

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Н.А. Гамова, И.П. Томина

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.01 Машиностроение, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 15.03.06 Мехатроника и робототехника, 24.03.04 Авиационное строительство, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Оренбург
2016

УДК 510.2:517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7
Г 18

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук С.А. Герасименко

Гамова, Н.А.
Г 18 Элементы векторного анализа: методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий / Н.А. Гамова, И.П. Томина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2016. – 47 с.

Методические указания дают возможность использовать их в процессе аудиторной и самостоятельной работы, подготовиться по изучаемому разделу.

Методические указания содержат необходимые теоретические сведения, вопросы для самопроверки, примеры решения задач, примерные варианты самостоятельной работы и 20 вариантов индивидуальных домашних заданий.

Данные методические указания могут быть использованы студентами инженерных специальностей.

УДК 510.2:517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7

© Гамова Н.А., Томина И.П., 2016
© ОГУ, 2016

Содержание

Введение	4
1 Краткий теоретический материал.....	5
2 Вопросы для самопроверки	21
3 Примеры решения задач	22
4 Примерные варианты самостоятельной работы	38
5 Варианты индивидуальных домашних заданий.....	40
Список использованных источников	47

Введение

Методические указания составлены в соответствии с программой изучения дисциплины «Математический анализ» для студентов второго курса дневного и заочного отделений и предназначены в помощь студентам при изучении разделов «Элементы векторного анализа».

Методические указания содержат краткий теоретический материал по основным понятиям теории скалярных и векторных полей. Позволят познакомить студентов с основными понятиями и методами линейной алгебры и теории дифференциально-интегрального исчисления функций, что составляет основу векторного анализа; сформировать правильный научный подход к решению различных задач векторного анализа.

«Векторный анализ» позволяет студентам овладеть фундаментальными понятиями и методами современной математики, без знания которых невозможна дальнейшая профессиональная подготовка. При освоении данного курса у студентов формируются навыки грамотной постановки научных задач, решения задач с применением математического аппарата, систематизации полученных знаний.

1 Краткий теоретический материал

Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля

В пространстве задано *поле* некоторой величины, если в каждой точке пространства (или некоторой его области, т.е. части) определено значение этой величины. Поле может быть скалярным или векторным в зависимости от характера исследуемой величины. Пусть V – область в пространстве или на плоскости. Говорят, что в области V задано *скалярное поле*, если каждой точке M из V поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$. Если введены декартовы координаты, то скалярное поле можно представить в виде функции координат точки M : $u = u(x, y, z)$, $u = u(x, y)$. В этом случае понятие скалярного поля совпадает с понятием функции трех или двух переменных.

Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле имеет данное фиксированное значение C .

Уравнение поверхности уровня имеет вид

$$u(x, y, z) = C. \quad (1)$$

Поверхности уровня называют еще *эквипотенциальными поверхностями* (поверхностями одинакового потенциала) или *изоповерхностями*.

Если поле задано в плоской области, то равенство

$$u(x, y) = C \quad (2)$$

определяет некоторую *линию*. Эти линии называют *линиями уровня или изолиниями*.

Скалярные поля иногда обладают специальными свойствами симметрии. Если значение $u(M)$ зависит лишь от расстояния точки M до некоторой фиксированной

точки M_0 , то поле называют *сферическим*. Поверхности уровня сферического поля – концентрические сферы.

Если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле $u(M)$ переходит само в себя, т.е. существует такая декартова система координат, в которой поле можно задать функцией двух переменных $u = u(x, y)$, то это поле называют *плоскопараллельным или двумерным*. Поверхности уровня таких полей *цилиндрические*.

Если поле $u(M)$ переходит само в себя при повороте пространства на произвольный угол вокруг некоторой оси, иначе, если существует цилиндрическая система координат, в которой поле может быть задано функцией, зависящей лишь от $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z , то такое поле называют *осесимметрическим*.

Поверхности уровня этого поля – поверхности вращения. Если поверхностями уровня являются круговые цилиндры, то $u(M)$ называют *цилиндрическим*.

Градиент скалярного поля. Производная по направлению

Пусть M_0 – некоторая точка области V , а M отличная от M_0 точка.

Линейной формой $\varphi(\Delta \vec{r})$ относительно вектора $\Delta \vec{r}$ называют скалярное произведение вектора $\Delta \vec{r}$ на некоторый вектор $\vec{g}$, не зависящий от $\Delta \vec{r}$, $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ – радиус-вектор точки M , $\Delta \vec{r}$ – вектор, соединяющий точки M и M_0 .

Скалярное поле $u(M)$ называется *дифференцируемым* в точке M_0 из области V , если приращение поля Δu в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = \vec{g} \cdot \Delta \vec{r} + o(\rho), \quad (3)$$

где $\rho = \rho(M_0, M)$ – расстояние между точками M_0 и M , $\Delta u = u(M) - u(M_0)$.

Градиентом дифференцируемого в точке M_0 скалярного поля называют вектор $\vec{g}(M_0)$ из (3). Обозначение: $\text{grad } u(M_0) = \vec{g}(M_0)$.

Если поле дифференцируемо в каждой точке области V , то оно дифференцируемо в V . В этом случае $\text{grad } u(M) = \bar{g}(M)$.

При заданной декартовой системе координат

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}. \quad (4)$$

Величина $|\text{grad } u|$ определяется формулой

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \quad (5)$$

Свойства градиента:

- 1) $\text{grad } c = 0$, $c = \text{const}$;
- 2) $\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$, где u , v – дифференцируемые скалярные поля;
- 3) $\text{grad}(uv) = u \text{ grad } v + v \text{ grad } u$;
- 4) $\text{grad}(cu) = c \text{ grad } u$, $c = \text{const}$;
- 5) $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2}$ ($v \neq 0$);
- 6) $\text{grad } f(u) = f'(u) \text{ grad } u$, f – дифференцируемая функция;
- 7) $\text{grad}|\bar{r}| = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$.

Если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – базис в ортогональной криволинейной системе координат g_1, g_2, g_3 , то

$$\text{grad } u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial g_1} \bar{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial g_2} \bar{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial g_3} \bar{e}_3,$$

где H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе, определенные формулой

$$H_j = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_j}\right)^2}, \quad j=1,2,3; \quad (6)$$

в цилиндрической системе координат

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{e}_z;$$

в сферической системе координат

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi.$$

Дифференциалом скалярного поля $u(M)$ называют скалярное произведение $\text{grad } u \cdot \Delta \bar{r}$

$$du = \text{grad } u \cdot \Delta \bar{r}.$$

Пусть $\bar{e}$ – единичный вектор, указывающий направление l в точке M_0 области V , M – произвольная точка V , отличная от M_0 и такая, что вектор $\overline{M_0 M}$ коллинеарен вектору $\bar{e}$.

Предел $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho}$, где $\Delta u = u(M) - u(M_0)$, $\rho = \rho(M_0, M)$ – расстояние между

точками M_0 и M , если он существует, называют *производной поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению $\bar{e}$* и обозначают

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{e}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho}.$$

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{e}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (7)$$

где $\bar{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$,

или

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{e}} = \text{grad } u \cdot \bar{e} = n p_{\bar{e}} \text{ grad } u.$$

Если $\bar{e}$ имеет направление $\text{grad } u$, то

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{e}} \right|_{\max} = |\text{grad } u|.$$

Векторное поле. Векторные линии

Если каждой точке M области V поставлен в соответствие некоторый вектор $\bar{F}(M)$, то говорят, что в V задано *векторное поле*.

В декартовой системе координат $\bar{F}(M)$ можно представить совокупностью трех скалярных функций, являющихся координатами вектора $\bar{F}(M)$. Обозначим их $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, тогда

$$\bar{F}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}.$$

Иногда векторные поля обладают специальными свойствами симметрии.

