание системы логарифмов, называемых натуральными логарифмами и записываемых в виде $\ln x$, т.е. $\ln x=\log_e x$.

Рассмотрим подробно вид формулы «второго замечательного предела»:

Скобка состоит из суммы числа 1 и бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ при $n\to\infty$; показатель степени - обратная ей бесконечно большая последовательность. Если выражение, стоящее под знаком предела привести к такому виду, то можно выделить *e*.

Пример 20. Найти $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{3n}$.

Имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)=1+\frac{5}{\infty}=1+0=1, \text{ а } \lim_{n\to\infty}3n=\infty.$$

Последовательность $\{\alpha_{\text{n}}\}=\left\{\frac{5}{n}\right\}$- бесконечно малая при $n\to\infty$.Скобка удовлетворяет условию «второго замечательного предела». Преобразуем показатель, чтобы выделить в нем множитель, равный $\frac{n}{5}$, для этого умножим показатель степени на $\left(5\cdot\frac{1}{5}\right)$, это действие не нарушит знака равенства.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}\cdot 5\cdot 3}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^{15}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^{15}=e^{15}.$$

Пример 21. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n}$.

Решение: Имеем неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=1,(k=m), \text{ а } n\to\infty.$$

Выделим целую часть дроби:

$$\frac{n+4}{n+1}=\frac{n+1+3}{n+1}=\frac{n+1}{n+1}+\frac{3}{n+1}=1+\frac{3}{n+1}.$$

$\{\alpha_{\text{n}}\}=\left\{\frac{3}{n+1}\right\}$ является бесконечно малой величиной при $n\to\infty$.

Умножим показатель степени на $\left(\alpha_n\cdot\frac{1}{\alpha_n}\right)$, это действие не нарушит знака равенства:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}\cdot\frac{3}{n+1}\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}\right)^{\frac{3n}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}}=e^{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-5}{n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-5n^2+10n}{21n^3+7n-4}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+5n^2-3}{10n^3-3n+2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n-2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-n^2}{6-n^2}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2-1}{5n^3+4n^2-2n-1}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-1)^3}{n^2-1}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+9}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{5n^3}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n-9}-\frac{5}{2n+3}\right)$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+10}{4n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right)$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+5}-\sqrt{n-6})$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1})$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-4n^2}-n)$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-1}{5^n+1}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{n+1}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n+4}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{6n-1}\right)^{7n-4}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{n+5}\right)^{n^2+1}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+4}\right)^{1-n}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+3}{4n-5}\right)^{2n+3}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{7n-1}\right)^{\frac{2n+1}{n-4}}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n-2}{4n-7}\right)^{\frac{2+n^3}{n^3+9n}}$

2 Предел функции

2.1 Предел функции на бесконечности

Понятие предела функции на бесконечности (или при $x\to\infty$) тесно связано с понятием предела последовательности. Но, если переменнаяn, возрастая, принимает лишь целые значения, то переменнаяx, изменяясь, принимает любые значения из множества R.

Определение. Число А называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $S>0$, зависящее от ε, что для всех x таких, что $|x|>S$, будет верно неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ (т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$).

Или коротко:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists S=S(\varepsilon)>0\forall x:|x|>S\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Вычисление предела функции в бесконечности выполняется по тем же правилам, что и вычисление предела последовательности. Но в некоторых примерах нужно учитывать к какой бесконечности (положительной или отрицательной) стремится переменная x. Такие пределы называются односторонними и записываются в виде:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Рассмотрим примеры вычисления пределов функции при $x \to \infty$.

Пример 22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2n+5}{6-4n^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -\dfrac{3}{4}$,

т.к. степени числителя и знаменателя равны («правило сравнения степеней»).

Пример 23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-7)^{12}}{x^{13}+5} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0$,

т.к. степень числителя меньше степени знаменателя.

Пример 24. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{7x^3+2}{10x^3-1}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\dfrac{7}{10}\right)^{+\infty} = 0$,

т.к. $\dfrac{7}{10} < 1$, следовательно, при возрастании показателя дробь уменьшается (стремится к нулю).

Пример 25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-5x}+2x^2}{2x-3+\sqrt[3]{14x^6+2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Видно, что числитель и знаменатель можно условно считать многочленами степени 2. Но так как числитель содержит два слагаемых этой степени, во избежание ошибки, будем выполнять вычисление последовательно. Сначала вынесем xс наибольшим показателем степени в выражениях под знаком радикала.

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(1-\dfrac{5}{x^3}\right)}+2x^2}{2x-3+\sqrt[3]{x^6\left(14+\dfrac{2}{x^6}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{1-\dfrac{5}{x^3}}+2x^2}{x^2\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)+x^2\sqrt[3]{14+\dfrac{2}{x^6}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{1-\dfrac{5}{x^3}}+2\right)}{x^2\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\sqrt[3]{14+\dfrac{2}{x^6}}\right)}=\frac{\sqrt{1-0}+2}{0-0+\sqrt[3]{14+0}}=\frac{3}{\sqrt[3]{14}}.$$

Для решения следующего примера напомним:

$$\sqrt{x^2}=|x|;\text{ если } x<0\text{, то } |x|=-x\text{, если } x\ge 0\text{, то } |x|=x\ .$$

Пример 26 .

