Министерство образования и науки Российской Федерации

Университетский колледж

федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Предметно-цикловая комиссия информационных технологий

И. С. Ходырева

МАТЕМАТИКА

Рекомендовано к изданию Редакционно – издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам среднего профессионального образования по специальностям 09.02.03 Программирование в компьютерных системах, 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы, 11.02.02 Техническое обслуживание и ремонт радиоэлектронной техники (по отраслям), 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям), 09.02.04 Информационные системы (по отраслям), 15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), 15.02.08 Технология машиностроения, 21.02.05 Земельно-имущественные отношения, 44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям), 24.02.01 Производство летательных аппаратов

Оренбург
2016

УДК 51(07)
ББК 22.1.я723
Х69

Рецензент – кандидат физико – математических наук, доцент Н.А. Павленко

Ходырева И. С.
Х69 Математика: методические указания: в 2 ч. / И.С. Ходырева; Оренбургский гос. ун-т .- Оренбург: ОГУ, 2015.-Ч 1– 128 с.

Методические указания (часть 1) предназначены для проведения контрольных занятий, обеспечивающих учебный процесс по дисциплине “Математика” в колледже для студентов 1 курса в 1 семестре для специальностей 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы, 11.02.02 Техническое обслуживание и ремонт радиоэлектронной техники (по отраслям), 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям), 09.02.04 Информационные системы (по отраслям), 15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), 15.02.08 Технология машиностроения, 21.02.05 Земельно-имущественные отношения, 44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям), 24.02.01 Производство летательных аппаратов, очной и заочной формы обучения.

Методические указания составлены с учетом Государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов, утвержденного 16.04.2008 Министерством образования и науки Российской Федерации.

Содержание

Введение

Предмет «Математика» является фундаментальным предметом в курсе общеобразовательных дисциплин, устанавливающий базовый уровень знаний для освоения других общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Методические указания являются инструментом самостоятельной работы студентов в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика». Методические указания предназначены для проведения контрольных занятий по разделам «Понятие числа», «Функции и их графики», «Тригонометрические функции», «Корень n - степени», «Уравнения и неравенства. Равносильность уравнений и неравенств» обеспечивающих учебный процесс по дисциплине "Математика" в колледже для студентов 1 курса в 1 семестре специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы, 11.02.02 Техническое обслуживание и ремонт радиоэлектронной техники (по отраслям), 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям), 09.02.04 Информационные системы (по отраслям), 15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), 15.02.08 Технология машиностроения, 21.02.05 Земельно-имущественные отношения, 44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям), 24.02.01 Производство летательных аппаратов.

Методические указания покажут уровень усвоения материала по данным темам и степень освоения таких математических понятий, как функция и их графики, четные и нечетные функции, монотонность функции, экстремум, комплексные числа, тригонометрические функции, корень n – степени, показательная и логарифмическая функции, уравнения и неравенства разных видов.

Методические указания состоят из пяти разделов. В каждом разделе представлены задания для самостоятельной работы студентов. Каждая тема снабжена графиками и таблицами, которые облегчают работу студентам и наглядно отображают основное содержание тем.

Методические указания составлены с учетом Государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов.

1 Понятие числа

1.1 Целые, действительные, рациональные и иррациональные числа

Краткая теоретическая справка

Число является одним из основных понятий математики. Понятие числа развивалось в тесной связи с изучением величин; эта связь сохраняется и теперь. Во всех разделах современной математики приходится рассматривать разные величины и пользоваться числами. Существует большое количество определений понятию “число”. Первое научное определение числа дал Эвклид в своих “Началах”, которое он, очевидно, унаследовал от своего соотечественника Эвдокса Книдского (около 408 – около 355 гг. до н. э.): “Единица есть то, в соответствии с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть множество, сложенное из единиц”. Еще раньше Эвклида Аристотель дал такое определение: “Число есть множество, которое измеряется с помощью единиц”. В своей “Общей арифметике” (1707 г) великий английский физик, механик, астроном и математик Исаак Ньютон пишет: “Под числом мы подразумеваем не столько множество единиц, сколько абстрактное отношение какой-нибудь величины к другой величине такого же рода, взятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное – кратной частью единицы, иррациональное – число, не соизмеримое с единицей”.

Определение. Натуральные числа — это числа, используемые для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета.

Определение. Отрицательное число — элемент множества отрицательных чисел, которое (вместе с нулём) появилось в математике при расширении множества натуральных чисел. Основной целью расширения было желание сделать вычитание такой же полноценной операцией, как сложение (в рамках натуральных чисел можно вычесть только меньшее число из большего).

Определение. Целые числа – это числа из множества {0, 1, -1, 2, -2, ...}. Это множество состоит из трех частей – натуральные числа, отрицательные целые числа (противоположные натуральным числам) и число 0 (нуль).

Определение. Рациональные числа – это числа, представимые в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число.

Определение. Иррациональные числа – это числа, которые получаются в результате выполнения различных операций с рациональными числами (например, извлечение корня, вычисление логарифмов), но при этом не являются рациональными. Примеры иррациональных чисел – это $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π.

Определение. Иррациональное число — это не рациональное вещественное число, т.е. оно не может быть представлено как дробь Числа. Иррациональное число можно представить как бесконечную непериодическую десятичную дробь.

Задание 1.1.1 Дать определения:

Число -

___

___

___

Целые числа -

___

___

___

Рациональные числа -

___

___

___

Действительные числа -

___

____

____

Иррациональные числа -

____

____

____

Задание 1.1.2 Вычислить $\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$.

а) 1;

б) 4;

в) 3;

г) 2;

д) 15.

Задание 1.1.3 Значение выражения $\sqrt[5]{48 \cdot 162}$ равно ____________.

Задание 1.1.4 Упростить выражение $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$.

*Решение:*____

____

*Ответ:*____

Задание 1.1.5 Сравнить дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{5}{9}$.

а) $\frac{3}{7} = \frac{5}{9}$;

б) $\frac{3}{7} > \frac{5}{9}$;

в) $\frac{3}{7} < \frac{5}{9}$;

г) $\frac{3}{7} \geq \frac{5}{9}$;

д) $\frac{3}{7} \leq \frac{5}{9}$.

Задание 1.1.6 Найти значение выражения $27^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{16})^{-0,75} - \sqrt{25}$.

*Решение:*____

____

____

*Ответ:*____

Задание 1.1.7 Перевести неправильную дробь $\frac{25}{3}$ в правильную.

а) $8\frac{1}{3}$;

б) $2\frac{5}{9}$;

в) $4\frac{3}{7}$;

г) $\frac{5}{3}$;

д) $4\frac{3}{5}$.

Задание 1.1.8 Указать стрелками соответствие между правильными и неправильными дробями.

$2\frac{5}{9}$	$\frac{25}{3}$
$4\frac{3}{5}$	$\frac{23}{9}$
1	$\frac{23}{5}$
$8\frac{1}{3}$	$\frac{5}{5}$

Задание 1.1.9 Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

а) $\frac{2}{9}$;

б) $\frac{5}{9}$;

в) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$;

г) $\frac{6}{\sqrt{3}}$;

д) $\frac{2\sqrt{3}}{6}$.

Задание 1.1.10 Найти сумму приближенных чисел $6{,}8 \pm 0{,}05$ и $3{,}575 \pm 0{,}0005$.

а) 12;

б) 14;

в) 10;

г) 15;

д) 10,5.

Задание 1.1.11 Разность двух приближенных чисел $5{,}863 \pm 0{,}0005$ и $2{,}746 \pm 0{,}0005$ равна __________.

1.2 Комплексные числа

Краткая теоретическая справка

Определение. Комплексные числа, числа вида *а* + *iв,* где *а* и *в* — действительные числа, а *i* — так называемая мнимая единица (число, квадрат которого равен -1); a называют действительной частью, а $в$ — мнимой частью комплексного числа $z = a + iв$.

Определение. Комплексные числа вида $z = a + iв$ и $z = a - iв$ называют комплексно-сопряжёнными.

Действия над комплексными числами:

1. Правило равенства. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны коэффициенты мнимых частей.

2. Правило сложения и вычитания комплексных чисел. Чтобы сложить два комплексных числа складывают действительные части и мнимые части этих комплексных чисел.

3. Правило умножения комплексных чисел. Умножение комплексного числа $a + bi$ на комплексное число $c + di$ выполняется по формуле:

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i \qquad (1)$$

4. Деление комплексного числа $a + bi$ на комплексное число $c + di$ определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \qquad (2)$$

Задание 1.2.1 Дать определения:

Комплексное число-

____

____

____

Комплексно – сопряженные числа -

____

____

Задание 1.2.2 Сумма комплексных чисел $a=2-i$ и $в=-3-2i$ равна __________.

Задание 1.2.3 Найти деление комплексных чисел a на $в$, если $a=2+3i$ и $в=1+4i$.

*Решение:*____

____

____

*Ответ:*____

Задание 1.2.4 Число вида $1+4i$ является комплексно-сопряжённым для числа _________.

Задание 1.2.5 Разность комплексных чисел $a=2+6i$ и $в=13-5i$ равна

__________.

Задание 1.2.6 Найти произведение комплексных чисел $a=3-4i$ и $в=2+3i$.

*Решение:*____

____

____

*Ответ:*____

Задание 1.2.7 Вычислить значение выражения $(3-2i)^2$.

а) $2+3i$;

б) $18+i$;

в) $3-4i$;

г) $11+11i$;

д) $5-12i$.

Задание 1.2.8 Значение выражения i^5 равно___________.

Задание 1.2.9 Решить уравнения $x^2+2x+2=0$; $x^2+25=0$.

*Решение:*____

____

____

____

____

____

____

____

*Ответ:*____

Задание 1.2.10 Значение выражения $i+i^2+i^3+i^4+i^5$ равно _______.

2 Функции и их графики

2.1 Функции и их графики

Краткая теоретическая справка

Определение. Числовой функцией с областью определения D называют соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от x.

Обозначение: $y=f(x)$, где x – независимая переменная (аргумент), y – зависимая переменная (функция), $f(x)$ – значение функции при некотором x.

Определение. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции $y=f(x)$, и обозначают $D(f)$.

Определение. Все значения, которые принимает функция $f(x)$ (при x, принадлежащих области ее определения), образуют область значения функции, и обозначают $E(f)$.

Определение. Функция вида $f(x) = p(x)$, где $p(x)$ – многочлен, называют целыми рациональными функциями.

Определение. Функция вида $f(x) = \dfrac{p(x)}{g(x)}$, где $p(x), g(x), g(x) \neq 0$ – многочлены, называют дробно-рациональными функциями.

Определение. Графиком функции $f(x)$ называют множество всех точек $(x; y)$ координатой плоскости, где $y = f(x)$, а x принадлежит области определения функции $f(x)$.

Задание 2.1.1 Дать определение функции.

Числовой функцией с областью определения D называют

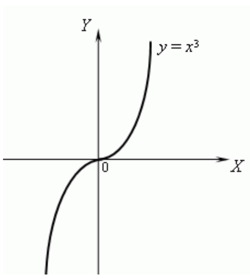
____

____

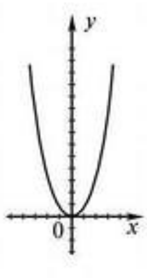
Задание 2.1.2 Установить соответствия между графиками и функциями.

а) $y = x^2 - 4$ б) $y = -x^2$ в) $y = x^3$ г) $y = (x+2)^2$ д) $y = x^2$

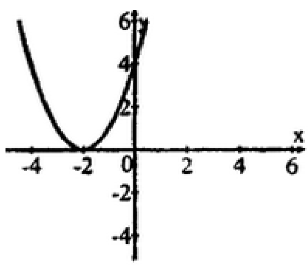
1



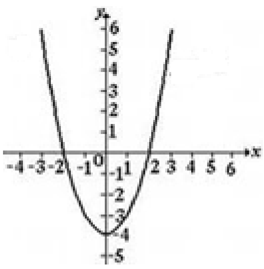
2



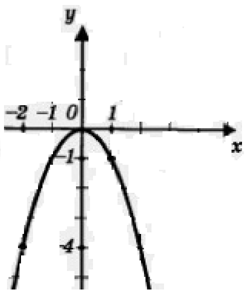
3



4



5



1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Задание 2.1.3 Найти область определения функции $y=\sqrt{2x-4}$.

а) R;

б) $x \ge 3$;

в) $10 \le x \le -10$;

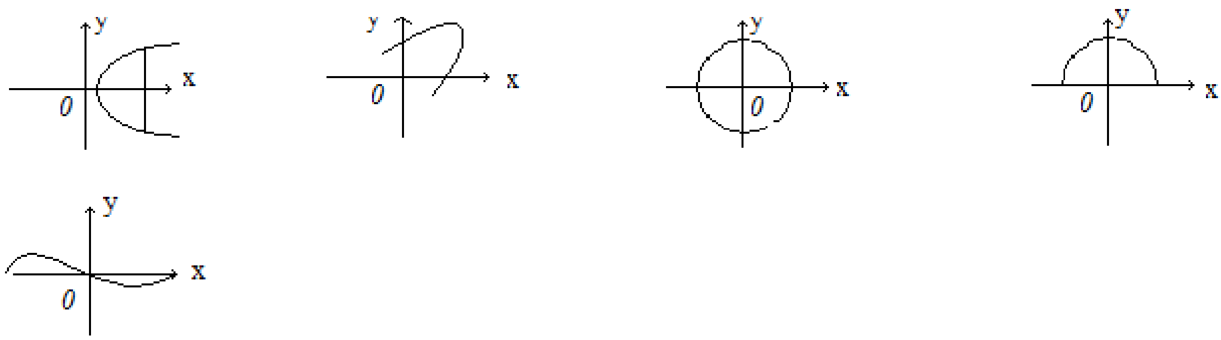
г) $x < 5$;

д) $x \ge 2$.

Задание 2.1.4 Область определения функции $F(x)=\dfrac{1}{2x+3}$ равна ______________.

Задание 2.1.5 Функция вида $f(x)=\dfrac{p(x)}{g(x)}$, где $p(x), g(x), g(x) \ne 0$ – многочлены, называют ____________________________.

Задание 2.1.6 Какие из изображенных геометрических фигур являются графиками функций?



Задание 2.1.7 Найти область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{5x-2}}{x}$.

*Решение:*____

____

____

*Ответ:*____

Задание 2. 1.8 Найти область определения и область значения функции $y = \dfrac{x-1}{x}$.

*Решение:*____

____

____

*Ответ:*____

2.2 Преобразование графиков

Краткая теоретическая справка

Преобразование графиков:

1.Параллельный перенос на вектор $(0;в)$ вдоль оси ординат.

Правило. Для построения графика функции $f(x)+b$, где b – постоянная величина, надо перенести график $f(x)$ вдоль оси ординат (если $b>0$, то график поднимают вверх на bединиц, если $b<0$, то опускают вниз на $|b|$ единиц).

2. Растяжение вдоль оси ординат графика с коэффициентов k.

Правило. Для построения графика функции $y = kf(x)$ надо растянуть график $y = f(x)$ в k раз вдоль оси $OУ$ (если $k>1$, то график сжимается в k раз, если $0<k<1$, то график растягиваем в k раз).

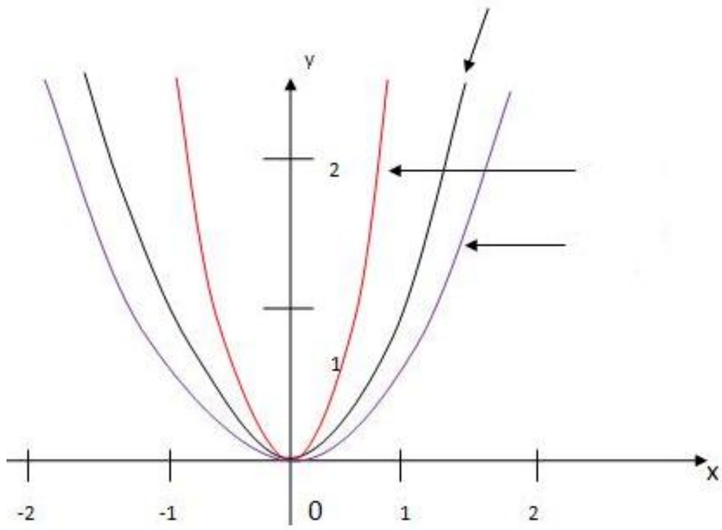
3. Параллельный перенос вдоль оси абсцисс на вектор $(a;0)$.

Правило. График функции $y = f(x-a)$ получаем из графика $f(x)$ переносом вдоль оси OX на вектор $(a;0)$ (если $a \succ 0$, то график сдвигают влево на a единиц, если $a \prec 0$, то график сдвигают вправо на $|a|$ единиц).

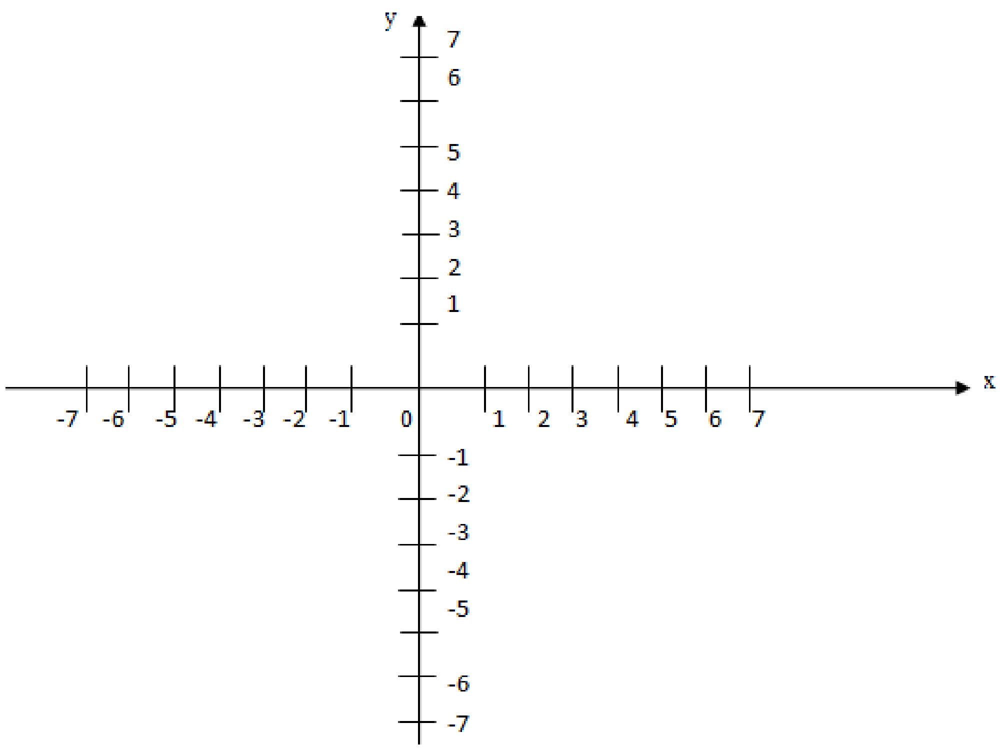
4. Растяжение вдоль оси OX с коэффициентом k.

Правило. Для построения графика $y = f(\frac{x}{k})$ надо подвергнуть график $f(x)$ растяжению с коэффициентом k вдоль оси OX (если $k > 1$, то график в k раз растягиваем, если $0 < k < 1$, то график сжимается в k раз).

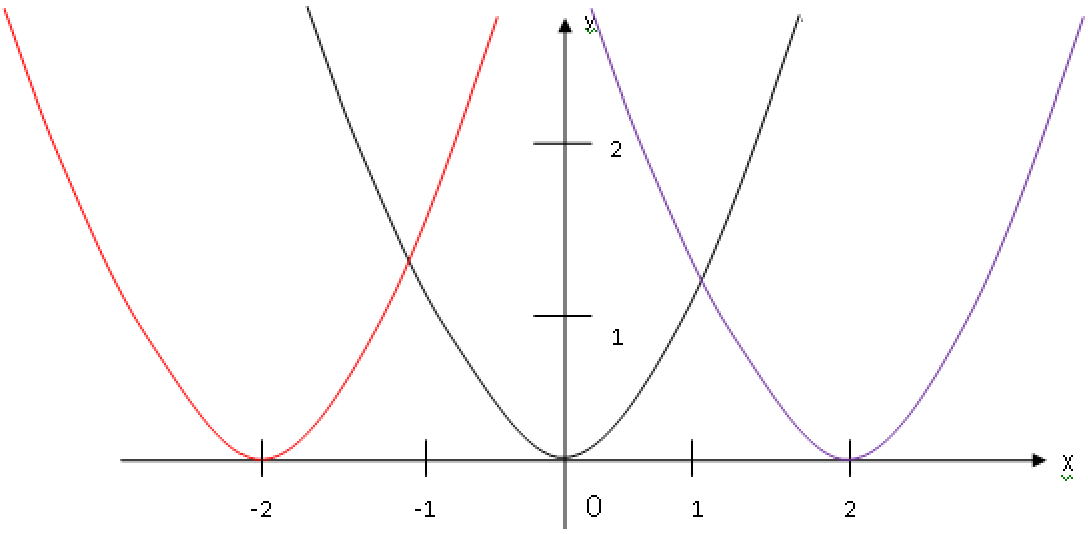
Задание 2.2.1 На графике указать графики функций $y = x^2$; $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = 2x^2$.



Задание 2.2.2 Построить график функции $y = (x-1)^2 + 2$ с помощью элементарных преобразований.