Векторное поле $\vec{F}(M)$ называют *одномерным*, если существует декартова система координат такая, что координаты $\vec{F}(M)$ имеют вид $P(x), 0, 0$.

Если существует такая цилиндрическая система координат, что $\vec{F}(M)$ зависит от ρ и z , но не зависит от φ , то поле $\vec{F}(M)$ называют *осесимметрическим*. Если $\vec{F}(M)$ зависит лишь от ρ , то поле называют *цилиндрическим*.

Векторное поле $\vec{F}(M)$ называют *плоскопараллельным*, если существует декартова система координат такая, что координаты $\vec{F}(M)$ можно задать функциями двух переменных $P(x, y), Q(x, y), R(x, y)$.

Векторной линией (силовой линией, линией тока) векторного поля $\vec{F}(M)$ называется линия L , лежащая в V , если в каждой точке L направление касательной к ней совпадает с направлением $\vec{F}(M)$ в этой точке.

Параметрическое дифференциальное уравнение векторной линии, проходящей через точку M_0 , выражается формулами

$$\vec{r}'(t) = \lambda \vec{F}, \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0,$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор начальной точки M_0 , λ – произвольное число, t_0 – начальное значение параметра, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – уравнение векторной линии.

Система дифференциальных уравнений векторных линий:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \quad (8)$$

При непрерывно дифференцируемых функциях P, Q, R ни в одной точке V не обращающихся одновременно в нуль, через каждую точку V пройдет единственная векторная линия.

Часть пространства, в котором задано векторное поле $\vec{F}(M)$, ограниченное некоторой поверхностью S , называется *векторной трубкой*, если в каждой точке

поверхности S нормаль к ней ортогональна $\vec{F}(M)$ в этой же точке, т.е. векторная трубка – часть пространства, состоящая из целых векторных линий, каждая из которых или целиком лежит внутри векторной трубки или целиком находится вне ее.

Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция. Соленоидальное поле. Теорема Остроградского

Потоком векторного поля $\vec{F}(M)$ через поверхность в сторону, определяемую единичным вектором $\vec{n}$ нормали к поверхности S , называют интеграл:

$$\Pi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S F_n dS = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS}.$$

В декартовой системе координат, если $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, то

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \\ &= \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Пусть $V(S)$ – объем области V , ограниченной замкнутой поверхностью S . В этом случае поток через внешнюю сторону поверхности S записывают в виде $\oiint_S F_n dS$.

Дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\vec{F}(M)$ в точке M области

V называется $\lim_{S \rightarrow M} \frac{\oiint_S F_n d\sigma}{V(S)}$, если такой предел существует.

Следовательно,

$$\operatorname{div} \bar{F}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\oint_S F_n d\sigma}{V(S)} = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\oint_S (\bar{F} \cdot \bar{n}) dS}{V(S)}.$$

Теорема 1. Если P, Q, R непрерывны вместе со своими частными производными в области V , то дивергенция поля $\bar{F}$, заданного координатами P, Q, R , существует во всех точках области V и в любой декартовой системе координат выражается формулой

$$\operatorname{div} \bar{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (9)$$

Если $\operatorname{div} \bar{F}(M) > 0$, то точка M – источник векторных линий, если $\operatorname{div} \bar{F}(M) < 0$ то точка M – сток силовых линий.

Свойства дивергенции:

- 1) $\operatorname{div} \bar{C} = 0$, $\bar{C}$ – постоянный вектор;
- 2) $\operatorname{div}(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \operatorname{div} \bar{F}_1 + \operatorname{div} \bar{F}_2$;
- 3) $\operatorname{div}(u\bar{F}) = u \cdot \operatorname{div} \bar{F} + \bar{F} \cdot \operatorname{grad} u$, где u – скалярное поле.

В криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial g_1} + \frac{\partial(A_2 H_1 H_3)}{\partial g_2} + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial g_3} \right),$$

где A_1, A_2, A_3 – координаты $\bar{F}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$; H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе, определенные формулой (6); в цилиндрических координатах

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

в сферических координатах

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Векторное поле, дивергенция в каждой точке которого равна нулю, называется соленоидальным или трубчатым.

Теорема 2 (Теорема Остроградского). Формула

$$\iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

для векторного поля $\bar{F}(M)$ имеет вид

$$\oiint_S F_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dV. \quad (10)$$

Циркуляция векторного поля

Циркуляцией векторного поля $\bar{F}(M)$ вдоль линии L называется криволинейный интеграл

$$\Pi = \int_L F_\tau dl = \int_L \bar{F} \cdot \bar{\tau} dl,$$

где L — гладкая или кусочно-гладкая линия, F_τ — тангенциальная составляющая поля $\bar{F}(M)$ на L , $\bar{\tau}$ — единичный вектор касательной к линии L в точке M .

В декартовой системе координат

$$\Pi = \int_L F_\tau dl = \int_L P dx + Q dy + R dz,$$

где P, Q, R – непрерывные составляющие поля $\bar{F}$.

Если $\bar{F}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$ – силовое поле, то его циркуляция вдоль линии L представляет собой работу этого поля вдоль линии L .

Ротор векторного поля. Теорема Стокса

Ротором (вихрем) поля $\bar{F}(M)$ в точке M называется

$$\text{rot } \bar{F}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\oiint_S (\bar{n} \times \bar{F}) dS}{V},$$

если этот предел существует. Здесь V – область, ограниченная замкнутой гладкой или кусочно-гладкой поверхностью S , V – объем области V , $\bar{n}$ – нормаль к поверхности S в точке M .

Для декартовой системы координат с непрерывными вместе со своими частными производными P, Q, R

$$\text{rot } \bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (11)$$

В символической форме

$$\text{rot } \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Свойства ротора:

- 1) $\text{rot } \bar{C} = 0$, $\bar{C}$ – постоянное векторное поле;
- 2) $\text{rot } \bar{r} = 0$, если $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$;

$$3) \operatorname{rot}(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \operatorname{rot} \bar{F}_1 + \operatorname{rot} \bar{F}_2;$$

$$4) \operatorname{rot}(u\bar{F}) = u \operatorname{rot} \bar{F} + \operatorname{grad} u \times \bar{F}.$$

В ортогональных криволинейных координатах

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{F} = & \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial g_2} - \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial g_3} \right) \bar{e}_1 + \frac{1}{H_1 H_3} \left(\frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial g_3} - \frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial g_1} \right) \bar{e}_2 + \\ & + \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial g_1} - \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial g_2} \right) \bar{e}_3, \end{aligned}$$

где A_1, A_2, A_3 – координаты $\bar{F}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$; H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе (см. формулы (6));

в цилиндрических координатах

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \bar{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \bar{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \bar{e}_z;$$

в сферических координатах

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{F} = & \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \bar{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} \right) \bar{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \bar{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Формула Стокса

Формула в векторной форме имеет вид

$$\oint_L F_\tau dl = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{F})_n dS,$$

т.е. циркуляция векторного поля $\bar{F}$ вдоль некоторого замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность, ограниченную этим контуром. Из последней формулы

$$(\operatorname{rot} \bar{F}(M))_n = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\oint_L F_\tau dl}{\tilde{S}},$$

где $\tilde{S}$ – площадь поверхности S , $(\operatorname{rot} \bar{F}(M))_n$ – проекция ротора на нормаль.

Потенциальное поле

Пусть V – односвязная область, в которой задано поле $\bar{F}(M)$.

Векторное поле $\bar{F}(M)$ называется *потенциальным*, если его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\bar{F}(M) = \operatorname{grad} u(M).$$

Поле $\bar{F}$ потенциально в V тогда и только тогда, когда $\operatorname{rot} \bar{F}(M) = 0$, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

При непрерывных P , Q , R со своими частными производными задача о нахождении потенциала свелась к задаче восстановления функции по ее полному дифференциалу.

Оператор Гамильтона. Операции второго порядка в векторном анализе.

