Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

В.П. Матвейкина

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего образования по специальности 04.05.01 Фундаментальная и прикладная химия

Оренбург
2016

УДК 517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7
М33

Рецензент – доцент, кандидат педагогических наук О.Н. Казакова

Матвейкина В.П.
М 33 Элементы теории функций комплексного переменного: методические указания / В.П. Матвейкина; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2016. – 64 с.

Методические указания состоят из семи разделов. Каждый раздел включает краткие сведения по теории функций комплексного переменного, необходимые для решения задач, примеры с решениями типовых задач, задания для самостоятельного выполнения и задания для индивидуальной работы со студентами.
Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности 04.05.01 Фундаментальная и прикладная химия.

УДК 517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7

Содержание

Введение

Одним из признаков, характеризующих новое тысячелетие, является стремительное изменение условий жизнедеятельности общества. Это не может не отразиться на тех задачах, которые ставятся перед системой образования в целом, и перед подготовкой специалистов естественно-научного направления в частности.

Универсальность математического знания проявляется в проникновении методов математики в другие области научного знания, как связанные с математикой, так и на первый взгляд не связанные с ней (физику, химию, биологию экономику, лингвистику, психологию и т.д.).

Это объясняет необходимость глубокого, скурпулезного подхода к преподаванию и изучению математических дисциплин.

Особое место в преподавании университетского курса математики на многих специальностях занимает теория функций комплексного переменного.

Огромную роль в ее развитии и оформлении сыграли такие выдающиеся ученые, как Л. Эйлер, О.Л. Коши, Б. Риман, К. Вейерштрасс, русские ученые: Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин, советские математики: М.В. Келдыш, М.А.Лаврентьев, С.Л. Соболев и многие другие.

С помощью теории функций комплексного переменного решаются многие задачи. Так, с помощью теории вычетов вычисляются многие сложные интегралы по замкнутым контурам. Средствами комплексного анализа объясняются те моменты, которые невозможно интерпретировать в рамках вещественного анализа. Новый всплеск интереса к комплексному анализу связан с комплексной динамикой и теорией фракталов.

Возможность детального исследования плоского движения несжимаемой жидкости в пористой среде, подчиняющейся линейному закону фильтрации, реализована благодаря применению одного из мощных средств математического анализа – аппарата теории функций комплексного переменного. Аналитические функции находят применение при описании различных процессов.

Это подтверждает необходимость детального изучения теории функций комплексного переменного в процессе получения студентами высшего образования по различным специальностям.

Данные методические указания по теории функций комплексного переменного предназначены для проведения практических занятий. Они состоят из семи разделов. Каждый раздел начинается с краткого теоретического материала, включающего важнейшие определения, теоремы и формулы, необходимые для решения задач. В каждом разделе рассмотрены типовые задачи с подробным решением, а также даны задачи для самостоятельного решения, ответы к которым приведены в конце методических указаний.

Содержание методических указаний соответствует рабочей программе дисциплины «Математика» для студентов очной формы обучения, обучающихся по специальности 04.05.01– Фундаментальная и прикладная химия.

Методические указания могут быть полезны для проведения занятий и организации самостоятельной работы студентов других направлений подготовки и форм обучения.

1 **Комплексные числа и действия над ними**

Определение: Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y – действительные числа, i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются так:

$$x = Re\,z$$

$$y = Im\,z\,.$$

Определение: Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$.

Действия над комплексными числами

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

1. Комплексные числа z_1 и z_2 считаются равными тогда и только тогда, когда выполняются условия: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

2. Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, вычисляемое по формуле: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

3. Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, вычисляемое по формуле: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

4. Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, вычисляемое по формуле: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

5. Частным от деления комплексных чисел z_1 на z_2 $(z_2 \neq 0)$ называется комплексное число, вычисляемое по формуле: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}$.

Из определения произведения комплексных чисел следует, что:

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

Пример 1. Найти $z_1 \pm z_2; z_1 z_2; z_1 / z_2$, если $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - 4i$

Решение:

а) Найдем сумму: $z_1 + z_2 = (1+2i) + (3-4i) = (1+3) + (2i-4i) = 4 - 2i$.

б) Вычислим разность: $z_1 - z_2 = (1+2i) - (3-4i) = (1-3) + (2i - (-4i)) = -2 + 6i$.

в)Найдем произведение:

$$z_1 z_2 = (1+2i)(3-4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-4i) + 2i \cdot 3 + 2i \cdot (-4i) = 3 - 4i + 6i - 8i^2 = 3 + 2i + 8 = 11 + 2i.$$

г) Выполним деление, для этого числитель и знаменатель умножим на число сопряженное знаменателю: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+2i)}{(3-4i)} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости XOY точкой $M(x, y)$ или вектором $\overrightarrow{OM}(x, y)$. Обратно, каждая точка (x,y) плоскости XOY является изображением комплексного числа $z = x + iy$ (рисунок 1). Следовательно, между множеством всех комплексных чисел и множеством всех точек плоскости XOY существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому мы не будем делать различия между комплексным числом и точкой, его изображающей. Вместо того, чтобы говорить «дано комплексное число z», часто будем говорить «дана точка z», и наоборот. Плоскость XOY называется комплексной плоскостью или плоскостью (Z).

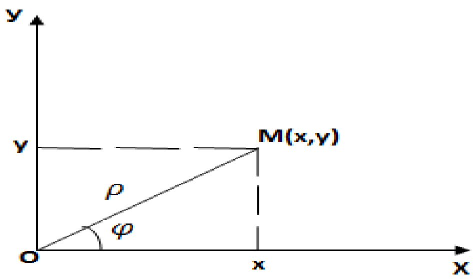


Рисунок 1

Длина ρ вектора $\overrightarrow{OM}(x,y)$, т.е. расстояние от начала координат до точки z, называется модулем комплексного числа и обозначается так:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}(x,y)$ с осью OX, называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = Arg\,z$. Аргумент комплексного числа z определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k, k \in Z$, т.е.:

$$\varphi = Arg\ z = \varphi_0 + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots),$$

где $\varphi_0 = arg\,z$ называется главным значением аргумента и определяется из условий:

$$\varphi_0 : \begin{cases} cos\,\varphi = \dfrac{x}{\rho} \\ sin\,\varphi = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}, \varphi_0 \in [0, 2\pi) \ . \qquad (1)$$

Пример 2. Найти модуль и главный аргумент комплексного числа $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Решение:

Так как комплексное число имеет вид $z = 1 - i\sqrt{3}$, то $x = 1, y = -\sqrt{3}$. Найдем модуль комплексного числа: $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$. Т.к. согласно формулам (1) $\begin{cases} cos\,\varphi = \dfrac{1}{2} \\ sin\,\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \varphi_0 = [0, 2\pi)$, то $\varphi_0 = \dfrac{5\pi}{3}$ 惘 главный аргумент комплексного числа.

Пример 3. Определить и начертить в комплексной плоскости линии, заданные уравнениями: а) $|z| = 1$; б) $|z - 1 - 2i| = 3$.

Решение:

а) По определению $|z|$ 惘расстояние от начала координат до точки z. Для данного множества точек это расстояние должно быть одним и тем же, равным 1.

Поэтому искомая линия будет окружностью с центром в начале координат, радиуса 1(рисунок 2).

б) Так как $|z_1 - z_2|$ 惘 расстояние между точками z_1 и z_2, то из равенства $|z - (1+2i)| = 3$ следует, что точки данной линии удалены от точки $1+2i$ на расстояние, равное 3. Поэтому искомая линия будет окружностью с центром в точке $1+2i$, радиуса 3 (рисунок 3).

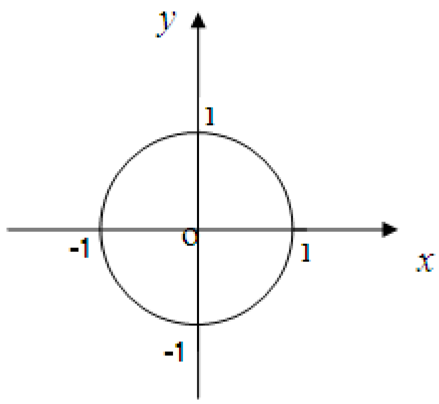


Рисунок 2

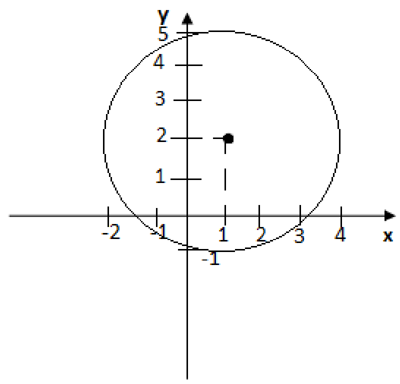


Рисунок 3

Пример 4.

Определить геометрическое место точек, для которых: а) $Re\, z = 4$; б) $arg\, z = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

а) По определению $Re\, z = x$, поэтому $Re\, z = 4$ можно переписать так: $x = 4$. Это уравнение определяет прямую, параллельную оси Oy.

б) Уравнение $arg\, z = \frac{\pi}{6}$ можно переписать так: $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Этому уравнению удовлетворяют точки, расположенные на луче, выходящем из начала координат и образующем с осью Ox угол $\frac{\pi}{6}$.

Пример 5.

Определить множества точек, удовлетворяющих следующим неравенствам, и построить их на плоскости: а) $|z-2i| \le 3$ б) $|z-2i| \ge 2$.

Решение:

а) Неравенство $|z-2i| \le 3$ означает, что расстояние от точки $2i$ до точки z меньше или равно трем. Этому условию удовлетворяют точки круга с центром в точке $2i$ радиуса 3, включая его границу, уравнение которой $|z-2i| = 3$ (рисунок 4).

б) Неравенство $|z-2i| \ge 2$ означает, что расстояние от точки $2i$ до точки z больше или равно двум. Этому условию удовлетворяют точки вне круга с центром в точке $2i$ радиуса 2, включая его границу, уравнение которой $|z-2i| = 2$ (рисунок 5).

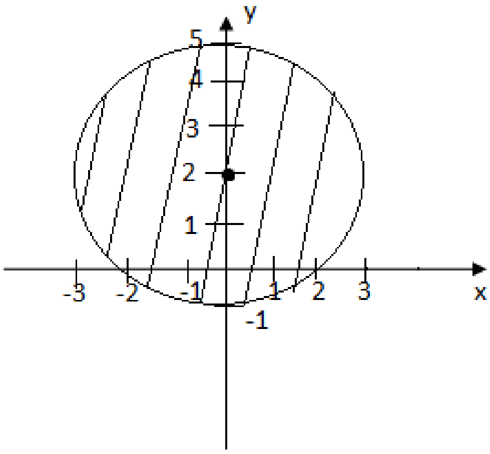


Рисунок 4

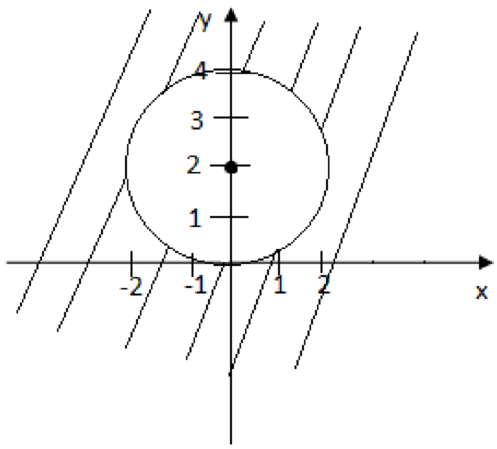


Рисунок 5

Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z = x + i\varphi$ $(z \ne 0)$ можно записать в тригонометрической форме $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

1. Комплексные числа z_1 и z_2, заданные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π, т.е.:

$\rho_2 = \rho_1$, $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$

2. При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются , т.е.:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

3. При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются, т.е.:

$$z_1 / z_2 = \rho_1 / \rho_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

4. При возведении комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, в натуральную степень достаточно модуль комплексного числа возвести в эту степень, а аргумент комплексного числа умножить на показатель степени, т.е.:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

5. Корень *n*-ой степени из комплексного числа *z* имеет *n* различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right) \quad k = 0,1,2,3,\ldots(n-1), \varphi_0 = \arg z.$$

Пример 6. Представить число $z=-3+3i$ в тригонометрической форме.