Задание 2.2.3 По графику определить вид элементарного преобразования и формулу функции.



*Решение:*____

____

____

____

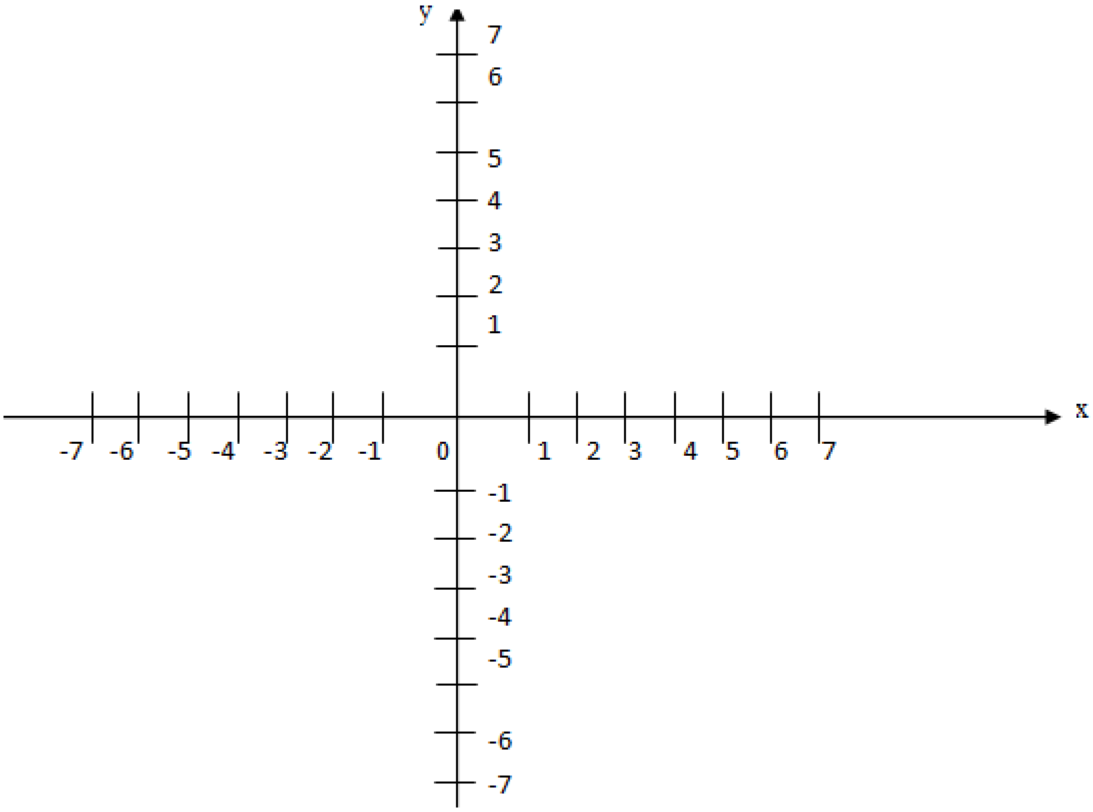
Задание 2.2.4 Пошагово описать принцип построения графика функции $y=(x+4)^2-3$.

1)____

2)____

3)____

Задание 2.2.5 В одной системе координат построить графики функций $y=-x^2$, $y=4-x^2$, $y=-(x-2)^2$.



2.3 Четные и нечетные функции

Краткая теоретическая справка

Определение. Функция $f(x)$ называется *четной*, если её область определения симметрична относительно точки $x = 0$ и для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *нечетной,* если её область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Замечание. График четной функции симметричен относительно оси OY. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Замечание. При построении графика четной или нечетной функции достаточно построить его часть для неотрицательного x, а затем отразить полученный график относительно *ОУ* (если функция четная) или начала координат (если функция нечетная).

Задание 2.3.1 Дать определения:

Функция $f(x)$ называется ______, если её область определения симметрична относительно точки $x = 0$ и для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется нечетной, если её область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения выполняется равенство __________.

Задание 2.3.2 Указать четную функцию.

а) $y = 3x^2 + x^4$;

б) $y = x^3$;

в) $y = 4x^{10}$;

г) $y = x^4$;

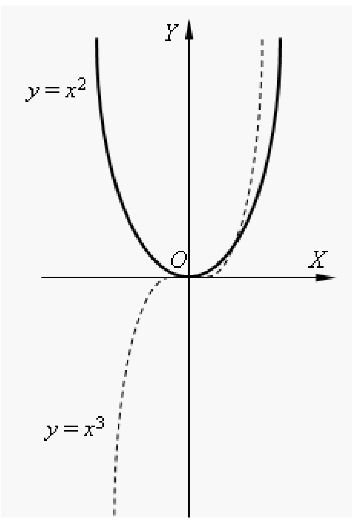
д) $y = x^2$.

Задание 2.3.3 Определить свойство четности или нечетности функции $y = 3x^2 + x^4$.

а) функция четная;

б) функция нечетная;

в) свойствами четности и нечетности не обладает.



Задание 2.3.4 По графику функции определить четность или нечетность функции.

1) $y = x^2$ ________________________________

2) $y = x^3$ ________________________________

Задание 2.3.5 Дописать утверждение.

График четной функции симметричен относительно ____. График нечетной функции симметричен относительно ________.

Задание 2.3.6 Проверить на четность или нечетность функции $y = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$ и $y = x^2 + x$.

1)____

____

2)____

____

Задание 2.3.7 Привести примеры четной и нечетной функции.

Четные функции____

Нечетные функции____

2.4 Возрастание и убывание функции

Краткая теоретическая справка

Определение. Функция $f(x)$ *возрастает* на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение. Функция $f(x)$ *убывает* на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Определение. Функция $f(x)$ называют непрерывной на промежутке P, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Задание 2.4.1 Дописать определения.

Функция _________ $f(x)$ на множестве P, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция __________ $f(x)$ на множестве P, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Задание 2.4.2 Определить промежуток возрастания функции $y = x^2 - 2x + 3$.

а)$[1;+\infty)$;

б)R;

в) $(0;+\infty)$;

г) $(-2;3]$;

д) $(-4;0]$.

Задание 2.4.3 Значение функции $y = x^2 + 2x$ в точке $x = 2$ равно ____________.

Задание 2.4.4 Дописать определение.

Функция $f(x)$ называют непрерывной на промежутке P, если ____.

Задание 2.4.5 Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = -x^2 + 6x - 8$.

*Решение:*____

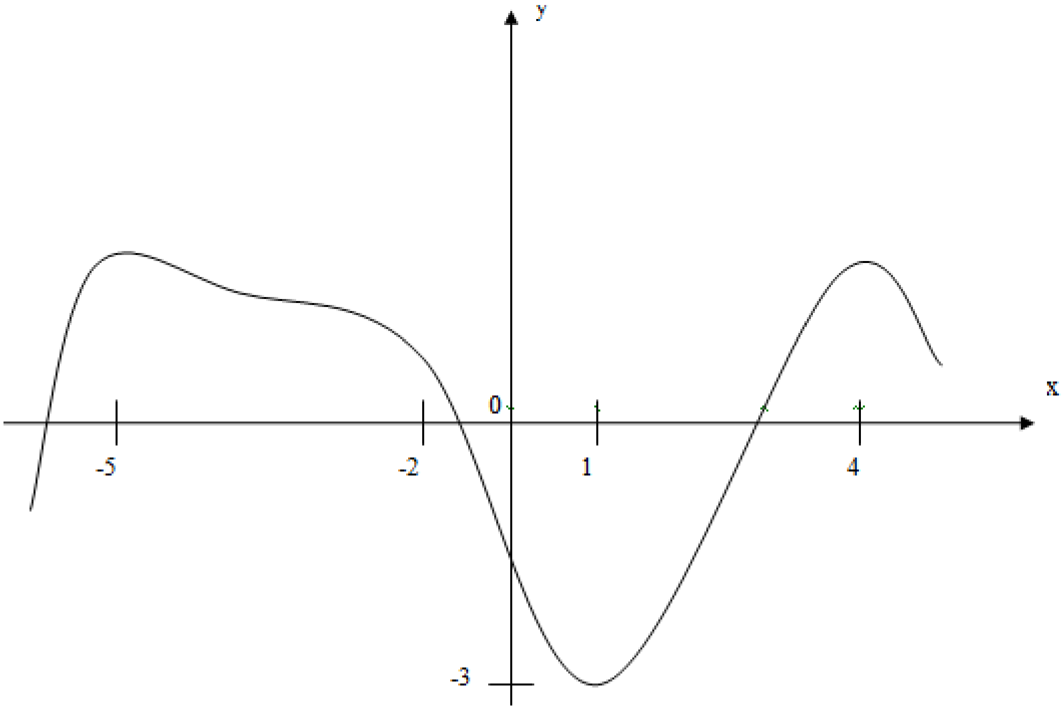
____

____

____

*Ответ:*____

Задание 2.4.6 По графику функции определите промежутки возрастания и убывания.



Решение:

Функция возрастает на промежутке_________________________________

Функция убывает на промежутке ___________________________________

Задание 2.4.7 Найти значение функции $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x\geq -1 \\ 1-x, x<-1 \end{cases}$ в точках -2; 4; 0; -3.

Решение.

$f(-2)=$____

$f(4)=$____

$f(0)=$____

$f(-3)=$____

*Ответ:*____

2.5 Экстремумы функции

Краткая теоретическая справка

Определение. Произвольная точка x, лежащая между a и $в$, удовлетворяет неравенствам $a \prec x \prec в$. Множество всех чисел x, удовлетворяющих этим неравенствам, обозначают $(a;в)$ и называют интервалом.

Определение. Окрестностью точки называют любой интервал, содержащий эту точку.

Определение. Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение. Точки максимума и минимума называют точками экстремума.

Задание 2.5.1 Дописать определения.

Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство ________________________.

Точка x_0 называется точкой ____________ функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Задание 2.5.2 Дать определение.

Экстремум -

____

____

Задание 2.5.3 Доказать утверждение: если функция четная и x_0 – точка максимума, то точка $-x_0$ – является точкой максимума.

*Доказательство:*____

____

____

Задание 2.5.4 Экстремум функции $y = -x^2 + 2x$ равен ____________________________.

Задание 2.5.5 Найти точки максимума и минимума функции $y = x^2 - 3x + 6$.

*Решение:*____

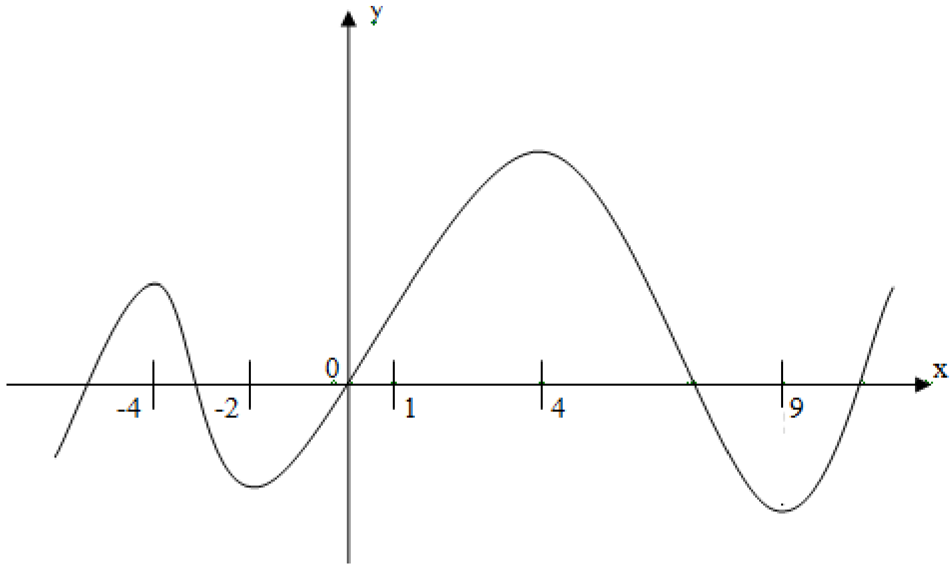
____

____

____

*Ответ:*____

Задание 2.5.6 По графику функции определите точки максимума и минимума, экстремум.



Ответ:

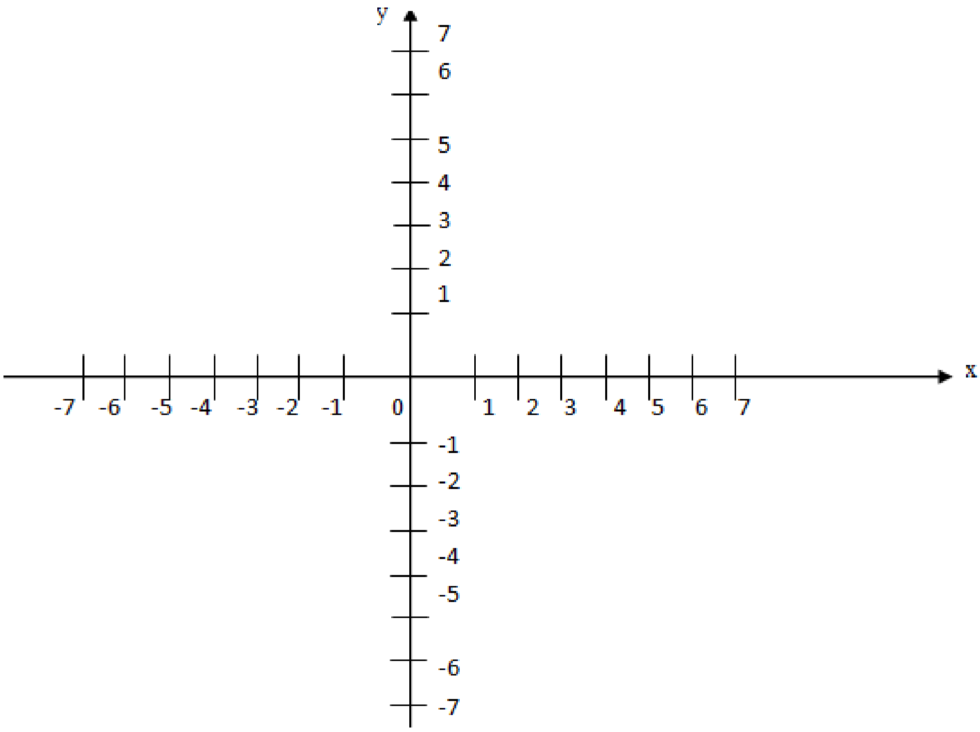
Точка максимума____

Точка минимума____

Экстремум____

Задание 2.5.7 Начертить график какой - нибудь функции $f(x)$, для которой Д(у)=[-2;4]; Е(у)=[-3;3]. По графику функции определите точки максимума и минимума, экстремум.

Решение.



*Ответ:*____

2.6 Исследование функции и построение графика

Краткая теоретическая справка

Схема исследования функции:

1) найти область определения и область значения функции;

2) исследовать на четность или нечетность;

3) найти точки пересечения функции с осями координат;

4) найти промежутки знакопостоянства функции;

5) найти промежутки возрастания и убывания;

6) найти точки экстремума.

Приведем пример исследования и построения график функции $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Решение:

1. Область определения и область значения функции.

$D(f) = R,$ т. к. $x^2 + 1 \neq 0$ при любом значении x.

$E(f) = R.$

2. Исследование функции на четность или нечетность.

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$.

Значит функция четная и её график симметричен относительно оси OY.

3. Точки пересечения функции с осями координат.

а) Пересечение с осью OY, тогда $x = 0$. Следовательно, получаем точку (0;1).

б) Пересечение с осью OX, тогда $y = 0$.

Получаем уравнение $\frac{1}{x^2+1} = 0$. Данное уравнение корней не имеет, значит, график функции не пересекает ось абсцисс.

4. Промежутки знакопостоянства функции.

Поскольку при любом x значение $x^2 + 1 \succ 0$, $f(x) \succ 0$ на всей числовой прямой. Следовательно, график функции расположен выше оси абсцисс.

5. Промежутки возрастания и убывания функции.

Докажем, что функция возрастает на промежутке $(-\infty;0]$ и убывает на промежутке $[0;-\infty)$.

Пусть x_1, x_2 - значения из промежутка $[0;-\infty)$. Причем $x_2 \succ x_1$.

Т. к. x_1, x_2 положительные значения и $x_2 \succ x_1$, тогда получаем

$x^2{}_2 \succ x^2{}_1,$

$x^2{}_2 + 1 \succ x^2{}_1 + 1,$

$\frac{1}{x_2{}^2+1} \prec \frac{1}{x_1{}^2+1}.$

Значит $f(x_2) \prec f(x_1)$, т. е. функция убывает на промежутке $[0;-\infty)$.

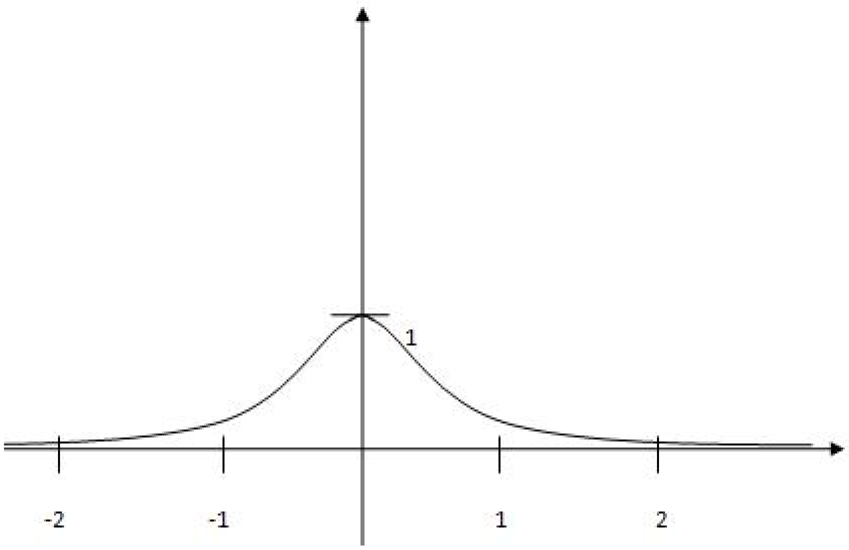
Случай возрастании функции доказывается аналогично.

6. Точки экстремума.

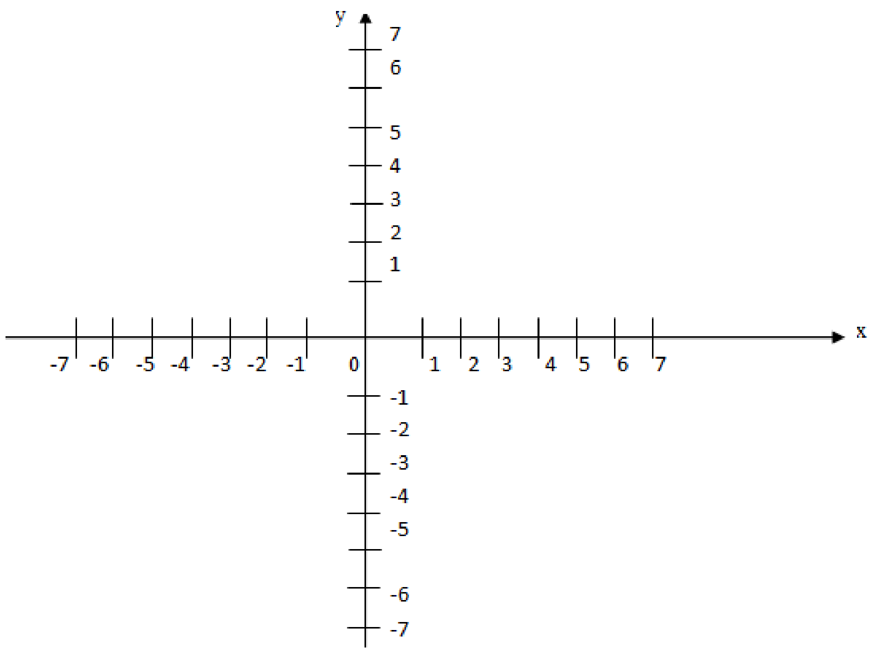
Есть одна точка функции, в которой возрастание сменяется убыванием - это точка 0. Точка 0 – точка максимума функции $y = \frac{1}{x^2+1}$; $f(0) = 1.$

7.График функции.

).

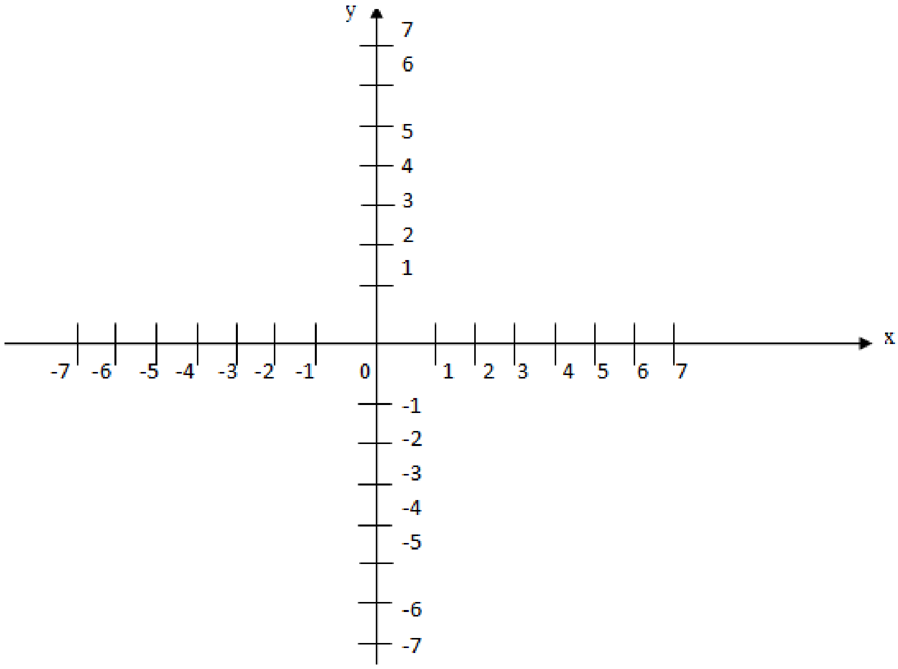


Задание 2.6.1 Постройте график функции, если известно, что $f(x)$ - четная, $f(x)=4x-x^2$ при $x\in[0;+\infty)$.