Оператор Лапласа

Оператор Гамильтона (оператор набла) – линейный дифференциальный оператор, который по определению записывают в виде

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}.$$

С учетом этого оператора основные операции теории поля можно записать так:

$$\text{grad } u = \nabla u, \quad \text{div } \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F}, \quad \text{rot } \bar{F} = \nabla \times \bar{F}.$$

С помощью оператора набла удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа, причем эти формулы приобретают в такой записи большую наглядность и выразительность. При выполнении действий с оператором ∇ следует учитывать, что оператор дифференциальный и векторный, т.е. пользоваться правилами дифференциального исчисления и векторной алгебры. При этом следует помнить, что если ∇ действует на какое-либо произведение, то в первую очередь учитывают его дифференциальные свойства, а затем векторные. Входящие в состав формулы величины, которые подвергаются воздействию оператора набла, обозначают стрелкой, в окончательном результате они должны стоять слева от него. Рассмотрим операцию взятия дивергенции, ротора и градиента от векторного произведения полей $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$:

$$\begin{aligned} \text{div}(\bar{F}_1 \times \bar{F}_2) &= \nabla \cdot (\bar{F}_1 \times \bar{F}_2) = \nabla \cdot \left(\overset{\downarrow}{\bar{F}_1} \times \bar{F}_2 \right) + \nabla \cdot \left(\bar{F}_1 \times \overset{\downarrow}{\bar{F}_2} \right) = \\ &= \bar{F}_2 \cdot (\nabla \times \bar{F}_1) - \bar{F}_1 \cdot (\nabla \times \bar{F}_2) = \bar{F}_2 \cdot \text{rot } \bar{F}_1 - \bar{F}_1 \cdot \text{rot } \bar{F}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\bar{F}_1 \times \bar{F}_2) &= \nabla \times \bar{F}_1 \times \bar{F}_2 = \nabla \times \bar{F}_1 \times \bar{F}_2 + \nabla \times \bar{F}_1 \times \bar{F}_2 = \\
&= -\nabla \times \bar{F}_2 \times \bar{F}_1 + \nabla \times \bar{F}_1 \times \bar{F}_2 = -\bar{F}_2(\nabla \cdot \bar{F}_1) + (\bar{F}_2 \cdot \nabla)\bar{F}_1 + \\
&+ \bar{F}_1 \cdot (\nabla \cdot \bar{F}_2) - (\bar{F}_1 \cdot \nabla)\bar{F}_2 = \bar{F}_1 \operatorname{div} \bar{F}_2 - \bar{F}_2 \operatorname{div} \bar{F}_1 + (\bar{F}_2 \cdot \nabla)\bar{F}_1 - (\bar{F}_1 \cdot \nabla)\bar{F}_2.
\end{aligned}$$

Здесь была использована формула $a \times b \times c = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$. С использованием последней получим

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2) &= \nabla(\bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2) = \nabla \left(\bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2 \right) + \nabla \left(\bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2 \right) = \\
&= \bar{F}_2 \times (\nabla \times \bar{F}_1) + \bar{F}_1 \times (\nabla \times \bar{F}_2) + (\bar{F}_2 \cdot \nabla)\bar{F}_1 + (\bar{F}_1 \cdot \nabla)\bar{F}_2 = \\
&= \bar{F}_2 \times \operatorname{rot} \bar{F}_1 + \bar{F}_1 \times \operatorname{rot} \bar{F}_2 + (\bar{F}_2 \cdot \nabla)\bar{F}_1 + (\bar{F}_1 \cdot \nabla)\bar{F}_2.
\end{aligned}$$

Если $F_j = (P_j, Q_j, R_j)$, $j = 1, 2$, то

$$\begin{aligned}
(\bar{F}_1 \cdot \nabla)\bar{F}_2 &= \left(P_1 \frac{\partial P_2}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial P_2}{\partial y} + R_1 \frac{\partial P_2}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(P_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x} + \right. \\
&+ \left. Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial y} + R_1 \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(P_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial R_2}{\partial y} + R_1 \frac{\partial R_2}{\partial z} \right) \bar{k}.
\end{aligned}$$

Эту операцию можно рассматривать как результат применения операции $(\bar{F}_1 \cdot \nabla)$ к каждой составляющей вектора $\bar{F}_2$.

Попарные комбинации операции градиента, дивергенции и ротора называют операциями второго порядка. Применительно к скалярному полю имеют смысл две операции $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u = 0,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u = (\nabla \cdot \nabla)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Символ $\nabla \cdot \nabla$ называют оператором Лапласа и обозначают Δ :

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применительно к векторной величине $\bar{F} = (P, Q, R)$

$$\Delta \bar{F} = \Delta P \bar{i} + \Delta Q \bar{j} + \Delta R \bar{k}.$$

В криволинейных ортогональных координатах

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial g_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial g_1} \right) + \frac{\partial}{\partial g_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial g_2} \right) + \frac{\partial}{\partial g_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial g_3} \right) \right);$$

в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

где H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе (см. формулы (6)).

Операции второго порядка для векторного поля:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{F}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{F}, \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{F};$$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{F} = \nabla \cdot \nabla \times \bar{F} = 0$ – поле, являющееся ротором некоторого поля $\bar{F}$, соленоидального.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{F} = \nabla \times \nabla \times \bar{F} = \nabla(\nabla \cdot \bar{F}) - (\nabla \cdot \nabla) \bar{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{F} - \Delta \bar{F},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{F} = \nabla(\nabla \cdot \bar{F}) = & \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) \bar{i} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \bar{k}, \\ & (F = (P, Q, R)). \end{aligned}$$

2 Вопросы для самопроверки

1. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля. Дифференцируемость скалярного поля, градиент.
2. Производная скалярного поля по направлению. Связь градиента с производной по направлению.
3. Алгебраические и геометрические свойства градиента. Вычисления градиента и производной по направлению в координатах. Система обозначений Гамильтона.
4. Векторное поле. Дифференцируемость векторного поля, дифференциальный оператор. Матрица дифференциального оператора в декартовых координатах. Производная векторного поля по направлению.
5. Дивергенция векторного поля, свойства, вычисление в координатах. Поток векторного поля через поверхность. Теорема Гаусса-Остроградского. Выражение дивергенции через поток. Соленоидальные векторного поля и их признаки.
6. Ротор векторного поля, его выражение в декартовых координатах и через гамильтониан. Формальные свойства ротора. Теорема Стокса.
7. Потенциальные векторные поля. Различные признаки потенциальности.
8. Некоторые формулы векторного анализа: дивергенция и ротор векторного произведения векторных полей.
9. Некоторые формулы векторного анализа: градиент скалярного произведения векторных полей.
10. Вычисление дивергенции, ротора и градиента в криволинейных ортогональных системах координат.

3 Примеры решения задач

Задача 1

Найти производную скалярного поля $u(M) = 4y^3 - 3x^3 + z$ в точке $M_0(1,1,0)$ по направлению, идущему к точке $M(3,4,0)$

Решение:

Искомая производная определяется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точке $M_0(1,1,0)$ имеют значения

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = -9x^2 \Big|_{M_0} = -9; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = 12y^2 \Big|_{M_0} = 12; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

Вектор $\overline{M_0M} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Направляющие косинусы вычисляются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{M_0M}_x}{|\overline{M_0M}|}, \quad \cos \beta = \frac{\overline{M_0M}_y}{|\overline{M_0M}|}, \quad \cos \gamma = \frac{\overline{M_0M}_z}{|\overline{M_0M}|}.$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}; \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}; \quad \cos \gamma = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 9 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 12 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + 1 \cdot 0 = \frac{-18 + 36}{\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}.$$

т.к. $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, это означает что скалярное поле возрастает в данном направлении.