Решение:

Так как комплексное число имеет вид $z=-3+3i$, то $x=-3, y=3$. Вычислим модуль комплексного числа: $\rho=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$. Найдем главное значение аргумента φ_0, пользуясь формулами (1):

$$\begin{cases} cos\,\varphi_0=\dfrac{-3}{3\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ sin\,\varphi_0=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \varphi_0=\frac{3\pi}{4}\ .$$

Следовательно, тригонометрическая форма данного комплексного числа будет иметь вид:

$$z=3\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Пример 7. Вычислить $(1+i)^{100}$.

Решение:

Представим число $z=1+i$ в тригонометрической форме $z=\sqrt{2}\left(cos\dfrac{\pi}{4}+sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Применяя формулу возведения в степень, получим:

$$z^{100}=\left(\sqrt{2}\right)^{100}\left(cos100\cdot\frac{\pi}{4}+i\,sin100\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2^{50}\cdot(-1)=-2^{50}\ .$$

Пример 8. Вычислить $\sqrt[3]{-1}$.

Решение:

Имеем число $z=-1=-1+0i$.

Представим его в тригонометрической форме $z=(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Вычислим корень 3-ей степени, применяя формулу извлечения корня из комплексного числа. Получим:

$$\omega_k=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\,sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),$$

где $k=0;1;2$.

Пусть: $k=0$ $\quad\omega_k=1\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$k=1 \quad \omega_k=1\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right)=\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-1$$

$$k=2 \quad \omega_k=1\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найти $z_1 \pm z_2;\ z_1 z_2;\ z_1 / z_2$, если $z_1=2-3i,\ z_2=4+5i$.

2. Найти модуль и главный аргумент комплексного числа $z=2-2i$.

3. Определить и начертить в комплексной плоскости линии, заданные уравнениями:

а) $|z|=3$ б) $|z-2|=4$ в) $|z-1+2i|=2$.

4. Представить число $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ в тригонометрической форме.

5. Вычислить $(-1+i)^{30}$.

6. Вычислить $\sqrt[3]{64}$.

7. Вычислить $\sqrt[4]{-1}$.

8. Решить уравнение: $z^3-27=0$.

2 Области. Функция комплексного переменного

Множество всех точек z плоскости (Z), для которых $|z-z_0|<R$, называется открытым кругом (или просто кругом) с центром в точке z_0 радиуса R и обозначается через $K(z_0;R)$.

Круг $K(z_0;\varepsilon)$ называется ε-окрестностью точки z_0.

Пусть дано некоторое множество D точек плоскости (Z).

Точка $z_0 \in D$ называется внутренней точкой множества D, если $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $K(z_0;\varepsilon) \subset D$.

Множество D называется: открытым, если каждая его точка внутренняя; связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек D.

Открытое связное множество D называется областью.

Точка z_0 называется граничной точкой области D, если $z_0 \notin D$ и любая окрестность $K(z_0;\varepsilon)$ содержит точки D.

Множество всех граничных точек области D называется её границей.

Область D, с присоединенной к ней границей, называется замкнутой областью и обозначается через $\bar{D}$.

Примером области служит внутренность непрерывной замкнутой линии Г (рисунок 1). Граница области может состоять из нескольких замкнутых линий, причем внутренняя линия может вырождаться в точку или двойную линию (разрез).

Область называется односвязной, если её граница состоит из одной связной линии; n-связной, если её граница состоит из n не связанных друг с другом частей. На рисунках 6 и 7 изображены соответственно одно- и двухсвязная области. Область D на рисунке 8 (где точка $a \notin D$) четырёхсвязная, ибо её граница состоит из 4-х частей; $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, a$.

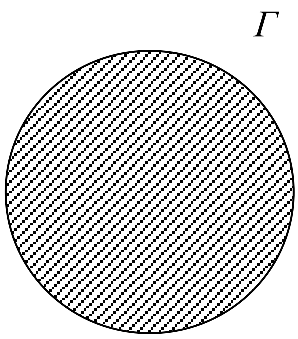


Рисунок 6

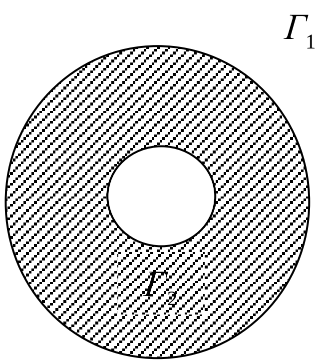


Рисунок 7

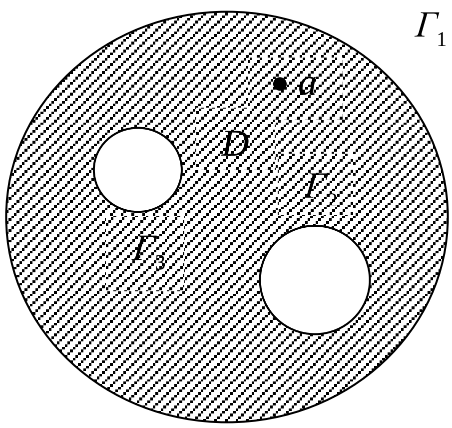


Рисунок 8

Определение функции комплексного переменного аналогично определению функции действительного переменного.

Определение: Говорят, что на множестве D точек плоскости (Z) задана функция

$$w = f(z), \tag{2}$$

если указано правило, по которому каждой точке $z \in D$ ставится в соответствие одно или несколько комплексных чисел *w*. В первом случае функция $w = f(z)$ называется однозначной, во втором – многозначной.

Множество D называется множеством определения функции $f(z)$.

Если положить $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то, подставив эти числа в формулу (2), получим:

$$u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Откуда:

$$u = \operatorname{Re} f(z) = u(x, y), v = \operatorname{Im} f(z) = v(x, y), \tag{3}$$

т.е. задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ равносильно заданию двух функций (3) от двух действительных переменных.

Если функция $w = f(z)$ однозначна в области D и при $z_1 \neq z_2 (z_1, z_2 \in D)$ выполняется условие $f(z_1) \neq f(z_2)$, то эта функция называется однолистной в области D.

Например, функция $w = z^2$ определена и однозначна на всей плоскости (Z). Положив $z = x + iy$, $w = u + iv$, получим: $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Откуда: $u = x^2 - y^2$ и $v = 2xy$.

Рассмотрим некоторые простейшие элементарные функции комплексного переменного.

Определение: Для любого значения комплексного переменного z по определению полагаем:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^k}{k!} + \ldots \tag{4}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + \ldots \qquad (5)$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что $\cos(-z) = \cos(z)$ и $\sin(-z) = -\sin(z)$, т.е. $\cos z$ - четная, а $\sin z$ - нечетная функция.

При любом действительном $a > 0$ функция a^z определяется по формуле:

$$a^z = e^{z \ln a}. \qquad (7)$$

Функции $tg\, z$ и $ctg\, z$ определятся так:

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z},\ ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}\ . \qquad (8)$$

Гиперболические функции комплексного переменного определим с помощью показательной функции.

Определение: Для любого z по определению полагаем:

$$ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad (9)$$

Заменяя в формуле (4) z на iz, и, учитывая, что в абсолютно сходящемся ряде допустима любая группировка членов, получим

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right),$$

т.е. так называемую формулу Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \qquad (10)$$

В равенстве (10) заменим z на –z:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \qquad (11)$$

Почленное сложение и вычитание формул (10) и (11) даёт следующее:

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z,\ e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z.$$

Откуда получаем:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ . \qquad (12)$$

Формулы (12) также называются формулами Эйлера. Формула (10) позволяет записать комплексное число в показательной форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \ . \qquad (13)$$

Заменяя в (9) и (12) z на iz, получим формулы, связывающие тригонометрические и гиперболические функции:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos iz = ch\, z, & \sin iz = i\, sh\, z \\ ch\, iz = \cos z, & sh\, iz = i \sin z \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Выведем формулу сложения для функции e^z. Пользуясь правилом умножения абсолютно сходящихся рядов, получим:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1{}^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2{}^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1{}^k z_2{}^{n-k}}{k!(n-k)!} .$$

Но по формуле бинома Ньютона имеем:

$$\frac{\left(z_1 + z_2\right)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1{}^k z_2{}^{n-k}}{k!(n-k)!} .$$

Следовательно,

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z_1 + z_2\right)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2} . \qquad (15)$$

Используя (9), (12), (14),(15) легко вывести формулы сложения для *cos z, sin z, ch z, sh z*. Они имеют такой же вид, как в действительном анализе.

В силу (15) имеем:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \text{ откуда } |e^z| = e^x, \ \arg e^z = y .$$

Отсюда следует, что

$$e^z \neq 0 \ \forall z \in (z)$$

Функция e^z периодична с периодом $2\pi i$, так как $\forall z$ согласно (15) имеем:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z .$$

Значит, функция e^{iz} периодична с периодом 2π. Функции *ch z* и *sh z*, выражающиеся через функцию e^{z}, также периодичны с периодом $2\pi i$.

Определим логарифмическую функцию комплексного переменного как функцию обратную показательной.

Определение: Число *w* называется логарифмом комплексного числа *z* (по основанию *e*), если:

$$e^{W}=z \tag{16}$$

и обозначается:

$$w=Ln\,z\,.$$

Заметим, что при *z=0* значение функции *Ln z* не существует.

Пусть $z=re^{i\varphi}$ и $w=u+iv$. Тогда, подставив их в формулу (16), получим: $e^{u+iv}=re^{i\varphi}$ или $e^{u}e^{iv}=re^{i\varphi}$. Откуда заключаем, что: $e^{u}=r$, т.е. $u=\ln r$ и $v=\varphi+2k\pi$ (где *k* – целое число).

Следовательно, $w=\ln r+i(\varphi+2k\pi);\,(k=0,\pm1,\pm2,...)$, т.е.

$$Ln\,z=\ln|z|+iArg\,z\,. \tag{17}$$

Таким образом, функция *Ln z* имеет (при фиксированном значении $z\neq0$) бесконечно много значений, т.е. *Ln z* – многозначная функция.

Обратные тригонометрические функции $Arc\,sin\,z, Arc\,cos\,z, Arctgz, Arcctgz$ определяются как функции обратные соответственно к функциям $sin\,w, cos\,w, tgw, ctgw$.

Например, если $z=sin\,w$, то *w* называется арксинусом комплексного числа *z* и обозначается так: $w=Arc\,sin\,z$.

Обратные тригонометрические функции являются многозначными и выражаются по формулам:

$$Arc\,sin\,z=-iLn\left(iz+\sqrt{1-z^{2}}\right), \tag{18}$$

$$Arc\,cos\,z=-iLn\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right), \tag{19}$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+iz}{1-iz} \quad , \qquad (20)$$

$$Arcctgz = -\frac{i}{2} Ln \frac{z+i}{z-i} \quad . \qquad (21)$$

Степень с комплексным основанием $z \neq 0$ и показателем β определяется формулой:

$$z^{\beta} = e^{\beta Ln z} . \qquad (22)$$

Эта степень, вообще говоря, имеет бесконечно много значений, так как Ln z имеет бесконечно много значений. Если β – действительное целое число, то значения $\beta Ln z$ отличаются между собой на величину, кратную $2\pi i$. Следовательно, в этом случае z^{β} имеет одно значение. Итак, при действительном целом β функция z^{β} однозначна.

Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Мы будем рассматривать ниже только однозначные функции.

Соотношение $z = x + iy \to z_0 = x_0 + iy_0$ по определению эквивалентно двум соотношениям $x \to x_0$ и $y \to y_0$.

Определение: Число $w_0 = u_0 + iv_0$ называется пределом функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ при $z \to z_0$, если:

$$| f(z) - w_0 | = \sqrt{(u(x,y) - u_0)^2 + (v(x,y) - v_0)^2} \to 0 \text{ при } z \to z_0 .$$

Тогда пишут:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \text{ или } f(z) \to w_0 \text{, при } z \to z_0 .$$

Из этого определения следует, что равенство $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ эквивалентно двум равенствам:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0 \text{ и } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0 .$$

В силу этого основные свойства предельного перехода сохраняются для функций комплексного переменного. Отметим, что если существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$, то он не зависит от способа стремления z к z_0.

Определение: Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если она определена в окрестности этой точки и выполняется:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0).$$

Очевидно, непрерывность функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в точке $z_0=x_0+iy_0$ эквивалентна непрерывности двух функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Пример 9. Найти действительную и мнимую части функций: 1) $w=2z+1$; 2) $w=\dfrac{1}{z}$; 3) $w=z^2+z$.

Решение:

1) Т.к. $z=x+iy$, то $w=2z+1=2\left(x+iy\right)+1=\left(2x+1\right)+i\left(2y\right)$. Т.о., действительной и мнимой частью функции будут: $u\left(x,y\right)=2x+1 \quad v\left(x,y\right)=2y$;

2)Т.к. $z=x+iy$, то

$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{\left(x-iy\right)}{\left(x+iy\right)\left(x-iy\right)}=\dfrac{\left(x-iy\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Т.о., действительной и мнимой частью функции будут: $u\left(x,y\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2} \quad v\left(x,y\right)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$;

3) Т.к. $z=x+iy$, то

$w=z^2+z=\left(x+iy\right)^2+\left(x+iy\right)=\left(x^2+2xiy+\left(iy\right)^2\right)+x+iy=x^2+i2xy-y^2+x+iy$.

Т.е. $w=x^2+x-y^2+i\left(2xy+y\right)$.

Т.о., действительной и мнимой частью функции будут: $u\left(x,y\right)=x^2+x-y^2 \quad v\left(x,y\right)=2xy+y$.

Пример 10. Дана функция $w=z^2+z+1$. Найти значение функции при:

1) $z=1+i$; 2) $z=2-i$; 3) $z=i$.

Решение:

1) Т.к. $z=1+i$, то $w=(1+i)^2+1+i+1=1+2i-1+1+i+1=2+3i$;

2) Т.к. $z=2-i$, то $w=(2-i)^2+2-i+1=4-4i-1+2-i+1=6-5i$;

3) Т.к. $z=i$, то $w=i^2+i+1=-1+i+1=i$.

Пример 11. Дана функция $f(z)=x^2+y^2i$, где $z=x+yi$. Найти: 1) $f(1+2i)$; 2) $f(2-3i)$; 3) $f(0)$.

Решение:

1) Т.к. $z=1+2i$, то $x=1, y=2, f(1+2i)=1^2+2^2i=1+4i$;

2) Т.к. $z=2-3i$, то $x=2, y=-3, f(2-3i)=2^2+\left(-3\right)^2 i=4+9i$;

3) Т.к. $z=0=0+0i$, то $x=0, y=0, f(0)=0^2+0^2i=0$.

Пример 12. Показать, что функция $w=|z|$ непрерывна при любом значении z.

Решение:

Так как разность двух сторон треугольника не больше третьей стороны, то $||z|-|z_0||\le|z-z_0|$ (рисунок 9).

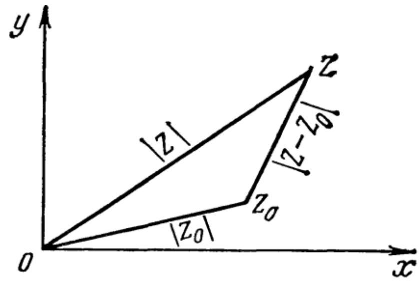


Рисунок 9

Пусть $0<\delta<\varepsilon$. Тогда из неравенства $|z-z_0|<\delta$ следует неравенство $||z|-|z_0||<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{z\to z_0}|z|=|z_0|$. Таким образом, $|z|$ - непрерывная функция.

Пример 13. Показать, что $w=z^2$ - непрерывная функция при любом значении z.

Решение:

Имеем $z^2 - z_0{}^2 = (z - z_0)(z + z_0)$. Если $z \to z_0$, то существует такое положительное число M, при котором выполняются неравенства $|z| < M, |z_0| < M$. Тогда:

$$|z^2 - z_0{}^2| = |z - z_0| \cdot |z + z_0| < |z - z_0|(|z| + |z_0|) < 2M|z - z_0|.$$

Возьмем $\delta < \varepsilon/(2M)$. Из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует, что

$$|z^2 - z_0{}^2| < 2M\delta < 2M \cdot \varepsilon/(2M), \text{ т.е. } |z^2 - z_0{}^2| < \varepsilon.$$

Т.о., $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0{}^2$, т.е. $w = z^2$ - непрерывная функция.

Пример 14. Найти значение функции $Ln(\sqrt{3} + i)$.

Решение:

Т.к. $z = \sqrt{3} + i$, то $r = |z| = 2$, а $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases}, \varphi = [0, 2\pi)$, то $\varphi = \pi/6$.

По формуле (17) получим:

$Ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i(\pi/6 + 2k\pi),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

Пример 15. Вычислить $\cos(i/2)$ с точностью до 0,0001.

Решение:

Так как справедлива формула $\cos iz = ch z$, то $\cos\dfrac{i}{2} = ch\dfrac{1}{2} \approx 1{,}1276$.

Задачи для самостоятельного решения:

9. Найти действительную и мнимую части функций: 1) $w = 3z - 1$;

2) $w = z^2 - 2$; 3) $w = e^{1+4iz}$.

10. Дана функция $w = e^z$. Найти ее значение при: 1) $z = \pi i/3$; 2) $z = \pi(1 + 2i)$;

3) $z = 2 + (\pi/2 + 2\pi k)i$, где $k \in Z$.

11. Дана функция $f(z)=1/(x^2+yi)$, где $z=x+yi$. Найти 1) $f(2+i)$, 2) $f(i)$, 3) $f(2-3i)$.

12. Показать, что $w=2z^3$ - непрерывная функция.

13. Найти значение функции $L\mathrm{n}(1+i)$.

14. Доказать справедливость равенства 1) $ch^2z-sh^2z=1$,

2) $ch^2z+sh^2z=ch2z$.

15. Решить уравнение $\cos z=2$.

16. Найти $\arcsin i$.

17. Вычислить $\sin i$, подсчитав действительную и мнимую части с точностью до 0,0001.

3 Дифференцируемость функции. Условие Коши-Римана

Пусть $w=f(z)$ определена в окрестности $K(z;\varepsilon)$ фиксированной точки $z=x+iy$. Рассмотрим $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$, где $z+\Delta z\in K(z;\varepsilon)$.

Определение: Производной однозначной функции комплексного переменного $w=f(z)$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, если Δz любым способом стремится к нулю.

Таким образом,

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \qquad (23)$$

Функция, имеющая производную при данном значении z, называется дифференцируемой (или моногенной) при этом значении z.

Определение: Если функция $w=f(z)$ однозначна и имеет конечную производную в каждой точке области D, то эта функция называется аналитической в области D.

Определение: Функция $f(z)$, дифференцируемая не только в точке z_0, но и в некоторой её окрестности, называется аналитической в точке z_0.

Определение: Точки плоскости (Z), в которых функция $f(z)$ аналитична, называются её правильными точками. Точки, в которых функция $f(z)$ неаналитична (в частности, точки, где $f(z)$ не определена), называются её особыми точками.
Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z = x + yi$, то в этой точке существуют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, которые удовлетворяют условиям Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{24}$$

Условия Коши – Римана являются необходимыми условиями дифференцируемости функции $w = f(z)$ в точке $z = x + yi$.

Теорема 2. Если частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывны в точке $z = x + yi$ и условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполнены, то функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z = x + yi$.

Производная функции $f(z)$ выражается через частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по формулам

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{25}$$

Производные элементарных функций $z^n, e^z, \cos z, \sin z, \ln z, \arcsin z, \arccos z, arctg\, z, sh\, z, ch\, z$ находятся по тем же формулам, что и для действительного аргумента:

$(z^n)' = nz^{n-1}$, $\quad (\arcsin z)' = 1/\sqrt{1-z^2}$,

$(e^z)' = e^z$, $\quad (\arccos z)' = -1/\sqrt{1-z^2}$,

$(\cos z)' = -\sin z$, $\quad (arctg\, z)' = 1/(1+z^2)$,

$(\sin z)' = \cos z$, $\quad (sh\, z)' = ch\, z$,

$(\ln z)' = 1/z$, $\quad (ch\, z)' = sh\, z$.

Теоремы о производной суммы, произведения и частного, теоремы о дифференцировании сложной и обратной функций формулируются для функций комплексного переменного точно так же как, для функций действительного переменного, ибо доказательства этих теорем основаны только на свойствах алгебраических действий и предельного перехода, которые сохраняются в комплексной области.

Пример 16. Дифференцируема ли функция $f(z)=2y+3xi$?

Решение:

Запишем действительную и мнимую части данной функции: $u=2y$, $v=3x$. Найдем их частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2$, $\frac{\partial v}{\partial x}=3$, $\frac{\partial v}{\partial y}=0$. Проверим выполнение условий Коши – Римана (24). Одно из условий Коши – Римана не выполняется. Таким образом, данная функция не является дифференцируемой.

Пример 17. Дифференцируема ли функция $f(z)=(y^2-x^2)-2xyi$?

Решение:

Запишем действительную и мнимую части данной функции: $u=y^2-x^2$, $v=-2xy$. Найдем их частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x}=-2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-2y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-2x$. Проверим выполнение условий Коши – Римана (24). Т.к. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x$ $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=2y$, то условия Коши – Римана выполняются. Следовательно, функция дифференцируема. Найдем производную функции по формуле (25): $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-2x-2yi=-2z$.

Пример 18. Является ли дифференцируемой функция $f(z)=e^{2x}\cos 2y+ie^{2x}\sin 2y$?

Решение:

Запишем действительную и мнимую части данной функции: $u=e^{2x}\cos 2y$, $v=e^{2x}\sin 2y$. Найдем их частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\sin 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y$. Проверим выполнение условий Коши – Римана (24). Т.к. $\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2x=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$, то условия Коши – Римана выполнены. Найдем производную данной функции по формуле: $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$, получим:

$f'(z)=2e^{2x}\cos 2y+i2e^{2x}\sin 2y=2e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)=2e^{2x}e^{i2y}=2e^{2(x+yi)}=2e^{2z}.$
Производную данной функции можно найти иначе, преобразуем функцию:

$$f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)=e^{2x}e^{2yi}=e^{2(x+yi)}=e^{2z}\ .$$

Найдем производную функции: $f'(z)=\left(e^{2z}\right)'=2e^{2z}$.

Пример 19. Дана действительная часть $u(x,y)=x^2+y^2+3x$ дифференцируемой функции $f(z)$, где $z=x+yi$. Найти функцию $f(z)$.