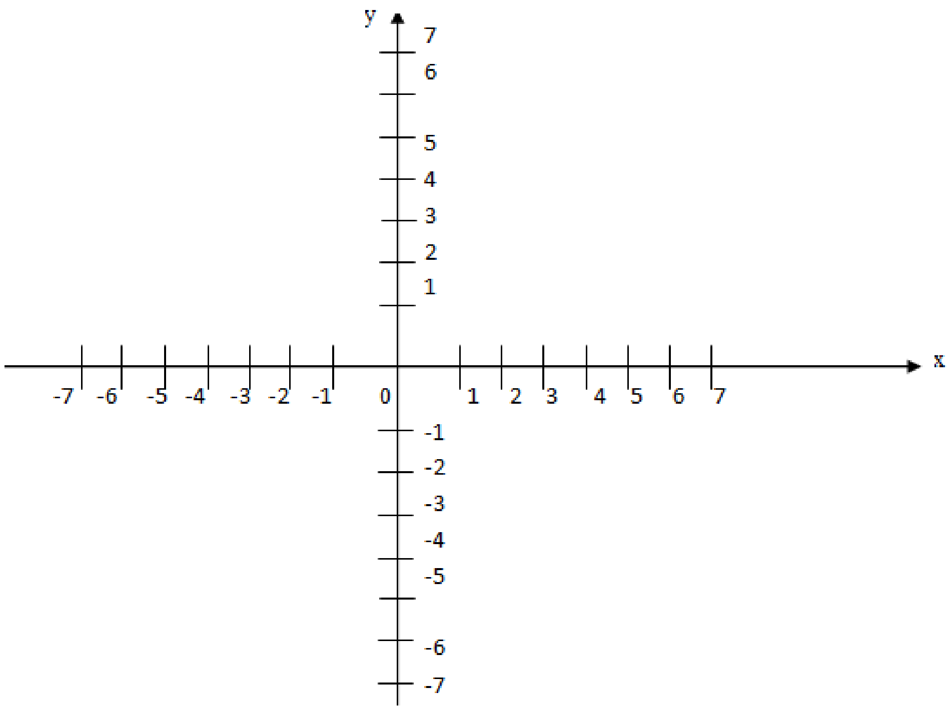
Задание 2.6.2 Начертить эскиз графика функции $f(x)$, если функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;-2]$ и $[0;3]$, а убывает на промежутках $[-2;0]$ и $[3;+\infty)$.

Решение.



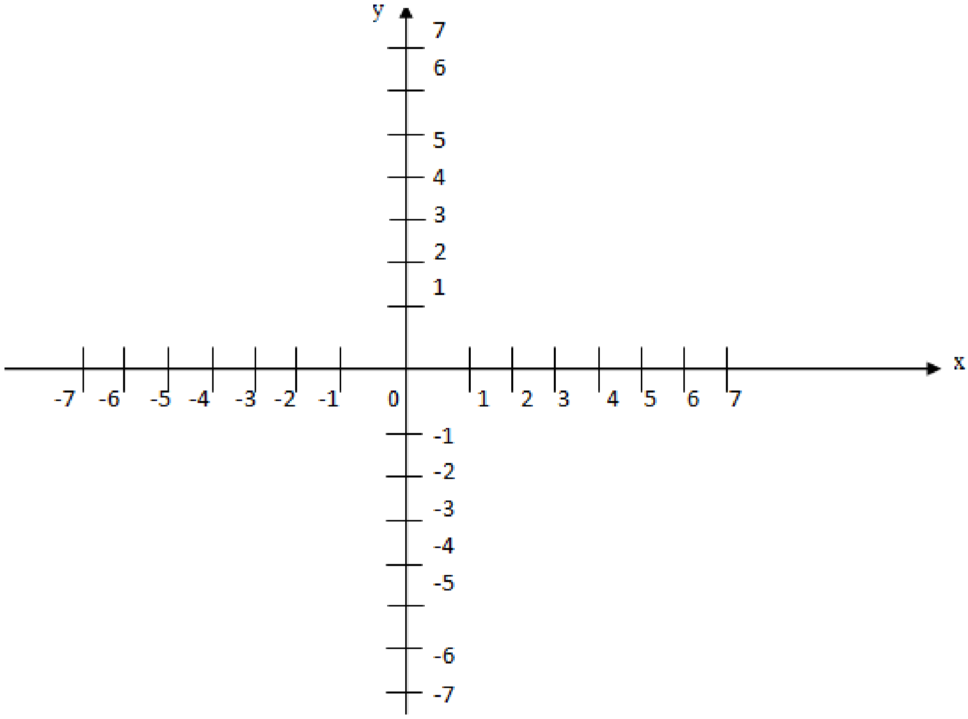
Задание 2.6.3 Начертить эскиз графика функции $f(x)$, если $x_{max} = -3$, $x_{min} = 4$, $f(-3) = 5$, $f(4) = -5$.

Решение.



Задание 2.6.4 Начертить эскиз графика функции $f(x)$, если $f(x)-$четная и $x_{max}=-3$, $x_{min}=0,\ f(-3)=4,\ f(0)=0.$

Решение.



Задание 2.6.5 Построить график функции, если известно:

1. *Д(y)*=[-6;6]; *E(y)* = [-2;5];
2. Точки пересечения с осями координат: (-4;0); (-2;0); (0;2,5);
3. Промежутки монотонности:

а) промежутки возрастания [-3;1]; [4;6];

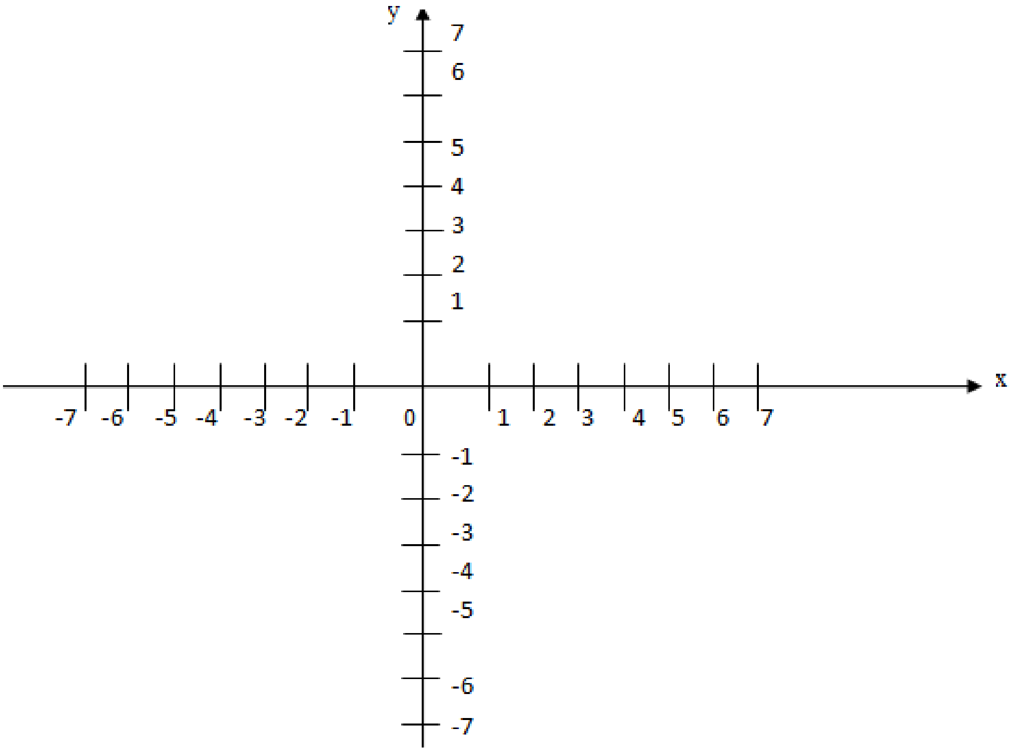
б) промежутки убывания [-6;-3]; [1;4];

4. Экстремум функции

а) $x_{max}=1$, $f(1)=3;$

б) $x_{min}=-3,\ f(-3)=-2,\ x_{min}=4,\ f(4)=1;$

5. Дополнительные точки (-6;3) и (6;5).



Задание 2.6.6 Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{2}{x^2+1}$.

Решение.

1) Область определения и область значения функции.

$D(f) =$ ____

$E(f) =$ ____

2) Исследование функции на четность или нечетность.

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2+1} = \frac{2}{x^2+1}$$

Значит функция ________ и её график симметричен относительно__________.

3) Точки пересечения функции с осями координат.

а) Пересечение с осью OY, тогда $x = 0$, получаем точку __________________.

б) Пересечение с осью OX, тогда $y = 0$ ____________________________________.

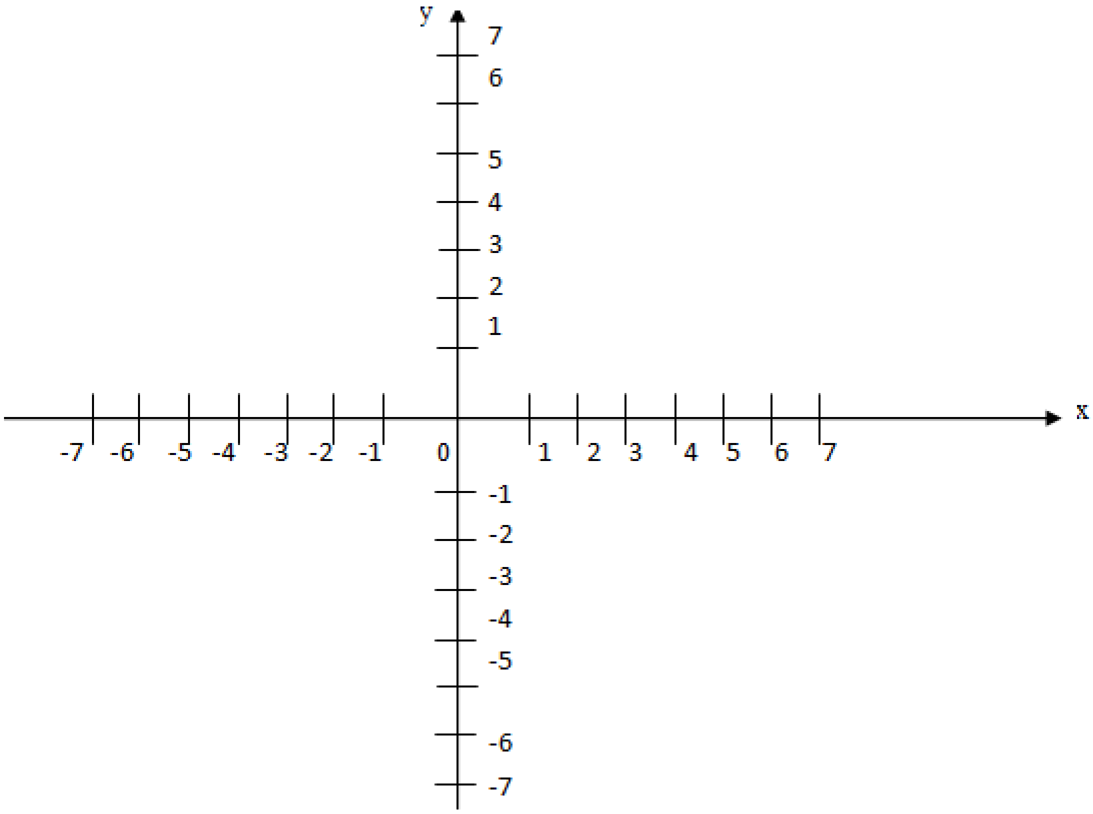
4) Промежутки знакопостоянства функции.

5) Промежутки возрастания и убывания функции.

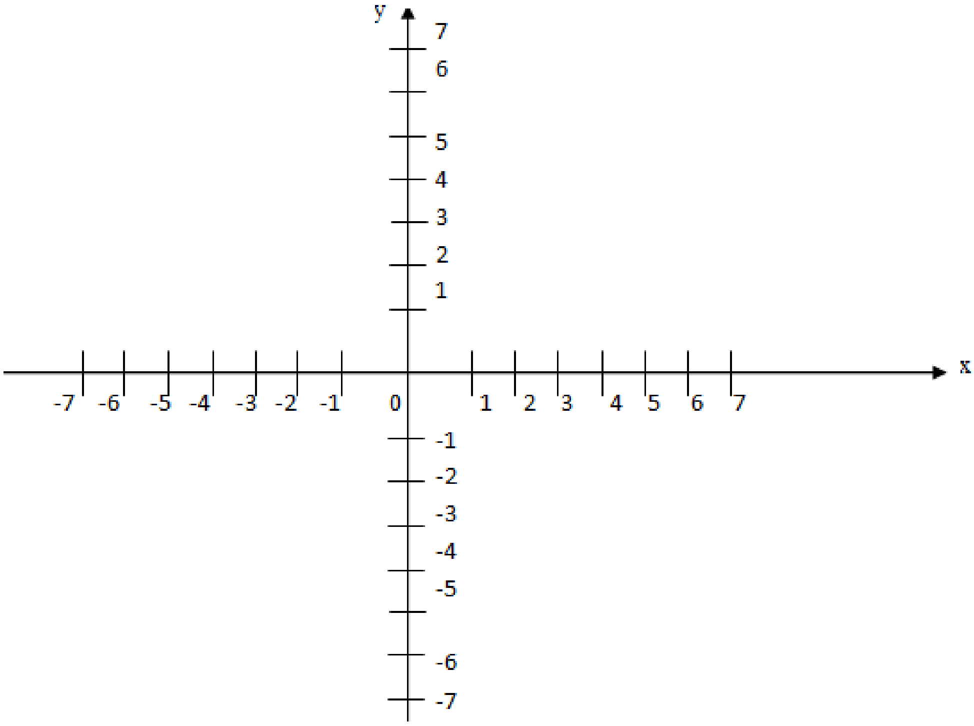
6) Точки экстремума.

Есть одна точка функции, в которой возрастание сменяется убыванием - это точка ______________________

7)График функции.



Задание 2.6.7 Провести по общей схеме исследование и построить график функции $y = x^3 + 3x$.



3. Корень *n*-й степени

3.1 Корень *n*-й степени и его свойства

Краткая теоретическая справка

Определение. Корнем n - ой степени из числа a называется такое число, n - я, степень которого равна a.

Обозначение: $\sqrt[n]{a}$, где число n - показатель корня, само число a - подкоренное выражение, знак корня $\sqrt{\ }$ - радикал (от латинского слова *radix* - «корень», это стилизованная буква r).

Определение. Арифметическим корнем n - ой степени из числа a называется неотрицательное число, n - я, степень которого равна a.

Арифметический корень второй степени называют также квадратным корнем, а корень третьей степени – кубическим корнем.

Решая уравнение $x^n = a$, где n - чётное число получаем:

1) $a > 0, x = \pm\sqrt[n]{a}$ уравнение имеет 2 корня;

2) $a = 0, x = 0$ уравнение имеет 1 корень;

3) $a<0$ нет корней (пример $(-2)^2=4$).

Решая уравнение $x^n=a$, где n- нечётное число, $a\in R$ получаем один корень $x=\sqrt[n]{a}$.

Корень нечетной степени имеет смысл для любого подкоренного числа, т. е. выполняется равенство: $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.

Основные свойства корней:

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{a/b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$ $(b\neq 0)$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $(k>0)$;

4) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ $(k>0)$;

5) $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (если $k\leq 0$, то $a\neq 0$).

Задание 3.1.1 Дать определения:

Корнем n - ой степени из числа a называется

____

____

____

Арифметический корень n - ой степени -

____

____

____

Задание 3.1.2 Вычислить: а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt[3]{0{,}125}$; в) $\sqrt[7]{0}$; г) $\sqrt[3]{-8}$; д) $\sqrt[4]{-16}$.

Решение.

а) $\sqrt{49}$ ____

б) $\sqrt[3]{0{,}125}$ ____

в) $\sqrt[7]{0}$ ____

г) $\sqrt[3]{-8}$ ____

д) $\sqrt[4]{-16}$ ____

*Ответ:*____

Задание 3.1.3 Дописать отсутствующие свойства корней *n* – степени.

Решение.

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2)

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0)$;

4)

5) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ (если $k \le 0$, то $a \ne 0$).

Задание 3.1.4 Укажите корни уравнения $x^4 = 16$.

а) 3;

б) -2;

в) 4;

г) 8;

д) 2.

Задание 3.1.5 Сколько корней имеет уравнение вида $x^5 - x = 0$.

а) 3;

б) 2;

в)1;

г) решений нет.

Задание 3.1.6 Решить уравнение $27x^3 + 8 = 0$.

*Решение.*____

____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.1.7 Вычислить значение выражения $\sqrt[3]{27} + 5\sqrt[5]{32}$.

а)-1;

б) 0;

в) 5;

г) -7;

д) 13.

Задание 3.1.8 Вычислить значение выражения $0{,}2^{4c} \cdot 0{,}2^{-2c}$ при $c = 0{,}5$.

*Решение.*____

____

____

____

*Ответ:*____

*Задание 3.1.*9 Значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{378}}{\sqrt[3]{14}}$ равно____________.

Задание 3.1.10 Вычислить значение выражения $14a^{\frac{2}{5}} - 10(a^{\frac{1}{5}})^2$.

а) $4a^{\frac{2}{5}}$;

б) $-24a^{\frac{2}{5}}$;

в) $a^{\frac{2}{5}}$;

г) $5a^{\frac{2}{5}}$;

д) $2a^{\frac{1}{15}}$.

Задание 3.1.11 Упростить выражения а) $(a^3 \cdot a^5)^3$; б) $\dfrac{x^{\frac{-2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{5}}}$.

*Решение.*____

____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.1.12 Вычислить: а) $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27}$; б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[7]{128^3}$.

Решение.

а) ____

б) ____

в)____

Ответ: ____

Задание 3.1.13 Преобразовать выражения: а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; б) $\sqrt[21]{128}$; в) $\sqrt[12]{a^8}$.

Решение.

а)____

б)____

в)____

Ответ: ____

Задание 3.1.14 Сравнить числа $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$.

*Решение.*____

____

____

____

Ответ: ____

3.2 Иррациональные уравнения и неравенства

Краткая теоретическая справка

Определение. Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются *равносильными.*

Из определения равносильности уравнений следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения. *Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.*

Исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение при следующих преобразованиях:

1) любой член уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив его знак на противоположный;

2) обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Определение. Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения является корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1) если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;

2) если каждое из двух равносильных уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

Определение. Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения является корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1) если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;

2) если каждое из двух равносильных уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное – не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение – следствие, а значит, *обязательна проверка всех найденных корней, если:*

1) произошло расширение области определения уравнения;

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Как правило, самый легкий обходной путь проверки – по области определения (ОДЗ) заданного уравнения.

Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Определение. Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называются иррациональными.

Решение иррациональных уравнений основано на преобразовании его к рациональному уравнению, что достигается возведением обеих его частей в одну и ту же степень (иногда несколько раз).

При возведении обеих частей иррационального уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Уравнению – следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но могут появиться посторонние корни. Чтобы их выявить, все найденные корни уравнения – следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение и посторонние корни отбрасывают.

Определение. Решением неравенства $f(x) > g(x)$ называют всякое значение переменной x, которое обращает заданное неравенство с переменной в верное числовое неравенство.

Множество всех частных решений неравенства называют *общим решением.*

Определение. Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ называют равносильными, если их решения (т. е. множества частных решений) совпадают.

Определение. Если решение неравенства $f(x) > g(x)$ содержится в решении неравенства $p(x) > h(x)$, то неравенство $p(x) > h(x)$ называют следствием неравенства $f(x) > g(x)$.

Решение неравенств основано на утверждениях о равносильности, в определенном смысле аналогичных соответствующим утверждениям о равносильности уравнений.

Определение. Неравенства, содержащие переменную под знаком корня, называют иррациональными.

Задание 3.2.1 Дать определения:

Иррациональные неравенства - ____

____

Иррациональные уравнения - ____

____

Задание 3.2.2 Укажите иррациональные уравнения

а) $\sqrt{x+4} = \sqrt{2x}$;

б) $4x = 8$;

в) $\sqrt{x+4} = -x$;

г) $4x^2 = 8x$;

д) $\sqrt{x+4} = \sqrt{2x}$.

Задание 3.2.3 Найти область определения функции $y = \sqrt{5x-2}$.

а)R;

б) $x \geq 3$;

в) $10 \leq x \leq -10$;

г) $x < 5$;

д) $x \geq 0{,}4$.

Задание 3.2.4 Решить уравнение $\sqrt{x+4} = \sqrt{2x}$.

