Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Университетский колледж

Предметно-цикловая комиссия информационных технологий

С.А. Нурманова

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программе среднего профессионального образования по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Оренбург
2016

УДК 510.(075.32)
ББК 22.12Я 723
Н90

Рецензент доцент, кандидат физико-математических наук, О.А. Пихтилькова

Нурманова, С.А.
Н90 Элементы математической логики: методические указания к выполнению практических работ / С.А. Нурманова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2016. - 85 с.

Методические указания предназначены для организации учебного процесса по дисциплине «Элементы математической логики» для студентов специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Учебное издание составлено с учетом Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов - утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 28 июля 2014 г. №849.

УДК 510.(075.32)
ББК 22.12Я 723

© Нурманова С.А., 2016
© ОГУ, 2016

Содержание

Мы употребляем знаки не только для того, чтобы передавать наши мысли другим людям, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления

Г.В. Лейбниц

Введение

Математическая логика – один из ведущих разделов современной логики и математики. Сформировался в 19-20 ст. Как реализация идеи о возможности записать все исходные допущения на языке знаков, аналогичных математическим и тем самым заменить рассуждения вычислениями.

Математическая логика – это раздел математики, посвященный анализу методов рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т.е. исследуется формализация рассуждений? Это разновидность формальной логики, т.е. науки, которая изучает умозаключения с точки зрения их формального строения. Специалисты в области современных компьютерных технологий уже осознали, что математическая логика является фундаментом для построения необходимой сейчас хорошей теории математического обеспечения информационных технических систем.

Изучение дисциплины «Элементы математической логики» имеет целью изучение основных понятий математической логики, задач логического характера и применение средств математической логики для их решения, развитие способности к логическому и алгоритмическому мышлению.

В методических указаниях к выполнению практических работ содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая практическая работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий, а также вопросы для самопроверки и список рекомендуемой литературы. Методические указания могут быть использованы для самостоятельной работы студентов.

1 Практическая работа №1 Логические операции, формулы логики

Цель работы: Изучить понятие высказывания. Научиться производить операции над высказываниями, составлять логические формулы.

1.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы;
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

1.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) тему работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировку заданий;
5) решение заданий своего варианта.

1.3 Методические указания к практической работе № 1

В математической логике не рассматривается смысл высказываний, определяется только их логическое значение – «истина» или «ложь».

Определение. Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно в данный момент времени.

Пример 1.

а) «Река Кола впадает в Кольский залив» – высказывание (истинное).

б) «Число32 кратно 3» – высказывание (ложное).

в) «Может быть, сегодня пойдет снег» – не высказывание.

г) «$5x - 9 = 7$» – не высказывание (неопределенное высказывание или высказывательная форма, т.к. имеет переменную, неизвестную).

д) «Ура, каникулы!» - не высказывание (не является повествовательным предложением)

е) «Который час?» - не высказывание (не является повествовательным предложением)

Определение. Высказывание называют простым (элементарным), если оно рассматривается как некое неделимое целое (аналогично элементу множества). Сложным (составным) называется высказывание, составленное из простых с помощью логических связок.

С помощью простых высказываний можно составлять более сложные, соединяя простые высказывания союзами «и», «или», связками «не», «следует» и др. Операции над высказываниями можно описывать при помощи некоторого математического аппарата.

Определение. Отрицанием высказывания является новое высказывание, истинное только тогда, когда исходное высказывание ложно.

Отрицание обозначается через A, $\neg A$ и читается как «не A», «неверно, что A».

Пример 2. A: «Степан любит танцевать».

Тогда A: «Не верно, что Степан любит танцевать».

Определение. Конъюнкцией двух высказываний является новое высказывание, которое истинно только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Конъюнкция обозначается $A \wedge B$ или $A\&B$ и читается как «A и B», «A, но B», «A, а B».

Пример 3. A: «Степан любит танцевать», B: «Степан любит петь».

Тогда $A \wedge B$: «Степан любит танцевать и петь».

Определение. Дизъюнкцией двух высказываний является новое высказывание, которое ложно только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Дизъюнкция обозначается через $A \vee B$ и читается как «A или B».

Пример 4. A: «Степан любит танцевать», B: «Степан любит петь».

Тогда $A \vee B$: «Степан любит танцевать или петь».

Определение. Импликацией двух высказываний является новое высказывание, которое ложно только тогда, когда первое истинно, а второе – ложно.

Импликация обозначается $A \rightarrow B$ и читается как «если A, то B»; «из A следует B». При этом A называется посылкой или условием, B – следствием или заключением.

Пример 5. A: «Степан любит танцевать», B: «Степан любит петь».

Тогда $A \rightarrow B$: «Если Степан любит танцевать, то он любит петь».

Определение. Эквиваленцией (или эквивалентностью) двух высказываний является новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквивалентность обозначается $A \leftrightarrow B$ и читается как «A тогда и только тогда, когда B».

Пример 6. A: «Степан любит танцевать», B: «Степан любит петь».

Тогда $A \leftrightarrow B$: « Степан любил танцевать тогда и только тогда, когда он любил петь».

Определение. Суммой по модулю два (альтернативной дизъюнкцией, логическим сложением, исключающим «ИЛИ», строгой дизъюнкцией) двух высказываний называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания принимают разные значения.

Сумма по модулю два обозначается $A \oplus B$ и читается как «или A, или B».

Определение. Стрелка Пирса – это отрицание дизъюнкции.

Стрелка Пирса обозначается $A \downarrow B$. Читается «ни А, ни В».

Введена в рассмотрение Чарльзом Пирсом (Charles Peirce) в 1880—1881 г.г.

Определение. Штрих Шеффера – это отрицание конъюнкции.

Штрих Шеффера обозначается $A \mid B$ и читается как «неверно, что А и В».

Введена в рассмотрение Генри Шеффером в 1913 г. (в отдельных источниках именуется как Пунктир Чулкова)

Таблица 1 – Логические операции (словарь перехода)

Обозначения логической операции	Другие обозначения логической операции	Названия логической операции и связки	Как читается выражение, приведенное в первом столбце
$\bar{A}$	$\neg A$	отрицание	не А; неверно, что А
$A \wedge B$	$A \,\&\, B$ $A \cdot B$ $\min(A; B)$	конъюнкция, логическое умножение	А и В А, а В
$A \vee B$	$A + B$ $\max(A; B)$	дизъюнкция, логическое сложение	А или В
$A \rightarrow B$	$A \supset B$ $A \Rightarrow B$	импликация, логическое следование	если А, то В; А имплицирует В; А влечет В
$A \leftrightarrow B$	$A \equiv B$ $A \approx B$ $A \Leftrightarrow B$	эквиваленция, эквивалентность, тождественность	А тогда и только тогда, когда В; А эквивалентно В
$A \oplus B$	$A + B$ $A \,\Delta\, B$	сумма по модулю два, разделительная дизъюнкция, антиэквиваленция	А плюс В; либо А, либо В
$A \mid B$		штрих Шеффера, антиконъюнкция	неверно, что А и В; А штрих Шеффера В
$A \downarrow B$	$A \circ B$	стрелка Пирса, антидизъюнкция, функция Вебба, функция Даггера	ни А, ни В; А стрелка Пирса В

Выражение, составленное из высказываний с помощью логических операций называется логической формулой.

Определение. Выражения логики высказываний называется формулой, если оно удовлетворяет следующему определению:

1) любая высказывательная переменная – формула;

2) если A и B – формулы, то $\neg$ A, A$\wedge$B, A$\vee$B, A$\rightarrow$B, A$\leftrightarrow$B, A$\oplus$B, A$\mid$B, A$\downarrow$B – формулы;

3) только те слова являются формулами, для которых это следует из 1) и 2).

Пример 7. Представить логическими формулами следующие высказывания:

а) «Сегодня понедельник или вторник»;

б) «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые»;

в) «Что в лоб, что по лбу».

Решение.

а) Составное (сложное) высказывание «Сегодня понедельник или вторник» состоит из двух простых:

A: «Сегодня понедельник»;

B: «Сегодня вторник».

Высказывания A и B соединены связкой «или» очевидно в разделительном смысле (не допускается одновременное выполнение обоих условий), то есть используется логическая связка «сумма по модулю два». Таким образом, данное высказывание представимо логической формулой: A $\oplus$ B.

б) Сложное высказывание «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые» включает два простых высказывания:

A: «Идет дождь»;

B: «Крыши мокрые».

В первом предложении «Если идет дождь, то крыши мокрые» высказывания a, b соединены связкой «если …, то…»: A $\rightarrow$ B.

Во втором «Дождя нет, а крыши мокрые» союз «а» здесь имеет смысл связки «и» ($\wedge$), и кроме того высказывание a следует взять с отрицанием: A $\wedge$ B.

Остается объединить представленные выше два высказывания:

$A \rightarrow B \ \wedge \ A \wedge B$.

в) Высказывание «Что в лоб, что по лбу», если обозначить:

А: «В лоб»;

В: «По лбу».