Задача 2

Найти производную скалярного поля $u(M) = xy^2 + yz^2 + x^2z$ в точке $M_0(1,1,1)$ по направлению вектора нормали к поверхности $S: x^2 + y^2 - 3z^2 + 2 = 0$ в этой точке, образующего с осью OZ острый угол.

Решение:

Производная скалярного поля $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению l вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \cdot \cos \gamma,$$

где $\vec{e}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – единичный вектор направления l .

В нашей задаче имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} = (y^2 + 2xz) \Big|_{M_0} = 3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} = (2xy + z^2) \Big|_{M_0} = 3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} = (2yz + x^2) \Big|_{M_0} = 3.$$

Вектор нормали к поверхности S в точке M_0 равен:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{M_0}; \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{M_0}; \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{M_0} \right),$$

$$\vec{n} = (2x|_{M_0}; 2y|_{M_0}; -6z|_{M_0}) = (2; 2; -6),$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

Вектор $\vec{n}$ образует тупой угол с осью OZ , т.к. его третья координата отрицательна. Поэтому единичный вектор нормали к данной поверхности в точке M_0 , образующий по условию задачи с осью OZ острый угол будет равен

$$\vec{e}^0 = -\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(-\frac{2}{2\sqrt{11}}; -\frac{2}{2\sqrt{11}}; \frac{6}{2\sqrt{11}} \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{3}{\sqrt{11}} \right),$$

значит, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{11}}; \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{11}}; \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{11}},$

тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{11}} \right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{11}} \right) + 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{-3-3+9}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Задача 3

Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в точке

$$M_0: u(M) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz + 1, v(M) = \frac{x^2}{2} + y^2 + z^3, M_0(0,1,1).$$

Решение:

Градиент скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть вектор

$$\text{grad}(u(M_0)) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \bar{k} = \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}; \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}; \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right).$$

В нашей задаче имеем:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (3x^2 + yz)_{M_0} = 1, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = (3y^2 + xz)_{M_0} = 3, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = (3z^2 + xy)_{M_0} = 3,$$

$$\bar{g}_1 = \text{grad}(u(M_0)) = (1; 3; 3).$$

Аналогично найдем $\text{grad}(v(M_0))$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{M_0} = x_{M_0} = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{M_0} = 2y_{M_0} = 2, \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{M_0} = 3z^2_{M_0} = 3,$$

$$\bar{g}_2 = \text{grad}(v(M_0)) = (0; 2; 3).$$

Косинус угла между векторами $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ равен

$$\cos(\bar{g}_1 \wedge \bar{g}_2) = \frac{(\bar{g}_1; \bar{g}_2)}{|\bar{g}_1| \cdot |\bar{g}_2|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

$$\cos(\bar{g}_1 \wedge \bar{g}_2) = \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{\sqrt{1 + 9 + 9} \cdot \sqrt{0 + 4 + 9}} = \frac{15}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{13}},$$

$$(\bar{g}_1 \wedge \bar{g}_2) = \arccos \frac{15}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{13}}.$$

Задача 4

Найти векторные линии векторного поля $\bar{F}(M) = 2y\bar{i} - 4x\bar{j}$.

Решение:

Пусть векторное поле имеет вид

$$\bar{F}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений векторных линий имеет вид

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

В нашей задаче

$$P(x, y, z) = 2y, \quad Q(x, y, z) = -4x, \quad R(x, y, z) = 0,$$

т.е. $\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-4x} = \frac{dz}{0}$

или $\begin{cases} \frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-4x} \\ dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4xdx = 2ydy \\ dz = 0 \end{cases}.$

$\begin{cases} 2xdx + ydy = 0 \\ dz = 0 \end{cases}$ интегрируя, получим

$\begin{cases} \int 2xdx + \int ydy = 0 \\ dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = C_1, \\ z = C_2, \end{cases}$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Итак, векторными линиями данного векторного поля являются эллипсы, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости XOY , центры этих эллипсов лежат на оси OZ .

Задача 5

Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (x-z)\vec{i} + (x+y+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ через треугольник, получаемый при пересечении плоскости $x+y+z=1$ с координатными плоскостями, сторону треугольника выбрать так, чтобы нормаль к ней образовывала острые углы с осями координат.

Решение:

Данная поверхность $S: x+y+z-1=0$ однозначно проектируется на все три координатные плоскости, тогда ее уравнение однозначно разрешимо относительно каждого из аргументов. В этом случае поток векторного поля может быть вычислен по формуле

$$\Pi = \pm \iint_{D_{yoz}} (x - z) dy dz \pm \iint_{D_{xoz}} (x + y + z) dx dz \pm \iint_{D_{xoy}} (x + y) dx dy,$$

где знак перед каждым из двойных интегралов берется соответственно таким, каков знак $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ на поверхности S .

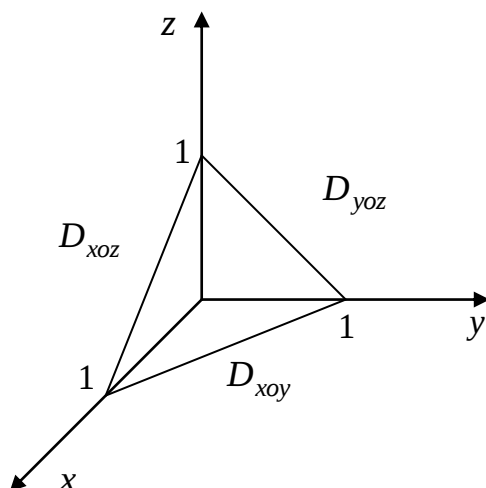


Рисунок 1

По условию задачи нормаль образует острые углы с осями координат, следовательно, перед интегралами надо взять все три знака «+»

$$\Pi = \iint_{D_{yoz}} (x - z) dy dz + \iint_{D_{xoz}} (x + y + z) dx dz + \iint_{D_{xoy}} (x + y) dx dy.$$

a) $\iint_{D_{yoz}} (x - z) dy dz$, $S : x + y + z - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - y - z$.

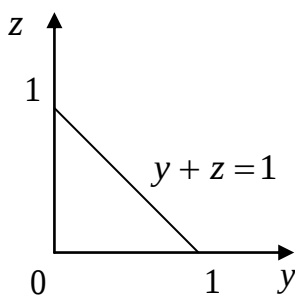


Рисунок 2

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{yoz}} (x - z) dy dz &= \int_0^1 dy \int_{z=0}^{z=1-y} (1 - y - z - z) dz = \int_0^1 dy \int_{z=0}^{z=1-y} (1 - y - 2z) dz = \\
&= \int_0^1 dy (z - yz - z^2) \Big|_{z=0}^{z=1-y} = \int_0^1 (1 - y - y + y^2 - (1 - y)^2) dy = \\
&= \int_0^1 (1 - 2y + y^2 - (1 - y)^2) dy = y - y^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{(1 - y)^3}{3} \Big|_0^1 = 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.
\end{aligned}$$

б) $\iint_{D_{xoz}} (x + y + z) dx dz, S: x + y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - x - z.$

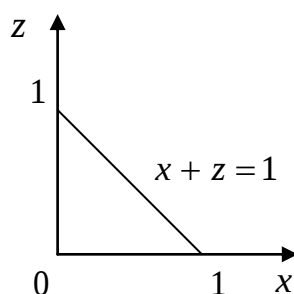


Рисунок 3

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{xoz}} (x + y + z) dx dz &= \int_0^1 dx \int_{z=0}^{z=1-x} (x + 1 - x - z + z) dx dz = \int_0^1 dx \int_{z=0}^{z=1-x} dz = \int_0^1 (1 - x) dx = \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

в) $\iint_{D_{xoy}} (x + y) dx dy.$

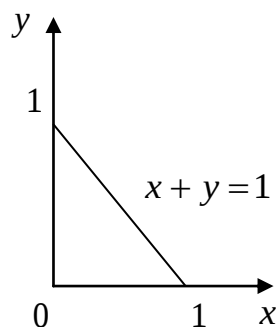


Рисунок 4

$$\iint_{D_{xoy}} (x+y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1-x} (x+y) dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{(1-x)^3}{6} \right) \bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3-2+1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\Pi = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Задача 6

Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$ через часть плоскости $S: 4x + 2y + z = 8$ расположенную в первом октанте, если единичный вектор нормали $\vec{n}$ образует с осью OZ острый угол.