*Решение.*____

____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.2.5 Решить уравнения а) $\sqrt{x}=x-2$; б) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$; в) $x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1}$.

Решение.

*а)*____

____

____

б)____

____

____

в)____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.2.6 Решить неравенства: а) $\sqrt{5-x}<4$; б) $\sqrt{3x-4}<-5$; в) $\sqrt{3x+1}\le x+1$.

Решение.

*а)*____

____

____

б)____

____

____

в)____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.2.7 Решить уравнения: а) $x^2\sqrt{x-3}=16\sqrt{x-3}$; б) $x-\sqrt{x}=12$.

Решение.

*а)*____

____

____

б)____

____

____

____

*Ответ:*____

3.3 Степень с рациональным показателем

Краткая теоретическая справка

Определение. Степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m- целое число, а n- натуральное ($n>1$) называют число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е. по определению $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Свойства степени с рациональным показателем, где r, s - рациональные числа и a, b - любые положительные числа:

1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$;

2) $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s=a^{rs}$;

4) $(ab)^r=a^r\cdot b^r$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$;

6. Пусть r - рациональное число и $0<a<b$. Тогда

а) $a^r < b^r$ при $r > 0$;

б) $a^r > b^r$ при $r < 0$;

7. Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ следует, что $a^r > a^s$ при $a > 1$, $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

Задание 3.3.1 Дать определение степени с рациональным показателем и перечислить его свойства.

Степень с рациональным показателем -

____

____

____

Свойства:

1)____

2)____

3)____

4)____

5)____

Задание 3.3.2 Вычислить значение выражения $\sqrt[3]{27} + 5\sqrt[5]{32}$.

*Решение.*____

____

*Ответ:*____

*Задание 3.3.*3 Значение выражения $(((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}})$ равно ________.

Задание 3.3.4 Вынести множитель за знак корня $\sqrt[3]{24x^4}$.

а) $2x\sqrt[3]{3x}$;

б) $4x^3\sqrt[3]{3x}$;

в) $x\sqrt[3]{6x}$;

г) $2\sqrt[3]{3x^4}$;

д) $x\sqrt[3]{24x}$.

*Задание 3.3.*5 Внести множитель за знак корня $2m\sqrt[3]{3m^2}$.

а) $\sqrt[3]{24m^5}$;

б) $\sqrt[3]{24m^3}$;

в) $\sqrt[3]{20m^2}$;

г) $\sqrt[3]{6m^5}$;

д) $\sqrt[3]{8m^4}$.

Задание 3.3.6 Выбрать верное равенство.

а) $(3^{-1,5})^{-2} = (3^{1,2})^2$;

б) $(3^{-1,5})^{-2} < (3^{1,2})^2$;

в) $(3^{-1,5})^{-2} > (3^{1,2})^2$;

г) $(3^{-1,5})^{-2} \le (3^{1,2})^2$;

д) $(3^{-1,5})^{-2} \ge (3^{1,2})^2$.

Задание 3.3.7 Представить степень с дробным показателем в виде корня $5^{\frac{2}{3}}$.

*Решение.*____

____

*Ответ:*____

Задание 3.3.8 Представить выражение в виде степени с рациональным показателем $\sqrt[11]{c^2}$.

*Решение.*____

____

*Ответ:*____

Задание 3.3.9 Вычислить значение выражения $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$.

*Решение.*____

____

*Ответ:*____

Задание 3.3.10 Сравнить числа 3^{200} и 2^{300}.

а) $3^{200} > 2^{300}$;

б) $3^{200} < 2^{300}$;

в) $3^{200} = 2^{300}$;

г) $3^{200} \geq 2^{300}$;

д) $3^{200} \leq 2^{300}$.

Задание 3.3.11 Расположить последовательность чисел в порядке возрастания $2^{\frac{1}{3}}$, 2^{0}, $2^{1,5}$, $2^{-\sqrt{2}}$, $2^{1,4}$.

*Решение.*____

____

*Ответ:*____

Задание 3.3.12 Вычислить: а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $0^{\frac{51}{4}}$; в) $(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{9}{4}}$; г) $\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}}$.

Решение.

а)____

б)____

в)____

г)____

Ответ: ____

Задание 3.3.12 Найдите значения выражения а) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\sqrt[5]{64} : 2^{-\frac{1}{5}} \cdot \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{6}$; в) $\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}}$.

Решение.

а)____

____

____

б)____

____

____

в)____

____

____

Ответ: ____

3.4 Показательная функция

Краткая теоретическая справка

В основе определения показательной функции лежит понятие степени. Можно определить степень a^x $(a > 0)$ не только для рационального, но и для любого действительного показателя x. Для этого рассматривают последовательность рациональных чисел $x_1, x_2, \ldots$, которые задают число x с любой степенью точности. Затем вычисляют степени с рациональными показателями $a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots$. Оказывается, что эти числа являются приближениями к некоторому числу y, причем, уточнением рационального приближения числа x

можно добиться вычисление a^x с любой степенью точности. Это число и считают степенью a^x с показателем x.

Определение. При любом $x \in R$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным числом: $a^x > 0$ при $x \in R,\ a > 0$.

Если основание степени $a = 0$, то $0^x = 0$ при $x > 0$. При $x \le 0$ выражение 0^x не имеет смысла. Например, $0^{\sqrt{2}} = 0$, 0^{-1} не имеет смысла.

При таком определении степени с действительным показателем сохраняются все известные свойства степени с рациональным показателем.

По определению полагают:

а) $a^1 = a$;

б) $a^0 = 1$;

в) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, x \in R$.

Если a и b - положительные числа, x и y - любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

а) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

б) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

в) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

г) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

д) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$;

е) пусть $x_1 < x_2$, тогда если $a > 1$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$, если $0 < a < 1$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Определение. Функция $y = a^x (a > 0, a \ne 1)$ называется показательной функцией с основанием a.

Свойства показательной функции:

1) Область определения – множество всех действительных чисел $D(y) = R = (-\infty;+\infty)$.

2) Область значения – множество всех положительных действительных чисел $E(y) = R_{+} = (0;+\infty)$.

3) При $a > 1$ функция возрастает на всей числовой прямой; при $0 < a < 1$ функция убывает на множестве R.

Задание 3.4.1 Дать определение показательной функции, перечислить свойства и построить схематически график.

Показательная функция -

____

____

____

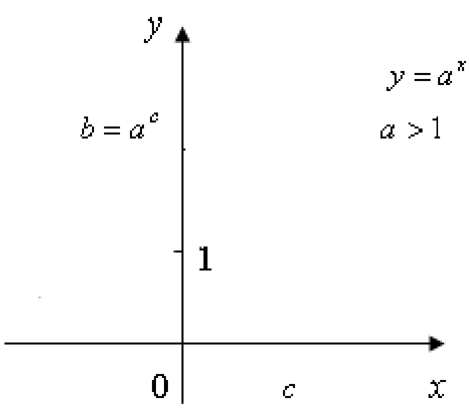
Свойства функции:

1)____

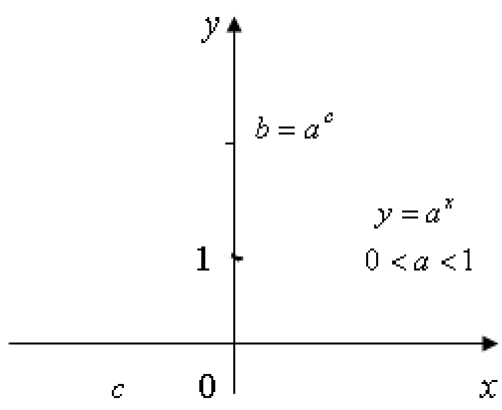
2)____

3)____

График функции.



а) $a > 1$ возрастающая



б) $0 < a < 1$ убывающая

Задание 3.4.2 Найти область определения показательной функции $y = 3^x + 1$.

*Решение.*____

____

____

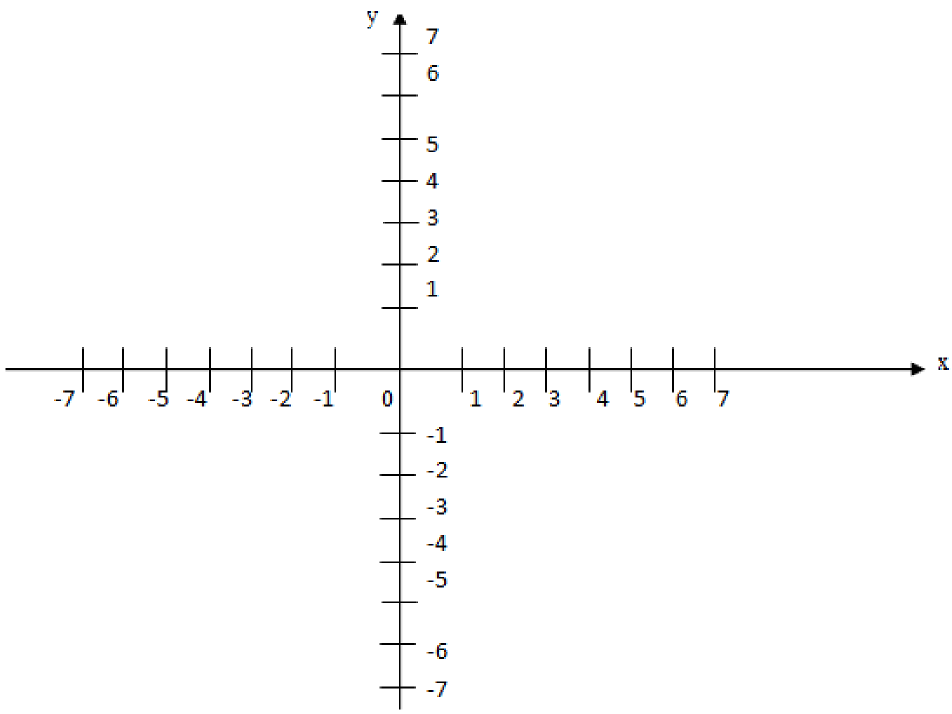
*Ответ:*____

Задание 3.4.3 Значение функции в точке $x = 0$ функции $y = 5^{x+1} - 1$ равно __________.

Задание 3.4.4 Построить графики показательной функции и перечислить ее свойства: а) $y = 5^x$; б) $y = 3^{x+1}$; в) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$.

Решение.

а) $y = 5^x$



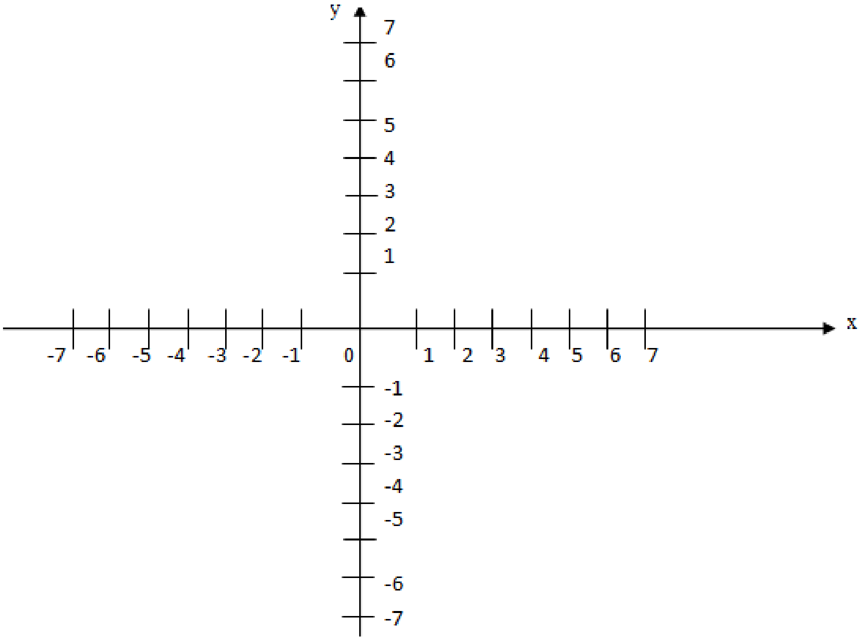
Свойства функции:

1)____

2)____

3)____

б) $y = 3^{x+1}$



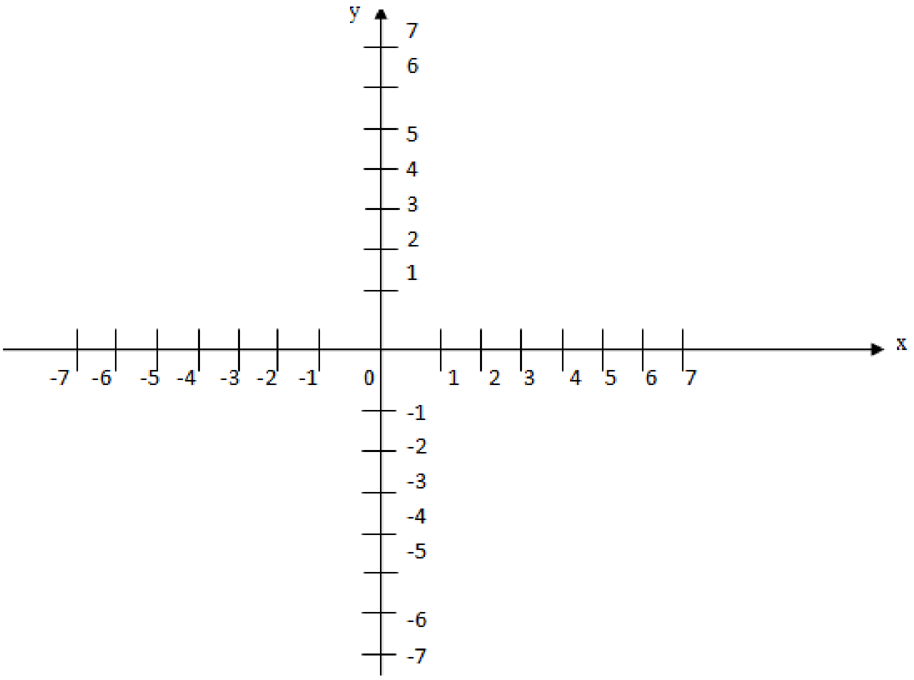
Свойства функции:

1)____

2)____

3)____

в) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$.



Свойства функции:

1)____

2)____

3)____

3.5 Показательные уравнения и неравенства

Краткая теоретическая справка

Определение. Показательными уравнениями (неравенствами) называют уравнения (неравенства), содержащие переменную в показателе степени.

Определение. Показательными уравнениями называют уравнения вида $a^x = b$, где a - положительное число, отличное от 1, b - данное действительное число, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Рассмотрим простейшее показательное уравнение $a^x = b$ при $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Если $b<0$ или $b=0$, то уравнение решений не имеет, так как $E(a^x)=R_+=(0;+\infty)$. По теореме о корне (Пусть функция $f(x)$ возрастает (или убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых $f(x)$ на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень на промежутке I.) уравнение при любом положительном a, отличном от 1, и $b>0$ имеет единственное корень. Для того чтобы его найти, надо b представить в виде $b=a^c$. Очевидно, что c является решением уравнения:

$a^x=b,$

$a^x=a^c,$

$x=c.$

Ответ: $x=c$.

Если показательное уравнение можно привести к виду $a^{x_1}=a^{x_2}$, то $x_1=x_2$, при $a>0, a\neq 1$.

Решение показательного неравенства основано на свойстве функции $y=a^x$: при $a>1$ функция возрастает, а при $0<a<1$ убывает. Если функция убывает, то знак неравенства меняется, а если возрастает – сохраняется, т.е.

1) $a>1,\ a^{x_1}\geq a^{x_2}\Leftrightarrow x_1\geq x_2$;

2) $0<a<1,\ a^{x_1}\geq a^{x_2}\Leftrightarrow x_1\leq x_2$.

Задание 3.5.1 Решить показательное уравнение $36^x=6^{x+5}$.

а) -9;

б) 5;

в) 0;

г) -7;

д) 3.

Задание 3.5.2 Решить уравнения а) $5^{x^2-2x-1}=25$; б) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

Решение.

а)____

б)____

Ответ: ____

Задание 3.5.3 Решить уравнения а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; б) $\sqrt{5^x} \cdot \sqrt{2^x} = 100$.

Решение.

а)____

б)____

Ответ: ____

Задание 3.5.4 Решить систему уравнений $\begin{cases} 4^{x+y} = 16 \\ 4^{x+2y-1} = 1 \end{cases}$.

*Решение.*____

*Ответ:*____

Задание 3.5.5 Решить уравнение $5^{x+1}=8^{x+1}$.

*Решение.*____

Ответ:

Задание 3.5.6 Решить показательное неравенство $5^{x+3}>25^{x}$.

а) $x\le -3$;

б) $x>0$;

в) $x<3$;

г) $x<7$;

д) $x\ge -2$.

Задание 3.5.7 Решить неравенства а) $0{,}5^{7-3x}<4$; б) $2\cdot 3^{x+1}-3^{x}\ge 15$.

Решение.

а)

б)

Ответ:

Задание 3.5.7 Решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}>2{,}5$.

Решение.

____

____

*Ответ:*____

3.6 Логарифм и его свойства

Краткая теоретическая часть

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$ называют показатель степени, в которую необходимо возвести основание a чтобы получить число b.

Определение логарифма можно кратко записать так: $a^{\log_a b} = b$. Это равенство справедливо при $a > 0, a \neq 1, b > 0$. Его называют *основным логарифмическим тождеством.*

Действие нахождения логарифма числа обычно называют *логарифмированием.* Эта операция является обратной по отношению к возведению в степень с соответствующим основанием.

Свойства логарифма, где $a > 0$ $(a \neq 1)$ и b, b_1 и b_2 - положительные числа:

1) $\log_a 1 = 0$;

2) $\log_a a = 1$;

3) логарифм произведения равен сумме логарифмов: $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$;

4) логарифм частного равен разности логарифмов:

$$\log_a \left(\frac{b_1}{b_2} \right) = \log_a b_1 - \log_a b_2;$$

5) логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$.

Часто возникает необходимость вычисления логарифмов с разными основаниями. Для этого используют формулу перехода от одного основания логарифма к другому:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} \qquad (3)$$

Определение. Десятичным логарифмом называется логарифм числа b по основанию 10. Обозначается: $\lg b$.

Определение. Натуральным логарифмом называется логарифм числа b по основанию e, где $e = 2{,}71 \approx 3$. Обозначается: $\ln b$.

Замечание: Для десятичных и натуральных логарифмов выполняются те же свойства, что для логарифмов с другими основаниями.

Задание 3.6.1 Дать определение логарифма, перечислить его свойства и основное логарифмическое тождество:

Логарифм -

____

____

Свойства логарифма:

1)____

2)____

3)____

4)____

5)____

Основное логарифмическое тождество.

____

Задание 3.6.2 Вычислить значение выражения а) $\log_6 2 + \log_6 3$; б) $\log_6 2 - \log_6 \frac{1}{3}$; в) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$.

Решение.

а)____

б)____

в)____

*Ответ:*____

Задание 3.6.3 Найти значение выражения $\log_3 8$, если $\log_3 2 = c$.

а) c^3;

б) c^{-2};

в) 5;

г) 3c;

д) 2c.

Задание 3.6.4 Установите соответствия стрелками между выражениями и их значениями

$2^{\log_2 8}$	7
$(\sqrt{2})^2$	-27
$2^{\log_2 7}$	8
$(-3)^3$	2

Задание 3.6.5 Расположить последовательность чисел в порядке убывания выражения $2^{\log_2 8}$ $3^{2+\log_3 2}$, 4^{-2} , $5^{\log_5 3}$.

1.
2.
3.
4.

Задание 3.6.6 Вычислить значение выражения $\log_{12}4+\log_{12}36$.

а) 3;

б) 0;

в) -1;

г) 2;

д) 7.

*Задание 3.6.*7 Сравнить числа $\log_3 5$ и $\log_3 7$.

а) $\log_3 5 = \log_3 7$;

б) $\log_3 5 > \log_3 7$;

в) $\log_3 5 < \log_3 7$;

г) $\log_3 5 \le \log_3 7$;

д) $\log_3 5 \ge \log_3 7$.

Задание 3.6.8 Вычислить значение выражения: а) $\log_{\frac{1}{2}} 8$; б) $7^{2\log_{49}2}$.

Решение.

а)____

____

б)____

____

Ответ: ____

Задание 3.6.9 Перейдите к основанию 5 в выражении $\log_3 25$.

*Решение.*____

____

Ответ: ____

Задание 3.6.10 Выразите $\log_2 300$ через a и b, если $\log_2 5=a, \log_2 3=b$.

*Решение.*____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.6.11 Прологарифмируйте выражение $8 \cdot a^3 \cdot \sqrt[7]{b^4}$ по основанию $a = 2$, если $b > 0$.

*Решение.*____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.6.12 Найдите x, если $\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 2$.

*Решение.*____

____

____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.6.13 Найдите значение выражения $\dfrac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$.

*Решение.*____

____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.6.14 Вычислить значение выражения $\frac{\log_5 2}{\log_5 6}+\frac{\log_4 3}{\log_4 6}$.

*Решение.*____

____

____

____

*Ответ:*____

3.7 Логарифмическая функция

Краткая теоретическая часть

Определение. Функция $y=\log_a x$ называется логарифмической функцией с основанием a ($a>0$, $a\neq 1$).

Свойства логарифмической функции:

1) Область определения логарифмической функции - множество всех положительных чисел, т.е. $D(y)=R_+=(0;+\infty)$.

2) Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел, т.е. $E(y)=R=(-\infty;+\infty)$.

3) Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

Графики показательной и логарифмической функции, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y=x$.

Задание 3.7.1 Дать определение логарифмической функции, перечислить ее свойства и схематически изобразить график.

Логарифмическая функция -

____

____

____

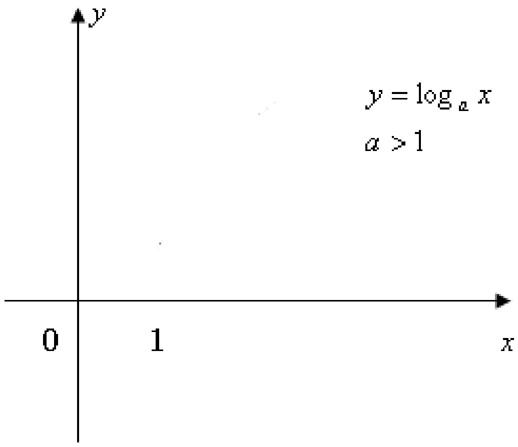
Свойства функции:

1)____

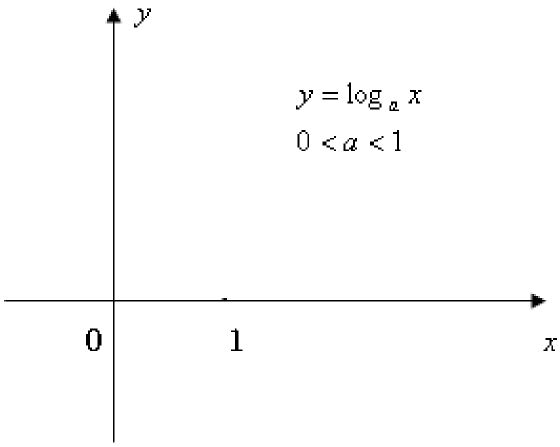
2)____

3)____

График функции.



а) $a > 1$ возрастающая



б) $0 < a < 1$ убывающая

*Задание 3.7.2*Найти область определения функции $y = \log_2(4 - 5x)$.

*Решение.*____

____

____

*Ответ:*____

Задание 3.7.3 Найти значение функции в точке $x = 32$ функции $y = \log_2 x + 1$.

а) 0,4;

б) 6;

в) 5;

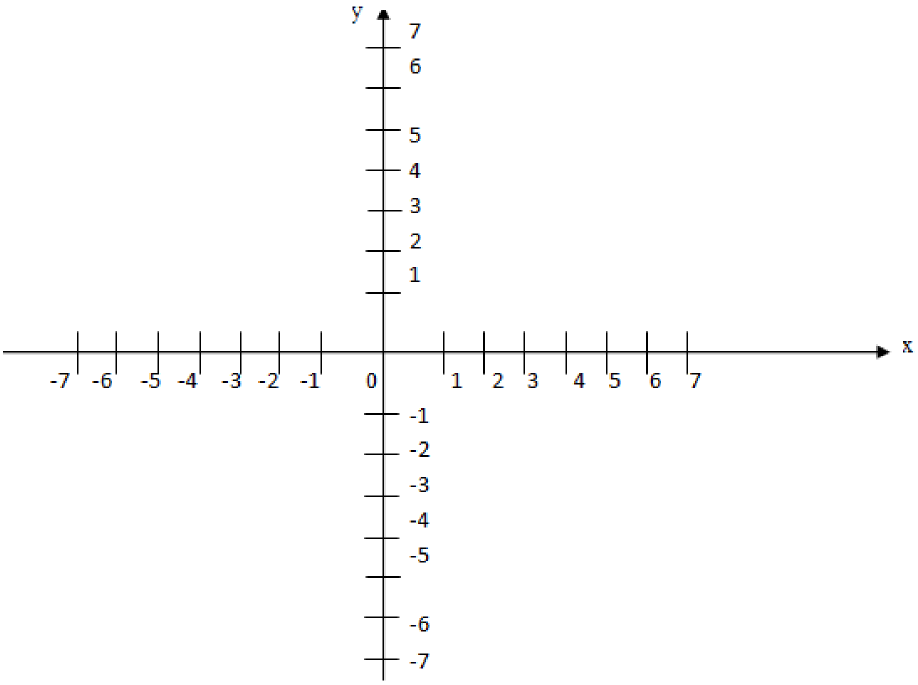
г) -1,2;

д) 11.

Задание 3.7.4 Построить графики логарифмической функции и перечислить ее свойства: а) $y=\log_5 x$; б) $y=\log_3(x+1)$; в) $y=\log_{\frac{1}{4}} x-1$.

Решение.

а) $y=\log_5 x$



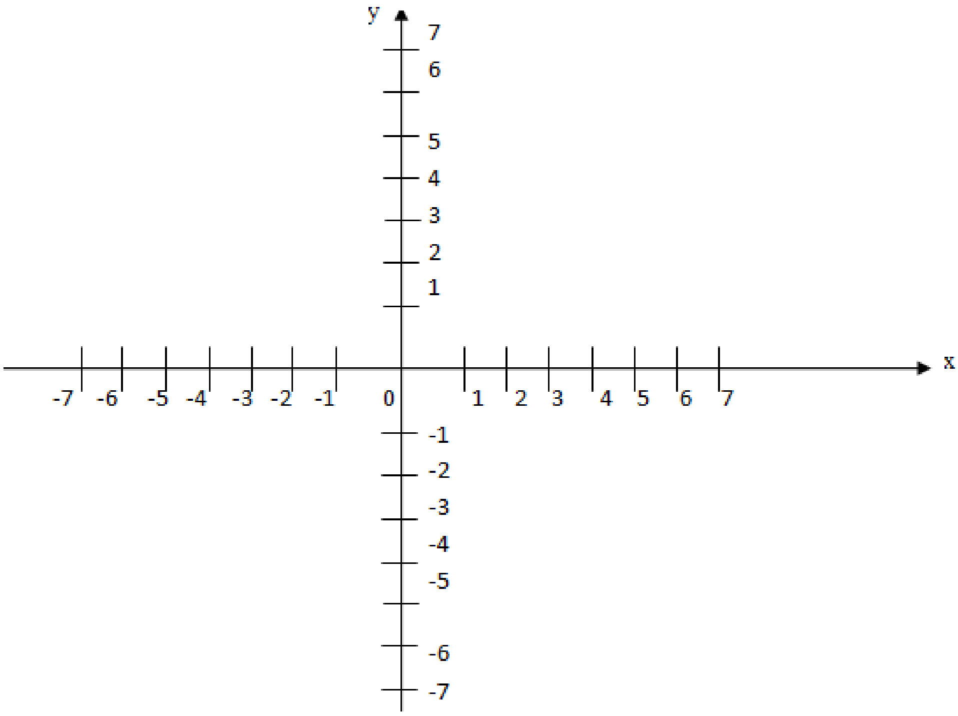
Свойства функции:

1)____

2)____

3)____

б) $y = \log_3(x+1)$



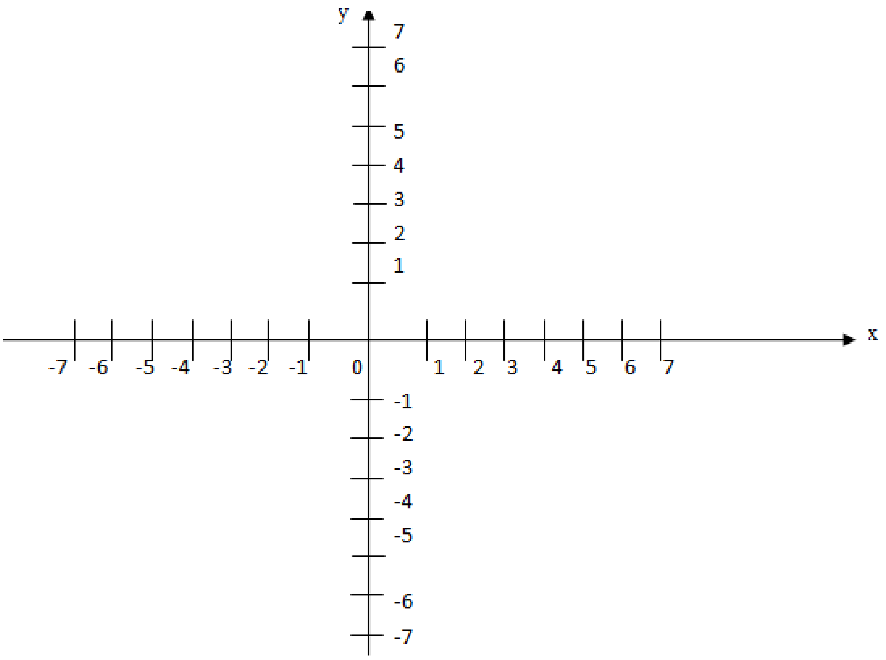
Свойства функции:

1)____

2)____

3)____

в) $y=\log_{\frac{1}{4}} x-1$.



Свойства функции:

1)____

2)____

3)____

Задание 3.7.5 Установить соответствие стрелками между функциями и их областью определения

$y=\sqrt{x}$;	$x>-2$
$y=\log_3(3-x)$;	$x\neq 0$
$y=\dfrac{1}{x}$;	$x<3$
$y=\log_3(x+2)$.	$x\geq 0$

3.8 Логарифмические уравнения и неравенства

Краткая теоретическая справка

Определение. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется логарифмическим уравнением.

Определение. Простейшее логарифмическое уравнение – это уравнение вида $\log_a x = b$, где a - данное положительное число, не равное 1, b - данное действительное число.

Область определения логарифмической функции – множество $(0;+\infty)$, причем логарифмическая функция при $a>1$ возрастает, при $0<a<1$ убывает, т.е. функция строго монотонна и, следовательно, принимает каждое значение ровно один раз. Тогда, по теореме о корне, данное уравнение имеет единственное решение (по определению логарифма): $x = a^b$.

Определение. Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или(и) в его основании, называется логарифмическим неравенством.

Определение. Пусть a - данное положительное число, не равное 1, b - данное действительное число. Тогда неравенства $\log_a x > b$ и $\log_a x < b$ называют простейшими логарифмическими неравенствами.

Решение логарифмического неравенства основано на свойстве функции $y = \log_a x$.

Правила решения логарифмического неравенства: если в неравенстве основание логарифмической функции $a>1$, то знак в неравенстве не меняется; если в неравенстве основание логарифмической функции $0<a<1$, то знак в неравенстве меняется на противоположенный, т.е.

1) $a>1$, $\log_a x_1 \ge \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \ge x_2 > 0$;

2) $0<a<1$, $\log_a x_1 \ge \log_a x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 \le x_2$.

Задание 3.8.1 Дать определения:

Логарифмическое уравнение –

Логарифмическое неравенство –

____

____

Задание 3.8.2 Укажите решения уравнения $\log_2 x^2 = 4$.

а) 3;

б) 8;

в) -1;

г) 4;

д) -4.

Задание 3.8.3 Решением уравнения $\log_5 x = 2$ является число ______________.

Задание 3.8.4 Решите уравнения: а) $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$; б) $\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1$.

Решение.

а)____

____

____

____

б)____

____

____

____

Ответ: ____

Задание 3.8.5 Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 7 \\ \lg x + \lg y = 1 \end{cases}$.

*Решение.*____

Ответ: ____

Задание 3.8.6 Решите уравнения: а) $\log_5(2x+3)=\log_5(x+1)$;

б) $\log_3^2 x-5\log_3 x+4=0$.

Решение.

а)____

б)____

Ответ: ____

Задание 3.8.7 Решить уравнения а) $\log_2(x-15)=4$; б) $\lg^2 x+2\lg x=8$.

Решение.

а)____ б)____

____

____

____

Ответ: ____

Задание 3.8.8 Решите неравенства: а) $\log_{0,6} x > 2$; б) $\lg x \leq -2$.

Решение.

а)____

____

____

____

б)____

____

____

____

Ответ: ____

Задание 3.8.9 Решением неравенства $\log_5 3x < 1$ является промежуток ____________.

Задание 3.8.10 Решите неравенства: а) $\log_5(3x+1) < \log_5(x-3)$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(14-x)$.

Решение.

а)____

____

____

____

б)____

____

____

____

Ответ: ____

4 Тригонометрические функции

4.1 Понятие угла. Единичная окружность

Краткая теоретическая справка

Определение. Углом называется фигура, состоящая из двух различных лучей, исходящих из одной точки.

Угол — это результат вращения луча *OA* вокруг точки *O* (рисунок 1).

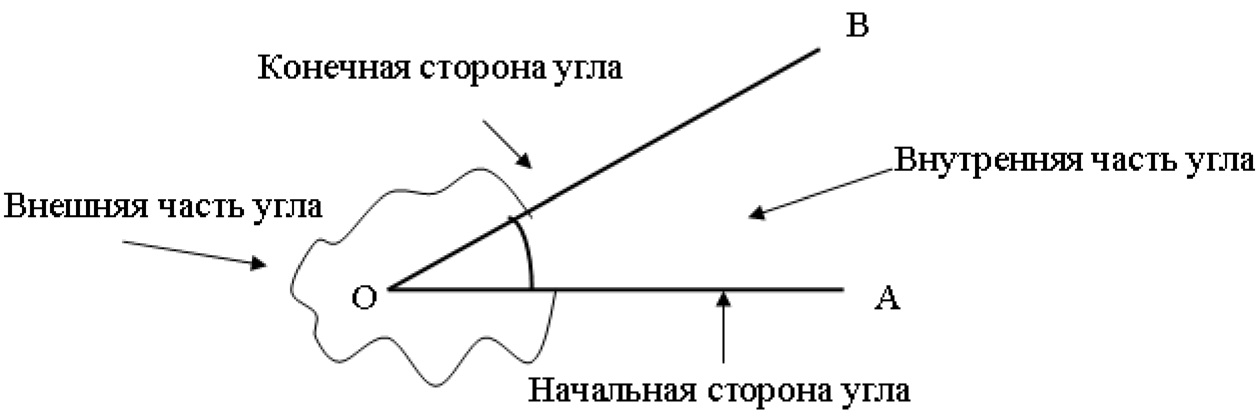


Рисунок 1 – Понятие угла

Углы измеряются в градусах и радианах.

Определение. 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности (рисунок 2).

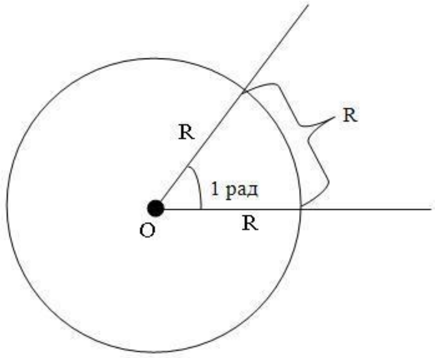


Рисунок 2 – Радианная мера угла

Определение. Единичная окружность - это окружность с центром в начале координат, радиус которой равен единице.

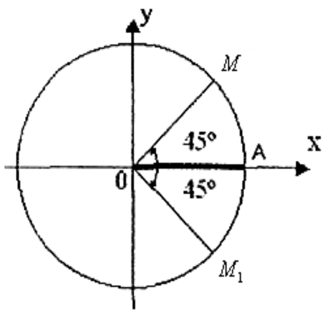


Рисунок 3– Окружность в координатной плоскости

Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу (рисунок 3):

1) если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной t. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$;

2) если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM_1 длиной $|t|$. Точка M_1 и будет искомой точкой $M_1(t)$;

3) число $t = 0$ поставим в соответствие точку A; $A = A(0)$.

Определение. Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) называют числовой окружностью.

Формулы перевода угловых мер

Формула перевода градусной меры в радианную меру угла: $1^0 = \dfrac{\pi}{180}\,рад$, и формула перевода радианной меры угла в градусную: $1рад = \dfrac{180^0}{\pi}$.

На рисунке 4 приведены примеры поворотов на некоторые углы.

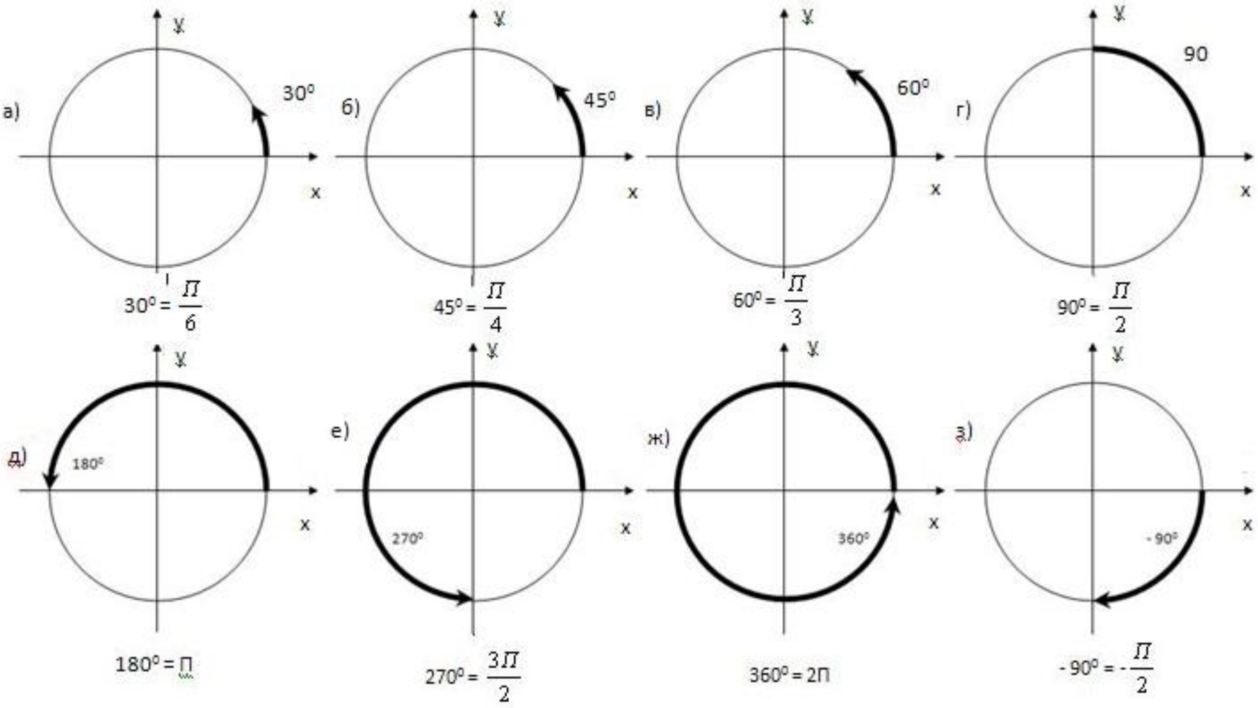


Рисунок 4 - Повороты на некоторые углы

При повороте на $2\pi = 360^0$ точка возвращается в исходное положение. При повороте на $-2\pi = -360^0$ точка возвращается в исходное положение. Если $\alpha > 2\pi$, то при повороте на угол α радиан, точка совершает один или несколько полных оборотов и проходит ещё некоторый путь α_0, где $0 < \alpha_0 < 2\pi$.

Например, при повороте начального радиуса на угол $\frac{9\pi}{2}$ точка совершает 2 полных оборота и проходит ещё путь $\frac{\pi}{2}$, т. к. $\frac{9\pi}{2} = 2\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}$ (рисунок 5).

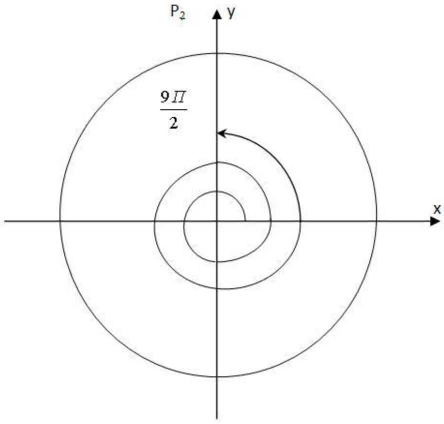


Рисунок 5 – Поворот начального радиуса на угол $\frac{9\pi}{2}$

Вывод. Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, полученная поворотом точки (1;0) на угол α радиан. Однако одной и той же точке единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi n$, $k \in Z$, задающих поворот точки $P_0(1;0)$ в точку P_α.

Для числовой окружности справедливо следующее утверждение:. Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то она соответствует и числу вида $t + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Задание 4.1.1 Дать определения:

Угол -

____

____

Развернутый угол -

____

____

Углы бывают -

____

____

Углы измеряются в

____

____

1 радиан -

____

____

Единичная окружность -

____

____

Числовая окружность -

____

____

Задание 4.1.2 Написать формулы перевода угловых мер.

Формула перевода градусной меры в радианную меру угла:

$$\alpha =$$

Формула перевода радианной меры в градусную меру угла:

$$\beta =$$

Задание 4.1.2 Перевести радианную меру угла, равную $\frac{2\pi}{3}$, в градусную.

*Решение.*____

____

*Ответ:*____

Задание 4.1.3 Выразить в градусной мере величину угла $-\frac{\pi}{3}$.

а) -12^0;

б) 0^0;

в) -60^0;

г) 90^0;

д) 180^0.

Задание 4.1.4 Перевести градусную меру угла, равную 210^0, в радианную.

*Решение.*____

____

*Ответ:*____

Задание 4.1.5 Переведите в радианную меру величину угла 120^0.

а) $\frac{\pi}{10}$;

б) $\frac{\pi}{3}$;

в) $\frac{5\pi}{2}$;

г) π;

д) $\frac{2\pi}{3}$.