Представимо логической формулой $A \leftrightarrow B$.

1.4 Варианты заданий

Задание 1. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

Вариант	Предложение
1	а) Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонние. б) Сегодня плохая погода. в) Река Ангара впадает в озеро Байкал.
2	а) Железо тяжелее свинца. б) Да здравствуют музы! в) Треугольник называется равносторонним, если его стороны равны.
3	а) Каша – вкусное блюдо. б) Математика – интересный предмет. в) Картины Пикассо слишком абстрактны.
4	а) Луна есть спутник Марса. б) $2+\sqrt{3}-\sqrt[3]{5}$. в) Кислород – газ.
5	а) Москва – столица России. б) Студент физико-математического факультета педагогического института. в) Треугольник ABC подобен треугольнику A'B'C'.
6	а) Ленинград расположен на Неве. б) Все треугольники – равнобедренные. в) $x^2+8x+5=0$.

7	а) 2 • 2 = 4, и 2 • 2 ≤ 5. б) Число 2 четное или это число простое. в) Белые медведи живут в Африке.
8	а) 2 • 2 = 4. б) Луна есть спутник Марса. в) Все простые числа нечетны.
9	а) x>3. б) Некоторые птицы умеют летать. в) 2 • 2 ≥ 4.
10	а) Все числа рациональные. б) Человеку известны все виды животных. в) 2 + 3 = 5.

Задание 2. Сформулируйте отрицания следующих высказываний. Укажите значения истинности данных высказываний и их отрицаний.

Вариант	Высказывание
1	Все простые числа нечетны.
2	В равнобедренном треугольнике два угла равны между собой.
3	12 – четное число.
4	2 – рациональное число.
5	Число 24 не делится на число 6.
6	6 > 3.
7	4+7=11.
8	4 ≤ 5.
9	Урал впадает в Каспийское море.
10	2·127=254.

Задание 3. Установите, какие из следующих пар являются отрицаниями друг друга, а какие не являются.

Вариант	Высказывание
1	а) x>0, x<0 б) «Все простые числа нечетные», «Все простые числа четные»
2	) «Существуют иррациональные числа», «Все числа рациональные».) «Натуральное число n четно», «Натуральное число n нечетно».
3	а) «Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле», «На Земле существует вид животных, не известный человеку». б) « $\overline{7}$ – иррациональное число», « $\overline{7}$ – действительное число»
4	а) «Все простые числа нечетны», «Существует простое четное число». б) 3>7, 3≤7
5	а) «Треугольник АВС прямоугольный», «Треугольник АВС тупоугольный». б) «Все простые числа нечетные», «Существуют простые нечетные числа»
6	а) $6 < 9$, $6 \geq 9$. б) «Четырехугольник АВСД - параллелограмм», «Четырехугольник АВСД - ромб»
7	а) «Функция f нечетна», «Функция f четна». б) «2·2=4», «2·2=5
8	а) «Четырехугольник АВСД - квадрат», «Четырехугольник АВСД - ромб» б) «Все нечетные числа простые», «Существуют нечетные простые числа»
9	а) < 0, $2 > 0$ б) « $\overline{7}$ – четное число», « $\overline{7}$ – нечетное число»
10	а) «Все простые числа нечетны», «Все простые числа четны». б) «$a^2 - b^2 = \ a - b\ ^2$», «$a^2 - b^2 = \ a - b \quad a + b$ »

Задание 4. Разбить высказывание на элементарные и записать в виде формул логики высказываний.

Вариант	Высказывание
1	Теорема неверна или в доказательстве допущена ошибка
2	Если Иван подготовится к экзамену, то он сдаст экзамен успешно и его мама будет довольна
3	Либо студент сдает сессию, либо его отчисляются
4	Родители разрешили завести или собаку, или кошку
5	Если функция не является непрерывной, то она не дифференцируема
6	Функция непрерывна и дифференцируема
7	Если неверно, что в огороде идет дождь, то, или в Оренбурге дядька, или в огороде бузина
8	В огороде идет дождь, а в Оренбурге дядька
9	Если погода пасмурная, то идет дождь
10	Вася получит пять тогда и только тогда, когда защитит лабораторные работы и успешно сдаст экзамен

Задание 5. Пусть A – высказывание «Сегодня холодно», B – высказывание «Студент идет на занятия». Сформулировать высказывание словесно.

Вариант	Логическая формула	Вариант	Логическая формула
1	$A \wedge B$	6	$A \mid B$
2	$B \rightarrow A$	7	$B \mid A$
3	$A \rightarrow B$	8	$A \downarrow B$
4	$B \oplus A$	9	$A \oplus B$
5	$A \vee B$	10	$B \vee A$

1.5 Вопросы к защите практической работы № 1

1) Что называется высказыванием? Приведите примеры высказываний.

2) Сформулируйте определение конъюнкции высказываний.

3) Сформулируйте определение дизъюнкции высказываний.

4) Сформулируйте определение импликации высказываний.

5) Сформулируйте определение эквиваленции высказываний.

6) Что называется отрицанием высказывания? Приведите пример.

7) Что называется логической формулой?

2 Практическая работа №2. Построение таблиц истинности для формул логики высказываний

Цель работы: Научиться строить таблицы истинности для формул логики высказываний, определять тождественную истинность, тождественную ложность или выполнимость формулы. Научиться устанавливать эквивалентность формул алгебры высказываний.

2.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы;

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

2.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) ход работы;

4) формулировку заданий;

5) решение заданий своего варианта.

2.3 Методические указания к практической работе № 2

Известный немецкий математик и логик Эрнест Шредер предложил в качестве знака для обозначения ложного суждения цифру 0, что, конечно, привело к обозначению истины цифрой 1.

Таблица истинности выражает значения истинности высказываний в зависимости от значений элементарных высказываний.

Каждой логической операции ставится в соответствие таблица истинности.

Для рассмотренных выше логических операций таблицы истинности имеют вид, представленный в таблице 2:

Таблица 2 – Таблицы истинности

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$	$A \mid B$	$A \downarrow B$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1) Инверсия;
2) Конъюнкция;
3) Дизъюнкция;
4) Импликация;
5) Эквивалентность.

Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются скобки.

Алгоритм построения таблицы истинности

1) Подсчитать количество переменных n в логическом выражении.

2) Определить число строк в таблице по формуле:

$m=2^n$, где n - количество переменных.

3) Подсчитать количество логических операций в формуле.

4) Установить последовательность выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов.

5) Определить количество столбцов:

число переменных + число операций.

6) Вписать наборы входных переменных.

7) Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной в пункте 4 последовательностью.

Определение. Формула называется выполнимой (опровержимой), если существует такой набор значений переменных, при которых эта формула принимает значение 1 (0).

Определение. Формула называется тождественно-истинной, или тавтологией, если эта формула принимает значение 1 при всех наборах значений переменных.

Определение. Формула называется тождественно-ложной или противоречием, если эта формула принимает значение 0 при всех наборах значений переменных.

Пример 8. Составить таблицы истинности для формул:

а) $X \wedge Y \quad \vee X$;

б) $X \to Y \quad \to \quad X \vee Y \wedge Z$.

Решение.

а) Так как формула содержит две переменные X и Y, то количество наборов значений переменных n равно 2^2=4.

Определим порядок действий: первое действие в скобках, т.е. конъюнкция переменных X и Y, затем дизъюнкция между полученной конъюнкцией и переменной X. Тогда таблица истинности для формулы $X \wedge Y \quad \vee X$ будет имеет вид:

Таблица 3 – Таблица истинности для формулы $X \wedge Y \quad \vee X$

X	Y	$X \wedge Y$	$X \wedge Y \quad \vee X$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

б) Таблица истинности для формулы $X \to Y \quad \to \quad X \vee Y \wedge Z$ имеет вид:

Таблица 4 – Таблица истинности для формулы $X \to Y \quad \to \quad X \vee Y \wedge Z$

X	Y	Z	$\overline{Y}$	$X \to Y$	$X \vee Y$	$X \vee Y$	$X \vee Y \wedge Z$	$X \to Y \quad \to \quad X \vee Y \wedge Z$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Определение. Две формулы, зависящие от одного и того же списка переменных называются равносильными (эквивалентными), если при одинаковых наборах значений переменных они принимают одинаковые значения.

Замечание: Равносильные формулы имеют одинаковые таблицы истинности.

Одной из «тактик» доказательства равносильности формул логики высказываний является построение таблиц истинности для соответствующих формул и сравнение результирующих столбцов.

2.4 Варианты заданий

Задание 1. Составить таблицу истинности для логической формулы и определить, является ли она выполнимой, тавтологией или противоречием.