Решение:

Найдем $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(x^2+y^2+3x\right)_x'=2x+3$. Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ (в силу одного из условий Коши – Римана), то $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+3$. Интегрируя, последнее равенство находим:

$$v(x,y)=\int(2x+3)dy=2xy+3y+C(x),$$

где $C(x)$ - произвольная функция.

Используем другое условие Коши – Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Так как $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+C'(x)$, то $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y-C'(x)$. Но из условия задачи находим, что $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(x^2+y^2+3x\right)_y'=2y$. Следовательно,

$$-2y-C'(x)=2y,\ C'(x)=-4y\ \text{, а }\ C(x)=-4xy+C.$$

Тогда: $v(x,y)=2xy+3y-4xy+C=3y-2xy+C$.

Искомая функция будет:

$$f(z)=x^2+y^2+3x+i(3y-2xy+C).$$

Пример 20. Дана мнимая часть $v(x,y)=2x+y$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию.

Решение:

Найдем $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\left(2x+y\right)_y'=1$, следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$ (согласно условию Коши – Римана). Интегрируя, находим:

$$u=\int 1dx=x+C(y)\ .$$

Используем другое условие Коши – Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Так как $\dfrac{\partial u}{\partial y}=C'(y)$, а $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\left(2x+y\right)_x'=2$. Следовательно, $C'(y)=-2$. Интегрированием находим, что $C(y)=-2y+C$. Отсюда $u=x-2y+C$. Итак,

$$f(z)=x-2y+C+i(2x+y)\text{, или } f(z)=(x+iy)+2(-y+ix)+C\text{, т.е.}$$
$$f(z)=z+2iz+C=(1+2i)z+C.$$

Задачи для самостоятельного решения:

18. Является ли дифференцируемой функция $f(z)=(x^3+y^2)-2xyi$?

19. Показать, что функция $f(z)=(x^3-6x^2y^2+y^4)+i(4x^3y-4xy^3)$ дифференцируема и найти её производную.

20. Дифференцируема ли функция $f(z)=\cos x\,ch\,y-i\sin x\,sh\,y$? Если да, то найти ее производную.

21.Дифференцируема ли функция $f(z)=\left(x^2+5x-y^2-1\right)+i\left(2xy+5x\right)$? Если да, то найти ее производную.

22. При каком значении λ функция $f(z)=y+\lambda xi$ дифференцируема?

23. Дана мнимая часть $v=3x+2xy$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию, если $f(i)=2$.

24. Дана действительная часть $u=3^x\cos(y\ln 3)$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию.

25. Дана мнимая часть $v=2xy+3y$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию.

4 Интегрирование функций комплексного переменного

Кривая L называется гладкой, если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную.

Кривая называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких дуг.

Пусть функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ непрерывна на кусочно-гладкой линии L с началом в точке $z_0=x_0+iy_0$ и концом в точке $z^*=x^*+iy^*$.
Разобъём линию L на части точками $z_k=x_k+iy_k(k=1,...,n)$, причём положим $z^*=z_n$ (рисунок 10). На каждой части z_kz_{k+1} $(k=0,1,...,n-1)$ возьмём произвольную точку $\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$ и составим сумму:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k\,, \tag{26}$$

где $\Delta z_k=z_{k+1}-z_k=\Delta x_k+i\Delta y_k$, $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$, $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$.

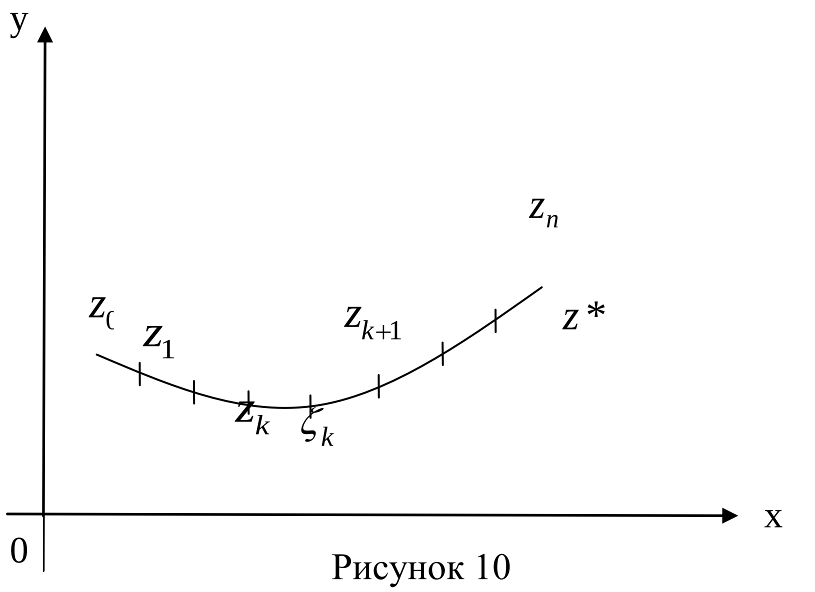


Рисунок 10

Определение: Предел суммы (26), при условии, что $\lambda = \max(|\Delta z_0|,...,|\Delta z_{n-1}|) \to 0$, называется интегралом от функции $f(z)$ по ориентированной линии L(или иначе контурным интегралом) и обозначается так:

$$\int_L f(z)dz. \tag{27}$$

Так как функция имеет вид $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то интеграл $\int_\Gamma f(z)dz$ сводится к вычислению двух криволинейных интегралов от действительных функций по формуле:

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy = \int_L (u+iv)(dx+idy). \tag{28}$$

Из (28) следует, что контурные интегралы обладают обычными свойствами криволинейных интегралов II рода:

1) $\int_L \left[a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)\right]dz = a_1\int_L f_1(z)dz + a_2\int_L f_2(z)dz$,

где a_1, a_2 - …. постоянные;

2) $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz$, где L^- – линия, совпадающая с L, но пробегаемая в противоположном направлении;

3) $\int_{L_1+L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$, где $L_1 + L_2$ -линия, составленная из L_1 и L_2.

Вычисление контурных интегралов

Пусть даны параметрические уравнения линии L:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

причем её началу и концу соответствуют значения параметра $t = t_0$ и $t = t^*$. Тогда $z = z(t)$ (где $z(t) = x(t) + iy(t)$) есть комплексное параметрическое уравнение линии L. Пользуясь формулой (28), по правилу вычисления криволинейных интегралов II рода получим:

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t^*} \left[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \right] \left[x'(t) + iy'(t) \right] dt,$$

т.е.

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t^*} f\left[z(t) \right] z'(t)dt \qquad (29)$$

Эта формула удобна для вычисления контурных интегралов.

Рассмотрим интегралы по замкнутому контуру.

Положительным направлением обхода замкнутого контура называется такое, при котором область, ограниченная этим контуром, остаётся всё время слева. Противоположное ему направление называется отрицательным.

Интеграл от функции $f(z)$ по замкнутому контуру Г в положительном направлении условимся обозначать: $\oint_{\Gamma} f(z)dz$, а в отрицательном направлении:

$$\oint_{\Gamma^-} f(z)dz.$$

Например, пусть требуется вычислить интеграл:

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^n dz \qquad \text{(n - целое число)},$$

где Г – окружность с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ радиуса R.

Запишем параметрические уравнения окружности Г:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}, \ (0 \le t \le 2\pi),$$

тогда комплексное параметрическое уравнение будет иметь вид:

$$z = x_0 + R\cos t + i(y_0 + R\sin t) = z_0 + \mathrm{R}e^{it}$$

Если $n \neq -1$, то по формуле (29) получим:

$$\oint_{\Gamma}(z-z_0)^n dz=\int_0^{2\pi} R^n e^{int} Rie^{it}dt=\frac{R^{n+1}}{n+1}e^{i(n+1)t}\Big|_0^{2\pi}=0.$$

Если $n=-1$, то будем иметь:

$$\oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-z_0}=\int_0^{2\pi}\frac{Rie^{it}dt}{\mathrm{Re}^{it}}=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i.$$

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. (основная теорема Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то для любого замкнутого контура $\Gamma\subset D$ имеем

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz=0 \qquad (30)$$

Определение: Функция $f(z)$ называется аналитической в замкнутой области $\bar{D}$, если она аналитична в некоторой области $G\supset\bar{D}$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Если $f(z)$ аналитична в односвязной замкнутой области $\bar{D}$ и Γ - её граница, то

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz=0.$$

Теорема 3. (теорема Коши для многосвязной области). Если $f(z)$ аналитична в многосвязной замкнутой области $\bar{D}$, ограниченной внешним контуром Γ_0 и внутренними контурами $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ (рисунок 11), то

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz=\oint_{\Gamma_1} f(z)dz+\ldots+\oint_{\Gamma_n} f(z)dz \qquad (31)$$

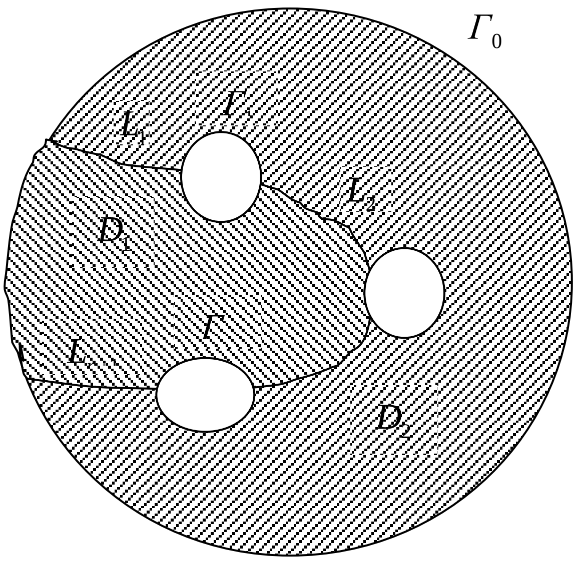


Рисунок 11

Теорема 4. Если $f(z)$ аналитична в односвязной замкнутой области $\bar{D}$ и Г – её граница, то $\forall a \in D$ имеем

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \tag{32}$$

Формула (32) называется интегральной формулой Коши.

Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области D, то значение интеграла $\int_{\Gamma} f(z)dz$, взятого вдоль произвольной кусочно-гладкой линии Г, принадлежащей области D, не зависит от линии Г, а определяется лишь положениями начальной и конечной точек этой линии.
Так же как и для действительных функций, здесь выполняется равенство

$$\int_{z_0}^{z} f(t)dt = \Phi(z) - \Phi(z_0) \tag{33}$$

(формула Ньютона-Лейбница), где $\Phi(z)$ - какая-нибудь первообразная функция по отношению к $f(z)$.

Для нахождения первообразной функции по отношению к аналитической функции $f(z)$ применяются обычные формулы интегрирования.

Пример 21. Вычислить интеграл $\int_{AB} f(z)dz$, где подынтегральная функция имеет вид: $f(z) = (y+1) + ix$, а AB – отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 1$ и $z_B = i$.

Решение:
Запишем действительную и мнимую части подынтегральной функции: $u = y+1$, $v = x$. Для вычисления данного интеграла используем формулу (28) и получим:

$$\int_{AB} f(z)dz = \underbrace{\int_{AB} (y+1)dx - xdy}_{I_1} + i \underbrace{\int_{AB} xdx + \left(y+1\right)dy}_{I_2}$$

Составим уравнение прямой AB $y = -x+1$, найдем $dy = -dx$.
Вычислим интеграл I_1:

$$I_1 = \int_{AB} \left(y+1\right)dx - xdy = \int_1^0 \left(-x+2+x\right)dx = 2x\Big|_1^0 = -2$$

Вычислим интеграл I_2 как определенный интеграл:

$$I_2 = \int\limits_{AB} xdx + (y+1)\,dy = \int\limits_1^0 xdx + \int\limits_0^1 (y+1)\,dy = 1.$$

Таким образом, получим:

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \underbrace{\int\limits_{AB} (y+1)dx - xdy}_{I_1} + i\underbrace{\int\limits_{AB} xdx + (y+1)\,dy}_{I_2} = -2 + i.$$

Пример 22. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz$, где $f(z) = x^2 + y^2 i$, AB – отрезок прямой, соединяющей точки $A = 1 + i$ и $B = 2 + 3i$.