Задание 4.1.6 Перевести радианную меру угла в градусную, если $\alpha = -\frac{5\pi}{4}$.

*Решение.*____

____

*Ответ:*____

Задание 4.1.7 Определить в какой четверти числовой окружности лежит точка, соответствующая числу $\frac{3\pi}{4}$.

а) 1 четверть;

б) 2 четверть;

в) 3 четверть;

г) 4 четверть.

Задание 4.1.8 Найти на числовой окружности точки: а) $\frac{21\pi}{4}$; б) $-\frac{37\pi}{6}$.

Решение.

*а)*____

____

____

____

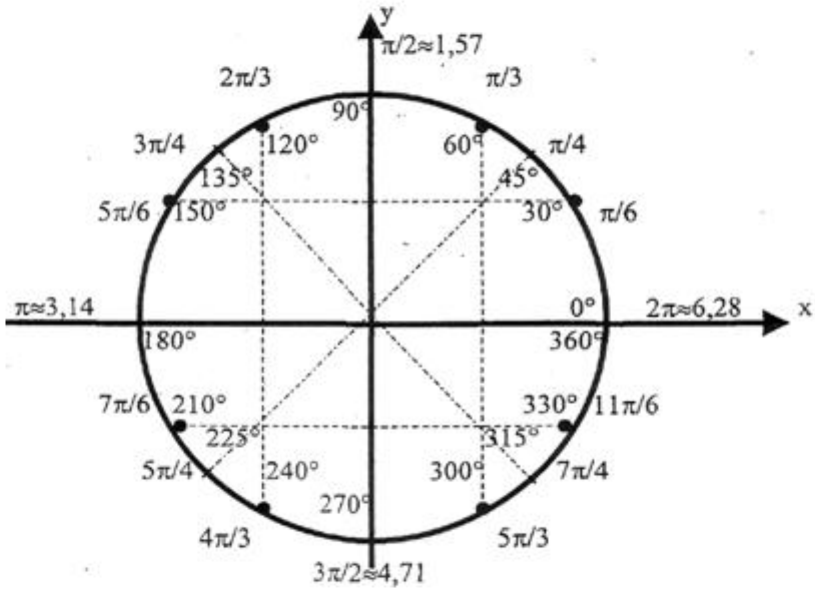
б)____

____

____

____

*Ответ:*____



Задание 4.1.9 Найти на числовой окружности точки: а) 1000^0; б)-754^0.

Решение.

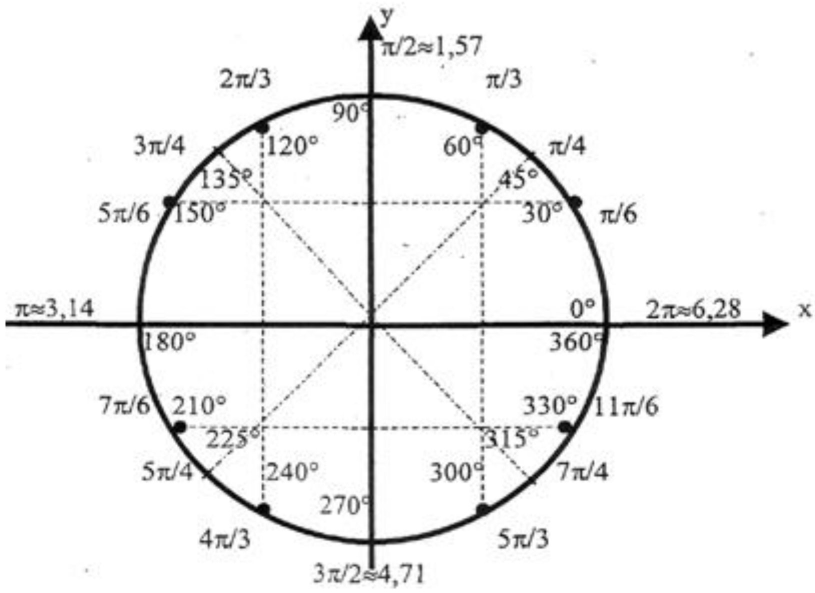
*а)*____

____

б)____

____

*Ответ:*____



4.2 Тригонометрические функции угла. Свойства тригонометрических функций угла

Краткая теоретическая справка

Определение. Синусом угла α называется, ордината точки, полученной поворотом точки $P_0(1;0)$ вокруг начала координат на угол α радиан.

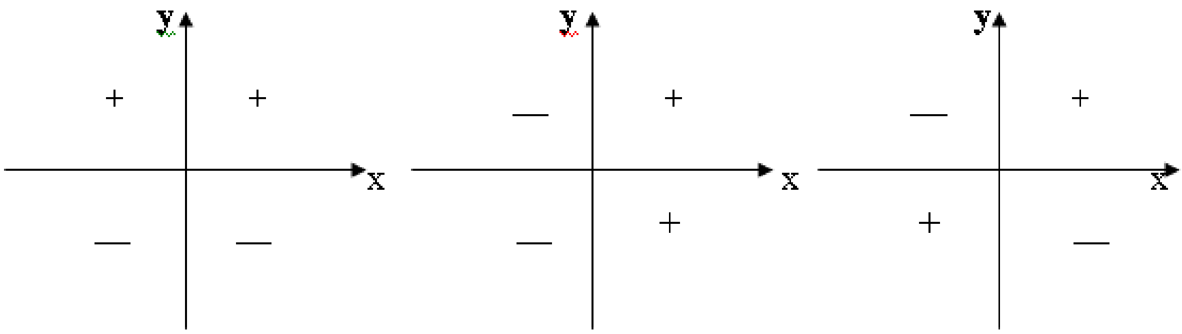
Определение. Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки $P_0(1;0)$ вокруг начала координат на угол α радиан.

Определение. Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу.

Определение. Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к его синусу.

Свойства тригонометрических функций угла:

1. Знаки тригонометрических функций угла



а) знаки синуса угла б) знаки косинуса угла в) знаки тангенса и котангенса угла

2.Четность и нечетность тригонометрических функций угла

Функция $y = \cos\alpha$ является чётной, т.е. при любом значении α выполняется равенство:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad (4)$$

Функции $y = \sin\alpha,\ y = tg\alpha,\ y = ctg\alpha$ являются нечётными, т. е. при любом значении α выполняются равенства:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,,$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha\,, \text{где}\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\,, \qquad (5)$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha\,,\ \text{где}\ \alpha \neq \pi n, n \in Z$$

Задание 4.2.1 Дать определения тригонометрических функций угла:

Синусом угла α называют -

____

____

Косинусом угла α называют -

____

____

Тангенсом угла α называют -

____

____

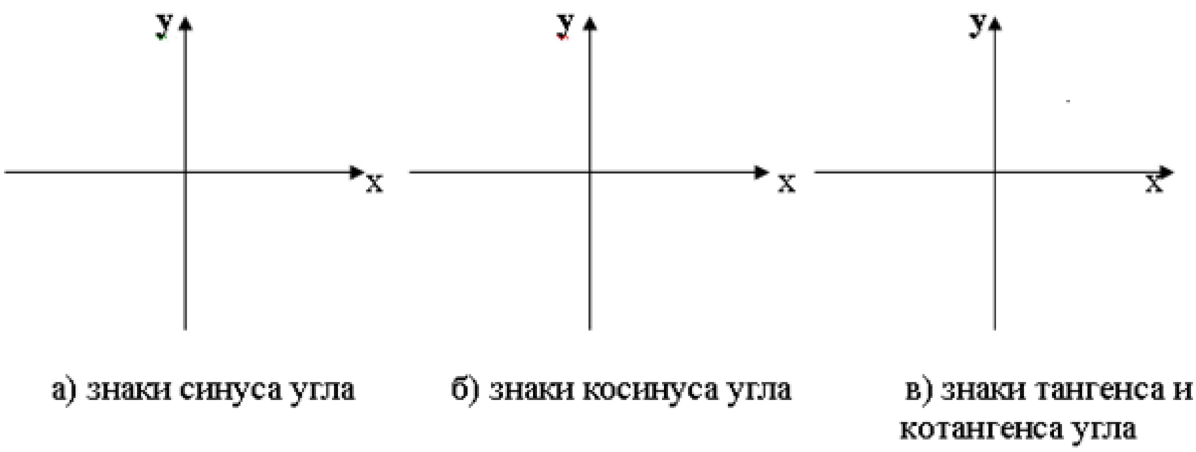
Котангенсом угла α называют -

____

____

Задание 4.2.2 Указать свойства тригонометрических функций угла:

- знаки тригонометрических функций угла



а) знаки синуса угла б) знаки косинуса угла в) знаки тангенса и котангенса угла

- периодичность тригонометрических функций угла:

____

____

____

-четность или нечетность тригонометрических функций угла:

____

____

____

Задание 4.2.3 Найти числовое значение выражения:

а) $3tg(-\frac{\pi}{4}) - 2\cos(-\pi) + 2\sin(-\frac{\pi}{6})$; б) $3ctg(-\frac{\pi}{6}) + 5\cos(-\frac{\pi}{3}) + 2\sin^2(-\frac{\pi}{6})$.

Решение.

*а)*____

____

____

____

б)____

____

____

____

*Ответ:*____

Задание 4.2.4 Вычислить значение выражения $Sin\frac{\pi}{6} + Cos\frac{\pi}{3}$.

а) 2;

б) -3;

в) 1;

г) - 1;

д) 3.

Задание 4.2.5 Дописать функцию $y = ...cosx$, чтобы функция была нечетной

а) $y = 5\cos x$;

б) $y = x^5 \cos x$;

в) $y = x^3 \cos x$;

г) $y = x^4 \cos x$;

д) $y = x\cos x$.

Задание 4.2.6 Указать нечетную функцию

а) $y = 3x^2 + x^4$;

б) $y = \sin x$;

в) $y = x\cos x$;

г) $y = x^4$;

д) $y = x^3$.

4.3 Основные тождества тригонометрии

Задание 4.3.1 Написать основные тождества тригонометрии

1.____

2.____

3.____

4.____

5.____

6.____

Задание 4.3.2 Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) 3;

в) $\frac{1}{3}$;

г) -2;

д) 0.

Задание 4.3.3 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ тогда значение выражения $2cos^2\alpha + 1$ равно_____________.

Задание 4.3.4 Упростить выражения: а) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$;

б) $(\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot tg^2\alpha) \cdot ctg\alpha$.

Решение.

*а)*____

____

____

____

б)____

____

____

____

*Ответ:*____

Задание 4.3.5 Вычислить $tg\alpha, ctg\alpha, \cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, где $\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$.

*Решение.*____

____

____

____

____

____

____

____

*Ответ:*____

4.4 Формулы тригонометрии

Краткая теоретическая справка

Определение. Формулы, выражающие тригонометрические функции от аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ через тригонометрические функции аргумента α, где α – любое допустимое значение аргумента 1 четверти, называются *формулами приведения.*

Для запоминания формул удобно пользоваться *мнемоническим правилом:*

1) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить;

2) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то наименование тригонометрической функции следует изменить;

3) перед полученной функцией от аргумента x надо ставиться тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что x – угол 1 четверти.

Формулы сложения

1) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$ (6)

2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$ (7)

3) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$ (8)

4) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$ (9)

5) $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta},$ где $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, $\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, (10)

$\alpha+\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$,

6) $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta},$ где $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, $\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, (11)

$\alpha-\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$,

Формулы суммы и разности синусов (косинусов) тригонометрических функций:

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2},$ (12)

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2},$ (13)

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2},$ (14)

4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2},$ (15)

Формулы двойных углов:

1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, (16)

2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, (17)

3) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,$ (18)

4) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$ (19)

5) $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$, (20)

Формулы половинных углов:

1) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, (21)

2) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$, (22)

3) $tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, где $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, (23)

Задание 4.4.1 Заполнить таблицу формул приведения

Аргумент	sin	cos	*tg*	*ctg*
$\frac{\pi}{2}+\alpha$				
$\frac{\pi}{2}-\alpha$				
$\pi+\alpha$				
$\pi-\alpha$				
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$				
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$				
$2\pi+\alpha$				
$2\pi-\alpha$				

Задание 4.4.2 Вычислить значения: а) $\sin(-133^0)$; б) $\cos(-400^0)$.

Решение.

*а)*____

____

____

б)____

____

____

*Ответ:*____

Задание 4.4.2 Вычислить с помощью формул приведения значение выражения $y = \sin 135^0$.

а) $\frac{1}{10}$;

б) $\frac{1}{2}$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) 0;

д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задание 4.4.3 Упростить выражение $\sin(2\pi + \mathrm{t})$, используя формулы приведения

а) $6\sin \mathrm{t}$;

б) $\sin \mathrm{t}$;

в) $\cos \mathrm{t}$;

г) $\mathrm{ctg}\, \mathrm{t}$;

д) $\mathrm{tg}\, \mathrm{t}$.

Задание 4.4.4 Написать формулы сложения и разности аргументов тригонометрических функций

1.____

2.____

3.____

4.____

5.____

6.____

Задание 4.4.5 Вычислить значение выражения $\sin 75^0$.

*Решение.*____

____

____

____

____

*Ответ:*____

Задание 4.4.6 Написать формулы суммы и разности синусов (косинусов) тригонометрических функций.

1.____

2.____

3.____

4.____

Задание 4.4.7 Вычислить значение выражения: а) $\cos 5x - \cos 2x$;

б) $\sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$.

Решение.

*а)*____

____

____

б)____

____

____

*Ответ:*____

Задание 4.4.8 Написать формулы двойных углов.

1.____

2.____

3.____

4.____

5.____

Задание 4.4.9 Вычислить $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, где $\alpha \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$.

*Решение.*____________________________________

*Ответ:*____________________________________

Задание 4.4.10 Написать формулы половинных углов.

1.____

2.____

3.____

Задание 4.4.11 Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}, cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}$, если $cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, где $\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$.

*Решение.*____________________________________

____

____

____

____

*Ответ:*____

4.5 Тригонометрические функции

Краткая теоретическая справка

Определение. Числовая функция, заданная формулой $y = \sin x$, называется функцией синуса.

Определение. Числовая функция, заданная формулой $y = \cos x$, называется функцией косинуса.

Определение. Числовая функция, заданная формулой $y = tgx$, называется функцией тангенса.

Определение. Числовая функция, заданная формулой $y = ctgx$, называется функцией котангенса.

Определение. Функция называется $f(x)$ *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения функции значения этой функции в точках $x, (x-T)$ и $(x+T)$ равны, т. е. выполняется равенство: $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$

Замечание. Если T - период функции, то Tk, где $k \in Z$ и $k \neq 0$ также период функции. Периодическая функция имеет бесконечное множество периодов.

Теорема 1. Наименьший положительный период синуса и косинуса равен 2π, т.е. при всех значениях α выполняются равенства:

$$\begin{gathered} \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \\ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha, \end{gathered} \quad (24)$$

Теорема 2. Наименьший положительный период тангенса и котангенса равен π, т.е. при всех значениях α выполняются равенства:

$$\begin{aligned} tg(\alpha+\pi)&=tg\alpha, \\ ctg(\alpha+\pi)&=ctg\alpha, \end{aligned} \qquad (25)$$

Схема исследования функции:

1) область определения;

2) область значения;

3) четность;

4) периодичность;

5) точки пересечения графика функции с осями координат;

6) промежутки знакопостоянства;

7) промежутки возрастания и убывания;

8) точки максимума и минимума;

9) экстремумы.

Задание 4.5.1 Дать определения:

Периодическая функция -

Функция синуса -

Функция косинуса -

Функция тангенса -

Функция котангенса -

____

____

Задание 4.5.2 Проверить принадлежит ли точка М $(\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2})$ графику функции $y = cosx$.

*Решение.*____

____

____

*Ответ:*____

Задание 4.5.3 Укажите промежутки, которые НЕ ЯВЛЯЮТСЯ областью значения функции $y = 3\sin x + 1$.

а) [0;3];

б) [-3;3];

в) [-2;4];

г) [1;9]; 0

д) [-4;7].

Задание 4.5.4 Значение функции $y = 4\sin x - 3$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$ равно__________.

Задание 4.5.5 Построить графики функций $y = \sin x$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