Вариант	Логическая формула	Вариант	Логическая формула
1	а) $A \to B \;\; \to \;\; B \wedge A$ б) $Q \to \;\; P \wedge R \;\; \wedge \;\; P \vee R$	6	а) $P \to R \;\; \downarrow \;\; P \wedge R$ б) $X \to Y \;\; \leftrightarrow \;\; X \vee Y \wedge Z$
2	а) $P \to \;\; Q \to P$ б) $X\&Y \;\; \to \;\; X\&Z$	7	а) $P \leftrightarrow R \;\; \mid \;\; P \wedge R$ б) $X \to Y \;\; \to \;\; X \vee Y \wedge Z$
3	а) $A \wedge B \;\; \leftrightarrow \;\; B \wedge A$ б) $Q \vee \;\; P \wedge R \;\; \to \;\; P \wedge R$	8	а) $A \to B \;\; \vee \;\; B \oplus A$ б) $X \to Y \;\; \wedge \;\; X \vee Y \wedge Z$
4	а) $A \vee B \;\; \to \;\; B \wedge A$ б) $X \vee Y \to \;\; X \wedge Z \;\; \mid Y$	9	а) $P \to P \vee Q$ б) $X \to Z \;\; \vee \;\; X \vee Y \wedge Z$
5	а) $X \to Y \;\; \to \;\; Y \to X$ б) $Q \vee R \;\; \leftrightarrow \;\; Q \wedge R \;\; \to P$	10	а) $A \to B \;\; \wedge \;\; B \to A$ б) $X \wedge Y \to \;\; Y \vee X \to Z$

Задание 2. Используя таблицы истинности, установить эквивалентность формул.

Вариант	Логические формулы
1	$F_1 = X \vee \; Y \oplus Z$ и $F_2 = \; X \vee Y \; \oplus \; X \vee Z$
2	$F_1 = X \downarrow \; Y \oplus Z$ и $F_2 = \; X \vee Y \; \downarrow \; X \vee Z$
3	$F_1 = X \rightarrow \; Y \downarrow Z$ и $F_2 = \; X \rightarrow Y \; \mid \; X \rightarrow Z$
4	$F_1 = X \downarrow \; Y \mid Z$ и $F_2 = \; X \downarrow Y \; \mid \; X \downarrow Z$
5	$F_1 = X \leftrightarrow \; Y \mid Z$ и $F_2 = \; X \leftrightarrow Y \; \mid \; X \leftrightarrow Z$
6	$F_1 = X \rightarrow \; Y \leftrightarrow Z$ и $F_2 = \; X \rightarrow Y \; \leftrightarrow \; X \rightarrow Z$
7	$F_1 = X \rightarrow \; Y \downarrow Z$ и $F_2 = \; X \rightarrow Y \; \downarrow \; X \rightarrow Z$
8	$F_1 = X \wedge \; Y \leftrightarrow Z$ и $F_2 = \; X \wedge Y \; \leftrightarrow \; X \wedge Z$
9	$F_1 = X \wedge \; Y \mid Z$ и $F_2 = \; X \wedge Y \; \mid \; X \wedge Z$
10	$F_1 = X \oplus \; Y \rightarrow Z$ и $F_2 = \; X \oplus Y \; \rightarrow \; X \oplus Z$

2.5 Вопросы к защите практической работы № 2

1) Что такое таблица истинности?

2) Каков порядок выполнения логических операций?

3) Как составить таблицу истинности для формулы логики высказываний?

4) Как определить количество строк в таблице истинности?

5) Как по таблице истинности определить, что формула является тавтологией, противоречием или выполнимой?

6) Какие формулы называются равносильными?

7) Как установить эквивалентность форму логики высказываний?

3 Практическая работа №3. Дизъюнктивная нормальная форма и конъюнктивная нормальная форма

Цель работы: Научиться применять законы логики высказываний к преобразованию формул и приводить их к дизъюнктивной нормальной форме и конъюнктивной нормальной форме.

3.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы;
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

3.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) тему работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировку заданий;
5) решение заданий своего варианта.

3.3 Методические указания к практической работе № 3

Другой способ доказательства равносильности формул логики высказываний состоит в использовании основных логических законов (таблица 5).

Определение. Преобразования, использующие равносильности формул и правило замены, называются тождественными преобразованиями.

Таблица 5 – Основные логические законы

1. Идемпотентность	
$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$
2. Коммутативность	
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \vee B = B \vee A$
3. Ассоциативность	
$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
4. Правила поглощения	
$A \wedge \ A \vee B \ = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$
5. Дистрибутивность	
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. Правила де Моргана	
$A \wedge B = A \vee B$	$A \vee B = A \wedge B$
7. Свойства констант	
$A \wedge 1 = A$ $A \wedge 0 = 0$	$A \vee 0 = A$ $A \vee 1 = 1$
8. Закон противоречия и закон исключения третьего	
$A \vee A = 1$	$A \wedge A = 0$
9. Снятие двойного отрицания	
$A = A$	
10. Формулы расщепления (склеивания)	
$A \wedge B \ \vee \ A \wedge B \ = A$	$A \vee B \ \wedge \ A \vee B \ = A$
11. Связь дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и импликации	
$A \to B = A \vee B = A \wedge B = B \to A$	
12. Выражение эквивалентности	
$A \leftrightarrow B = \ A \vee B \ \wedge \ B \vee A \ = \ A \wedge B \ \vee \ A \wedge B$	

Отметим, что «тактика» доказательства равносильности может быть разная: либо преобразуем одну из формул, приводя ее к виду другой, либо преобразуем обе формулы, приводя их к одной и той же формуле.

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений: скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: сначала выполняем действия в скобках, затем отрицание, затем выполняется конъюнкция; если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

Пример 9. С помощью тождественных преобразований:

а) упростить формулу $X \wedge Y \vee X \quad \wedge X \vee X \wedge Y$;

б) определить, является ли формула выполнимой, противоречием или тавтологией: $\mathrm{A} \wedge \quad \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$.

Решение.

а) $X \wedge Y \vee X \quad \wedge X \vee X \wedge Y = \ 6 \ = \ X \vee Y \vee X \ \wedge \ X \wedge X \wedge Y \ = \ 9 \ =$ $X \vee Y \vee X \ \wedge \ X \wedge X \wedge Y \ = \ 2; 1 \ = \ X \vee X \ \vee Y \ \wedge \ X \wedge Y \ = \ 8; 3 \ = \ 1 \vee Y \ \wedge X \wedge$ $Y = \ 7 \ = 1 \wedge X \wedge Y = \ 7 \ = X \wedge Y$.

б) $\mathrm{A} \wedge \ \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \ = \ 6 \ = A \wedge \ A \wedge B \ = \ 3 \ = A \wedge A \wedge B = \ 8 \ = 0 \wedge B = \ 7 \ = 0$.

Поскольку формула при любых значениях переменных равна нулю, то данная формула является противоречием.

Определение. Формулы, в которых имеются только операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$ над простыми переменными называются приведенными формулами.

Теорема. Для каждой формулы существует равносильная ей приведенная формула.

Определение. Элементарной конъюнкцией n высказываний называется конъюнкция высказываний или их отрицаний.

Определение. Элементарной дизъюнкцией n высказываний называется дизъюнкция высказываний или их отрицаний.

Теорема 1. Чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалось два высказывания, из которых одно является отрицанием другого.

Теорема 2. Чтобы элементарная конъюнкция была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в ней присутствовала пара высказываний, из которых одно является отрицанием другого.

Определение. Формула равносильная данной и представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой данной формулы (ДНФ).

Определение. Формула равносильная данной и представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций называется конъюнктивной нормальной формой данной формулы (КНФ).

Две операции конъюнкция и дизъюнкция называются двойственными друг к другу, то есть конъюнкцию можно заменить дизъюнкцией, и наоборот.

Для того чтобы от дизъюнкции перейти к конъюнкции, и наоборот, нужно установить двойное отрицание и одно из них применить вместе с законом де Моргана.

Для того чтобы от ДНФ перейти к КНФ, и наоборот, можно применить законы дистрибутивности.

Пример 10. Привести формулу логики высказываний к ДНФ и КНФ.

$$X \wedge Y \vee Y \wedge Z \ \wedge X \wedge A = \ X \wedge Y \vee Y \wedge Z \ \wedge \ X \vee A$$

$$= \ X \wedge Y \vee Y \wedge Z \ \wedge X \ \vee \ X \wedge Y \vee Y \wedge Z \ \wedge A$$

$$= \ X \wedge Y \wedge X \ \vee \ Y \wedge Z \wedge X \ \vee \ X \wedge Y \wedge A \ \vee \ Y \wedge Z \wedge A$$

$$= \ X \wedge Y \ \vee \ Y \wedge Z \wedge X \ \vee \ X \wedge Y \wedge A \ \vee \ Y \wedge Z \wedge A \ - \text{ДНФ}$$

$$X \wedge Y \vee Y \wedge Z \ \wedge X \wedge A = \ X \wedge Y \vee Y \wedge Z \ \wedge \ X \vee A$$

$$= \ X \vee Y \wedge Z \ \wedge \ Y \vee Y \wedge Z \ \wedge \ X \vee A$$

$$= \ X \vee Y \ \wedge \ X \vee Z \ \wedge \ Y \vee Y \ \wedge \ Y \vee Z \ \wedge \ X \vee A$$

$$= \ X \vee Y \ \wedge \ X \vee Z \ \wedge \ Y \vee Z \ \wedge \ X \vee A \ - \text{КНФ}$$

Замечание: Для того чтобы проверить правильно ли привели формулу к КНФ и ДНФ, можно построить таблицы истинности первоначальной и получившихся формул. Последние столбцы таблиц этих формул должны принимать одинаковые значения истинности.