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+4x}{3x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}+4x}{3x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+4x}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-4\right)}{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{-\left(\sqrt{1-0}-4\right)}{3+0}=1.$$

Пример 27 .

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^2-2}-\frac{x^4}{x^2+2}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(x^2+2\right)-x^4\left(x^2-2\right)}{\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4}{x^4-4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=4.$$

Пример 28. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+5}\right)$.

Решение: Имеем неопределенность $[\infty-\infty]$. Выполним следующие действия: умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему, свернем числитель по формуле разности квадратов и приведем подобные слагаемые.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+5}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+5}\right)\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1-x^2-5}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Вынесем в числителе за скобку x, в знаменателе $|x|$. Так как $x\to+\infty$, то $|x|=x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x-\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x-\frac{6}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\frac{6}{x}\right)}{\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=$$

$$=\frac{+\infty}{\sqrt{2-0}+\sqrt{1+0}}=+\infty.$$

Можно было записать ответ после фразы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

т.к. степень числителя $k=2$, а степень знаменателя условно $m=1$. По правилу сравнения степеней предел равен ∞ ($k>m$).

Задания для самостоятельной работы

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x^3}{1-3x+6x^3}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-2x^4+6}{1+3x^7+x^4}.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{2x^3}.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{64x^3+1}+2}.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+3}{2^{x+1}-1}.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^2+5}{9x^2-1}\right)^{\frac{x}{2}}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x^3-7}{2x^3+2}\right)^{2x^2-4}.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{x^2+3}-4x\right).$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}\right).$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+2x}\right).$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right).$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8-2x^3+x^5-8}{5x^8+3x+6x^3}.$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7-x^{11}+5x^2}{(6x^3-2)(5x^4+x^8)}.$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-4}-2x}{2-\sqrt{x^4}}.$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)^{12}}{1+6x^{12}}.$

16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x+4^{x+1}}{3^{x+1}+4^x}.$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{9x-3}\right)^{2x-3}.$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{x^2+3}-4x^2\right).$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{25x^3}{x^2+3}-\dfrac{x^3+1}{16+x^2}\right).$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{6x^2-2}-\sqrt{x^2+1}\right).$

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+2x}\right).$

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}\right)$

2.2 Предел функции в точке

Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число Aназывается пределом функции $f(x)$при $x \to x_0$ (или в точке x_0), если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in N (x_n \neq x_0)$, сходящейся к $x_0 \left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \right)$, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n), n \in N,$ сходится к числу $A \left(\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A \right)$.

Определение 2 (на «языке ε-δ», или по Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ (или в точке x_0), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Коротко это определение можно записать так:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл предела функции: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующее значение функции как угодно мало отличается от числа A (если x пытается занять место x_0, то значение функции пытается занять место числа A).

Пример 29. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) = 5$.

Решение: По определению число 5 является пределом функции $f(x)=(3x-1)$, если для любого $\varepsilon > 0$, найдется $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta$, выполняется неравенство $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$, т.е.

$|3x-6|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Взяв $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, видим, что это условие выполняется. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$.

Задания для самостоятельной работы

Используя определение, доказать, что:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1$. **2.** $\lim\limits_{x\to 6}(2x-5)=7$. **3.** $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)=11$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$; **5.** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$; **6.** $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.

2.3 Односторонние пределы

Левосторонней δ-окрестностью точки x_0 называется множество точек x, таких, что $x\in(x_0-\delta;x_0)$, где $\delta>0$(рис.1).

Правосторонней δ-окрестностью точки x_0 называется множество точек x,таких, что $x\in(x_0;x_0+\delta)$, где $\delta>0$(рис.2).

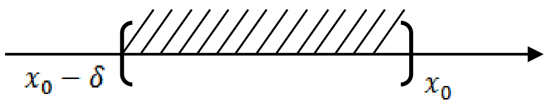

Рисунок 1

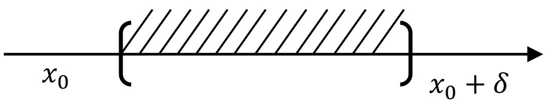

Рисунок 2

Определение. Число A_1 называется пределом функции $f(x)$ слева в точке x_0, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε , что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $\left| f(x) - A_1 \right| < \varepsilon$.

Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или $f(x_0 - 0) = A_1$.

Определение. Число A_2 называется пределом функции $f(x)$ справа в точке x_0, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε , что для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, выполняется неравенство $\left| f(x) - A_2 \right| < \varepsilon$.

Предел справа записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ или $f(x_0 + 0) = A_2$.

Пределы слева и справа называются ***односторонними*** пределами.

Теорема. Если существуют оба предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, и они равны одному и тому же числу *A*, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Пример 30. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)$.

Решение: Так как при $x \to \frac{\pi}{2} - 0$ функция $\cos x \to +0$, а при $x \to \frac{\pi}{2} + 0$ функция $\cos x \to -0$, найдем сначала односторонние пределы:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \ln\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \ln\left(\frac{1}{+0}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \ln(+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \ln\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \ln\left(\frac{1}{-0}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \ln(-\infty) -$$

не существует, т.к. функция $y = \ln u$ не определена для $u < 0$.