Решение:

Запишем действительную и мнимую части подынтегральной функции: $u = x^2,\ v = y^2$. Для вычисления данного интеграла используем формулу (28) и получим:

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} x^2dx - y^2dy + i\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy.$$

Первый из интегралов в правой части равенства вычисляется как определенный интеграл:

$$\int\limits_{AB} x^2dx - y^2dy = \int\limits_1^2 x^2dx - \int\limits_1^3 y^2dy = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - \left.\frac{y^3}{3}\right|_1^3 = \frac{7}{3} - \frac{26}{3} = -\frac{19}{3}.$$

Для вычисления второго интеграла составим уравнение прямой AB:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{2-1},\ \text{т.е. } y = 2x - 1.$$

Отсюда $dy = 2dx$ и

$$\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy = \int\limits_1^2 \left[(2x-1)^2 + 2x^2\right]dx = \int\limits_1^2 (6x^2 - 4x + 1)dx =$$

$$= \left.(2x^3 - 2x^2 + x)\right|_1^2 = 10 - 1 = 9$$

Таким образом, получим: $\int\limits_{AB} f(z)dz = -19/3 + 9i$.

Пример 23. Вычислить интеграл $\int\limits_{i}^{2+3i} z^2 dz$.

Решение:
Подынтегральная функция является аналитической. Используя формулу Ньютона-Лейбница, находим:

$$\int\limits_{i}^{2+3i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_{i}^{2+3i} = \frac{1}{3}\Big[(2+3i)^3 - i^3\Big] = \frac{1}{3}\Big[(8+3\cdot 2^2\cdot 3i + 3\cdot 2\cdot (3i)^2 + (3i)^3) - i^3\Big] = \frac{-46+10i}{3}.$$

Пример 24. Вычислить $\oint\limits_{\gamma} \bar{z}dz$, где γ - замкнутый контур $x=\cos t$, $y=\sin t$.

Решение:
Так как $\bar{z} = x - yi$, то $dz = dx + idy$, тогда пользуясь формулой (28), имеем, что:

$$\oint\limits_{\gamma} \bar{z}dz = \oint\limits_{\gamma} xdx + ydy + i\oint\limits_{\gamma} xdy - ydx.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства равен нулю, как интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру.
При вычислении второго интеграла следует учесть, что $dx = -\sin t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$. Отсюда $xdy - ydx = \cos^2 t\,dt + \sin^2 t\,dt = dt$ и окончательно получим:

$$\oint\limits_{\gamma} \bar{z}dz = i\int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Пример 25. Вычислить $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-6}$, где γ - эллипс $x = 5\cos t$, $y = 3\sin t$.

Решение:
Подынтегральная функция является аналитической в области, ограниченной этим эллипсом, поэтому по теореме 1, получим:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-6} = 0.$$

Пример 26. Вычислить $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-(2+i)}$, где γ - окружность $|z-(2+i)|=1$.

Решение:
Уравнение окружности можно записать в виде $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, или $x = 2+\cos t, y = 1+\sin t$, или $z = 2+i+e^{ti}$.

В области, ограниченной окружностью γ, подынтегральная функция не является аналитической, поскольку в точке $z = 2 + i$, служащей центром этой окружности, функция не определена. Так как $dz = ie^{it}dt$, то:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-(2+i)} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Пример 27. Вычислить $\oint_\gamma \frac{2z-2+i}{(z-2)(z+i)}dz$, где γ - окружность $|z|=3$.

Решение:

Подынтегральная функция имеет разрывы только в точках $z = 2$ и $z = -i$. Функция $f(z)$ является аналитической в трехсвязной области, представляющей собой круг с граничной окружностью γ, на котором вырезаны два круга $|z-2|<r$, $|z+i|<r$, где $r>0$ - достаточно малая величина (рисунок 12).

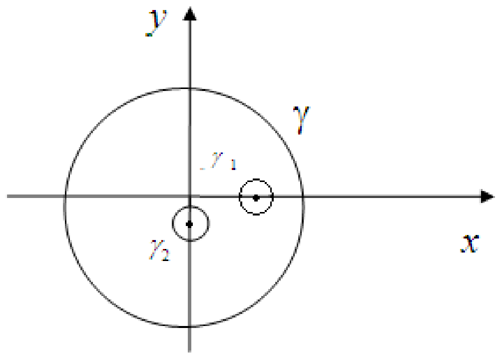


Рисунок 12

Следовательно, по теореме 3 имеем:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz,$$

где γ_1 - окружность $|z-2|=r$, γ_2 - окружность $|z+i|=r$.

Преобразуем подынтегральную функцию, разложив ее на две простейшие дроби:

$$f(z) = \frac{z-2+z+i}{(z-2)(z+i)} = \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-2}.$$

Тогда получим интеграл:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z+i} + \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z-2} + \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z+i} + \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z-2}.$$

Первое и четвертое слагаемые в правой части последнего равенства равны нулю, т.к. подынтегральные функции являются аналитическими в соответствующих областях. Следовательно, интеграл примет вид:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z-2} + \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z+i}.$$

Окружность γ_1 имеет уравнение $z = 2 + re^{i\varphi}$, а γ_2 - уравнение $z = -i + re^{i\varphi}$. Поэтому окончательно получим:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} + \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} = 4\pi i.$$

Задачи для самостоятельного решения:

26. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz$, если $f(z) = 4y + ix$, Г – ломанная линия OAB с вершинами в точках $z_0 = 0, z_A = i, z_B = 1$.

27. Вычислить интеграл $\int_{AB} z^3 dz$, где AB – отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = i, z_B = 1 + i$.

28. Вычислить интеграл $\oint_{\gamma} z^{11} dz$, где γ - эллипс $x^2/4 + y^2/9 = 1$.

29. Вычислить интеграл $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3}$, где γ - окружность $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$.

30. Вычислить интеграл $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z}$, где γ - окружность $z = e^{it}$.

31. Вычислить интеграл $\oint_{\gamma} \frac{5z - 9 + 4i}{(z-3)(z+2i)} dz$, где γ - окружность $|z| = 4$.

5 Ряды Тейлора и Лорана

Теорема 1. Всякая функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, может быть разложена внутри него в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{34}$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_S \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 0,1,2,...), \tag{35}$$

где S – какая-нибудь окружность с центром z_0 радиуса ρ, $\rho < R$.

Ряд (34) с коэффициентами (35) называется рядом Тейлора для функции $f(z)$ в круге $|z - z_0| < R$.

Теорема 2. Всякая функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $r < |z - z_0| < R$, может быть разложена внутри него в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{36}$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{S_1} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...), \tag{37}$$

где S – какая-нибудь окружность с центром z_0 радиуса $\rho, r < \rho < R$.

Ряд (36) с коэффициентами (37) называется рядом Лорана, он состоит из двух частей. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ называется правильной частью, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ 惘главной частью ряда Лорана.

В частности, если $r = 0$, то получим кольцо $0 < |z - z_0| < R$, представляющее собой круг $|z - z_0| < R$ с выколотым центром z_0. Если $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то $c_{-n} = 0$ $(n = 1, 2, ...)$ и главная часть ряда Лорана исчезает. Ряд

Лорана, в этом случае, превратится в ряд Тейлора, который является, таким образом, частным случаем ряда Лорана.

Изолированные особые точки функции

Пусть z_0 - особая точка функции $f(z)$.

Определение: Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $\exists R>0$ такое, что в кольце $0<|z-z_0|<R$ $f(z)$ аналитична.

В кольце $0<|z-z_0|<R$ $f(z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \qquad (38)$$

Определение: Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

1) устранимой особой точкой, если в ряде (38) отсутствует главная часть;

2) полюсом порядка *m*, если ряд (38) имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m},\ c_{-m}\neq 0; \qquad (39)$$

3) существенно особой точкой, если главная часть ряда (38) содержит бесконечное множество членов.

Если z_0 - устранимая особая точка функции $f(z)$, то в кольце $0<|z-z_0|<R$ имеем, что:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n. \qquad (40)$$

Сумма степенного ряда справа в формуле (40) есть аналитическая функция в круге $|z-z_0|<R$ (включая и точку z_0). В кольце $0<|z-z_0|<R$ ряд (40) сходится к $f(z)$, а в точке z_0 - к числу c_0. Если положить $f(z_0)=c_0$, то разложение (40) станет верным в круге $|z-z_0|<R$ и $f(z)$ станет аналитической в точке z_0.

Например:

1. для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ точка $z=0$ служит устранимой особой точкой, так как:

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...;$$

2. для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$ точка $z=0$ есть полюс первого порядка, так как:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-...;$$

3. для функции $f(z)=e^{1/z}$ точка $z=0$ является существенно особой точкой, так как:

$$f(z)=e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+....$$

Теорема 3. Точка z_0 является полюсом m-го порядка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в кольце $0<|z-z_0|<R$ её можно представить в виде:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{41}$$

где $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|<R$ и $\varphi(z)\neq 0$.

Замечание:

Если z_0 - полюс функции $f(z)$, то из формулы (41) следует, что

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Если z_0 - существенно особая точка функции $f(z)$, то предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

не существует (ни конечный, ни бесконечный).

Пример 28. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = z^6$ по степеням $(z - i)$.

Решение:

Найдем производные функции $f(z) = z^6$: $f'(z) = 6z^5$, $f''(z) = 30z^4$, $f'''(z) = 120z^3$, $f^{IV}(z) = 360z^2$, $f^{V}(z) = 720z$, $f^{VI}(z) = 720$ $f^{VII}(z) = f^{VIII}(z) = ... = 0$.

Определим значения функции и ее производных в точке $z_0 = i$: $f(i) = -1$, $f'(i) = 6i$, $f''(i) = 30$, $f'''(i) = -120i$, $f^{IV}(i) = -360$, $f^{V}(i) = 720i$, $f^{VI}(i) = 720$.

Запишем ряд Тейлора для данной функции:

$$f(z) = -1 + 6i(z - i) + 15(z - i)^2 - 20i(z - i)^3 - 15(z - i)^4 + 6i(z - i)^5 + (z - i)^6.$$

Таким образом, рядом Тейлора функции $f(z) = z^6$ является многочлен шестой степени.

Пример 29. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ по степеням z.

Решение:

Так как $|z| < 1$ в окрестности точки $z_0 = 0$, то функцию $\dfrac{1}{1+z}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии и представить ее в виде: $\dfrac{1}{1+z} = \dfrac{1}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$, где $b_1 = 1, q = -z$.