3.4 Варианты заданий

Задание 1. С помощью равносильных преобразований записать формулу в приведенном виде. Определить, является ли формула выполнимой, противоречием или тавтологией.

Вариант	Логическая формула	Вариант	Логическая формула
1	а) $X \to Y \ \leftrightarrow \ X \vee Y \wedge Z$ б) $P \to P \vee Q$	6	а) $Q \vee R \ \leftrightarrow \ Q \wedge R \ \to P$ б) $A \vee B \ \to \ B \wedge A$
2	а) $X \to Y \ \to \ X \vee Y \wedge Z$ б) $A \to B \ \wedge \ B \to A$	7	а) $P\&Q \ \to R \oplus P\&R$ б) $X \to Y \ \to \ Y \to X$
3	а) $X \to Y \ \wedge \ X \vee Y \wedge Z$ б) $A \to \ A\&B$	8	а) $R \to \ P \wedge R \ \leftrightarrow \ Q \mid P$ б) $A \wedge \ A \vee B$
4	а) $X \to Z \ \vee \ X \vee Y \wedge Z$ б) $P \to R \ \downarrow \ P \wedge R$	9	а) $Q \wedge R \ \mid \ P \vee Q \ \to R$ б) $A \mid B \ \to \ \mathrm{B} \leftrightarrow A$
5	а) $X \wedge Y \to \ Y \vee X \to Z$ б) $P \leftrightarrow R \ \mid \ P \wedge R$	10	а) $Q \to \ P \wedge R \ \wedge \ P \vee R$ б) $X \mid \ Y \to \mathrm{X}$

Задание 2. Преобразовать формулу к ДНФ или к КНФ, проверьте получившиеся результаты с помощью таблиц истинности.

Вариант	Логическая формула	Вариант	Логическая формула
1	$X \mid Y \ \to \ Y \mid \mathrm{X}$	6	$A \to B \ \to \ B \wedge A$
2	$A \wedge B \ \leftrightarrow \ B \wedge A$	7	$P \to \ Q \to P$
3	$A \vee B \ \to \ B \wedge A$	8	$P \to P \vee Q$
4	$X \to Y \ \to \ Y \to X$	9	$A \to B \ \wedge \ B \to A$
5	$A \wedge \ A \vee B$	10	$A \to \ A\&B$

3.5 Вопросы к защите практической работы № 3

1) Какие преобразования называются тождественными?
2) Сформулируйте законы логики высказываний.
3) Какие формулы называются приведенными?
4) Что называется элементарной конъюнкцией?
5) Что называется элементарной дизъюнкцией?
6) Сформулируйте определение КНФ.
7) Сформулируйте определение ДНФ.

4 Практическая работа №4 Совершенные нормальные формы

Цель работы: Научиться строить совершенную дизъюнктивную нормальную форму и совершенную конъюнктивную нормальную форму логики высказываний аналитическим и табличным способами.

4.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической;
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

4.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) ход работы;

4) формулировку заданий;

5) решение заданий своего варианта.

4.3 Методические указания к практической работе № 4

Определение. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний (СДНФ) называется ДНФ, в которой:

1) различны все члены дизъюнкции;
2) различны все члены каждой элементарной конъюнкции;
3) ни одна элементарная конъюнкция не содержит одновременно переменную и ее отрицание;
4) каждая элементарная конъюнкция содержит все переменные, входящие в формулу, т. е. имеет вид

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{F(c_1, \ldots, c_n)=1} x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n},$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ из 0 и 1, для которых $F(c)=1$.

Определение. Совершенной конъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний (СКНФ) называется КНФ, в которой:

1) различны все члены конъюнкции;
2) различны все члены каждой элементарной дизъюнкции;
3) ни одна элементарная дизъюнкция не содержит переменную вместе с ее отрицанием;

4) каждая элементарная дизъюнкция содержит все переменные, входящие в исходную формулу, т. е. имеет вид

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{F(c_1, \ldots, c_n) = 0} (x_1^{\overline{c_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{c_n}}),$$

где конъюнкция берется по всем наборам c=(c_1, c_2, …, c_n) из 0 и 1, для которых F(c)=0.

1-й способ – аналитический.

Алгоритм приведения к СДНФ с помощью равносильных преобразований

1) привести формулу с помощью равносильных преобразований к ДНФ.

2) удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);

3) из одинаковых членов дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

4) из одинаковых членов каждой элементарной конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

5) если в какой-нибудь элементарной конъюнкции не содержится переменной X_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой конъюнкции член $X_i \vee X_\imath$ и применить закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;

6) если в полученной дизъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.

Полученная формула и является СДНФ данной формулы.

Пример 11. Привести формулу $X \wedge \ Y \vee Z$ к СДНФ с помощью равносильных преобразований.

Решение.

$X \wedge \ Y \vee Z \ = \ X \wedge Y \ \vee \ X \wedge Z \ = \ X \wedge Y \ \wedge \ Z \vee Z \ \vee \ X \wedge Z \ \vee \ Y \vee Y \ =$
$5 \ = \ X \wedge Y \wedge Z \ \vee \ X \wedge Y \wedge Z \ \vee \ X \wedge Z \wedge Y \ \vee \ X \wedge Z \wedge Y \ = \ X \wedge Y \wedge Z \ \vee$
$X \wedge Y \wedge Z \ \vee \ X \wedge Z \wedge Y$.

Алгоритм приведения к СКНФ с помощью равносильных преобразований

1) привести формулу с помощью равносильных преобразований к КНФ.

2) удалить члены конъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);

3) из одинаковых членов конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

4) из одинаковых членов каждой элементарной дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;

5) если в какой-нибудь элементарной дизъюнкции не содержится переменной X_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой дизъюнкции член $X_i \wedge X_\iota$ и применить закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;

6) если в полученной конъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.

Полученная формула и является СКНФ данной формулы.

Пример 12. Привести формулу $X \to Y \ \wedge X \wedge Y$ к СКНФ с помощью равносильных преобразований.

Решение.

$$X \to Y \ \wedge X \wedge Y = X \vee Y \ \wedge X \wedge Y = X \vee Y \ \wedge \ X \vee Y \wedge Y \ \wedge \ Y \vee X \wedge X \ = \ X \vee Y \ \wedge \ X \vee Y \ \wedge \ X \vee Y \ \wedge \ Y \vee X \ \wedge \ Y \vee X \ = \ X \vee Y \ \wedge \ X \vee Y \ \wedge \ X \vee Y \ .$$

2-й способ – табличный.

Алгоритм приведения к СДНФ с помощью таблицы истинности

1) Строим таблицу значений формулы.

2) Рассматриваем только те строки, в которых значение формулы равно единице.

3) Каждой такой строке соответствует конъюнкция всех аргументов (без повторений). Причем, аргумент, принимающий значение 0, входит в нее с отрицанием, значение 1 – без отрицания.

4) Образуем дизъюнкцию всех полученных конъюнкций.

Пример 13. Построить СДНФ для данных формул логики высказываний.

а) $F = X \wedge \ Y \vee Z \ .$

б) $F = \ X \to Y \ \wedge X \wedge Y.$

Решение.

а) Для построения СДНФ строим таблицу истинности для формулы F, определив количество наборов значений переменных ($2^3=8$) и порядок выполнения действий в соответствии с установленными правилами.

Таблица 6 – Таблица истинности для формулы $F = X \wedge \; Y \vee Z$

№	X	Y	Z	Y	$Y \vee Z$	$F = X \wedge \; Y \vee Z$
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

Рассматриваем только 4, 5 и 7 наборы, так как только на этих наборах формула принимает значение равное единице.

СДНФ имеет вид: $F = \; X \wedge Y \wedge Z \; \vee \; X \wedge Y \wedge Z \; \vee \; X \wedge Z \wedge Y$.

б) Строим таблицу истинности для формулы F:

Таблица 7 – Таблица истинности для формулы $F = \; X \rightarrow Y \; \wedge X \wedge Y$

№	X	Y	X→Y	$F = \; X \rightarrow Y \; \wedge X \wedge Y$
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0
2	1	0	0	0
3	1	1	1	1

СДНФ имеет вид: F = X∧Y.

Алгоритм приведения к СКНФ с помощью таблицы истинности

1) Строим таблицу значений формулы.

2) Рассматриваем только те строки таблицы, где формула принимает значение 0.