Решение:

$$S: 4x + 2y + z = 8.$$

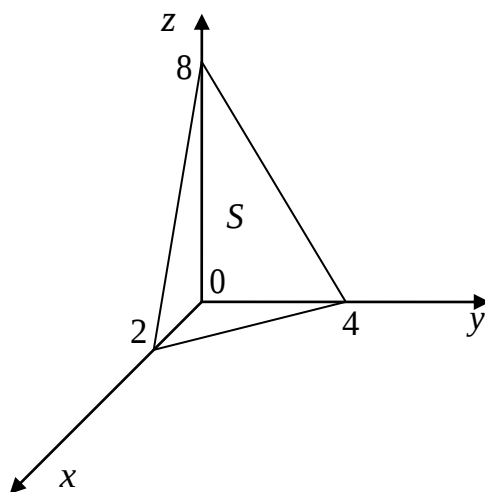


Рисунок 5

Находим

$$\text{grad } S(M) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}; \frac{\partial S}{\partial y}; \frac{\partial S}{\partial z} \right) = (4; 2; 1) = \vec{n},$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}.$$

$$\vec{n}^0 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}; \frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{1}{\sqrt{21}} \right), \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{21}} > 0.$$

Искомый поток по формуле равен

$$\Pi = \iint_S \vec{F}(M) \cdot \vec{n}^0(M) dS$$

$$\vec{F}(M) \cdot \vec{n}^0(M) = x \cdot \frac{4}{\sqrt{21}} + y \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} + 2z \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}} (2x + y + z),$$

$$dS = \sqrt{1 + (S'_x)^2 + (S'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + 16 + 4} dx dy = \sqrt{21} dx dy.$$

$$\Pi = \iint_S \frac{2}{\sqrt{21}} (2x + y + z) \sqrt{21} dx dy, \text{ но т.к. } S: 4x + 2y + z = 8 \Rightarrow z = 8 - 4x - 2y.$$

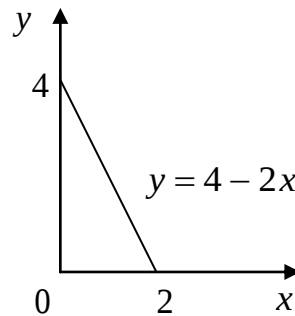


Рисунок 6

$$\text{Имеем } \Pi = \iint_S (4x + 2y + 2(8 - 4x - 2y)) dx dy = \iint_S (4x + 2y + 16 - 8x - 4y) dx dy =$$

$$= \iint_S (16 - 4x - 2y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{y=0}^{y=4-2x} (16 - 4x - 2y) dy = \int_0^2 (16y - 4xy - y^2) \Big|_{y=0}^{y=4-2x} dx =$$

$$= \int_0^2 (64 - 32x - 16x + 8x^2 - (4 - 2x)^2) dx = \int_0^2 (64 - 48x + 8x^2 - (4 - 2x)^2) dx =$$

$$= \left(64x - 24x^2 + \frac{8x^3}{3} + \frac{(4 - 2x)^3}{6} \right) \Big|_0^2 = 128 - 96 + \frac{64}{3} - \frac{64}{6} = 32 + \frac{32}{3} = 42 \frac{2}{3}.$$

$$\Pi = 42 \frac{2}{3}.$$

Задача 7

Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + 4z\vec{k}$ через ориентированную поверхность $z = x^2 + y^2$ ($z \leq 4$) если ее ориентация, определяемая единичным вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности S в точке $M(x, y, z)$ задана условием $0 \leq \left(\vec{n}, \vec{k} \right) < \frac{\pi}{2}$.

Решение:

$$\Pi = \iint_S \vec{F}(M) \cdot \vec{n}^0(M) dS,$$

$$\vec{n}(M) = \pm \frac{\text{grad } S(M)}{|\text{grad } S(M)|},$$

где знак перед дробью выбирается в зависимости от ориентации S .

В нашей задаче $S: z = x^2 + y^2 = 0$.

$$\text{grad } S(M) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}; \frac{\partial S}{\partial y}; \frac{\partial S}{\partial z} \right) = (-2x; -2y; 1),$$

$$|\text{grad } S(M)| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1},$$

$$\vec{n}^0(M) = \pm \left(-\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; -\frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right).$$

В нашем случае γ – острый, т.е. $\cos \gamma > 0$, следовательно

$$\vec{n}^0(M) = + \left(-\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; -\frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right).$$

Найдем скалярное произведение $\vec{F}(M) \cdot \vec{n}^0(M)$

$$\vec{F} \cdot \vec{n}^0 = \frac{-2x^2 - 2y^2 + 4z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Найдем $dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$, если $S: z = f(x, y)$.

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = 2y.$$

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy,$$

$$\Pi = \iint_D \frac{-2x - 2y + 4(x^2 + y^2)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = 2 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

где область D – проекция поверхности S на плоскость XOY :

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам

$$\Pi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \cdot r dr = 2 \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 d\varphi = 8 \int_0^{2\pi} d\varphi = 8\varphi \Big|_0^{2\pi} = 16.$$

Задача 8

Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(M) = (3x - y)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (x + 2z)\vec{k}$ через замкнутую поверхность $S: z = 1 - x^2, x = 0, y = 0, y = 2$ в направлении внешней нормали.

Решение:

Построим замкнутую поверхность.

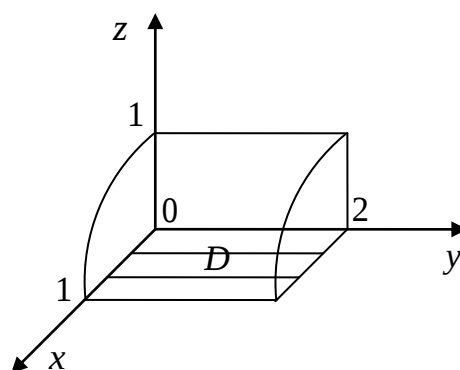


Рисунок 8

В нашей задаче:

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

имеем:

$$P(x, y, z) = 3x - y,$$

$$Q(x, y, z) = y - z,$$

$$R(x, y, z) = x + 2z.$$

Данные функции непрерывны.

$$\text{Тогда: } \frac{\partial P}{\partial x} = 3; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2.$$

Поэтому справедлива формула Гаусса-Остроградского:

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F}(M) dV,$$

где интеграл берется в направлении внешней нормали к S .

$$\operatorname{div} \bar{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3 + 1 + 2 = 6,$$

$$\begin{aligned} \Pi &= 6 \iiint_V dV = 6 \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=2} dy \int_{z=0}^{z=1-x^2} dz = 6 \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=2} (1-x^2) dy = \\ &= 6 \int_0^1 2(1-x^2) dx = 12 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 12 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8. \end{aligned}$$

Таким образом $\Pi = 8$.

Задача 9

Найти работу силы $\bar{F}$ при перемещении вдоль отрезка прямой AB , где $\bar{F} = (x+1)\bar{i} + y\bar{j} + (z-1)\bar{k}$, $A(2,2,2)$, $B(3,4,5)$.

Решение:

$$A = \int_{AB} (x+1)dx + ydy + (z-1)dz.$$

Запишем параметрическое уравнение прямой AB :

$$\frac{x-2}{3-2} = t, \quad \frac{y-2}{4-2} = t, \quad \frac{z-2}{5-2} = t,$$

$$\begin{cases} x = t + 2, & dx = dt, \\ y = 2t + 2, & \Rightarrow dy = 2dt, \\ z = 3t + 2, & dz = 3dt. \end{cases}$$

Найдем изменение параметра t , например из равенства $x = t + 2 \Rightarrow t = x - 2$.