А это означает, что для функции $y=\ln\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)$ существует только левый бесконечный предел.

Пример 31. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-e^{-x})$.

Решение: При $x\to+\infty$ получим: $(-x)\to-\infty$, функция $e^{-x}\to 0$, функция $(1-e^{-x})\to 1$, а функция $\ln(1-e^{-x})\to 0$.

Это запишем так: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-e^{-x})=\ln(1-e^{-\infty})=\ln(1-0)=0$.

Задания для самостоятельной работы

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2-x}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1-x^4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-x^5)$.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-x})$.

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\sqrt[3]{1+x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0+0}6^{-\frac{1}{x^3}}$.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\cos(arctgx)}$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1-x^5}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0-0}\ln x$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-x^3)$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-e^{-x})$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\sqrt[3]{1+x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}e^{\frac{1}{\cos x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0+0}arctg(\ln x)$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\cos(arctgx)}$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arccos(2^{-x})$.		**18**. $\lim\limits_{x\to+\infty} arcctg(\ln x)$.

2.4 Основные теоремы о пределах функции

Пусть функции f(x) и g(x) имеют предел при $x \to x_0$.

Теорема 1. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 2. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

Теорема 3. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n.$$

В частности,

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n, n \in N.$$

Теорема 4. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \right).$$

Пример 32. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \left(3x^2 + 5x - 7\right)$.

Решение: Применим теорему 1(о пределе суммы функций) и следствия из теоремы 2(о пределе произведения), а затем в каждой функции заменим переменную x на число 2:

$$\lim_{x \to 2} \left(3x^2 + 5x - 7\right) = \lim_{x \to 2} 3x^2 + \lim_{x \to 2} 5x - \lim_{x \to 2} 7 = 3\left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 + 5 \lim_{x \to 2} x - 7 = .$$
$$= 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 7 = 15.$$

В следующих примерах не будем расписывать так подробно решение, а сразу заменять x на x_0, тем самым определять, к какому числу стремится каждая функция:

Пример 33. $\lim\limits_{x \to \pi} \left(3x + \sin x - 5\right) = 3\pi + 0 - 5 = 3\pi - 5.$

Пример 34. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 12x - 3}{x - 5}$.

Решение: Применим теорему о пределе дроби. Заменим в числителе и знаменателе x на 1, тем самым определим их пределы:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 12x - 3}{x - 5} = \frac{1^2 + 12 \cdot 1 - 3}{1 - 5} = -\frac{10}{4} = -2{,}5.$$

Пример 35. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя равен 0 при $x \to 2$. Кроме того, предел числителя тоже равен 0. В таких случаях говорят, что имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель дроби на множители, один из которых имеет вид $(x-2)$, и сократим дробь на этот множитель, т.к. $x-2 \neq 0(x \to 2$, но $x \neq 2)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Пример 36. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}(x+5)=5+5=10.$

Задания для самостоятельной работы

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}.$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^3-(3x+1)^3}{x+x^5}.$

6. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right).$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2-3x+7}{x^2-1}.$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x-2}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[5]{x}}.$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}.$

8. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x-7}-3}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

2.5 Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, можно использовать так называемый *первый замечательный предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

или

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$.

Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, если аргумент стремится к нулю.

Применяется, когда требуется раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Пример 37. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$.

Решение: Умножим и разделим выражение на 4 и выделим первый замечательный предел. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{3\cdot 4x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

Пример 38. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 3x}{2x^2}$.

Решение: Умножим и разделим выражение на 3^2.

Представим $tg^2 3x = \dfrac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}$ и воспользуемся теоремой 2(о пределе произведения) и следствиями из нее, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 3x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3^2\sin^2 3x}{2\cos^2 3x\cdot 3^2 x^2}=$$
$$=\frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 3x}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=4{,}5\cdot 1\cdot 1^2=4{,}5.$$

Пример 39. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 6x}{\sin 5x}$.

Решение: В числителе применим формулу разности синусов

$$\sin 4x-\sin 6x=2\sin\frac{4x-6x}{2}\cos\frac{4x+6x}{2}=-2\sin x\cos 5x.$$

Умножим и разделим выражение на $5x$, т.к. x только стремится к нулю, но не равен ему. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin 6x}{\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos 5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 5x\sin x\cos 5x}{5x\sin 5x}=$$
$$=-\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}=-\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}}=.$$
$$=-\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=-0{,}4\cdot 1\cdot 1=-0{,}4.$$

Пример 40. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$.

Решение: В числителе сделаем замену $1-\cos 5x=2\sin^2(5x/2)$ и преобразования, аналогичные примеру 40.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(5x/2)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(5x/2)}{x}\right)^2=$$

$$=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(5x/2)}{5x/2}\right)^2=2\cdot\frac{25}{4}\cdot 1^2=12{,}5$$

Задания для самостоятельной работы

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\dfrac{x}{2}}{2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 8x}{4x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{3x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cdot ctg 3x\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x+tg x}{\arcsin x}$.