3) Каждой такой строке соответствует дизъюнкция всех переменных (без повторений). Причем аргумент, принимающий значение 0, берется без отрицания, значение 1 – с отрицанием.

4) Образуем конъюнкцию полученных дизъюнкций.

Пример 14. Построить СКНФ для данных формул логики высказываний.

а) $F = X \wedge \; Y \vee Z$.

б) $F = \; X \rightarrow Y \; \wedge X \wedge Y$

Решение.

а) Строим таблицу значений, используя предыдущий пример.

Рассматриваем только наборы, на которых формула принимает значение ноль.

СКНФ (0): № 0, 1, 2, 3, 6:

$$F = \; X \vee Y \vee Z \; \wedge \; X \vee Y \vee Z \; \wedge \; X \vee Y \vee Z \; \wedge \; X \vee Y \vee Z \; \wedge \; X \vee Y \vee Z$$

б) Строим таблицу значений, используя предыдущий пример.

Рассматриваем только наборы, на которых формула принимает значение ноль.

СКНФ (0): № 0, 1, 2:

$$F = \; X \vee Y \; \wedge \; X \vee Y \; \wedge \; X \vee Y$$

4.4 Варианты заданий

Задание 1. С помощью равносильных преобразований привести формулу к

а) СДНФ; б) СКНФ.

Вариант	Логическая формула	Вариант	Логическая формула
1	а) $A \wedge B \; \vee \; A \rightarrow B$ б) $A \rightarrow B \; \wedge \; B \rightarrow C$	6	а) $A \wedge B \leftrightarrow A \vee A \wedge B$ б) $A \vee B \rightarrow C \wedge B$

2	а) $A \to B \quad \to \quad A \to B$ б) $A \vee B \to C \vee A$	7	а) $A \vee B \to B \vee A$ б) $A \wedge B \quad \to \quad A \to \quad B \to C$
3	а) $A \wedge \;\; A \to B \quad \to \quad A \to B$ б) $A \vee B \to C \quad \to A$	8	а) $A \to B \quad \to A$ б) $A \wedge B \leftrightarrow \;\; B \wedge C$
4	а) $A \wedge B \vee \;\; A \to B$ б) $A \wedge B \quad \to C$	9	а) $A \wedge \;\; A \vee B \quad \wedge \;\; B \to A$ б) $A \to B \;\; \wedge C \;\; \vee A \wedge B$
5	а) $A \wedge \;\; A \to B \quad \to B$ б) $A \vee B \to C \wedge B$	10	а) $A \wedge B \to \;\; A \to B$ б) $A \to B \vee C \;\; \wedge A \wedge C$

Задание 2. С помощью таблицы истинности привести формулу к

а) СДНФ; б) СКНФ.

Вариант	Логическая формула	Вариант	Логическая формула
1	а) $A \leftrightarrow B \vee A$ б) $A \to B \;\; \wedge \;\; C \to B$	6	а) $A \vee B \to B \vee A$ б) $A \wedge B \quad \to \quad A \to \quad B \to C$
2	а) $A \wedge \;\; A \to B \quad \to B$ б) $A \vee B \to C \wedge B$	7	а) $A \to B \quad \to \quad A \to B$ б) $A \vee B \to C \vee A$
3	а) $A \leftrightarrow B \quad \to B$ б) $A \vee B \to C \quad \to A$	8	а) $A \wedge \;\; A \to B \quad \to \quad A \to B$ б) $C \to A \quad \to \quad B \vee C \to A$
4	а) $A \leftrightarrow B \;\; \wedge \;\; A \wedge B$ б) $A \vee B \to \;\; B \leftrightarrow C$	9	а) $A \wedge B \vee \;\; A \to B$ б) $A \wedge B \quad \to C$
5	а) $A \wedge B \;\; \vee \;\; A \to B$ б) $A \to B \;\; \wedge C \;\; \vee A \wedge B$	10	а) $A \wedge B \leftrightarrow A \vee A \wedge B$ б) $A \vee B \to C \wedge B$

4.5 Вопросы к защите практической работы №4

1) Сформулируйте определение СКНФ.
2) Сформулируйте определение СДНФ.

3) Опишите алгоритм построения СКНФ аналитическим способом.
4) Опишите алгоритм построения СДНФ аналитическим способом.
5) Опишите алгоритм построения СКНФ табличным способом.
6) Опишите алгоритм построения СДНФ табличным способом.

5 Практическая работа №5. Минимизация булевых функций

Цель работы: Научиться представлять булевы функции в виде совершенных нормальных форм. Научиться минимизировать логические функции с помощью карт Карно.

5.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы;
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

5.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) тему работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировку заданий;
5) решение заданий своего варианта.

5.3 Методические указания к практической работе № 5

Множество высказываний с введенными для них логическими операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания основными законами этих действий называется алгеброй Буля. Алгебра Буля – исторически первый раздел математической логики, разработанный ирландским логиком и математиком Дж. Булем (George Boole (1815—1864) — английский математик и логик. Профессор математики Королевского колледжа Корка). В середине XIX в. Буль применил алгебраические методы для решения логических задач и сформулировал на языке алгебры некоторые фундаментальные законы мышления

Определение. Булевой функцией $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется n-местная функция, аргументы которой принимают значения во множестве {0, 1} и сама функция принимает значения в этом же множестве.

Теорема. Всякую булеву функцию от n переменных можно задать таблицей из 2^n строк, в которой в каждой строке записывают одну из оценок списка переменных, принимающих значение 0 или 1.

Используется также задание булевой функции в виде двоичного слова, длина которого зависит от числа переменных.

Таблица 8 – Таблица значений булевой функции:

№	x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Номера наборов всегда нумеруются, начиная с нуля, в таблице приведено стандартное расположение всех наборов функции трех переменных. Первые четыре столбца одинаковы для всех булевых функций от трех переменных. Столбец значений функции задается или вычисляется.

Эту же функцию можно записать в виде двоичного слова:

$$F(x_1, x_2, x_3)=00101101.$$

Утверждение 1. Существует ровно 2^{2^n} различных булевых функций от n переменных.

Константы 0 и 1 считают нуль-местными булевыми функциями.

Утверждение 2. Каждой формуле логики высказываний соответствует некоторая булева функция.

Поскольку каждая булева функция представима в виде формулы логики высказываний, то принцип построения СДНФ и СКНФ сохраняется такой же, как и для формул логики высказываний.

Пример 15. Построить СКНФ и СДНФ булевой функции

$$F(x_1, x_2, x_3)= 00101110.$$

Решение.

Таблица 9 – Таблица значений булевой функции:

№	x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

СКНФ (0): № 0, 1, 3, 7

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

СДНФ (1): № 2, 4, 5, 6

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} \vee x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_3} \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, x_2\, \overline{x_3}.$$

Замечание. СДНФ и СКНФ связаны между собой следующим соотношением:

$$F_{СКНФ} = F_{СДНФ}$$

Логическая функция может быть представлена в виде таблицы истинности или в виде СДНФ (совершенной дизъюнктивной нормальной формы) или СКНФ (совершенной конъюнктивной нормальной формы) и может быть использована для получения логической схемы устройства. Однако полученная логическая схема, как правило, не будет оптимальна. Поэтому важным этапом синтеза логических схем является минимизация логических функций.

Определение. Минимизацией называется преобразование логических функций с целью упрощения их аналитического представления.

Определение. Минимальной формой логической функции называется такая форма, которая не допускает больше никаких упрощений.

Определение. Минтерм (конституента единицы) – конъюнкция, которая связывает только отдельные переменные в прямом или инверсном виде.

Определение. Макстерм (конституента нуля) – дизъюнкция, которая связывает отдельные переменные в прямом или инверсном виде.

При минимизации функции исходят из требования минимальной затраты оборудования, так как каждой элементарной логической функции соответствуют определённые физические элементы (И, ИЛИ, НЕ).

Существуют следующие методы минимизации логических функций:

1. Метод последовательного исключения переменных.

2. С помощью карт Карно.

Метод последовательного исключения переменных выполняется с помощью основных законов и тождеств алгебры логики. Исключение переменных из минтерма происходит при прибавлении к нему минтерма, отличающегося от него только одной переменной (склеивание минтермов). Этот метод не даёт гарантии получения минимальной формы. Он может привести к получению одной из тупиковых форм, которые больше не упрощаются, но не являются минимальными.

Карта Карно или карта (диаграмма) Вейча – графический способ минимизации функций алгебры логики.

Карта Карно – графическое представление таблицы истинности. Общий вид карты Карно для 2-х, 3-х и 4-х переменных представлен на рис.2.