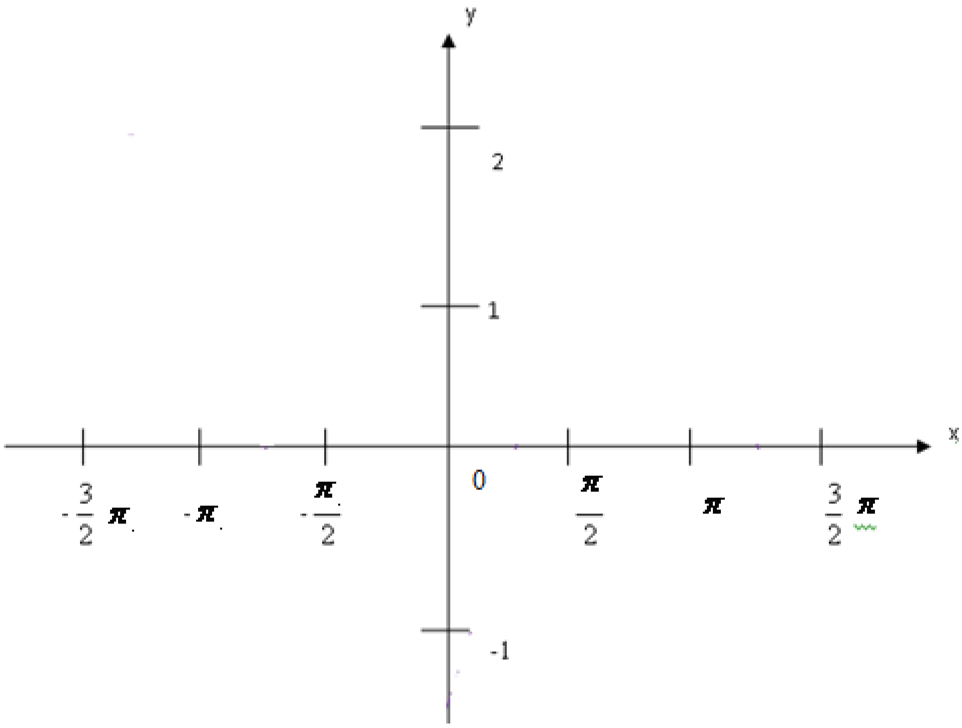


График функции $y = \sin x$

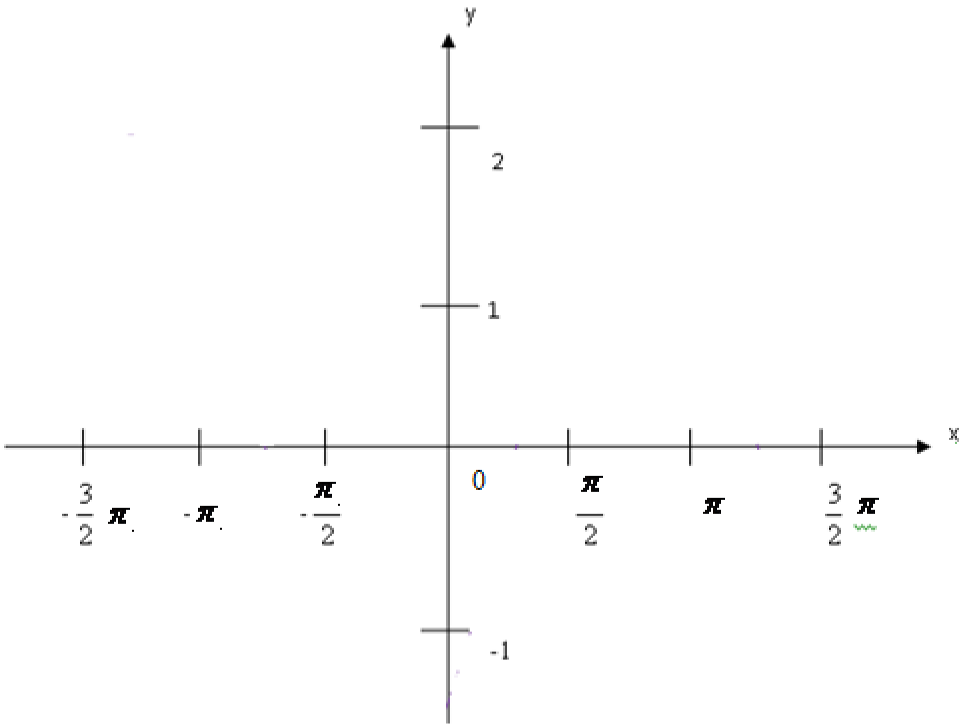


График функции $y = cosx$

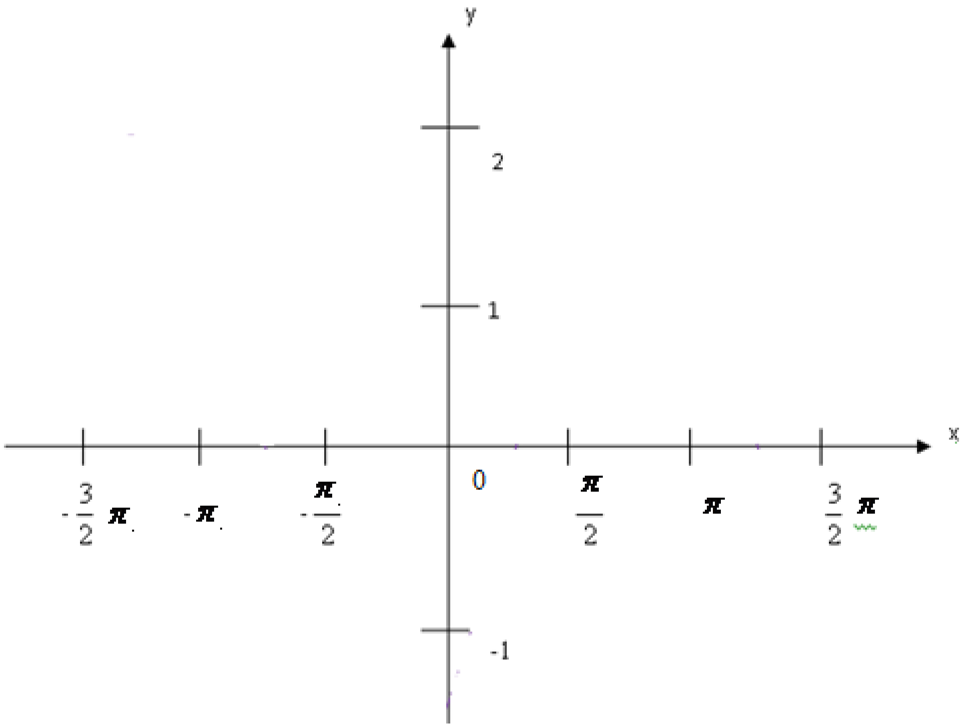


График функции $y = tgx$

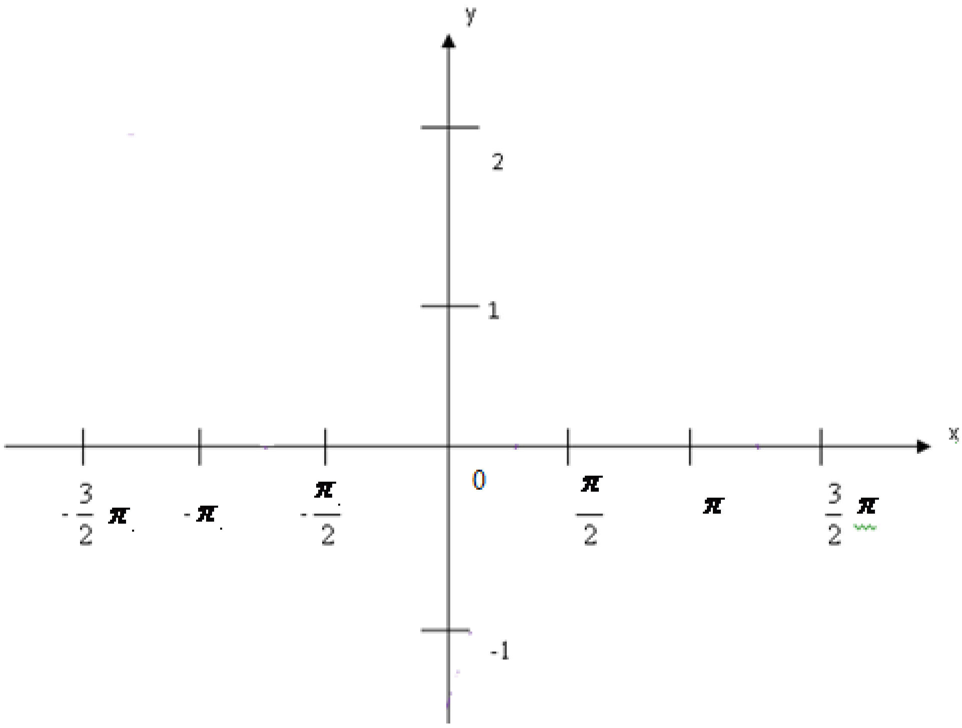


График функции $y = ctgx$

Задание 4.5.6 Построить графики функций $y = 2\sin(x - \pi)$, $y = \frac{1}{3}cos(x + \frac{\pi}{4})$.

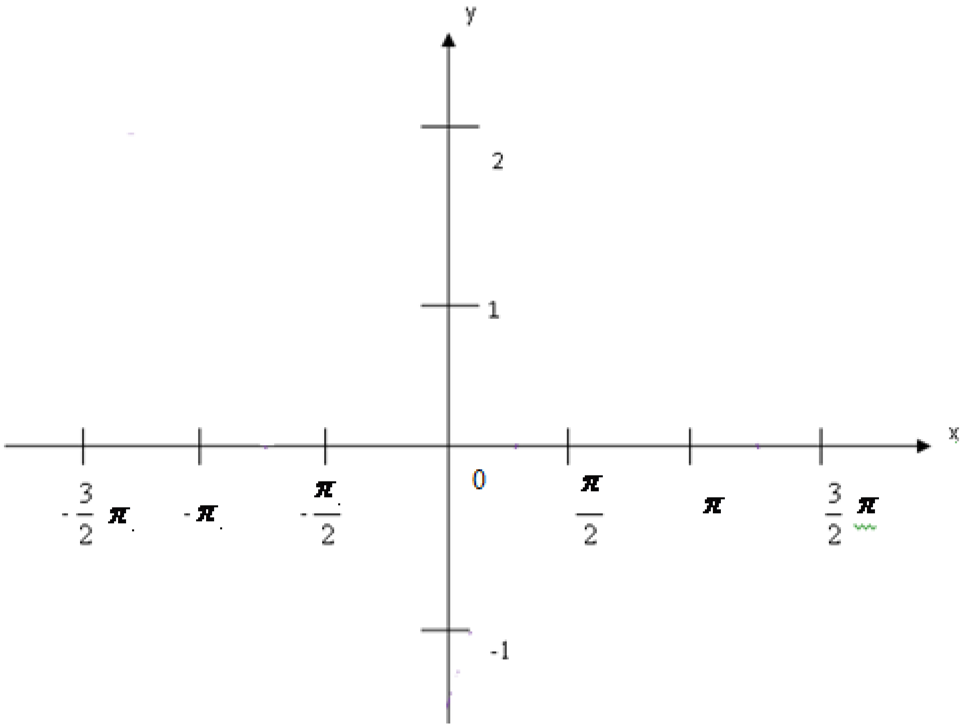


График функции $y = 2\sin(x - \pi)$

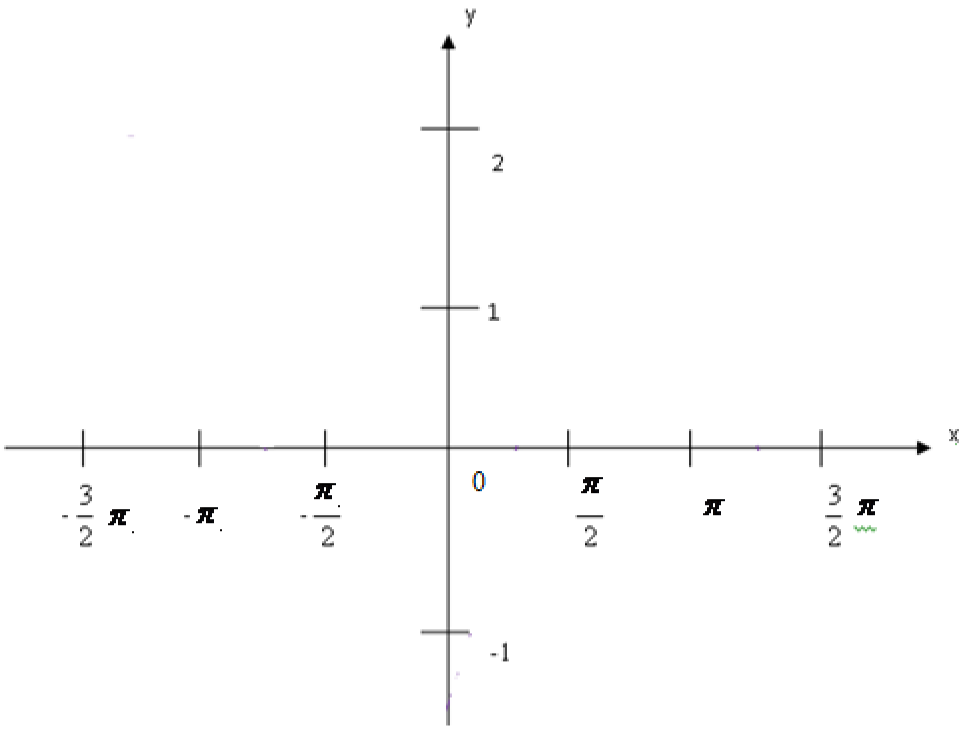


График функции $y = \frac{1}{3}cos(x + \frac{\pi}{4})$

Задание 4.5.7 Описать словесно принцип построения графика функции $y = -4\sin(x + \frac{\pi}{6})$.

*Решение.*____

____

____

____

____

____

*Ответ:*____

4.6 Обратные тригонометрические функции

Краткая теоретическая справка

Теорема (о корне): Пусть функция $f(x)$ возрастает (или убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых $f(x)$ на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень на промежутке I.

Определение. Арксинусом числа a, $a \in [-1;1]$ называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Обозначение: $\arcsin a$.

Определение. Арккосинусом числа $a \in [-1;1]$, называют такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a. Обозначение: $\arccos a$.

Определение. Арктангенсом числа a, $a \in R$, называется такое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. Обозначение: $arctga$.

Определение. Арккотангенсом числа a, $a \in R$, называют такое число из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a. Обозначение: $arcctga$.

Задание 4.6.1 Дать определения и указать свойства:

Арксинус числа *a* -

____

____

Свойства арксинуса числа *a*:

1.____

2.____

3.____

Арккосинус числа *a* -

____

____

Свойства арккосинуса числа *a*:

1.____

2.____

3.____

Арктангенсом числа *a* -

____

____

Свойства арктангенса числа *a*:

1.____

2.____

3.____

Арккотангенсом числа *a* -

____

____

Свойства арккотангенса числа *a*:

1.____

2.____

3.____

Задание 4.6.2 Сформулируйте теорему о корне.

____

____

____

Задание 4.6.3 Вычислить значение выражения $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}$.

а) $\frac{\pi}{3}$;

б) $\frac{\pi}{2}$;

в) 1;

г) 0;

д) $2\pi n$.

Задание 4.6.4 Значение выражения $\arcsin(\cos\frac{\pi}{3})$ равно__________.

Задание 4.6.5 Вычислить значение выражений: а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; д) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Решение.

а)____

б)____

в)____

г)____

д)____

*Ответ:*____

Задание 4.6.6 Вычислить значение выражений: а) $arctg1$; б) $arctg(-\sqrt{3})$; в) $arcctg1$; г) $arcctg(\frac{-1}{\sqrt{3}})$; д) $arcctg(-1)+arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение.

а)____

б)____

в)____

г)____

д)____

*Ответ:*____

Задание 4.6.7 Построить графики обратных тригонометрических функций

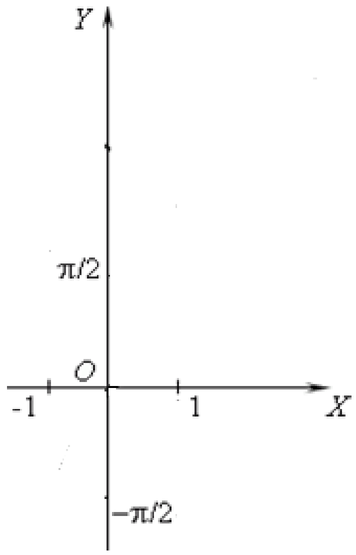


График функции $y = \arcsin x$

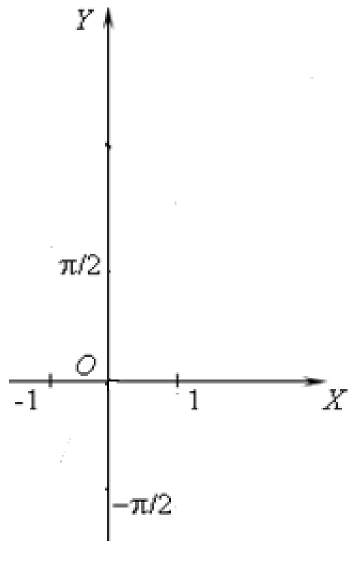


График функции $y = \arccos x$

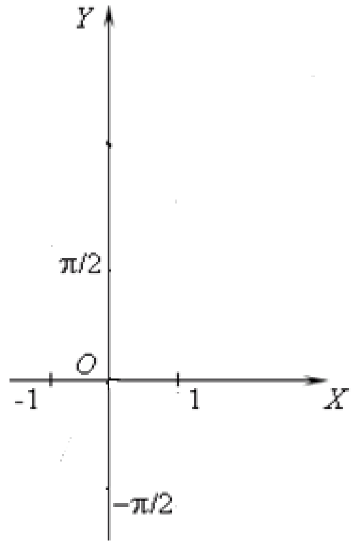


График функции $y = arctgx$

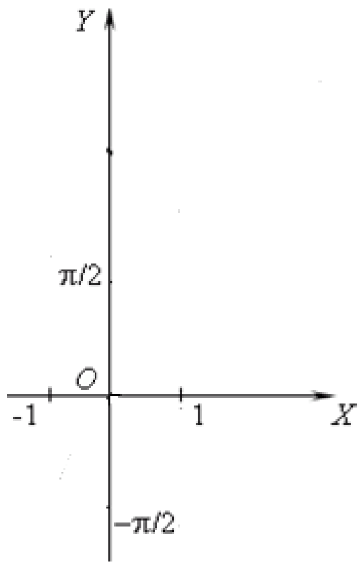


График функции $y = arcctgx$

4.7 Тригонометрические уравнения и неравенства

Краткая теоретическая справка

Решение уравнения вида $\cos x = a$

1) $|a| > 1$ решений нет, т.к. $|\cos x| \leq 1$.

2) Общий случай: $|a| < 1$.

Уравнение $\cos x = a$ по теореме о корне на $[0;\pi]$ имеет один корень $x = \arccos a$, т. к. $y = \cos x$ - четная функция, то на $[-\pi;0]$ есть еще одно решение $x = -\arccos a$ (рисунок 6).

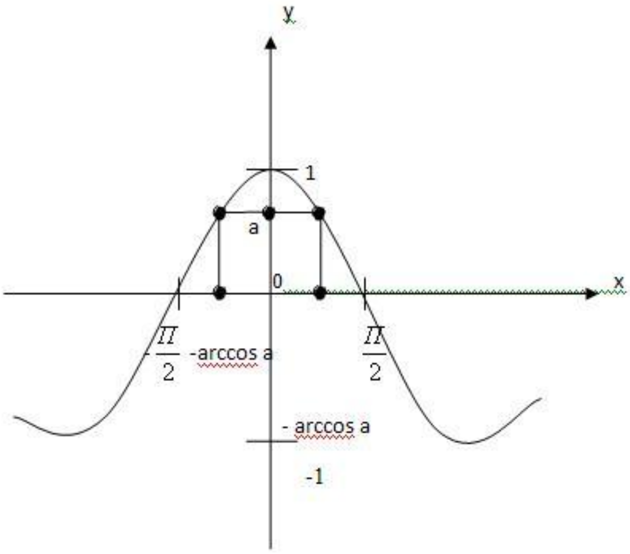


Рисунок 6 – Решение уравнения $\cos x = a$

Функция $y = \cos x$ периодическая, следовательно, множество решений имеет вид:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi\kappa, \kappa \in Z, \tag{26}$$

3) Частные случаи:

а) $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$;

б) $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$;

в) $\cos x = 1$, то $x = 2\pi\kappa, \kappa \in Z$.

Решение уравнения вида $\sin x = a$

1) $|a| > 1$ - решений нет, т.к. $|\sin x| \le 1$.

2) Общий случай: $|a| < 1$.

Уравнение $\sin x = a$ по теореме о корне имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ один корень $x_1 = \arcsin a$ (рисунок 7). На промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ функция синуса убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение имеет и на этом отрезке один корень. Из рисунка 35 видно, что этот корень есть число x_2 равное $\pi - \arcsin a$. Действительно, $\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a$. Кроме того , поскольку $-\frac{\pi}{2} \le x_1 \le \frac{\pi}{2}$, имеем $-\frac{\pi}{2} \le -x_1 \le \frac{\pi}{2}$ и $\pi - \frac{\pi}{2} \le \pi - x_1 \le \pi + \frac{\pi}{2}$, т. е. число x_2 принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

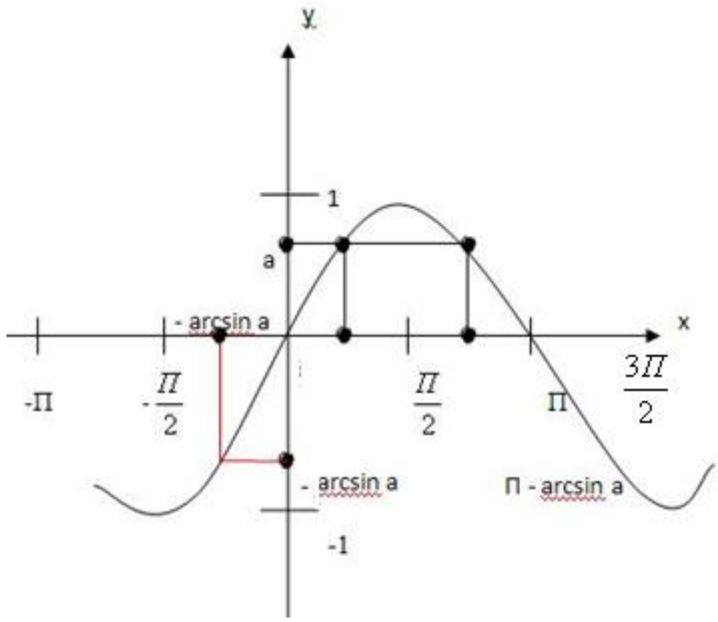


Рисунок 7 – Решение уравнения $\sin x = a$

Получаем, что уравнение $\sin x = a$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ (рисунок 7) имеет два решения $x_1 = \arcsin a$ и $x_2 = \pi - \arcsin a$ (совпадающие при a=1). Учитывая, что функция $y = \sin x$ периодическая, следовательно, множество решений имеет вид:

$$x=(-1)^{\kappa}\cdot\arcsin a+\pi\kappa,\kappa\in Z, \qquad (27)$$

3) Частые случаи:

а) $\sin x=1$, то $x=\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa,\kappa\in Z$;

б) $\sin x=0$, то $x=\pi\kappa,\kappa\in Z$;

в) $\sin x=-1$, то $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa,\kappa\in Z$.

Решение уравнения вида $tgx=a$

Функция $y=tgx$ возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, уравнение $tgx=a$, $a\in R$, имеет на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ единственный корень $x=arctga$. Учитывая периодичность данной функции, получаем формулу для множества всех решений уравнения $tgx=a$ при $a\in R$:

$$x=arctga+\pi\kappa,\kappa\in Z, \qquad (28)$$

Решение уравнения вида $ctgx=a$

Функция $y=ctgx$ убывает на $(0;\pi)$, следовательно, уравнение $ctgx=a$, $a\in R$, имеет на промежутке $(0;\pi)$ единственный корень $x=arcctga$. Учитывая периодичность данной функции, получаем формулу для множества всех решений уравнения $ctgx=a$ при $a\in R$:

$$x=arcctga+\pi\kappa,\kappa\in Z, \qquad (29)$$

Определение. Уравнение вида $a\cdot\sin^2 x+b\cdot\sin x+c=0$ (аналогично для tgx, $\cos x$, $ctgx$) называется квадратным тригонометрическим уравнением, где $a\neq 0$.

Алгоритм решения квадратных уравнений:

1) просмотреть, есть ли в уравнении член второй степени, т.е. выяснить является данное уравнение квадратным;

2) ввести новую переменную, с учетом этого переписать уравнение;

3) решить квадратное уравнение относительно новой переменной;

4) выполнить переподстановку, найти корни уравнения и записать ответ.

Определение. Уравнение вида $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$, где $a \neq 0, b \neq 0$ называется однородным уравнением 1 порядка.

Определение. Уравнение вида, $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$, где $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ называется однородным уравнением 2 порядка.

Задание 4.7.1 Указать формулы решения простейших тригонометрических уравнений.

$\cos x = a$ ____

$\sin x = a$ ____

$tgx = a$ ____

$ctgx = a$ ____

Задание 4.7.2 Указать частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений $\cos x = a$ и $\sin x = a$.

Частные случаи $\cos x = a$

а) $\cos x = -1$, то $x =$ ____

б) $\cos x = 0$, то $x =$ ____

в) $\cos x = 1$, то $x =$ ____

Частые случаи $\sin x = a$:

а) $\sin x = 1$, то $x =$ ____

б) $\sin x = 0$, то $x =$ ____

в) $\sin x = -1$, то $x =$ ____

Задание 4.7.3 Решить уравнения: а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $tgx = -\sqrt{3}$; в) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $ctgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение.

*а)*____

____

б)____

____

в)____

____

г)____

____

*Ответ:*____

Задание 4.7.4 Решить уравнения: а) $\cos x = -4$; б) $\sin\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin(\frac{x}{4} + 2\pi) = -1$; г) $tg2x = 7$; д) $\cos(2x + \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

*а)*____

____

б)____

____

____

в)____

____

____

г)____

____

____

*Ответ:*____

Задание 4.7.5 Укажите значения уравнение $cosx=\frac{1}{2}$, которые не являются решением данного уравнения.

а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$;

б) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$;

в) 0;

г) $\pi+\pi n, n\in Z$;

д) $4\pi n, n\in Z$.