11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{\arcsin^2 3x}$.

2.6 Второй замечательный предел

Мы уже рассматривали второй замечательный предел в разделе «Предел числовой последовательности», который записывается формулой:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Функция $y = f(x)$, где x в отличие от натурального числа *n* «пробегает» все значения числовой оси, также стремится к числу *e* при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, т.е. справедлива формула:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Полагая $\alpha(x) = \dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, получим еще одну запись числа *e*:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e\,.$$

С помощью *второго замечательного предела* раскрывается неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Аналогично вычислению предела последовательности, в выражении под знаком предела необходимо выделить целую часть дроби, равную 1, и устранить неопределенность.

Пример 41. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{2}{x+1}\cdot 2x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{4x}{x+1}} = e^4\,.$$

Пример 42. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}$.

Имеем неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$.Еще один способ преобразования скобки – это прибавить и отнять единицу.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x^3-2}{5x^3+1}-1\right)^{-6x^3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x^3-2-5x^3-1}{5x^3+1}\right)^{-6x^3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{5x^3+1}\right)^{\frac{5x^3+1}{-3}\cdot\frac{-3}{5x^3+1}\cdot\left(-6x^3\right)} == \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{5x^3+1}\right)^{\frac{5x^3+1}{-3}}\right)^{\frac{18x^3}{5x^3+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{18x^3}{5x^3+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x^3}{5x^3+1}} = e^{\frac{18}{5}}.$$

Пример 43. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tgx\right)^{ctgx}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+tgx\right)^{ctg3x} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\left(1+tgx\right)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot ctg3x} = \lim_{x\to 0} e^{tgx\cdot ctg3x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{tg3x}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

Пример 44. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln x-\ln 4}{2x-8}$.

Решение: Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, преобразуем ее в неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$, пользуясь свойствами логарифмов: $\log_a x-\log_a y=\log_a\dfrac{x}{y}$ и $n\log_a x=\log_a x^n$, положив $y=\left(x-4\right)\to 0$ при $x\to 4$. Получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{\ln x-\ln 4}{2x-8} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+4)-\ln 4}{2y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2y}\ln\frac{y+4}{4}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\ln\left(\frac{y+4}{4}\right)^{\frac{1}{2y}} = \lim_{y\to 0}\ln\left(\left(1+\frac{y}{4}\right)^{\frac{4}{y}}\right)^{\frac{y}{4}\cdot\frac{1}{2y}} = \lim_{y\to 0}\ln e^{\frac{1}{8}} = \ln e^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}.$$

Задание для самостоятельной работы

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{x+1}$. **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x+1}$. **7.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-3}\right)^{2x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2-3}\right)^{2x-1}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+3)-\ln x)$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln x-\ln(x+2))$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{ctg^2 x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-tg\,\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

3 Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x\to x_0$, если для любого числа $M>0$ существует число $\delta=\delta(M)>0$, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ или $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$.

Коротко:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall x\neq x_0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$$

Определение. Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x\to\infty$, если для любого числа $M>0$ существует число $S=S(M)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>S$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$.

Коротко:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0\exists S>0\forall x : |x|>S \Rightarrow |f(x)|>M$$

Пример 45. Функция $y = \frac{1}{x+3}$ является бесконечно большой при $x \to -3$.

Пример 46. Функция $y = 2^x$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$.

Пример 47. Функция $y = tgx$ является бесконечно большой при $x \to \frac{\pi}{2}$

Бесконечно большие функции обладают следующими свойствами:

1) сумма двух бесконечно больших функций одного знака есть функция бесконечно большая;

2) произведение бесконечно большой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно большая функция;

3) частное от деления бесконечно большой функции на функцию, имеющую конечный предел, есть функция бесконечно большая.

Пример 48.

$$\lim_{x\to 0+0}(x\ln x - \ln x^2) = \lim_{x\to 0+0}(x\ln x - 2\ln x) = \lim_{x\to 0+0}\ln x(x-2) =$$
$$= \lim_{x\to 0+0}\ln x \cdot \lim_{x\to 0+0}(x-2) = -\infty\cdot(-2) = \infty.$$

Определение. Функция $y = \alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

Определение можно записать в виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Аналогично определяется бесконечно малая функция при $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to \pm\infty$. Во всех этих случаях $f(x) \to 0$.

1) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;

2) произведение бесконечно малой функции на число, ограниченную функцию или другую бесконечно малую есть функция бесконечно малая;

3) частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая $\left(\left(\frac{0}{0}\right) - \textit{неопределенность}\right)$.

Пример 49. Функция $y(x) = x - \sin 3x + tgx$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

Пример 50. Показать , что функция $f(x) = (x-2)^2 \cos^3 \frac{1}{x-2}$ при $x \to 2$ является бесконечно малой.

Решение:

Здесь $(x-2)^2 \to 0$ при $x \to 2$, а функция $g(x) = \cos^3 \frac{1}{x-2} (x \neq 2)$ ограничена, т.к. $\left|\cos^3 \frac{1}{x-2}\right| \leq 1$. Значит, по свойству 2, функция $f(x) = (x-2)^2 \cos^3 \frac{1}{x-2}$ при $x \to 2$ является бесконечно малой.

Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).

Если функция $\alpha(x)$ - бесконечно малая $(\alpha(x) \neq 0)$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ - бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.

Следствие. Функция $\frac{c}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая при $\alpha(x) \to 0$; функция $\frac{c}{f(x)}$ есть бесконечно малая при $f(x) \to \infty$.

Пример 51. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^3-1}$.

Решение: При решении примеров опустим демонстрацию теоремы о пределе частного, а сразу покажем, к чему стремятся числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{x^3-1}=\frac{1+2-1}{1-1}=\frac{2}{0}=\infty\ .$$

Пример 52. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{tgx}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{tgx}=\dfrac{\frac{\pi}{2}+1}{\infty}=0$.

4 Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции при $x\to x_0$.

Определение Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$**,** то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** при $x\to x_0$.

Это обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если одну из них или каждую заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

То есть, если $\alpha\sim\alpha_1$ и $\beta\sim\beta_1$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta_1}.$$

Следствие. Предел произведения двух бесконечно малых функций не изменится, если одну из них или каждую заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

То есть, если $\alpha\sim\alpha_1$ и $\beta\sim\beta_1$, то

$$\lim_{x\to x_0}\alpha\cdot\beta=\lim_{x\to x_0}\alpha_1\cdot\beta_1=\lim_{x\to x_0}\alpha\cdot\beta_1=\lim_{x\to x_0}\alpha\cdot\beta_1.$$

Эту теорему удобно применять для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Приведем таблицу основных эквивалентностей при $x\to 0$.

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
2. $tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
3. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
4. $arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
5. $1-\cos\alpha(x)\sim\frac{(\alpha(x))^2}{2}$;
6. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;
7. $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$;
8. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$;
9. $\log_a(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\cdot\log_a e$;
10. $(1+\alpha(x))^k-1\sim k\cdot\alpha(x), k>0$;

в частности, $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$.

Пример 53. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg7x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$,

т.к. $\sin 5x\sim 5x$, а $tg7x\sim 7x$.

Пример 54. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\ln 3}{x}=\ln 3$,

т.к. $3^x-1\sim x\cdot\ln 3$, а $\ln(1+x)\sim x$;

Пример 55.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\sin\pi x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c}y=x-1\\ x=y+1\\ x\to 1\Rightarrow y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{1-(y+1)^3}{\sin\pi(1+y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-((1+y)^3-1)}{\sin\pi(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{-3y}{\pi(1+y)}=\frac{0}{\pi}=0.$$

Пример 56. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 5x}{10x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x\cdot tg5x}{10x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x\cdot 5x}{10x^2}=\frac{25}{10}=2{,}5.$

Пример 57. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{2x^3}}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{3}=\frac{0}{3}=0.$

Задания для самостоятельной работы

Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{4x}}{6x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{5x^2}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{4x^2}$. **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 7x}{\sin 2x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{4x^2}$. **7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5x+1)}{5x}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 6x}{3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{10}-1}{6x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{arctg(2x-1)}{4x^2-1}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$.

5 Правила Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ и $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, основанный на применении производных.

Теорема 1 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, $g'(x)\neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 58. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\ln(e^{x^2}+1)}$.

$$\textit{Решение}:\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln(e^{x^2}+1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\ln(e^{x^2}+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{x^2}+1\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}=1.$$

Теорема 2 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в точке x_0, $g'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

Найти пределы

Пример 59.

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^2-100}{x^2-2x+80}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 10}\frac{\left(x^2-100\right)'}{\left(x^2-2x+80\right)'}=\lim_{x\to 10}\frac{2x}{2x-2}=\frac{20}{18}=1\frac{1}{9}.$$

Пример 60.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\ln(x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x-\sin x)'}{(\ln(x+1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-\cos x}{\dfrac{1}{x+1}}=\frac{3-1}{\dfrac{1}{2}}=4.$$

Пример 61.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

Применяя правила Лопиталя, можно раскрывать неопределенности вида $\left[1^\infty\right];\left[\infty^0\right];\left[0^\infty\right];[0\cdot\infty];[\infty-\infty]$, которые сводятся к основным видам путем тождественных преобразований.

Пример 62. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Решение: Это неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Приведем дроби к одному знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{(x-1)}{x}+\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

Пример 63. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$.

Решение: Имеем неопределенность вида $\left[\infty^0\right]$. Положим $y=(ctgx)^{\sin x}$ и прологарифмируем: $\ln y=\ln(ctgx)^{\sin x}=\sin x\ln ctgx$. Найдем предел:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\sin x\ln ctgx=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln ctgx}{\frac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0$$

Т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}y=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}=1$.

Задания для самостоятельной работы

Применяя правила Лопиталя, вычислить пределы следующих функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+e^x-1}{x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$;

4. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{e^x-e}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 8x}{4x}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(x^3\cdot\ln x)$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^{\sqrt{2x}-2}$.