Таким образом, получим, что ряд Тейлора для данной функции имеет вид:

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+z^4-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots.$$

Пример 30. Исследовать сходимость ряда

$$\ldots+\frac{1}{3^3(z-2)^3}+\frac{1}{3^2(z-2)^2}+\frac{1}{3(z-2)}+1+\frac{z-2}{4}+\frac{(z-2)^2}{4^2}+\frac{(z-2)^3}{4^3}+\ldots.$$

Решение:

Рассмотрим два ряда

$$\ldots+\frac{1}{3^3(z-2)^3}+\frac{1}{3^2(z-2)^2}+\frac{1}{3(z-2)}\ , \tag{а}$$

$$1+\frac{z-2}{4}+\frac{(z-2)^2}{4^2}+\frac{(z-2)^3}{4^3}+\ldots\quad . \tag{б}$$

Если в ряде (а) сделать замену $\frac{1}{z-2}=z'$, то получим степенной ряд

$$\frac{z'}{3}+\frac{z'^2}{3^2}+\frac{z'^3}{3^3}+\ldots\ . \tag{в}$$

Найдем радиус сходимости полученного степенного ряда по формуле:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1/3^{n-1}}{1/3^n}=3$$

Таким образом, степенной ряд (в) сходится, если $|z'|<3$. Тогда ряд (а) будет сходиться, если $|1/(z-2)|<3$. Отсюда получаем, что: $|z-2|>1/3$. Значит, ряд (а) сходится вне круга радиуса $r=1/3$ с центром в точке $z=2$. Аналогично, находим радиус сходимости ряда (б):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1/4^{n-1}}{1/4^n}=4.$$

Таким образом, область сходимости ряда (б) определятся неравенством $|z-2|<4$.

Ряды (а) и (б) сходятся одновременно, если:

$$\begin{cases} |z-2| > 1/3 \\ |z-2| < 4 \end{cases}.$$

То есть, в области:

$$1/3 < |z-2| < 4.$$

Из полученного заключаем, что областью сходимости данного ряда является кольцо $1/3 < |z-2| < 4$.

Решение этой задачи можно упростить. Так как ряды (а) и (б) являются бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями со знаменателями $q_1 = \dfrac{1}{3(z-2)}$ и $q_2 = \dfrac{z-2}{4}$ соответственно, то они сходятся, если:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1}{3(z-2)}\right| < 1 \\ \left|\dfrac{z-2}{4}\right| < 1 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } \quad \begin{cases} |z-2| > 1/3 \\ |z-2| < 4 \end{cases}.$$

Таким образом, областью сходимости данного ряда будет кольцо, определяемое двойным неравенством: $1/3 < |z-2| < 4$.

Пример 31. Исследовать сходимость ряда

$$\ldots + \frac{(5+2i)^3}{z^3} + \frac{(5+2i)^2}{z^2} + \frac{5+2i}{z} + 1 + \frac{z}{i} + \frac{z^2}{i^2} + \frac{z^3}{i^3} + \ldots.$$

Решение:

Рассмотрим два ряда

$$\frac{5+2i}{z} + \frac{(5+2i)^2}{z^2} + \frac{(5+2i)^3}{z^3} + \ldots \qquad \text{(а)}$$

$$1 + \frac{z}{i} + \frac{z^2}{i^2} + \frac{z^3}{i^3} + \ldots \qquad \text{(б)}$$

Ряды (а) и (б) можно рассматривать, как бесконечно убывающие геометрические прогрессии со знаменателями $q_1 = (5+2i)/z$ и $q_2 = z/i$, соответственно. Они сходятся, если: $\begin{cases} |(5+2i)/z| < 1 \\ |z/i| < 1 \end{cases}$.

Так как $|5+2i|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$, а $|i|=1$, то:

$$\begin{cases} \sqrt{29}/|z|<1 \\ |z|<1 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } \begin{cases} |z|>\sqrt{29} \\ |z|<1 \end{cases}.$$

Но эта система не имеет решения, следовательно, данный ряд не сходится ни в одной точке комплексной плоскости.

Пример 32. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=1/(3z-2)$ в окрестности точки $z=0$.

Решение:

Представим данную функцию в виде: $f(z)=\dfrac{-1/2}{1-3z/2}$.

В окрестности точки $z=0$ выполняется неравенство $|3z/2|<1$, поэтому функцию $\dfrac{-1/2}{1-3z/2}$ можно рассматривать, как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=-1/2$ и знаменателем $q=3z/2$. Значит, данную функцию можно записать в виде:

$$f(z)=-\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\dots .$$

Или кратко так:

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}z^{n-1}}{2^n}.$$

Это разложение содержит только правильную часть.

Из неравенства $|3z/2|<1$ заключаем, что областью сходимости ряда является круг $|z|<2/3$.

Пример 33. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=1/(3z-2)$ в окрестности точки $z=\infty$.

Решение:

Представим данную функцию в виде:

$$f(z)=\frac{1}{3z-2}=\frac{1/(3z)}{1-2/3z}.$$

В окрестности точки $z=\infty$ выполняется неравенство $|2/(3z)|<1$, поэтому $f(z)$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=1/(3z)$ и знаменателем $q=2/(3z)$. Значит, данную функцию можно записать в виде:

$$f(z)=\frac{1}{3z}+\frac{2}{3^2z^2}+\frac{2^2}{3^3z^3}+\frac{2^3}{3^4z^4}+\dots.$$

или кратко так: $$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^nz^n}.$$

В разложении нет правильной части. Из неравенства $|2/(3z)|<1$ заключаем, что ряд сходится в области $|z|>2/3$, т.е. вне круга.

Пример 34. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-5)}$ по степеням z в кольце $2<|z|<5$.

Решение:

Разложим данную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(z-2)(z-5)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-5},$$

Откуда получим, что: $1=A(z-5)+B(z-2)$.

Полагая, что $z=2$, получаем:

$$1=-3A, \text{ т.е. } A=-1/3;$$

Полагая $z=5$, имеем:

$$1=3B, \text{ т.е. } B=1/3.$$

Таким образом, данная функция будет иметь вид:

$$f(z)=-\frac{1}{3}\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{z-5}.$$

Учитывая, что $2<|z|<5$, можем записать функции в виде:

$$f(z)=-\frac{1}{3}\frac{1/z}{1-2/z}-\frac{1}{3}\frac{1/5}{1-z/5}.$$

Следовательно, используя разложение функции в виде бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим:

$$f(z)=-\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{5^n}\right).$$

Пример 35. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{z^3}{(z-4)^2}$ по степеням $z-4$.

Решение:

Заменим $z-4=z'$. Тогда данная функция примет вид:

$$f(z)=\frac{z^3}{(z-4)^2}=\frac{(z'+4)^3}{z'^2}=\frac{z'^3+12z'^2+48z'+64}{z'^2}=$$

$$=\frac{64}{z'^2}+\frac{48}{z'}+12+z'$$

т.е. получим, что:

$$f(z)=\frac{64}{(z-4)^2}+\frac{48}{z-4}+12+(z-4).$$

Здесь главная часть содержит два члена, и правильная часть также два члена. Так как разложение содержит конечное число членов, то оно справедливо для любой точки плоскости, кроме точки $z=4$. Эта точка является полюсом второго порядка функции $f(z)$. Вычетом этой функции относительно полюса $z=4$ является коэффициент при степени $(z-4)^{-1}$, т.е. 48.

Пример 36. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{2z-3}{z^2-5z+6}$ по степеням z.

Решение:

Найдем корни уравнения $z^2-5z+6=0$. Получим $z_1=2, z_2=3$. Эти точки являются особыми точками данной функции. Поэтому имеем три кольца в каждом из которых функция является аналитической: 1) в круге $|z|<2$; 2) в кольце $2<|z|<3$; 3) $3<|z|<\infty$, т.е. вне круга $|z|\le 3$.

Представим данную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-5z+6}=\frac{3}{z-3}-\frac{1}{z-2}.$$

1) Разложим данную функцию в ряд Лорана в круге $|z|<2$.

Так как:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\ |z|<2 \qquad \text{(а)}$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}},\ |z|<3. \qquad \text{(б)}$$

То в круге $|z|<2$ ряд Лорана данной функции будет иметь вид:

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-5z+6}=\frac{3}{z-3}-\frac{1}{z-2}=-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^n}\right)z^n,\ |z|<2.$$

2) Разложим данную функцию в ряд Лорана в кольце $2<|z|<3$.

Так как ряд (а) в кольце $2<|z|<3$ расходится, а ряд (б) сходится, то вместо ряда (а) используем:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},\ |z|>2. \qquad \text{(в)}$$

Следовательно, в кольце $2<|z|<3$ ряд Лорана данной функции будет иметь вид:

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-5z+6}=\frac{3}{z-3}-\frac{1}{z-2}=-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},$$

где $2<|z|<3$.

3) Разложим данную функцию в ряд Лорана в кольце $3<|z|<\infty$.

Так как ряд (б) в области $3<|z|<\infty$ расходится, а ряд (в) сходится, то вместо ряда (б) используем:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}, \qquad \text{(г)}$$

где $3<|z|<\infty$.

Следовательно, в кольце $3<|z|<\infty$ ряд Лорана данной функции будет иметь вид:

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-5z+6}=\frac{3}{z-3}-\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},\quad 3<|z|<\infty.$$

Таким образом, получили:

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-5z+6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^n}\right)z^n,\ |z|<2;$$

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-5z+6}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},\ 2<|z|<3;$$

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-5z+6}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},\ 3<|z|<\infty.$$

Задачи для самостоятельного решения:

32. Исследовать сходимость ряда

$$\ldots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+\frac{z}{5}+\left(\frac{z}{5}\right)^2+\left(\frac{z}{5}\right)^3+\ldots$$

33. Исследовать сходимость ряда

$$\ldots+\frac{(1+2i)^4}{z^4}+\frac{(1+2i)^3}{z^3}+\frac{(1+2i)^2}{z^2}+\frac{(1+2i)}{z}+1+2z+(2z)^2+(2z)^3+\ldots.$$

34. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{z^2}{z-1}$ по степеням z в окрестности точки: 1) $z=0$; 2) $z=\infty$.

35. Разложить в ряд Лорана функцию по степеням z в кольце $4<|z|<6$:

$$f(z)=\frac{2}{(z-4)(z-6)}.$$

36. Найти полюсы функции $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$.

37. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=1/z$ по степеням $z-1$. Найти область сходимости ряда.

38. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos z}{z^2} npu\, z\neq 0;\\ 1/2\, npu\, z=0.\end{cases}$$

39. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ по степеням z: а) в круге $|z|<1$б) в кольце $1<|z|<2$ в) вне круга $|z|\leq 2$.

6 Вычисление вычетов функций, применение вычетов к вычислению интегралов

Пусть z_0 $(|z_0|<\infty)$ – изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$. В некотором кольце $0<|z-z_0|<R$ $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}\ . \tag{42}$$

Определение: Коэффициент c_{-1} в ряде (42) называется вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки z_0.

Обозначается:

$$c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Теорема 1(основная теорема о вычетах). Если $f(z)$ аналитична на замкнутом контуре Г и всюду внутри него, за исключением конечного числа особых точек $z_1,\ldots,z_n$, то

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{43}$$

Нахождение вычетов функции относительно полюса

Пусть z_0 $(|z_0|<\infty)$ есть полюс порядка m функции $f(z)$. Вычет функции $f(z)$ относительно ее полюса m -го порядка вычисляется по формуле:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}. \tag{44}$$

В частности, если z_0 - простой полюс (т.е. полюс порядка m=1), то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)f(z)\right]. \tag{45}$$

Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Пусть требуется вычислить интеграл вида:

$$J = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx\,,$$

где $R(\cos x, \sin x)$ 惘 рациональная функция относительно $\cos x$ и $\sin x$.

Заменим $e^{ix} = z$. Тогда:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2};\ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i};\ dz = ie^{ix}dx = izdx$$

При изменении x от 0 до 2π переменная z будет пробегать окружность $S=\{z:|z|=1\}$ в положительном направлении. Поэтому данный интеграл примет вид:

$$J=\oint_S R\left(\frac{z+z^{-1}}{2};\frac{z+z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=\oint_S f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{Res}\ f(z),$$

где $z_1, z_2, .., z_n$ - особые точки функции $f(z)=R\left(\frac{z+z^{-1}}{2};\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}$,

лежащие внутри S.

С помощью вычетов можно вычислить некоторые несобственные интегралы.