A	B	X
0	0	X_0
0	1	X_1
1	0	X_2
1	1	X_3

B \ A	0	1
0	X_0	X_2
1	X_1	X_3

а)

A	B	C	X
0	0	0	X_0
0	0	1	X_1
0	1	0	X_2
0	1	1	X_3
1	0	0	X_4
1	0	1	X_5
1	1	0	X_6
1	1	1	X_7

C \ AB	00	01	11	10
0	X_0	X_2	X_6	X_4
1	X_1	X_3	X_7	X_5

б)

A	B	C	D	X
0	0	0	0	X_0
0	0	0	1	X_1
0	0	1	0	X_2
0	0	1	1	X_3
0	1	0	0	X_4
0	1	0	1	X_5
0	1	1	0	X_6
0	1	1	1	X_7
1	0	0	0	X_8
1	0	0	1	X_9
1	0	1	0	X_{10}
1	0	1	1	X_{11}
1	1	0	0	X_{12}
1	1	0	1	X_{13}
1	1	1	0	X_{14}
1	1	1	1	X_{15}

CD \ AB	00	01	11	10
00	X_0	X_4	X_{12}	X_8
01	X_1	X_5	X_{13}	X_9
11	X_3	X_7	X_{15}	X_{11}
10	X_2	X_6	X_{14}	X_{10}

Рисунок 1 – Таблицы истинности и соответствующие им карты Карно:

а – для 2-х переменных; б – 3-х переменных; в – 4-х переменных

0 – соответствует инверсному значению переменных, 1 – прямому.

Соседние клетки карты Карно должны отличаться значением только одной переменной. Крайние клетки любого столбца или строки также являются соседними, т.к. отличаются на одну переменную.

Метод Карно целесообразно применять для функций, имеющих не более 5 переменных. При большом количестве переменных используют формальные методы Квайна или Квайна-Мак-Класки.

Карта Карно используется следующим образом:

1) Для заданной переключательной функции составляется карта Карно.

2) На ней отмечаются единицами те клетки, которые включают в себя минтермы, входящие в состав переключательной функции. Остальные клетки остаются пустыми или ставится 0.

3) Клетки, отмеченные единицами, объединяются в группы по следующим правилам:

Правило 1. Объединяются клетки, составляющие полные квадраты из 4 и 16 клеток.

Правило 2. Объединяются клетки, составляющие полные столбцы или ряды на 2, 4 или 8 клеток, а также два рядом расположенных столбца или ряда из 4, 8 или 16 клеток.

Правило 3. Объединяются 2 соседние клетки в столбце или ряду.

Правило 4. Объединяются клетки, пары соседних клеток, клетки, образующие квадраты, столбцы или ряды, если они расположены симметрично либо относительно центральной вертикальной или горизонтальной оси карты Карно, либо относительно вертикальной оси одной из половин (левой или правой) карты Карно функции пяти переменных, либо относительно вертикальной или горизонтальной оси одной из четвертей карты Карно шести переменных.

Правило 5. Одна и та же клетка может входить в несколько групп.

При использовании карты Карно основная задача состоит в том, что все единичные клетки на карте необходимо объединить в минимальное число групп максимального размера. Полученные группы считываются в виде конъюнкций, в которые входят переменные общие, для всех минтермов, соответствующих этим клеткам. В результате преобразований из минтермов, объединённых в группы, получают конъюнкции содержащие меньшее число переменных. Число конъюнкций в полученной минимизированной ДНФ должно быть равно количеству групп в карте Карно.

Используя различные варианты объединений можно получить несколько различных минимизированных функций, из которых выбирается та, которая обеспечивает наилучшую схемную реализацию.

Пример 16. Пусть задана функция 3-х переменных

$$F = ABC \vee ABC \vee ABC \vee ABC$$

Заданную функцию представим с помощью карты Карно:

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	1	1		1
1				1

Рисунок 2 – Карта Карно

Затем производится объединение 2-х, 4-х или 8-ми единиц. В данном случае объединение двух единиц по горизонтали соответствует операции склеивания над конституантами $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ и $\overline{A}B\overline{C}$, в результате которой исключается переменная B и получена импликанта $\overline{A}\,\overline{C}$. Объединение двух единиц по вертикали соответствует операции склеивания над конституантами ABC и ABC , в результате которой исключена переменная C и будет получена импликанта AB . Следовательно, минимальная форма заданной функции примет следующий вид:

$$F = AC \vee AB$$

Пример 17. Задана булева функция от четырех переменных в виде таблицы истинности. Требуется найти $F_{ДНФ min}$, $F_{КНФ\ min}$.

Таблица 10 – Таблица истинности для функции 4-х переменных

№	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

1. Составим карту Карно и объединим в группы единичные клетки.

AB / CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10		1		

Рисунок 3 – Карта Карно

Получим,

$$F_{ДНФmin} = BC \vee D \vee ABC$$

2. Для получения минимизированной КНФ группируются пустые клетки. Пустые клетки представляют собой инверсные значения ДНФ, т.е. КНФ.

$$F_{КНФmin} = F_{ДНФ} = BCD \vee ACD \vee BCD = \quad B \vee C \vee D \quad A \vee C \vee D \quad B \vee C \vee D$$

Карта Карно представляется в данном случае свернутой в цилиндр, в котором верхний край совмещается с нижним. Этот пример показывает также, что контура могут накладываться друг на друга.

5.4 Варианты заданий

Задание 1. С помощью карты Карно минимизировать булеву функцию 3-х переменных, заданную в виде таблицы истинности.

№ набора	Значения переменных			Варианты булевых функций									
	A	B	C	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
2	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
3	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
5	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
6	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
7	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0

Задание 2. С помощью карты Карно минимизировать булеву функцию 4-х переменных, заданную в виде таблицы истинности.

№ набора	Значения переменных				Варианты булевых функций									
	A	B	C	D	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
9	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
11	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
12	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
13	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
14	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
15	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

5.5 Вопросы к защите практической работы №5

1) Что называется булевой функцией?
2) Как определить количество наборов переменных булевой функции?
3) Сколько существует наборов для функции *n* переменных?
4) Опишите алгоритм построения СДНФ булевой функции.
5) Опишите алгоритм построения СКНФ булевой функции.
6) Что называется минимизацией булевой функции?
7) Что называется Картой Карно?
8) Опишите алгоритм минимизации булевых выражений с помощью карты Карно.

6 Практическая работа №6 Полнота множеств булевых функций. Важнейшие классы функций

Цель работы: Научиться определять принадлежность функции к различным классам и полноту систем функций.

6.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы;
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

6.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) ход работы;

4) формулировку заданий;

5) решение заданий своего варианта.

6.3 Методические указания к практической работе № 6

Любую булеву функцию можно выразить в виде формулы через элементарные функции: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, двоичное сложение и константу 0 или 1. Эти функции можно рассматривать как систему элементарных функций, через которые выражается любая булева функция.

Определение. Система булевых функций $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ называется полной, если любая булева функция может быть выражена через функции этой системы с помощью составления из них сложных функций..

Определение. Составление сложных функций из элементарных функций системы называется суперпозицией.

Определение. Класс (множество) K булевых функций называется функционально замкнутым, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции.

Пример 18.

а) Четыре булевы функции одной переменной ($F_1 = 00$, $F_2 = 11$, $F_3 = 01$, $F_4 = 10$) образуют замкнутый класс.

б) Булевы функции $F_1 = x$ и $F_2 = x$ образуют замкнутый класс.

Теорема. Класс $T_0=\{F \mid F(0, 0, \ldots, 0)=0\}$ функций, сохраняющих константу ноль на нулевом наборе, замкнут относительно суперпозиций.

Теорема. Класс $T_1=\{F \mid F(1, 1, \ldots, 1)=1\}$ функций, сохраняющих константу один на единичном наборе замкнут относительно суперпозиций.

Определение. Двойственной для функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция

$$F^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}.$$

Пример 19. Построить функцию, двойственную данной:

а) $F = x \vee y;$

б) $F = x \to y.$

Решение.

а) $F^* = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}} = x \wedge y.$

б) $F^* = \overline{\overline{x} \to \overline{y}} = \overline{\overline{\overline{x}} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{\overline{x}}} \wedge \overline{\overline{y}} = \overline{x} \wedge y.$

Определение. Функция, совпадающая со своей двойственной, называется самодвойственной.

Утверждение. Если функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ самодвойственна, то функция f тоже самодвойственна.

Утверждение. Чтобы функция была самодвойственной необходимо и достаточно, чтобы на всяких двух противоположных наборах она принимала разные значения.

Определение. Противоположными называются те наборы, которые в сумме дают двоичный код числа $(2^n - 1)$.

Перечислим пары противоположных наборов: (0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4). Легко убедиться по таблице, что на всяких двух противоположных наборах функция принимает разные значения. Следовательно, функция является самодвойственной.

Пример 20. Выяснить является ли функция $F = 01110010$ самодвойственной:

Решение.

Строим таблицу значений для функции $F = 01110001$.

Таблица 12 – Таблица значений булевой функции

№	x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Теорема. Класс $S = \{F \mid F = F^*\}$ самодвойственных функций замкнут относительно суперпозиций.

Арифметические функции в алгебре логики – это сложение по модулю два и умножение (конъюнкция).

Русский математик Жегалкин показал, что любая булева функция может быть представлена с использованием операций конъюнкции (&), сложения по модулю два (⊕) и константы 1.