6 Непрерывность и точки разрыва функции

6.1 Непрерывность функции в точке

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если:

а) $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0;

б) существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0) \text{ и } \lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0);$$

в) эти пределы равны значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0).$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad \left(\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0\right).$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале $(a; x_0]$ и

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 4. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале $[x_0; b)$ и

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

6.2 Непрерывность функции на промежутке

Функция $f(x)$ называется непрерывной на данном промежутке (интервале, полуинтервале, отрезке), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

При этом, если функция определена в конце промежутка, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева. В частности, функция называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она:

1) непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$;
2) непрерывна справа в точке a;
3) непрерывна слева в точке b.

6.3 Точки разрыва

Если в точке x_0 хотя бы одно из условий непрерывности нарушается, точка x_0 называется ***точкой разрыва*** данной функции. Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода:

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** (рис. 3). Величина $\delta = \left| f(x_0+0) - f(x_0-0) \right|$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

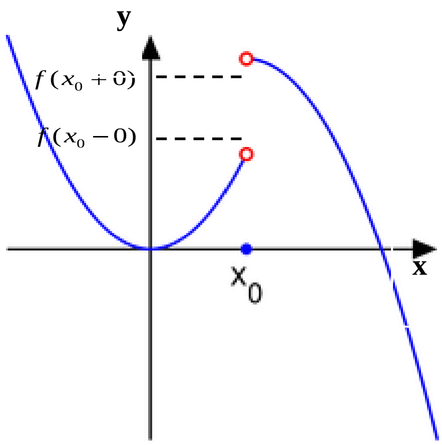

Рисунок 3

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ (или функция $f(x)$ не определена в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$), то точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода**, или **точкой устранимого разрыва*** (рис.4).

3. Если в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** (рис. 5).

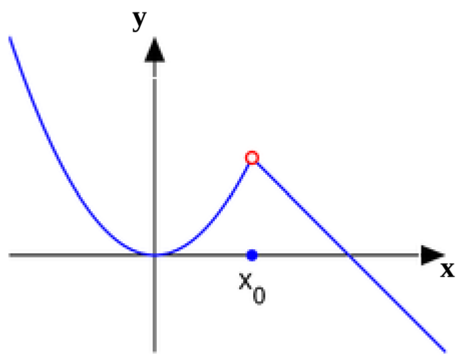

Рисунок 4

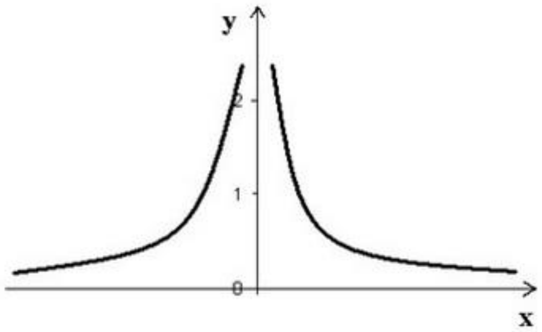

Рисунок 5

Точки разрыва второго рода подразделяются на:

а) точки бесконечного разрыва (хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности);

б) точки неопределенности (по крайней мере один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не существует).

Пример 64. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 \le x < 3; \\ 3 - x, & 3 \le x \le 4. \end{cases}$$

Решение: На промежутках (0; 3) и (3; 4) функция $f(x)$ непрерывна.

В точке $x=0$ функция непрерывна справа, т.к.

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}(x-1) = -1 = f(0).$$

В точке $x=4$ функция непрерывна слева, т.к.

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0}(3-x) = -1 = f(4).$$

Точка $x=3$ является точкой разрыва первого рода, т.к.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-0}(x-1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+0}(3-x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ разрыв первого рода, скачок } \delta = 2.$$

Пример 65. Исследовать функцию $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ на непрерывность .

Решение: Функция не определена в точке $x=2$, следовательно, в этой точке терпит разрыв. Найдем односторонние пределы функции при $x \to 2 \pm 0$:

$$\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Так как правосторонний предел бесконечный, то точка $x=2$ является точкой разрыва второго рода.

Пример 66. Исследовать функцию $y = \dfrac{\sin 3x}{x}$ на непрерывность. Установить тип точек разрыва.

Решение: Функция не определена в точке $x=0$, следовательно, в этой точке терпит разрыв. Найдем односторонние пределы функции при $x \to 0 \pm 0$:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3,$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

Односторонние пределы равны, следовательно, $x=0$ является точкой устранимого разрыва.

Доопределить функцию по непрерывности – это значит задать $f(0)=3$, то есть получить функцию, которая непрерывна в точке $x=0$.

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ 3, & x=0.\end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность. Установите тип точек разрыва.

1. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0;\\ x^3, & 0<x\le 2;\\ \dfrac{1}{2-x}, & x>2.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 2;\\ x^2-6x+12, & 2<x<5;\\ 2x-3, & x>5.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}3-x^2, & x<0;\\ 3e^x, & 0<x\le 3;\\ \dfrac{1}{x-3}, & x>3.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{x,} & -1<x<0;\\ -2x^2+x, & x\ge 0.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+4}, & x<-4;\\ x+4, & -4\le x\le 0;\\ x^2, & x>0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}3, & x<-3;\\ |x|, & -3\le x\le 3;\\ 6-x, & x>3.\end{cases}$

Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность в заданных точках. Установите тип точек разрыва.

7. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$, $x=0.$

8. $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$, $x=0.$

9. $f(x)=\dfrac{1}{6+3^{1/x}}$, $x=0.$

10. $f(x)=\dfrac{1}{5+2^{1/x}}$, $x=0.$

11. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$, $x_1=2, x_2=-2$.

12. $f(x)=\dfrac{3x}{\sin x}$, $x=0.$

13. $f(x)=4^{\frac{1}{x+1}}$, x= -1

14. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$, $x_1=-3, x_2=3$.

7 Применение предельного анализа в экономике

Задача 1 (о непрерывном начислении процентов) Первоначальный вклад в банк составил Q_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно $p\%$ годовых. Необходимо найти размер вклада Q_t через t лет.

При использовании *простых процентов* размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину $\frac{p}{100}Q_0$, т.е. $Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$,

$Q_2 = Q_0\left(1+\frac{2p}{100}\right), \ldots, Q_t = Q_0\left(1+\frac{pt}{100}\right)$. На практике значительно чаще применяются

сложные проценты, которые вычисляются по формуле $Q = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, где n – количество периодов времени хранения вклада

Формулы этого типа используются также в демографических расчетах (прирост народонаселения) и в прогнозах экономики (увеличение валового национального продукта). В общем случае, если $r = p/100$ и год разбит на n частей, то через t лет сумма депозита достигнет значения

$$Q_n = Q_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Это выражение можно преобразовать:

$$Q_n = Q_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}.$$

Введем новую переменную $m = n/r$; при $n \to \infty$ получим $m \to \infty$, или

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{m\to\infty} Q_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} = Q_0 e^{rt}.$$

Расчеты, выполненные по этой формуле называют вычислениями по непрерывным процентам.

Задача 2 Зависимость себестоимости C произведенной продукции от ее объема Q задана формулой : $C = f(Q)$.Так называемая *предельная себестоимость* характеризует себестоимость ΔC прироста продукции ΔQ:

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q} \quad .$$

В предположении о непрерывной зависимости ΔC от ΔQ естественно напрашивается замена разностного отношения его пределом:

$$MC = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = C'(Q) \ .$$

Обычно в приложениях с использованием аппарата математики под предельной себестоимостью понимают именно эту величину.

Задача 3 Обозначим через y доход, остающийся у населения после уплаты налогов:

$$y = C(y) + S(y),$$

где $C(y)$ – функция потребления (часть дохода население тратит), $S(y)$ – функция сбережения.

Если национальный доход y получает приращение Δy, то функции потребления и сбережения также получают приращения соответственно ΔC и ΔS:

$$\Delta y = \Delta C + \Delta S \ .$$

Последнее равенство можно разделить на $\Delta y \neq 0$ и перейти к пределу при $\Delta y \to 0$. Тогда получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta y} = 1,$$

т.е.

$$\frac{dC}{dy} + \frac{dS}{dy} = 1.$$

Полученные производные называются соответственно *предельной склонностью к потреблению* и *предельной склонностью к сбережению.*

Задача 4 В анализах и прогнозах ценовой политики применяется понятие *эластичности* функции.

Эластичностью функции $E_x(y)$ предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'.$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

8 Тест (тренировочный)

1 Общий член последовательности $-1; \frac{2}{3^3}; -\frac{3}{5^3}; \frac{4}{7^3}; \ldots$ имеет вид:

а) $a_n = \frac{n}{(2n-1)^3}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n n}{(2n-1)^3}$; в) $a_n = \frac{2n+1}{(2n-1)^3}$; г) $a_n = \frac{(-1)^n n}{(2n+1)^3}$.

2 Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции, то верно равенство:

а) $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$; б) $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq 0$; в) $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$; г) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

3 Предел $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln(\sin x)$ равен:

а) $-\infty$; б) $+\infty$; в) 0; г) e.

4 Бесконечно малыми при $x \to 0$ являются функции:

а) $y = x^6$; б) $y = \sin\frac{x}{3}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{1}{\cos 3x}$.

5 Бесконечно большими при $x \to \infty$ являются функции:

а) $y = tgx$; б) $y = \frac{1}{x^{-2}}$; в) $y = arctgx$; г) $y = \log_{0,5} x$.

6 Предел $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{4x^3 + 2x - 1}{ax^3 - 4x} = \frac{1}{2}$. Тогда a равно:

а) 6; б) 2; в) 8; г) 4.

7 Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sin^2 5x}$ равен:

а) 0; б) 1; в) $\dfrac{1}{5}$; г) $\dfrac{1}{25}$.

8 Произведение бесконечно малых и бесконечно большой величин является:
а) бесконечно малой величиной;
б) бесконечно большой величиной;
в) неопределенностью.

9 Предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$ равен: а) 0; б) 1; в) 2; г) ∞.

10 Если $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\neq 5: |x-5|<\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$, то верно равенство:

а) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$; б) $f(2)=5$; в) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=2$; г) $f(5)=2$.