Используем координаты точек A и B .

Если $x = 2 \Rightarrow t = 0$, если $x = 3 \Rightarrow t = 1$.

$$A = \int_0^1 (t + 2 + 1) \cdot dt + (2t + 2) \cdot 2dt + (3t + 2 - 1) \cdot 3dt = \int_0^1 (t + 3 + 4t + 4 + 9t + 3)dt =$$

$$= \int_0^1 (14t + 10)dt = \left(7t^2 + 10t\right)\Big|_0^1 = 7 + 10 = 17.$$

Задача 10

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}(M) = z\vec{i} + x\vec{j} - y\vec{k}$ вдоль контура K :

$$x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad z = \sin t, \quad \text{где } t \in [0, 2\pi].$$

Решение:

По формуле: $\Pi = \int_K zdx + xdy - ydz,$

по условию $\begin{cases} x = 3\cos t, & dx = -3\sin t dt, \\ y = 3\sin t, & dy = 3\cos t dt, \\ z = \sin t, & dz = \cos t dt. \end{cases}$

Получаем: $\Pi = \int_0^{2\pi} \sin t(-3\sin t)dt + 3\cos t \cdot 3\cos t dt - 3\sin t \cos t dt =$

$$= \int_0^{2\pi} (-9\sin^2 t + 9\cos^2 t dt - 3\sin t \cos t dt) = \int_0^{2\pi} (9\cos 2t - 3\sin t \cos t) dt =$$

$$= \left(9 \cdot \frac{1}{2} \sin 2t - 3 \frac{\sin^2 t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Задача 11

Вычислить циркуляцию поля $\vec{F}(M) = y\vec{i} + z\vec{j} + 2x\vec{k}$ вдоль линии

$$l: \begin{cases} S: 4x^2 + y^2 = z, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 9, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq (\vec{n}, \vec{k}) \leq \pi,$$

ограничивающей поверхность S .

Решение:

Согласно теореме Стокса:

$$\Pi = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{F}, \bar{n}) dS,$$

$$S: 4x^2 + y^2 - z = 0,$$

$$\operatorname{grad} S = (8x, 2y, -1) \quad |\operatorname{grad} S| = \sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1}$$

$$\bar{n} = \left(\frac{8x}{\sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1}}; \frac{2y}{\sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1}}; \frac{-1}{\sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1}} \right),$$

т.к. $\gamma \in \Pi$ четверти $\Rightarrow \cos \gamma < 0$.

Найдем ротор $\bar{F}(M)$:

$$\operatorname{rot} \bar{F}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & 2x \end{vmatrix} = \bar{i}(0-1) - \bar{j}(2-0) + \bar{k}(0-1) = -\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k},$$

$$\operatorname{rot} \bar{F}(M) \cdot \bar{n} = \frac{-8x - 4y + 1}{\sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1}},$$

$$dS = \sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1} \, dx dy.$$

$\Pi = \iint_D (-8x - 4y + 1) dx dy$, где D – проекция S на плоскость XOY .

$$4x^2 + y^2 = 9, \quad y = \sqrt{9 - 4x^2}, \quad \text{т.к. } y \geq 0.$$

$$\Pi = \int_0^{3/2} dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{9-4x^2}} (-8x - 4y + 1) dy.$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{y=0}^{y=\sqrt{9-4x^2}} (-8x - 4y + 1) dy &= \left(-8xy - 2y^2 + y \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{9-4x^2}} = \\ &= \left(-8x\sqrt{9-4x^2} - 18 + 8x^2 + \sqrt{9-4x^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \int_{y=0}^{3/2} \left(-8x\sqrt{9-4x^2} - 18 + 8x^2 + \sqrt{9-4x^2} \right) dx = \\
= \frac{2}{3} (9-4x^2)^{3/2} - 18x + \frac{8}{3}x^3 + \frac{x\sqrt{9-4x^2}}{2} + \frac{9}{4} \arcsin \frac{2x}{3} \Big|_0^{3/2} = \\
= \frac{2}{3} \cdot 0 - 27 + \frac{8}{3} \cdot \frac{27}{8} + 0 + \frac{9}{4} \arcsin 1 - \frac{2}{3} \cdot 27 = -27 + 9 + \frac{9}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - 18 = -36 + \frac{9}{8} \pi.
\end{aligned}$$

Задача 12

Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{F} = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$ вдоль линии

$$l: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 2 + y. \end{cases}$$

Решение:

Линия l – является пересечением цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 9$ с плоскостью $z = 2 + y$. Очевидно, что это эллипс. Напишем его параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \cos t, & y = 3 \sin t \\ z = 2 + y \Rightarrow z = 2 + 3 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -3 \sin t dt, \\ dy = 3 \cos t dt, \\ dz = 3 \cos t dt, \end{cases}$$

т.к. l – эллипс $\Rightarrow 0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\Pi = \oint_l (x+z)dx + zdy + ydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (3 \cos t + 2 + 3 \sin t) \cdot (-3 \sin t) dt + (2 + 3 \sin t) \cdot 3 \cos t dt + 3 \sin t \cdot 3 \cos t dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-9 \cos t \sin t - 6 \sin t - 9 \sin^2 t + 6 \cos t + 9 \sin t \cos t + 9 \sin t \cos t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (9 \sin t \cos t - 6 \sin t + 6 \cos t - 9 \sin^2 t) dt =$$

$$= \frac{9}{2} \sin^2 t + 6 \cos t - 6 \sin t - 9 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{9}{2} \cdot 2\pi = -9\pi.$$

Ответ: $|I| = 9\pi$.

Задача 13

Показать, что векторное поле $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$ является потенциальным в любой области $V \subset R^3$. Найти его потенциал и линейный интеграл: $\int_{(AB)} (\vec{F}, d\vec{r})$, где $A(2,1,0)$, $B(3,3,1)$.

Решение:

Пусть дано векторное поле

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

заданное в области $V \subset R^3$.

$\vec{F}(M)$ называется потенциалом в V , если существует скалярная функция $u(x, y, z)$ такая, что выполняется равенство

$$\vec{F}(M) = \text{grad } u(M), \quad \forall M \in V,$$

при этом функция $u(M)$ называется потенциалом поля $\vec{F}(M)$.

Для того чтобы $\vec{F}(M)$ было потенциальным, необходимо и достаточно чтобы $\text{rot } \vec{F}(M) = 0, \quad \forall M \in V$.

Если поле $\vec{F}(M)$ потенциально, то его потенциал находится по формуле

$$u(M) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ любая фиксированная точка области V C – произвольная постоянная.

Если поле $\vec{F}(M)$ потенциально и $u(M)$ его потенциал, то

$$\int_{(AB)} (\vec{F}(M), d\vec{r}) = u(B) - u(A), \quad \text{где } A, B \in V.$$

1. Найдем ротор данного векторного поля

$$\operatorname{rot} \bar{F}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+y & x+z \end{vmatrix} = \bar{i} \left(\frac{\partial(x+z)}{\partial y} - \frac{\partial(x+y)}{\partial z} \right) -$$

$$- \bar{j} \left(\frac{\partial(x+z)}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial z} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial y} \right) = 0\bar{i} - 0\bar{j} + 0\bar{k} = \bar{0}.$$

Следовательно, данное поле потенциально.

2. Найдем потенциал

В качестве $M_0(x_0, y_0, z_0)$ берем точку $M_0(0,0,0)$:

$$u(M) = \int_0^x (y+z) dx + \int_0^y (x+y) dy + \int_0^z (x+z) dz + C =$$

$$= \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^y + \left(xz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^z + C = xy + \frac{y^2}{2} + xz + \frac{z^2}{2} + C.$$

3. Найдем $u(A) = 2 + \frac{1}{2} + C = 2,5 + C$, $u(B) = 9 + \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2} + C = 17 + C$.