Определение. Многочленом Жегалкина называется многочлен, являющийся суммой константы 0 или 1 и различных одночленов, в которые все переменные входят не выше, чем в первой степени: $\sum X_{i_1} ... X_{i_k} + a_j$, причем на каждом наборе $<i_1, \ldots, i_k>$ все a_{ij} $(j = 1, \ldots, k)$ различны, $a_j \in \{0, 1\}$.

Теорема. Всякую булеву функцию можно представить единственным многочленом Жегалкина.

Многочлен Жегалкина можно получить различными способами. Наиболее экономным с точки зрения объёма вычислений и целесообразным для построения многочлена Жегалкина вручную является метод Паскаля.

Рассмотрим алгоритм на примере.

Пример 21. Построить многочлен Жегалкина для функции $F=10011110$.

Решение.

Алгоритм построения многочлена Жегалкина:

Шаг 1. Строим таблицу. Первый столбец содержит возможные слагаемые многочлена Жегалкина. Нулевому набору всегда соответствует слагаемое 1. Остальным наборам соответствует слагаемое, представляющее собой конъюнкцию переменных, которые на данном наборе принимают значение 1. Следующие n столбцов – всевозможные наборы из 0 и 1, соответствующие переменным. Далее столбец значений функции F. Функция g является вспомогательной, поэтому изначально этот столбец не заполнен.

Таблица 13 – Многочлен Жегалкина

Слагаемые многочлена Жегалкина	x_1	x_2	x_3	F	g	Треугольник Паскаля
1	0	0	0	1		
x_3	0	0	1	0		
x_2	0	1	0	0		
x_2x_3	0	1	1	1		
x_1	1	0	0	1		
$x_1\ x_3$	1	0	1	1		
$x_1\ x_2$	1	1	0	1		
$x_1\ x_2\ x_3$	1	1	1	0		

Шаг 2. Построение треугольника Паскаля. Верхняя сторона треугольника есть вектор значения функции, выписываем его напротив первой строки таблицы. Любой другой элемент треугольника есть сумма по модулю два двух соседних элементов предыдущей строки. Левая сторона треугольника представляет собой значение вспомогательной функции g.

Таблица 14 – Многочлен Жегалкина

Слагаемые многочлена Жегалкина	x_1	x_2	x_3	F	g	Треугольник Паскаля
1	0	0	0	1	1	F = 1 0 0 1 1 1 1 0
x_3	0	0	1	0	1	1 0 1 0 0 0 1
x_2	0	1	0	0	1	1 1 1 0 0 1
x_2x_3	0	1	1	1	0	0 0 1 0 1
x_1	1	0	0	1	0	0 1 1 1
$x_1 x_3$	1	0	1	1	1	1 0 0
$x_1 x_2$	1	1	0	1	1	1 0
$x_1 x_2 x_3$	1	1	1	0	1	1

Шаг 3. Построение многочлена Жегалкина. В многочлен войдут только те слагаемые, которым соответствует единица во вспомогательной функции g.

Для данной функции многочлен Жегалкина имеет вид:

$$F = 1 + x_3 + x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3.$$

Если переменных в функции не 3, а 4 или больше, то метод работает без изменений, только увеличатся размеры таблиц.

Определение. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется линейной, если многочлен Жегалкина для нее имеет следующий линейный относительно переменных вид:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1},$$ где каждое a_i равно 0 или 1.

Булева функция из рассмотренного выше примера не является линейной.

Теорема. Класс $L = \{F \mid F = a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n,\ a_i \in \{0, 1\}\}$ линейных функций замкнут относительно суперпозиций.

Определение. Если $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ - наборы длины n из 0 и 1, то $a \le b$, если $a_1 \le b_1, \ldots, a_n \le b_n$.

Пример 22.

Наборы $(0, 1, 0)$ и $(1, 1, 0)$ сравнимы, причем $(0, 1, 0) \le (1, 1, 0)$.

Наборы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ несравнимы. Также несравнимы наборы $(0, 1)$ и $(1, 1, 0)$.

Определение. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если для всяких наборов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ условие $a \leq b$ влечет $F(a) \leq F(b)$.

Теорема. Класс $M = \{F \mid a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b)\}$ монотонных функций замкнут относительно суперпозиций.

Теорема Поста (признак полноты системы булевых функций). Для того чтобы система булевых функций $\{F_1, \ldots, F_m\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из пяти функционально замкнутых классов T_0, T_1, L, M, S нашлась хотя бы одна функция F_i из системы, не принадлежащая этому классу.

Пример 23. Выяснить к каким функционально замкнутым классам принадлежит булева функция $F=01001110$.

Решение.

Таблица 15 – Таблица значений булевой функции и треугольник Паскаля

Слагаемые многочлена Жегалкина	x_1	x_2	x_3	F	g	Треугольник Паскаля
1	0	0	0	0	0	$F = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0$
x_3	0	0	1	1	1	$1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$
x_2	0	1	0	0	0	$0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1$
x_2x_3	0	1	1	0	1	$1\ 0\ 0\ 1\ 1$
x_1	1	0	0	1	1	$1\ 0\ 1\ 0$
$x_1\ x_3$	1	0	1	1	1	$1\ 1\ 1$
$x_1\ x_2$	1	1	0	1	0	$0\ 0$
$x_1\ x_2\ x_3$	1	1	1	0	0	0

Многочлен Жегалкина имеет вид: $F = x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_1\ x_3$.

1) $F(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow F \in T_0$;

2) $F(1, 1, 1) = 1 \Rightarrow F \notin T_1$;

3) $F(0, 0, 0) = F(1, 1, 1)$, а наборы $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$ являются противоположными, то $F \notin S$;

4) так как в многочлене Жегалкина присутствуют слагаемые, представляющие собой конъюнкцию нескольких переменных, то $F \notin L$;

5) по определению, для наборов *(1, 1, 0) ≤ (1, 1, 1) не выполняется условие* $F(1, 1, 0) \leq F(1, 1, 1)$, т.к. $F(1, 1, 0) > F(1, 1, 1)$, то $F \notin M$.

Сведем полученные данные в таблицу Поста:

	T_0	T_1	S	L	M
F	+	-	-	-	-

Пример 24. Доказать полноту системы {+, ∨, 1}.

Решение. Введем обозначения: $F_1 = x_1 + x_2$, $F_2 = x_1 \vee x_2$, $F_3 = 1$. Построим единую таблицу для функций.

Таблица 16 – Единая таблица значений для функций

Слагаемые	x_1	x_2	$F_1 = x_1+x_2$	Δ Паскаля	$F_2 = x_1 \vee x_2$	Δ Паскаля	$F_3 = 1$	Δ Паскаля
1	0	0	0	0 1 1 0	0	0 1 1 1	1	1 1 1 1
x_2	0	1	1	1 0 1	1	1 0 0	1	0 0 0
x_1	1	0	1	1 1	1	1 0	1	0 0
x_1x_2	1	1	0	0	1	1	1	0

Многочлен Жегалкина:

$$F_1 = x_1 + x_2;$$

$$F_2 = x_2 + x_1 + x_1x_2;$$

$$F_3 = 1.$$

Сведем полученные данные в таблицу Поста:

F	T_0	T_1	L	M	S
F_1	+	-	+	-	-
F_2	+	+	-	+	-
F_3	-	+	+	+	-

Поскольку для каждого из пяти функционально замкнутых классов нашлась функция, не принадлежащая этому классу (в каждом столбце имеется хотя бы один минус), то система булевых функций $\{+, \vee, 1\}$ является полной.

6.4 Варианты заданий

Задание 1. Определить принадлежность булевой функции к важнейшим замкнутым классам.

Вариант	Булева функция	Вариант	Булева функция
1	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 00100100 б) $x \vee y \rightarrow z \oplus x$	6	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 01101110. б) $z \rightarrow x \oplus x \mid y$
2	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 01101110 б) $x \downarrow y \rightarrow z \oplus y$	7	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 00100101 б) $z \rightarrow x \leftrightarrow x \mid y$
3	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 10101101 б) $x \downarrow y \rightarrow z \leftrightarrow y$	8	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 10000111 б) $z \mid x \oplus z \mid y$
4	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 10101010 б) $x \downarrow y \rightarrow z \leftrightarrow y$	9	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 11101110 б) $z \rightarrow x \leftrightarrow y \mid x$
5	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 10101110 б) $x \downarrow y \rightarrow z \oplus y$	10	а) $F(x_1, x_2, x_3)$= 10001110 б) $x \mid y \oplus z \rightarrow x$

Задание 2. Определить полноту системы булевых функций.