Теорема 2.

Пусть:

а) функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $y\geq 0$ за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, .., z_n$, лежащих выше оси OX;

б) при $z\to\infty(\mathrm{Im}z\geq 0)$ $zf(z)\to 0$ равномерно относительно $\arg z$.

Тогда:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\ f(z). \qquad (46)$$

Пример 37. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)^2}$ относительно особой точки $z=1$.

Решение:

Точка $z=1$ есть полюс 2-го порядка данной функции. По формуле (44) находим:

$$\underset{z=1}{Res}\ f(z)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{z^2}{(z-1)^2}\right]'=\lim_{z\to 1}2z=2.$$

Пример 38. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$.

Решение:

Точки $z=1$ и $z=3$ являются простыми полюсами функции. По формуле (45) находим:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z}{(z-1)(z-3)}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z-3)}=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z)=\lim_{z\to 3}\left[(z-3)\frac{z}{(z-1)(z-3)}\right]=\lim_{z\to 3}\frac{z}{(z-1)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 39. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$.

Решение:

Имеем $f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)(z+2i)}$. Точки $z=2i$ и $z=-2i$ являются простыми полюсами функции. По формуле (45) находим:

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}\right]=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z+2i)}=\frac{1}{4i}=-\frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z)=\lim_{z\to -2i}\left[(z+2i)\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}\right]=\lim_{z\to -2i}\frac{1}{(z-2i)}=-\frac{1}{4i}=\frac{i}{4}.$$

Пример 40. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)^3}$.

Решение:

Точка $z=2$ есть полюс 3-го порядка данной функции. По формуле (44) находим:

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^3\frac{z^2}{(z-2)^3}\right]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\left[z^2\right]''=\frac{1}{2!}2=1.$$

Пример 41. Найти $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$, где γ - замкнутый контур, внутри которого находятся полюсы $z=1$, $z=2$, $z=3$.

Решение:

Определим вычеты подынтегральной функции относительно особых точек $z=1$, $z=2$, $z=3$, которые являются простыми полюсами данной функции:

$$\mathop{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z+1}{(z-2)(z-3)}=1,$$

$$\mathop{Res}_{z=2} f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z+1}{(z-1)(z-3)}=-3,$$

$$\mathop{Res}_{z=3} f(z)=\lim_{z\to 3}\frac{z+1}{(z-1)(z-2)}=2.$$

Следовательно, по основной теореме о вычетах, имеем:

$$\oint_{\gamma}\frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz=2\pi i(1-3+2)=0.$$

Пример 42. Найти $\oint_{\gamma}\frac{z^2dz}{(z^2+1)(z-2)}$, где γ - окружность $|z|=3$.

Решение:

Преобразуем данную функцию: $f(z)=\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)}$. Точки $z=i$, $z=-i$ и $z=2$ являются простыми полюсами функции, которые находятся внутри замкнутого контура γ.

Определим вычеты подынтегральной функции:

$$\mathop{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z-2)}=\frac{1}{2i(2-i)},$$

$$\mathop{Res}_{z=-i} f(z)=\lim_{z\to -i}(z+i)f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z-2)}=-\frac{1}{2i(2+i)},$$

$$\mathop{Res}_{z=2} f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z^2}{z^2+1}=\frac{4}{5};$$

Следовательно, по основной теореме о вычетах, имеем:

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}dz = 2\pi i\left[\frac{1}{2i(2-i)} - \frac{1}{2i(2+i)} + \frac{4}{5}\right] =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2-i} - \frac{1}{2+i} + \frac{8}{5}i\right) = \pi\left(\frac{2}{5}i + \frac{8}{5}i\right) = 2\pi i.$$

Пример 43. Вычислить $J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a > 0)$.

Решение:

Функция $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \frac{z^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}$, удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

Выше оси OX она имеет полюс 2го порядка $z_1 = ai$.

Применяя формулу (44), находим:

$$\underset{z=ai}{Res}\, f(z) = \lim_{z \to ai}\left[(z-ai)^2 \frac{z^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right]' = \lim_{z \to ai} \frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}.$$

По формуле (46) получим:

$$J = 2\pi i \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{2a}.$$

Пример 44. Найти $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$, если γ - окружность: 1) $z = 1$; 2) $|z| = 3$; 3) $|z| = 5$.

Решение:

Определим вычеты подынтегральной функции относительно особых точек $z = 0$, $z = -2$, $z = -4$, которые являются простыми полюсами данной функции:

$$\underset{z=0}{Res}\, f(z) = \lim_{z \to 0} zf(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(z+2)(z+4)} = \frac{1}{8},$$

$$\underset{z=-2}{Res}\, f(z) = \lim_{z \to -2}(z+2)f(z) = \lim_{z \to -2} \frac{1}{z(z+4)} = -\frac{1}{4},$$

$$\underset{z=-4}{Res}\, f(z) = \lim_{z \to -4}(z+4)f(z) = \lim_{z \to -4} \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, по основной теореме о вычетах, имеем:

1) внутри контура γ, который является окружностью $|z|=1$, находится только полюс $z=0$, поэтому $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}$.

2) внутри контура γ, который является окружностью $|z|=3$, находятся полюсы $z=0$ и $z=-2$, поэтому $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{4}$.

3) внутри контура γ, который является окружностью $|z|=5$, находятся полюсы $z=0$, $z=-2$, $z=-4$, тогда $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = 0$.

Задачи для самостоятельного решения:

40. Найти вычет функции $f(z)=\frac{z+i}{z-i}$.

41. Найти вычеты функции $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2-1}$.

42. Найти вычет функции $f(z)=(z+1)/z^2$.

43. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma}\frac{z^2}{z-3}dz$, γ - окружность $|z|=4|$.

44. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma}\frac{z}{(z-5)(z-6)}dz$, γ - окружность $|z|=8$.

45. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2-2z+2}$, γ - окружность, внутри которой содержатся полюсы знаменателя.

46. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{z}{(z-i)(z-3)}dz$, γ - окружность $|z|=2$.

47. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

48. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

7 Задачи для индивидуальной работы со студентами

Задача 1. Найти все значения корня :

1.1 $\sqrt[4]{-1}$.

1.2 $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

1.3 $\sqrt[3]{1}$

1.4 $\sqrt[3]{i}$.

1.5 $\sqrt[4]{1}$.

1.6 $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$

1.7 $\sqrt[3]{-1}$.

1.8 $\sqrt[3]{-i}$.

1.9 $\sqrt[4]{-16}$.

1.10 $\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

1.11 $\sqrt[3]{8}$.

1.12 $\sqrt[3]{8i}$.

1.13 $\sqrt[4]{16}$.

1.14 $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$

1.15 $\sqrt[3]{-8}$.

1.16 $\sqrt[3]{-8i}$.

1.17 $\sqrt[4]{-1/16}$.

1.18 $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.19 $\sqrt[3]{1/8}$.

1.20 $\sqrt[3]{i/8}$.

1.21 $\sqrt[4]{1/16}$.

1.22 $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$.

1.23 $\sqrt[3]{-1/8}$.

1.24 $\sqrt[3]{-1/8}$.

1.25 $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$.

1.26 $\sqrt[3]{27}$.

Задача 2. Определить множества точек, удовлетворяющих следующим неравенствам, и построить их на плоскости:

2.1 $|z-1|\le 1, |z+1|>2$

2.2 $|z+i|\ge 1, |z|<2$

2.3 $|z-i|\le 2, \operatorname{Re} z>1$

2.4 $|z+1|\ge 1, |z+i|<1$

2.5 $|z+1|<1, |z-i|\le 1$

2.6 $|z+i|\le 2, |z-i|>2$

2.7 $|z-1-i|\le 1, \operatorname{Im} z>1, \operatorname{Re} z\ge 1$

2.8 $|z-1+i|\ge 1, \operatorname{Re} z<1, \operatorname{Im} z\le -1$

2.9 $|z-2-i|\le 2, \operatorname{Re} z\ge 3, \operatorname{Im} z<1$

2.10 $|z-1-i|\ge 1, 0\le \operatorname{Re} z<2, 0<\operatorname{Im} z\le 2$

2.11 $|z+i|<2, 0<\operatorname{Re} z\le 1$

2.12 $|z-i|\le 1, 0<\arg z<\pi/4$

2.13 $|z-i|\le 2, 0<\operatorname{Im} z<2$

2.14 $|z+i|>1, -\pi/4\le \arg z<0$

2.15 $|z-1-i|<1, |\arg z|\le \pi/4$

2.16 $|z|<2, -\pi/4\le \arg(z-1)\le \pi/4$

2.17 $|z|\le 1, \arg(z+i)>\pi/4$

2.18 $1<|z-1|\le 2, \operatorname{Im} z\ge 0, \operatorname{Re} z<1$

2.19 $1\le |z-i|<2, \operatorname{Re} z\le 0, \operatorname{Im} z>1$

2.20 $|z|<2, \operatorname{Re} z\ge 1, \arg z<\pi/4$

2.21 $|z|>1, -1<\operatorname{Im} z\le 1, 0<\operatorname{Re} z\le 2$

2.22 $|z-1|>1, -1\le \operatorname{Im} z<0, 0\le \operatorname{Re} z<3$

2.23 $|z+i|<1, -3\pi/4\le \arg z\le -\pi/4$

2.24 $|z-i|\le 1, -\pi/2<\arg(z-i)<\pi/4$

2.25 $z\overline{z}<2, \operatorname{Re} z\le 1, \operatorname{Im} z>-1$

2.26 $z\overline{z}\le 2, \operatorname{Re} z<1, \operatorname{Im} z>-1$

Задача 3. Найти аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

3.1 $u = x^2 - y^2 + x,\ f(0) = 0$

3.2 $u = x^3 - 3xy^2 + 1,\ f(0) = 1$

3.3 $v = e^x(y\cos y + x\sin y),\ f(0) = 0$

3.4 $u = x^2 - y^2 - 2y,\ f(0) = 0$

3.5 $u = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y,\ f(0) = 2$

3.6 $u = \dfrac{x}{x^2+y^2},\ f(1) = 1+i$

3.7 $v = e^{-y}\sin x + y,\ f(0) = 1$

3.8 $v = e^x\cos y,\ f(0) = 1+i$

3.9 $v = -\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2},\ f(0) = 1$

3.10 $v = y - \dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(1) = 2$

3.11 $u = e^{-y}\cos x,\ f(0) = 1$

3.12 $u = y - 2xy,\ f(0) = 0$

3.13 $v = x^2 - y^2 + 2x + 1,\ f(0) = i$

3.14 $u = x^2 - y^2 - 2x + 1,\ f(0) = 1$

3.15 $v = 3x^2y - y^3 - y,\ f(0) = 0$

3.16 $v = 2xy + y,\ f(0) = 0$

3.17 $v = 3x^2y - y^3,\ f(0) = 1$

3.18 $u = e^x(x\cos y - y\sin y),\ f(0) = 0$

3.19 $v = 2xy + 2x,\ f(0) = 0$

3.20 $u = 1 - \sin y e^x,\ f(0) = 1+i$

3.21 $v = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y,\ f(0) = 2$

3.22 $v = 1 - \dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(1) = 1+i$

3.23 $u = e^{-y}\cos x + x,\ f(0) = 1$

3.24 $v = e^{-y}\sin x,\ f(0) = 1$

3.25 $u = \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2},\ f(0) = 1$

3.26 $u = x/(x^2+y^2) + x,\ f(1) = 2$

Задача 4. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

4.1 $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz; AB:\{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1+i\}$

4.2 $\int\limits_{L} (z+1)e^z dz; L:\{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$

4.3 $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz;$ AB – отрезок прямой, $z_A = 0, z_B = 2+2i$