4 Примерные варианты самостоятельной работы

1 уровень

1) Найти градиент скалярного поля $u = \bar{r}^2 (\bar{a} \bar{r})$.

2) Найти производную в точке M_0 по направлению к точке M_1 скалярного поля $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1,1,1)$, $M_1(3,2,1)$.

3) Найти ротор векторного поля $\bar{F} = \bar{a}(\bar{b} \bar{r})$, $\bar{a}, \bar{b}$ - постоянные векторы

4) Является ли поле $\bar{F}(2y, -z, 2x)$ соленоидальным?

2 уровень

1) Градиент скалярного поля $u = |\bar{r}|^n$ равен

а) $\frac{\bar{r}^0}{|\bar{r}|}$, б) $n|\bar{r}|^{n-1}$, в) $n|\bar{r}|^{n-1} \bar{r}^0$, г) другой ответ.

2) Поверхность уровня скалярного поля $u = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ в точке $(1; -2; 0)$ представляет из себя

а) конус второго порядка, б) однополостный гиперболоид,

в) двуполостный гиперболоид, г) другой ответ.

3) Производная скалярного поля $u = xyz$ в точке $(1; 1; 1)$ по направлению радиус-вектора этой точки равна

а) 3, б) $\sqrt{3}$, в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, г) другой ответ.

4) Семейство силовых линий векторного поля $\bar{F} = x\bar{i} - y\bar{j}$ определяется уравнениями

а) $x + y = c$, б) $\frac{x}{y} = c$, в) $xy = c$, г) другой ответ.

5) Дивергенция векторного поля $\bar{F} = (\bar{r} \bar{c})\bar{c}$, где $\bar{c}$ - постоянный вектор, равна

а) $\bar{c}^2$, б) $\bar{r} \bar{c}$, в) 0, г) другой ответ.

6) При условии $\text{rot } \bar{r} = \bar{0}$, ротор векторного поля $\bar{F} = [[\bar{c} \bar{b}] \bar{r}]$, где $\bar{c}, \bar{b}$ - постоянные векторы, равен

а) $2[\bar{c} \bar{b}]$, б) $2[\bar{b} \bar{c}]$, в) $\bar{0}$, г) другой ответ.

7) Векторное поле $\bar{F} = x(z^2 - y^2)\bar{i} + y(x^2 - z^2)\bar{j} + z(y^2 - x^2)\bar{k}$

а) соленоидально, но не потенциально, б) потенциально, но не соленоидально,
в) не является соленоидальным и потенциальным, г) другой ответ.

8) Потенциал поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$ равен

а) $x^2y + c$, б) $x^2y - y^2z + c$, в) поле не потенциально, г) другой ответ.

5 Варианты индивидуальных домашних заданий

Задача 1

Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{n}$, где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности S в точке M_0 , образующий с осью OZ острый угол:

1. $u = xz^2 - \sqrt{xy} + y + 2z$, $S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0$, $M_0(2;2;4)$;
2. $u = x\sqrt{y} - y\sqrt{z} + \sqrt{x}$, $S: z^2 = x^2 + 2y^2 - 17$, $M_0(1;4;4)$;
3. $u = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \sqrt{x^2 + z^2}$, $S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 23$, $M_0(3;0;-4)$;
4. $u = 4\ln(x^2 + 3) - 8xyz$, $S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$, $M_0(1;1;1)$;
5. $u = 4xyz + 2\ln(x^2 - 5)$, $S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1$, $M_0(1;1;1)$;
6. $u = \frac{x^2 y}{4} - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, $S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4$, $M_0\left(-2; \frac{1}{2}; 1\right)$;
7. $u = x\sqrt{y} - yz^2 + 2xz$, $S: x^2 + y^2 = 4z + 9$, $M_0(2;1;-1)$;
8. $u = 7\ln(x^2 + y^2) - 4xyz$, $S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7$, $M_0(1;1;1)$;
9. $u = \arctg \frac{y}{x} + \sqrt{4x+1} + yz$, $S: x^2 + y^2 - 2z = 10$, $M_0(2;2;-1)$;
10. $u = \ln(x^2 + 1) - xy\sqrt{z}$, $S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16$, $M_0(1;-2;4)$;
11. $u = \sqrt{x^2 + y^2} + e^{x-3z} + yz$, $S: x^2 + y^2 = 24z + 1$, $M_0(3;4;1)$;
12. $u = x\sqrt{y} - (y+z)\sqrt{x} + e^{x^2-y^2}$, $S: x^2 - y^2 + z^2 = 4$, $M_0(1;1;-2)$;
13. $u = \sqrt[3]{x^2 + z^2 + 14} + y^2 z - 2xy$, $S: z = 2(x^2 + y^2) - 7$, $M_0(2;1;3)$;
14. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + \sqrt{x}$, $S: z^2 = x^2 + 2y^2 - 17$, $M_0(1;2;4)$;
15. $u = 4\ln(x^2 + 3) - 8xyz$, $S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$, $M_0(1;1;1)$;
16. $u = \ln(x^2 + 1) - xy\sqrt{z}$, $S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16$, $M_0(1;1;4)$;

$$17. u = \arctg \frac{y}{x} + \sqrt{4x+1} + yz, S: x^2 + y^2 - 2z = 1, M_0(1;2;-1);$$

$$18. u = 3\ln(x^2 + y^2) - 4xyz, S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7, M_0(1;1;1);$$

$$19. u = x\sqrt{y} - yz^2 + xz, S: x^2 + y^2 = 4z + 9, M_0(2;1;-1);$$

$$20. u = xz^2 - \sqrt{xy} + y + 2z, S: x^2 - y^2 + 3z + 2 = 0, M_0(2;2;4).$$

Задача 2

Найти угол между градиентами скалярного поля $u(x, y, z)$ в точках M_1 и M_2 :

$$1. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y}{x}, M_1(1;2;2), M_2(2;-1;2);$$

$$2. u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, M_1(1;1;0), M_2(1;2;2);$$

$$3. u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz, M_1(1;1;1), M_2(1;-1;2);$$

$$4. u = \tg x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + 1, M_1(0;0;0), M_2\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$5. u = \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}, M_1(1;1;1), M_2(1;4;1);$$

$$6. u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, M_1(1;-1;1), M_2(1;1;-1);$$

$$7. u = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}, M_1(1;1;1), M_2(1;2;1);$$

$$8. u = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + xyz, M_1(2;1;1), M_2(0;1;1);$$

$$9. u = x^2 y z^2 + \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z}, M_1(0;1;1), M_2(2;1;-1);$$

$$10. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 3} + \frac{x}{y}, M_1(1;2;-1), M_2(2;1;1);$$

$$11. u = e^{x-2y} + \ln(2x - 3z^2), M_1(2;1;1), M_2(4;2;1);$$

$$12. u = \frac{9}{\sqrt{y^2 + 2z}} + xyz, M_1(1;1;4), M_2(2;1;4);$$

13. $u = \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{yz}, M_1(1;1;1), M_2(1;-1;2);$
14. $u = \sqrt{xy + yz + xz} + \frac{1}{xyz}, M_1(1;1;4), M_2(4;1;1);$
15. $u = \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + 2xz, M_1(1;-1;1), M_2(0;1;1);$
16. $u = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, M_1(1;1;0), M_2(1;2;2);$
17. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2} + \frac{x}{y}; M_1(1;2;-1), M_2(2;1;1);$
18. $u = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + xyz, M_1(2;2;1), M_2(0;1;1);$
19. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4xyz, M_1(1;1;1), M_2(1;-1;2);$
20. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, M_1(1;-1;2), M_2(1;1;-1).$

Задача 3

Найти векторные линии векторного поля $\bar{F}(x; y; z)$:

1. $\bar{F} = 4x\bar{i} - 9y\bar{j};$
2. $\bar{F} = 2x\bar{i} + 4y\bar{j};$
3. $\bar{F} = 5y\bar{j} + z\bar{k};$
4. $\bar{F} = 2x\bar{i} + 6z\bar{k};$
5. $\bar{F} = 5x\bar{i} + 7z\bar{k};$
6. $\bar{F} = 9x\bar{i} - 4z\bar{k};$
7. $\bar{F} = 2x\bar{i} + 6z\bar{k};$
8. $\bar{F} = 5x\bar{i} + 7y\bar{j};$
9. $\bar{F} = 2x\bar{i} + 6y\bar{j};$
10. $\bar{F} = 2y\bar{j} + 3z\bar{k};$
11. $\bar{F} = z\bar{i} + 3z\bar{k};$

12. $\bar{F} = y\bar{j} + 3z\bar{k}$;
13. $\bar{F} = 2x\bar{i} + 3z\bar{k}$;
14. $\bar{F} = 2x\bar{i} + 6z\bar{k}$;
15. $\bar{F} = x\bar{i} + 3y\bar{j}$;
16. $\bar{F} = 3x\bar{i} + 4y\bar{j}$;
17. $\bar{F} = 2x\bar{i} + 5z\bar{k}$;
18. $\bar{F} = 7x\bar{i} - 4z\bar{k}$;
19. $\bar{F} = 2y\bar{j} + 3z\bar{k}$;
20. $\bar{F} = x\bar{i} + 2z\bar{k}$.

Задача 4

Вычислить поток векторного поля $\bar{F}(x, y, z)$ через ориентированную поверхность S (ориентация поверхности задана единичным вектором нормали $\bar{n}$ к ней):

1. $\bar{F} = 2x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $S: x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$, $(0 \leq z \leq H)$, $\frac{\pi}{2} < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k} \right) < \pi$;
2. $\bar{F} = y^2\bar{i} + z\bar{k}$, $S: z = x^2 + y^2$, $(z \leq 2)$, $\frac{\pi}{2} < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k} \right) < \pi$;
3. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $S: x^2 + y^2 = R^2$, $(0 \leq z \leq H, x \geq 0)$, $0 < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{i} \right) \leq \frac{\pi}{2}$;
4. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\bar{k}$, $S: z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, $(0 \leq z \leq \sqrt{3})$, $\frac{\pi}{2} \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k} \right) < \pi$;
5. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $S: z = x$, $(z \leq 0, x^2 + y^2 \leq R^2)$, $0 < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k} \right) < \frac{\pi}{2}$;
6. $\bar{F} = x\bar{i} - y\bar{j} - z\bar{k}$, $S: x^2 + z^2 = 9 - y$, $(y \geq 0)$, $0 \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k} \right) < \frac{\pi}{2}$;
7. $\bar{F} = 2x\bar{i} + (1 - 2y)\bar{j} + 2z\bar{k}$, $S: x^2 + z^2 = 1 - 2y$, $(y \geq 0)$, $0 \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{j} \right) < \frac{\pi}{2}$;

8. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, S: z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, 0 \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k}\right) \leq \frac{\pi}{2};$
9. $\bar{F} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), 0 \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{j}\right) \leq \frac{\pi}{2};$
10. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, S: z - 1 = x^2 + y^2, (0 \leq z \leq 1), 0 < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k}\right) < \frac{\pi}{2};$
11. $\bar{F} = xy^2\bar{i} + yz^2\bar{j} + x^2z\bar{k}, S: x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}, 0 \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{i}\right) \leq \frac{\pi}{2};$
12. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \frac{\pi}{2} \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{j}\right) \leq \pi;$
13. $\bar{F} = 4y\bar{i} + 5z\bar{j} - 2x\bar{k}, S: z = x^2 + y^2, (x^2 + y^2 \geq 2x), 0 < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k}\right) < \frac{\pi}{2};$
14. $\bar{F} = (1 + 2x)\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, S: x^2 + y^2 = z^2, (0 \leq z \leq 4), 0 < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k}\right) < \frac{\pi}{2};$
15. $\bar{F} = x\bar{i} + xz\bar{j} + y\bar{k}, S: 4 - z = x^2 + y^2, (z \geq 0), 0 < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k}\right) < \pi;$
16. $\bar{F} = y^2\bar{i} + z\bar{k}, S: z = x^2 + y^2, (z \leq 2), \frac{\pi}{2} < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k}\right) < \pi;$
17. $\bar{F} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), 0 \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{j}\right) \leq \frac{\pi}{2};$
18. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\bar{k}, S: z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, (0 \leq z \leq \sqrt{3}), \frac{\pi}{2} \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k}\right) < \pi;$
19. $\bar{F} = x\bar{i} - y\bar{j} - z\bar{k}, S: x^2 + z^2 = 9 - y, (y \geq 0), 0 \leq \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k}\right) < \frac{\pi}{2};$
20. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, S: z - 1 = x^2 + y^2, (0 \leq z \leq 1), 0 < \left(\hat{\bar{n}}, \bar{k}\right) < \frac{\pi}{2}.$

Задача 5

Вычислить поток векторного поля $\vec{F}(x; y; z)$ через часть плоскости S , расположенную в первом октанте (вектор нормали $\vec{n}$ к S образуется с осью OZ острый угол):

1. $\vec{F} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$, $S: x + 2y + 3z = 1$;

2. $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$, $S: x + 2y + 2z = 2$;

3. $\vec{F} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4z\vec{k}$, $S: x + 2y + 3z = 1$;

4. $\vec{F} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}$, $S: 2x + y + 2z = 2$;

5. $\vec{F} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$, $S: x + y + 2z = 1$;

6. $\vec{F} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $S: x + 2y + z = 2$;

7. $\vec{F} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$, $S: x + y + z = 1$;

8. $\vec{F} = -2x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$, $S: x + 3y + z = 3$;

9. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $S: \frac{x}{2} + y + z = 1$;

10. $\vec{F} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$, $S: \frac{x}{2} + y + 2z = 2$;

11. $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$, $S: x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$;

12. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $S: x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$;

13. $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}$, $S: \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$;

14. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$, $S: x + y + 2z = 1$;

15. $\vec{F} = x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}$, $S: \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$;

16. $\vec{F} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4z\vec{k}$, $S: x + 3y + 2z = 2$;

17. $\vec{F} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$, $S: x + 2y + 2z = 1$;

$$18. \quad \bar{F} = 2x\bar{i} + y\bar{j} + 3z\bar{k}, \quad S: x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1;$$

$$19. \quad \bar{F} = x\bar{i} + 2y\bar{j} + z\bar{k}, \quad S: \frac{x}{2} + 2y + 2z = 2;$$

$$20. \quad \bar{F} = 3x\bar{i} + y\bar{j} - 2z\bar{k}, \quad S: x + 2y + 2z = 1.$$

Список использованных источников

- 1 Краснов, М.Л. Векторный анализ: Задачи и примеры с подробными решениями / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – Изд. Едиториал УРСС. – 2011. – 144 с.
- 2 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 частях. Часть 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 2011. – 448 с.
- 3 Мышкис, А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – 3-е изд., доп., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 688 с.
- 4 Зубрина, Л.Г. Элементы векторного анализа в задачах и упражнениях / Л.Г. Зубрина, Н.Ю. Поникарова — Самара: Самар, гос. аэрокосм, ун-т, 2008. — 52 с.
- 5 Аюпова, Н.Б. Задачи и упражнения по курсу "Векторный и тензорный анализ" / Н.Б. Аюпова, Н.М. Таубер. – Новосиб. гос ун-т, Новосибирск, 2012. – 53 с.
- 6 Ведринский, Р.В. Основы векторного и тензорного анализа: Методические указания / Р.В. Ведринский, А.А. Новакович. Часть 1. - Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2006. - 29 с.