Задание 4.7.6 Дать определения:

Квадратное тригонометрическое уравнение - ____

____

Однородное тригонометрическое уравнение 1 порядка - ____

____

Однородное тригонометрическое уравнение 2 порядка - ____

____

Задание 4.7.7 Решить уравнения: а) $2cos^2x+cosx-1=0$;

б) $6cos^2x+5\sin x-2=0$; в) $tgx+2ctgx=3$.

Решение.

*а)*____

____

б)

в)

Ответ:

Задание 4.7.8 Решить уравнения: а) $4\cos x - 3\sin x = 0$; б) $\sin^2 x - \sin 2x = 0$; в) $\sin 3x\cos 5x - \cos 5x = 0$.

Решение.

а)

б)

в)

Ответ:

Задание 4.7.9 Решить уравнения: а) $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$; б) $4\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 3$.

Решение.

а)

б)

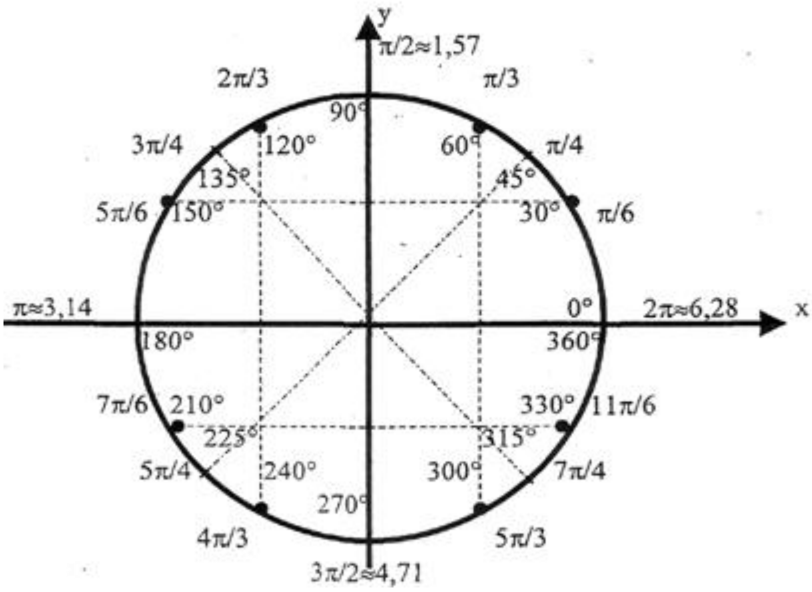
Ответ:

Задание 4.7.10 Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$.

Решение.

Ответ:

Задание 4.7.11 На числовой окружности показать решение тригонометрического неравенства $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.



Задание 4.7.12 Найти множество значений *x*, удовлетворяющих неравенству и принадлежащие указанному промежутку: а) $\cos x < -\frac{1}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

б) $\sin x \succ \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [0; \pi]$.

Решение.

*а)*____

б)____

*Ответ:*____

Задание 4.7.13 Решить тригонометрическое неравенство $\cos x < \frac{1}{2}$.

а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

в) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < 2\pi n, n \in Z$;

г) $0 < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

д) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Задание 4.7.14 Решить тригонометрическое неравенства: а) $\cos \frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$; в) $\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} < \frac{1}{2}$.

Решение.

*а)*____

____

____

____

____

б)____

____

____

____

____

____

в)____

____

____

____

____

____

*Ответ:*____

5 Уравнения и неравенства. Равносильность уравнений и неравенств

Краткая теоретическая справка

Ранее было рассмотрено равносильность уравнений (см. 3.2), а теперь выясним равносильность неравенств.

Определение. Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают (в том числе, неравенства, не имеющие решений, считаются равносильными).

Определение. Если все решения первого неравенства являются решениями второго неравенства (множество решений первого неравенства является подмножеством решений второго неравенства), то второе неравенство называется *следствием* первого неравенства.

Замечание. Два неравенства равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Основные свойства равносильности неравенств:

Свойство 1. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же выражение, определенное на ОДЗ исходного неравенства, то получиться неравенство, равносильное данному неравенству.

Свойство 2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, большее нуля, определенное на ОДЗ исходного неравенства, то получиться неравенство, равносильное данному неравенству.

Свойство 3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, меньшее нуля, определенное на ОДЗ исходного неравенства, а затем поменять знак неравенства на противоположный, то получиться неравенство, равносильное данному неравенству.

Утверждения о равносильности неравенств:

1. Неравенства $f(x)<g(x)$ и $g(x)<f(x)$ равносильны.

2. Неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)-g(x)<0$ равносильны.

3. Неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)+\alpha(x)<g(x)+\alpha(x)$ равносильны, если функция $\alpha(x)$ определена на ОДЗ неравенства $f(x)<g(x)$.

4. Неравенства $f(x)<g(x)$ и $\alpha(x)f(x)<\alpha(x)g(x)$ равносильны, если $\alpha(x)>0$ при всех x из ОДЗ неравенства $f(x)<g(x)$. Неравенства $f(x)<g(x)$ и $\alpha(x)f(x)>\alpha(x)g(x)$ равносильны, если $\alpha(x)<0$ при всех x из ОДЗ неравенства $f(x)<g(x)$.

5. Неравенства $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ и $f(x)g(x)>0$ равносильны.

6. Неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ и $f(x)>g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа а из промежутка $(1;\infty)$.

7. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x)<g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка (0;1).

8. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на множестве A. Тогда неравенства $f(x)<g(x)$ и $(f(x))^n<(g(x))^n$ равносильны на этом множестве (n - натуральное число).

9. Неравенства $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}$ и $f(x)<g(x)$ равносильны (n - натуральное).

10. Неравенства $f^{2n}(x)<g^{2n}(x)$ и $|f(x)|<|g(x)|$ (n - натуральное) равносильны.

11. Пусть a - фиксированное число из промежутка $(1;\infty)$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны на некотором множестве A, тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x)<g(x)$ и $\log_a f(x)<\log_a g(x)$. Если a - фиксированное число из промежутка (0;1) и функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны на некотором множестве A, тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x)<g(x)$ и $\log_a f(x)>\log_a g(x)$.

Системы уравнений

Определение. Если поставлена задача – найти такие пары значений (x,y), которые одновременно удовлетворяет уравнению $p(x;y)=0$, то говорят, что данные уравнения образуют систему уравнений.

$$\begin{cases} p(x,y)=0 \\ q(x,y)=0 \end{cases} \qquad (30)$$

Определение. Пару значений $(x;y)$, которая одновременно является решением и первого и второго уравнения системы, называют *решением системы уравнений.*

Можно рассмотреть систему из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} p(x,y,z)=0 \\ q(x,y,z)=0 \\ r(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (31)$$

В этом случае речь идет об отыскании троек чисел *(x;y;z;)*, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы. Вообще можно говорить о системе, содержащей любое число уравнений с любым числом переменных.

Замечание. Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или установить, что решений нет.

Основная идея решения уравнений состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному. Если же осуществляется переход к уравнению-следствию, то обязательно проверка найденных корней, поскольку среди них могут оказаться посторонние для заданного уравнения. Так как же абсолютно дело и при решении систем уравнений.

Определения. Две системы уравнений называют *равносильными,* если они имеют одни и те же решения или если обе системы не имеют решений.

Метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных, которые вы изучили ранее, абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе. Если же в процессе решения системы мы применяли неравносильные преобразования (возведение в квадрат обеих частей уравнения, умножение уравнений системы или преобразования, которые привели к расширению области определения какого-либо уравнения системы), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему.

Задание 5.1 Дать определения:

Равносильные уравнения -

____

____

Равносильные неравенства -

____

____

Уравнение следствие -

____

____

Неравенство следствие -

____

____

Задание 5.2 Установить соответствие стрелками между уравнениями и их решениями

$5x-10=0$	решений нет
$2x+1=x+1;$	3
$\log_3(2x+1)=\log_3(x+4).$	0
$x^2=-4;$	2

Задание 5.3 Укажите равносильные уравнения уравнению вида $2^x=256$.

а) $\log_2 x=3$;

б) $x^2-9x+8=0$;

в) $3x^2-24x=0$;

г) $\frac{16}{x}=2$;

д) $x^2=0$.

Задание 5.4 Равносильно ли уравнение $\sin x=0$ уравнениям.

а) $\cos x=1$;

б) $\cos 2x=1$;

в) $3ctgx=-1$;

г) $tgx = 0$;

д) $ctgx = 2$.

Задание 5. 5 Укажите соответствие между равносильными уравнениями.

$\sin x = 0$	$x^{37} + 1 = 12x^2$
$x^{37} - 12x^2 + 1 = 0$	$\frac{16}{x} = 2$
$\sqrt[5]{x^2 - 2x - 3} = 2$	$\cos 2x = 1$
$2^x = 256$	$x^2 - 2x - 3 = 32$

Задание 5.6 Решить уравнение $(x^2 - 6x)^5 = (2x - 7)^5$.

*Решение.*____

Ответ: ____

Задание 5.7 Решить уравнение $2^x x - 4x - 4 + 2^x = 0$.

*Решение.*____

Ответ: ____

Задание 5.8 Решить уравнение $x - \sqrt{x} - 2 = 0$.

а) 4;

б) 3;

в) 1;

г) -1;

д) 2.

Задание 5.9 Сколько решений имеет уравнение $x^3 - 9x + 20x = 0$.

а) решений нет;

б) 3;

в) 1;

г) 2;

д) 5.

Задание 5.10 Решить уравнение $\log_2(9x - 4x^2) = \log_2(x^3 + 4x^2)$.

*Решение.*____

____

____

____

____

Ответ: ____

Задание 5.11 Решить уравнение $\log^2{}_3 x = -\log_3 x + 2$.

а) 0;

б) 3;

в) 4;

г) -1;

д) $\frac{1}{9}$.

Задание 5.12 Решить неравенство $x^2 - 9 \le 0$.

а) (4;8);

б) (-3;3);

в) [-3;3];

г) (-1;0);

д) (-2;6).

Задание 5.13 Решением неравенства $\frac{2x+3}{x-1}<0$ является промежуток ______________.

Задание 5.14 Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x-11<2x+13 \\ 17x+9>8x+99 \end{cases}$.

*Решение.*____

____

____

____

____

Ответ: ____

Задание 5.15 Решением неравенства $3^{2x}-2\cdot 3^{x}-3\succ 0$ является промежуток ______________.

Задание 5.16 Указать соответствие между уравнениями и их корнями.

$x^2-6x+5=0$	5;9
$x^2-14x+45=0$	0;1
$x^2-x=0$	нет корней
$x^2-8x+9=0$	1;5

Задание 5.17 Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-y=-3 \end{cases}$.

*Решение.*____

____

____

____

____

Ответ: ____

Задание 5.18 Решить систему уравнений $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x^2+3xy-3y^2=6 \end{cases}$.

а) (-2;8);

б) (3;-1);

в) (-2;3);

г) (-1;2);

д) (9;-4).

Задание 5.19 Решением системы уравнений $\begin{cases} 2x-y=9 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ является пара чисел ___________.

Задание 5.20 Решить уравнение $\sin x\sqrt{4-x^2}=0$.

а) -2;

б) $\pi n, n \in Z$;

в) 3;

г) 1;

д) 2.

Задание 5.21 Решением уравнения $2^{\sqrt{x-3}}=\frac{1}{2}\sqrt{32}$ есть число ___________.

Задание 5.22 Решить неравенство $\log_3(x-1)\le\log_3(2x+3)$.

*Решение.*____

____

Ответ: ______________________

Задание 5.23 Решить уравнение $\sqrt{6x^2-3}=\sqrt{5x-2}$.

Решение. ______________________

Ответ: ______________________

6 Дополнительные задания

1) Вычислить значение выражения $-2+\frac{7}{13}$.

2) Вычислить значение выражения $2\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{4}$.

3) Сократить дробь $\frac{105}{60}$.

4) Вычислить значение выражения $3\frac{1}{2}:2{,}5$.

5) Вычислить значение выражения $\frac{3}{7}+\frac{1}{10}$.

6) Вычислить значение выражения $\sqrt{8}+\sqrt{2}$.

7) Расположить числа в порядке возрастания 0; -3,5; Π; $\sqrt{7}$;- $\sqrt{2}$.

8) Указать для числа 2 + 3i комплексно сопряженное число.

9) Найти сумму комплексных чисел (2 + 3i) и (5 + i).

10) Вычислить значение выражения i^{19}.

11) Вычислить значение выражения $(3-4i)(3+4i)$.

12) Решить уравнение $x^2-2x+2=0$.

13) Вычислить значение выражения $\frac{1-4i}{2+i}$.

14) Найти разность комплексных чисел (2 + i) и (5-3 i).

15) Найдите область определения функций:

а) $y=\frac{3x+1}{x^2-7x+12}$; б) $y=\sqrt{4-x^2}$.

16) Найдите область значений функций:

а) $y=\frac{1}{x^2}+1$; б) $y=3-x^4$.

17) Постройте график функций:

а) $y=\frac{2}{x-1}$; б) $y=\sqrt{x+2}$.

18) Найдите точки пересечения графика функции с осями координат:

а) $f(x)=x^3-4x$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

19) Найдите точки максимума и точки минимума функции $y=(x-3)^2+2$.

20) Проведите исследование функции $y=x^2-4x+3$.

21) Выясните функция является четной или нечетной $y=x+x^5$.

22) Постройте график функции, если известно, что $f(x)$ - четная, $f(x)=4x-x^2$ при $x\in[0;+\infty)$.

23) Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y=2x^2+4x$.

24) Найдите для функции $f(x)=5-4x$ обратную функцию.

25) Найдите значения:

а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{625}$.

26) Решите уравнение:

а) $x^3=125$; б) $x^4=64$.

27) Преобразуйте выражение:

а) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[8]{4}$; б) $\dfrac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[3]{320}}$; в) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{27}{8}}\right)^2$.

28) Решить уравнения: а) $\sqrt{x-3}=2x-7$; б) $x-\sqrt{x}=12$.

29) Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=3,\\ x-y=9.\end{cases}$

30) Постройте график функции:

а) $y=4^x$; б) $y=\left(\dfrac{1}{6}\right)^x$.

31) Какое из чисел больше:

а) $2^{0,4}$ или $2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$; б) $0{,}3^{-\pi}$ или $0{,}3^{-3}$.

32) Решите уравнения:

а) $27^x = 9^{\frac{1}{5}}$; б) $3^{x+2} - 3^x = 72$.

33) Решите неравенство:

а) $5^{x^2-1} > \frac{1}{5}$; б) $3^x < \frac{1}{9}$.

34) Найдите значение выражения:

а) $\log_2 16\sqrt{2}$; б) $\log_{0,2} 25$; в) $\lg 0{,}01$; г) $\log_3 \sqrt{3}$.

35) Запишите основное логарифмическое тождество. С его помощью вычислите:

а) $3^{2+\log_3 5}$ б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\log_2 3}$.

36) Прологарифмируйте по основанию a выражения $(c > 0, b > 0)$:

а) $16b^7\sqrt[5]{c}$ при $a = 2$; б) $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100b^7}}$ при $a = 10$.

37) Найдите x, если $\log_3 x = 2\log_3 7 + \frac{2}{3}\log_3 27 - \frac{3}{2}\log_3 16$.

38) Постройте график функции:

а) $y = \log_4 x + 1$; б) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x-1)$.

39) Какое число больше:

а) $\lg 7$ или $3\lg 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ или $\log_{\frac{1}{3}} 6$.

40) Решите уравнения:

а) $\log_2(x-15) = 4$; б) $\lg^2 x + 2\lg x = 8$.

41) Решите неравенства:

а) $\log_{0,6} x > 2$; б) $\lg x \le -2$.

42) Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2^{6y-x} = \frac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 4, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

43) Равносильны ли уравнения: а) $\sqrt{2x^2+2} = \sqrt{x^4+3}$ и $2x^2 + 2 = x^4 + 3$;

б) $\frac{x^2+3x-1}{x^2+1}=3$ и $x^2+3x-1=3x^2+3$.

44) Укажите для уравнения $\sqrt{7x+3}=x$ уравнение – следствие.

45) Равносильны ли уравнения $x^2=-1$ и $x^2=-4$.

46) Решить уравнения: а) $25\sqrt{x-6}=x^2\sqrt{x-6}$; б) $(x^2-6x)^5=(2x-7)^5$.

47) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y=16; \\ \log_3 x+\log_3 y=1. \end{cases}$

48) Решить неравенства:

а) $x^2-6x+5\le 0$; б) $\frac{3x-5}{4+2x}\ge 0$; в) $\frac{6x+4}{3-x}\ge 1$.

49) Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x-11\succ 2x+13; \\ 17x+9\prec 9x+99. \end{cases}$

50) Выразите в радианной мере величину угла:

а) 18^0 ;б) -250^0 ; в) -360^0 ; г)225^0.

51) Выразите в градусной мере величину угла:

а) π ; б)-2,5 ; в) -$\frac{\pi}{3}$; г) 3.

52) Упростите выражение $(1+\cos\alpha)(1-c\mathrm{os}\alpha)(tg\alpha+ctg\alpha)$.

53) Докажите тождество $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

54) Определите знак выражения:

а) $\sin(-212^0)$ и $ctg\frac{7\pi}{9}$;

б) $\cos(-305^0)$ и $tg(-\frac{6\pi}{5})$.

55) По данному значению одной из тригонометрических функций и промежутку, которому принадлежит α, найдите значение остальных трех основных тригонометрических функций $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

56) Приведите к значению тригонометрической функции наименьшего положительного аргумента:

а) $\sin(-\frac{13\pi}{8})$; б) $ctg\frac{21\pi}{13}$; в) $tg(-\frac{14\pi}{3})$.

57) Упростите выражение $\sin\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+tg\frac{7\pi}{8}$.

58) Найдите значение выражения $\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)$, если $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

59) Докажите тождество $\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)+(\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\sin\alpha$.

60) Вычислите $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{15}{17}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

61) Докажите тождество $\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}(2\cos^2\alpha-1)=\sin 2\alpha$.

62) Найдите $tg\frac{\alpha}{2}$, если $cos\alpha=-\frac{2}{3},\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

63) Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

64) Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y=1+1{,}5\sin x$; б) $y=2\cos x-1$; в) $y=2tgx$.

65) Найдите значение выражения:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin 1$; б) $arctg(-1)-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

66) Решите уравнения:

а) $2\cos x+\sqrt{3}=0$;

б) $2\sin^2 x+3\sin x=2$;

в) $\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7 Вопросы к экзамену

1. Целые и рациональные числа. Действия с целыми и рациональными числами.
2. Действительные числа.
3. Комплексные числа. Работа с комплексными числами.
4. Функции и их графики.
5. Четные и нечетные функции. Определение четных и нечетных функций.
6. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций.
7. Преобразование графиков.
8. Обратные функции. Область определения и область значения обратной функции.
9. Измерение углов. Единичная окружность. Формулы перевода угловых мер.
10. Определение тригонометрических функций.
11. Свойства тригонометрических функций (четность, периодичность, знаки).
12. Основные тождества тригонометрии.
13. Формулы сложения аргументов.
14. Формулы сложения тригонометрических функций.
15. Формулы приведения. Формулы двойных и половинных углов.
16. Свойства и график тригонометрической функции $y = \sin x$.
17. Свойства и график тригонометрической функции $y = \cos x$.
18. Свойства и график тригонометрической функции $y = tgx$.
19. Свойства и график тригонометрической функции $y = ctgx$
20. Простейшие тригонометрические уравнения вида $\cos x = a$, $\sin x = a$.
21. Простейшие тригонометрические уравнения вида $tgx = a$, $ctgx = a$.
22. Квадратные тригонометрические уравнения.

23. Однородные тригонометрические уравнения.
24. Тригонометрические неравенства.
25. Корень *n*-степени и его свойства.
26. Иррациональные уравнения.
27. Степень с рациональным показателем.
28. Показательная функция: основные понятия, ее свойства и график.
29. Показательные уравнения.
30. Показательные неравенства.
31. Логарифмы и их свойства.
32. Десятичные и натуральные логарифмы.
33. Логарифмическая функция: основные понятия, ее свойства и график.
34. Логарифмические уравнения.
35. Основные способы решения логарифмических уравнений.
36. Логарифмические неравенства.
37. Равносильность уравнений и неравенств.
38. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств. Основные методы их решения.

Список рекомендованной литературы

1 Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала анализа 10-11кл.: учебник /А. Н. Колмогоров. – 16-е изд. – М.: Просвещение, 2007. – 38с.

2 Мордкович А. И. Алгебра и начала анализа 10-11кл.: В двух частях: учебник / А. Н. Мордкович. – 5-е изд. М.: Мнемозина, 2003. - Ч 1. – 375 с.

3 Богомолов, Н. В. Сборник задач по математике: учебник / Н. В. Богомолов. –5-е изд. Стер. М.: Просвещение, 2003. – 480 с.

4 Алимов, Ш. А. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11кл. / Ш. А. Алимов [и др.]. – М.: Просвещение, 2002. – 384 с.

5 Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11кл. / М. И. Башмаков. – 2- е изд. перераб. и доп. – М.:Просвещение, 2000. – 352 с.

6 Цыпкин, А. Г. Справочник по элементарной математике / А. Г. Цыпкин. – М.: Высшая школа, 1998. – 480 с.

7 Лисичкин, В. Т. Математика для техникумов / В. Т. Лисичкин. – уч. для техникумов, - М.: Высшая школа, 1991. – 480 с.