11 Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{4x}=e^{-8}$.Тогда a равно:

а) -2; б) 2; в) 4; г) -4.

12 Непрерывной на всей области определения является функция:

а) $y=\dfrac{x}{\sin x}$; б) $y=\dfrac{x}{tgx}$; в) $y=\dfrac{1}{x-3}$; г) $y=\cos(x-3)$.

13 Если в некоторой окрестности точки x = 3 $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)\neq f(3)$, то :

а)x = 3- точка непрерывности; б) x = 3- точка разрыва 1-го рода;
в)x = 3- точка разрыва 2-го рода; г) x = 3- точка устранимого разрыва.

14 Разрыв в точке $x=0$ имеет функция:

а) $y=\dfrac{1}{x}$; б) $y=\sqrt[3]{x}$; в) $y=\begin{cases}1, & при \quad x\le 0,\\ x, & при \quad x>0.\end{cases}$ г) $y=\begin{cases}-x, & при \quad x<0,\\ 0, & при \quad x=0,\\ x, & при \quad x\ge 0.\end{cases}$

15 Функция $y=\dfrac{3-x}{x^2-9}$ имеет бесконечный разрыв в точке:

а) 3; б) -3; в) 9; г) -9.

Ответы:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
б	в	а	а, б	б, г	в	а	в	а
10	11	12	13	14	15			
в	б	г	а	г	б			

9 Задания для индивидуальной работы

Вариант 1

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+4}{2x^3+5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-2n}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+12x+20}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{tg4x}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2; \\ x^2-6x+11, & 2<x<4; \\ 2x-5, & x>4. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+7x}{2x-4x^2-5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^3+2x-8}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{e^{x^2}-1}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность в заданных точках, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$y=\frac{x}{x-4},\ x_1=0, x_2=4.$$

Вариант 3

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4-2x^2+4}{x^4+5x^2+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n^2+1)(n^2-2)}-\sqrt{n^4-9}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{1+x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8\ln(1-7x)}{4arctgx}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & x<-2; \\ 0, & -2\le x<0; \\ \sin x, & 0<x<\infty. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x-35}{2x^2-4x-5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-6}\right)^{\frac{x}{6}+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6+x}}{x^2-x-6}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin 5x}{1-\cos x}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность в заданных точках, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$y=\frac{x^2-25}{x-5},\ x_1=0, x_2=5.$$

Вариант 5

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28}{5x^3+5x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{7x+1}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)tg\,\dfrac{\pi x}{2}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x<-1;\\ |x|, & -1\le x\le 1;\\ 1-x^2, & x>1.\end{cases}$$

Вариант 6

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-4x^2+28}{5x+5x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{(x+3)(x-2)}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)^{2n}$; г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность в заданных точках, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}},\ x_1=1, x_2=2.$$

Вариант 7

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-4x^2+28}{5x^3+5x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n+3}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^3+2x^2-x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{3x^2-4x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$

2. Исследовать функцию на непрерывность, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x<0; \\ \cos x, & 0<x<\pi; \\ \dfrac{\pi}{x}, & x\ge\pi. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+3}{5x^2-3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{(x+3)(x-2)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^{2n^2}$; г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2x^2}{x^3-1}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+3x}{2^{-3x}-1}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность в заданных точках, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$f(x)=1+\frac{x}{x-3}\quad x_1=0, x_2=3.$$

Вариант 9

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3}-4x+2}{5x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{1-n^3}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3-4x^2}{5x^3+8x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-1}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin\dfrac{5}{2^x}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0;\\ \cos x, & 0<x<\pi;\\ \dfrac{\pi}{x}, & x\ge\pi.\end{cases}$$

Вариант 10

1. Найти пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{2x^2}{2x+1}\right);$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{(x+3)(x-2)}\right);$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{4x};$ г) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3-8}{x^3+4x^2+3x};$

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3};$ е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tgx}.$

2. Исследовать функцию на непрерывность в заданных точках, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж:

$$f(x)=\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}-4}\quad x_1=0, x_2=1.$$

Список использованных источников

1 **Кремер, Н.Ш.** Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, И. М. Тришин, Б. А. Путко [и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 423 с. - ISBN 5-238-00459-1

2 **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике, 1 часть, - 4-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2004. –288 с.: ил. - ISBN 5-8112-0884-7

3 **Ермаков, В.И.** Сборник задач по высшей математике для экономистов. / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 575 с.

4 **Шипачев, В.С.** Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. / В.С. Шипачев. 3-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003.-304 с.: ил.

5 **Баранова, С. Е.** Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. - СПб.: Питер, 2008, - 320 с.: ил. - ISBN 978-5-469-01407-2

6 **Лунгу, К. Н.** Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин , Ю. А. Шевченко.= 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576 с.: ил. – (Высшее образование). - ISBN 5-8112-0552-X

7 **Красс, М.С., Чупрынов,Б.П.** Математика для экономистов. – СПб.: Питер 2010. - 464 с.: ил. –(Серия «Учебное пособие»). –ISBN 978-5-94723-672-9