4.4 $\int\limits_{AB} (z^2 + 7z + 1)dz;$ AB – отрезок прямой $z_A = 1, z_B = 1-i$

4.5 $\int\limits_{ABC} |z|\, dz;$ ABC – ломанная, $z_A = 0, z_B = -1+i, z_C = 1+i$

4.6 $\int\limits_{AB} (12z^5 + 4z^3 + 1)dz;$ AB – отрезок прямой, $z_A = 1, z_B = i$

4.7 $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz;$ AB – отрезок прямой, $z_A = 0, z_B = 1+i$

4.8 $\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4} dz;$ ABC – ломанная, $z_A = i, z_B = 1, z_C = 0$

4.9 $\int\limits_{ABC} \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz; AB:\{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, BC – отрезок, $z_B = 1, z_C = 2$

4.10 $\int\limits_{ABC} (z^2 + \cos z)dz;$ ABC – ломанная, $z_A = 0, z_B = 1, z_C = i$

4.11 $\int\limits_{L} \frac{\bar{z}}{z} dz;$ L – граница области: $\{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$

4.12 $\int\limits_{ABC} (chz + \cos iz)dz;$ ABC – ломанная, $z_A = 0, z_B = -1, z_C = i$

4.13 $\int\limits_L |z|\,\bar{z}dz; L:\{|z|=4, \operatorname{Re} z \ge 0\}$

4.14 $\int\limits_L (chz+z)dz; L:\{|z|=1, \operatorname{Im} z \le 0\}$

4.15 $\int\limits_L |z|\operatorname{Re} z^2 dz; L:\{|z|=R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$

4.16 $\int\limits_{AB} (3z^2+2z)dz; AB:\{y=x^2, z_A=0, z_B=1+i\}$

4.17 $\int\limits_L z\operatorname{Re} z^2 dz; L:\{|z|=R; \operatorname{Im} z \ge 0\}$

4.18 $\int\limits_{ABC} (z^2+1)dz;$ ABC – ломанная, $z_A=0, z_B=-1+i, z_C=i$

4.19 $\int\limits_{AB} e^{|z|^2}\operatorname{Im} z dz;$ AB – отрезок прямой, $z_A=1+i, z_B=0$

4.20 $\int\limits_L (\sin iz+z)dz; L:\{|z|=1, \operatorname{Re} z \ge 0\}$

4.21 $\int\limits_{AB} z\operatorname{Re} z^2 dz;$ AB – отрезок прямой, $z_A=0, z_B=1+2i$

4.22 $\int\limits_{AB} (2z+1)dz; AB:\{y=x^3, z_A=0, z_B=1+i\}$

4.23 $\int\limits_{ABC} z\bar{z}dz; AB:\{|z|=1, \operatorname{Re} z \ge 0, \operatorname{Im} z \ge 0\}$, BC – отрезок $z_B=1, z_C=0$

4.24 $\int\limits_L (\cos iz+3z^2)dz; L:\{|z|=1, \operatorname{Im} z \ge 0\}$

4.25 $\int\limits_L |z|\,dz; L:\{|z|=\sqrt{2}, 3\pi/4 \le \arg z \le 5\pi/4\}$

4.26 $\int\limits_{ABC} (z^9+1)dz$; ABC – ломанная, $z_A=0, z_B=1+i, z_C=i$

Задача 5. Разложить в ряд Лорана данную функцию по степеням z.

5.1 $\dfrac{z-2}{2z^2+z-1}$

5.2 $\dfrac{z-4}{z^2+z-2}$

5.3 $\dfrac{3z-18}{2z^2+3z-9}$

5.4 $\dfrac{2z-16}{z^2+2z-8}$

5.5 $\dfrac{5z-50}{2z^2+5z-25}$

5.6 $\dfrac{3z-36}{z^2+3z-18}$

5.7 $\dfrac{7z-98}{2z^2+7z-49}$

5.8 $\dfrac{4z-64}{z^2+4z-32}$

5.9 $\dfrac{9z-162}{2z^2+9z-81}$

5.10 $\dfrac{5z-100}{z^2+5z-50}$

5.11 $\dfrac{11z-242}{2z^2+11z-121}$

5.12 $\dfrac{6z-144}{z^2+6z-72}$

5.13 $\dfrac{13z-338}{2z^2+13z-169}$

5.14 $\dfrac{7z-196}{z^2+7z-98}$

5.15 $\dfrac{15z-450}{2z^2+15z-225}$

5.16 $\dfrac{8z-256}{z^2+8z-128}$

5.17 $\dfrac{z+2}{1+z-2z^2}$

5.18 $\dfrac{z+4}{2+z-z^2}$

5.19 $\dfrac{3z+18}{9+3z-2z^2}$

5.20 $\dfrac{2z+16}{8+2z-z^2}$

5.21 $\dfrac{2z-2}{z^2-6z+8}$

5.22 $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$

5.23 $\dfrac{5z+1}{z^2+z-2}$

5.24 $\dfrac{z}{z^2+2z+1}$

5.25 $\dfrac{e^z}{(z-3)^2}$

5.26 $\dfrac{\sin z}{(z-2)^2}$

Задача 6. Вычислить интеграл с помощью основной теоремы о вычетах:

6.1 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz$

6.2 $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2 - z^2 + 3z^3}{4z^3} dz$

6.3 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z} + 1}{z} dz$

6.4 $\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{tgz + 2}{4z^2 + \pi z} dz$

6.5 $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1 - 2z + 3z^2 + 4z^3}{2z^2} dz$

6.6 $\oint\limits_{|z|=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz$

6.7 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz$

6.8 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1 - \sin \frac{1}{z}}{z} dz$

6.9 $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz$

6.10 $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3 - 2z + 4z^4}{z^3} dz$

6.11 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz$

6.12 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{2z^4} dz$

6.13 $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz$

6.14 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz$

6.15 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz$

6.16 $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2 + 1)}$

6.17 $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz$

6.18 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz$

6.19 $\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2 + 4)}$

6.20 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{z^4} dz$

6.21 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz$

6.22 $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5} dz$

6.23 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}} - z - 1}{z^3} dz$

6.24 $\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz$

6.25 $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6} dz$

6.26 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz$

Список использованных источников

1 Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры в подробными решениями: учебное пособие/ М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – 4 изд. – М: КомКнига, 2006. – 208 с. – ISBN 5-484-00462-4.

2 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах:. учебное пособие для вузов в 2-х ч./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: ООО Изд-во ОНИКС : ООО Изд. Мир и образование, 2005 - Ч.2 – 416 с.

3 Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики: учеб. пособие/Г.И. Кручкович [и др.]. – М. Высшая школа, 1970. – 512 с.

4 Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики(типовые расчеты): учеб. пособие/ В.Ф. Чудесенко, - М.: Высшая школа, 1999. – 126 с. - ISBN 5-06-003065-2.

5 Бугров, Я.С. Высшая математика: учебник для вузов в 3 т./ Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2005. – т.3:Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – 512 с. - ISBN 5-7107-9898-3.

6 Шабунин, М.И. Теория функций комплексного переменного: учебник/ М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 248 с. - ISBN 978-5-9221-0134-9.

7 Шипачев В. С. Задачник по высшей математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.С. Шипачев. - 10-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 304 с. - ISBN 978-5-16-010071-5. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=470407.

Приложение А

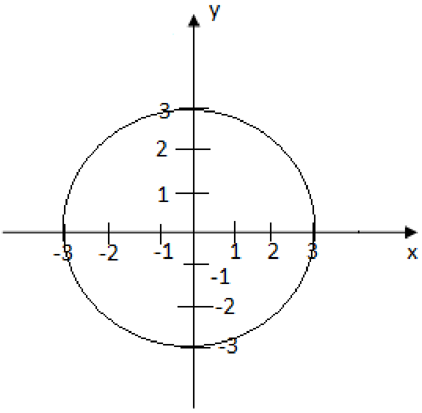
(*справочное*)

Ответы к задачам из разделов 1-6:

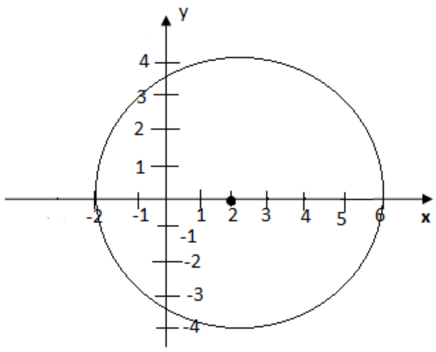
1. $6+2i; -2-8i; 23-2i; -\dfrac{7}{41}-\dfrac{22}{41}i$ **2.** $2\sqrt{2}; \dfrac{7\pi}{4}$;

3.

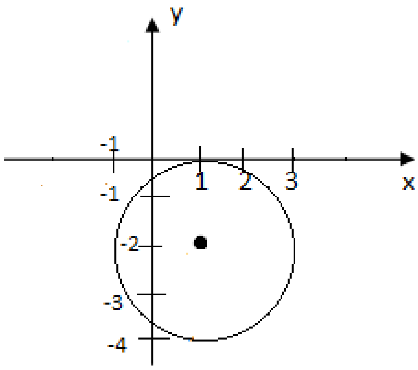
а)



б)



в)



4. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; **5.** $2^{15}i$; **6.** $4; -2+i2\sqrt{3}; -2-i2\sqrt{3}$;

7. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **8.** $-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{3}{2}-i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; 3$;

9. 1) $u(x,y)=3x-1 \quad v(x,y)=3y$; 2) $u(x,y)=x^2-y^2-2 \quad v(x,y)=2xy$;

3) $u(x,y)=e^{1-4y}\cos 4x \quad v(x,y)=e^{1-4y}\sin 4x$; **10.** 1) $w=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $w=e^{\pi}$;

3) $w=e^2 i$; **11.** 1) $\frac{4}{17}-i\frac{1}{17}$;2) $-i$; 3)$\frac{4}{25}+i\frac{3}{25}$; **13.**

$(1/2)\ln 2+i(\pi/4+2\pi k), k\in Z$; **15.** $z=2\pi k-i\ln(2\pm\sqrt{3}), k\in Z$; **16.**

$2\pi k-i\ln(\sqrt{2}-1), k\in Z$; $(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{2}+1), k\in Z$; **17.** $1{,}1752i$; **18.** Нет; **19.**

$f'(z)=4z^3$;

20. $f'(z)=-\sin z$; **21.** $f'(z)=2z\ +5$; **22.** $\lambda=-1, f(z)=-iz$; **23.** $f(z)=z^2+3iz$;

24. $f(z)=3^z+iC$; **25.** $f(z)=z^2+3z-2+C$; **26.** $\frac{5}{2}-i\frac{1}{2}$; **27.** $-\frac{5}{4}$; **28.** 0; **29.** 0; **30.**

$2\pi i$; **31.** $10\pi i$; **32.** Область сходимости $1<|z|<5$; **33.** Ряд расходится во всех точках плоскости; **34. 1)** $f(z)=-z^2-z^3-z^4-\ldots$; **2)** $f(z)=z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots$; **35.**

$f(z)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{6^n}$; область сходимости $4<|z|<6$; **36.** ± 1 - полюсы первого порядка; $\pm i$ - полюсы второго порядка; **37.** $f(z)=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots$; область сходимости $|z-1|<1$;

38. $f(z)=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\ldots$; ряд сходится на всей плоскости:

39.а) $f(z)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3+\ldots$; **б)** $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$; **в)**

$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+\ldots$;

40. $2i$; **41.** 1; -1; **42.** 1; **43.** 18π; **44.** $2\pi i$; **45.** 0; **46.** $2\pi/(3-i)$; **47.** $\frac{\pi}{16}$;**48.**

$3\pi/8$.