Вариант	Булева функция	Вариант	Булева функция
1	$F = x \rightarrow y;\ x \wedge y$	6	$F = x \vee y;\ x \leftrightarrow y$
2	$F = x \oplus y;\ x \vee y$	7	$F = x \wedge y;\ x \rightarrow y$
3	$F = x \leftrightarrow y;\ x \mid y$	8	$F = x \vee y;\ x \oplus y$
4	$F = x \rightarrow y;\ x \wedge y$	9	$F = x \mid y;\ x \leftrightarrow y$
5	$F = x \oplus y;\ x \vee y$	10	$F = x \rightarrow y;\ x \wedge y$

6.5 Вопросы к защите практической работы №6

1) Какая система булевых функций называется полной?
2) Что называется суперпозицией?
3) Какой класс булевых функций называется функционально замкнутым?
4) Какие системы называются двойственными? Самодвойственными?
5) Охарактеризуйте основные классы функций.
6) Сформулируйте теорему Поста.

7 Практическая работа №7 Применение булевых функций к релейно-контактным схемам

Цель работы: Научиться составлять релейно-контактную схему для формулы алгебры высказываний, записывать формулу по данным релейно-контактной схемы.

7.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы;
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

7.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) ход работы;

4) формулировку заданий;

5) решение заданий своего варианта.

7.3 Методические указания к практической работе № 7

Определение. Релейно-контактной схемой (РКС) или переключательной схемой называется схематическое изображение устройства, состоящего из следующих элементов:

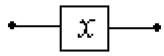
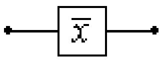
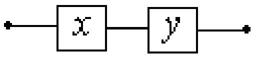
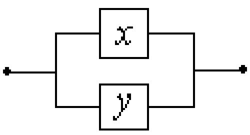
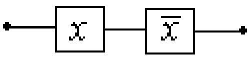
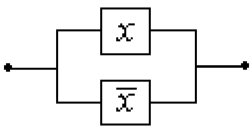
1) переключателей (контактов, реле, ламп и др.);
2) соединительных проводников;
3) входов-выходов (полюсов РКС).

Рассмотрим простейшую РКС, содержащую один переключатель Р. Если переключателю Р поставить в соответствие высказывание x: «Переключатель Р замкнут», то истинному значению x ($x = 1$) будет соответствовать замкнутое состояние переключателя, при котором РКС проводит ток, т.е. импульс, поступающий на вход, может быть снят на выходе. Значению $x = 0$ будет соответствовать разомкнутое состояние РКС (ток не проводится).

Каждой РКС, состоящей из нескольких переключателей, можно поставить в соответствие высказывание, выраженное некоторой формулой А, таким образом, что истинному значению формулы ($A = 1$) будет соответствовать замкнутое состояние РКС, а значению $A = 0$ – разомкнутое состояние. Примеры таких соответствий приведены в таблице 17.

Из простейших РКС путем их последовательного и параллельного соединения могут быть построены более сложные переключательные схемы.

Таблица 17 – Простейшие РКС и соответствующие им формулы логики.

РКС	Формула	Значения
Переключатель x: 	Простейшее высказывание: x	x = 1, если переключатель замкнут; x = 0, если переключатель разомкнут
Переключатель $\bar{x}$ 	Отрицание простейшего высказывания: $\bar{x}$	$\bar{x}$ = 0, если переключатель замкнут; $\bar{x}$ = 1, если переключатель разомкнут
Последовательное соединение:  (схема замкнута, когда оба переключателя замкнуты)	Конъюнкция высказываний: x ∧ y	$x \wedge y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$ $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0. \end{array}\right.$
Параллельное соединение:  (схема разомкнута, когда оба переключателя разомкнуты)	Дизъюнкция высказываний: x ∨ y	$x \vee y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $x \vee y = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ y = 1. \end{array}\right.$
Схема, которая всегда разомкнута 	$x \wedge \bar{x}$	$x \wedge \bar{x} \equiv 0$
Схема, которая всегда замкнута 	$x \vee \bar{x}$	$x \vee \bar{x} \equiv 1$

Любая формула алгебры логики может быть преобразована к виду, содержащему только операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Это позволяет изображать логические формулы при помощи РКС, а РКС задавать формулами.

Пример 25. Составить РКС для функции, заданной формулой.

$$(X \to Y) \to (\bar{X} \wedge (Y \vee Z))$$

Решение:

Запишем формулу в приведенном виде:

$$(X \to Y) \to (\overline{X} \wedge (Y \vee Z)) \equiv (X \vee \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge (Y \vee Z))$$

Тогда, релейно-контактная схема будет иметь вид:

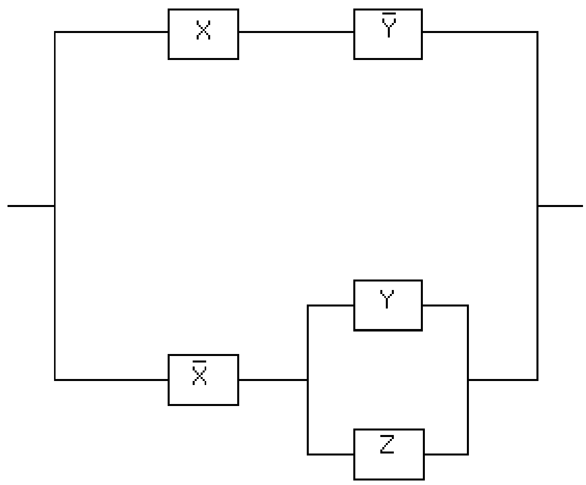


Рисунок 4 – Релейно-контактная схема

Пример 26. Задать релейно-контактной схемой формулу, соответствующие таблице истинности:

Таблица 18 – Таблица истинности

X	Y	Z	F (X, Y, Z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Решение: В правом столбце выберем те строки, на которых функция $F\ (X, Y, Z)$ обращается в 1, запишем для неё выражение, используя СКНФ, потому что наборов значений аргументов, на которых функция обращается в 0, значительно меньше, чем наборов значений аргументов, на которых функция обращается в 1, и значит, СКНФ будет более простой, чем СДНФ:

$$F(X,Y,Z) = (X \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Релейно-контактная схема для полученной формулы будет иметь вид:

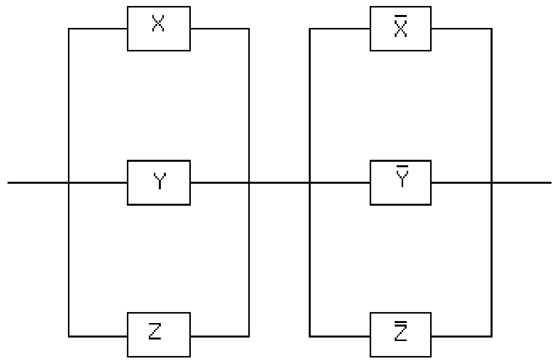


Рисунок 5 – Релейно-контактная схема

Используя равносильные преобразования логической формулы, соответствующей некоторой РКС, можно упростить РКС, т.е. привести ее к виду, содержащему меньшее число переключателей.

Пример 27. Записать формулу алгебры логики, соответствующую данной релейно-контактной схеме, упростить ее, если это возможно и нарисовать новую схему по упрощенной формуле.

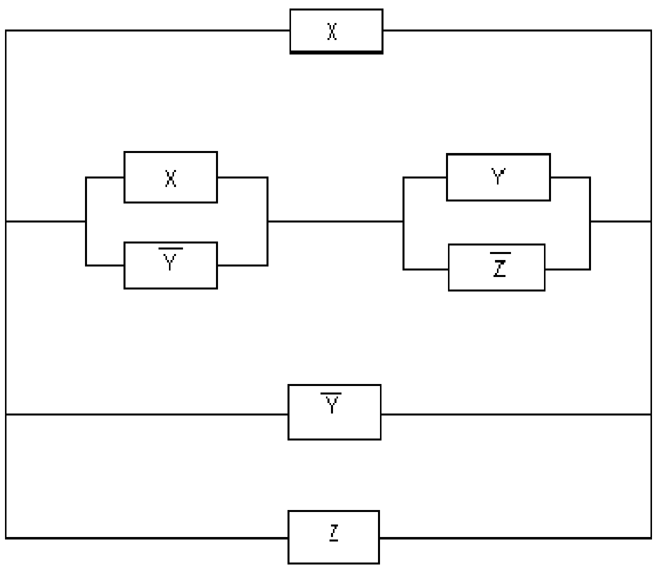


Рисунок 6 – Релейно-контактная схема

Решение:

Ей соответствует функция проводимости:

$$F = X \vee \left(\left(X \vee \overline{Y} \right) \& \left(Y \vee \overline{Z} \right) \right) \vee \overline{Y} \vee Z$$

$$F = X \vee \left(\left(X \vee \overline{Y} \right) \& \left(Y \vee \overline{Z} \right) \right) \vee \overline{Y} \vee Z \equiv X \vee \left[\left(\left(X \vee \overline{Y} \right) \& \left(Y \vee \overline{Z} \right) \right) \vee \overline{Y} \right] \vee Z \equiv$$

$$\equiv X \vee \left[\left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Y} \right) \& \left(Y \vee \overline{Z} \vee \overline{Y} \right) \right] \vee Z \equiv X \vee \left[\left(X \vee \overline{Y} \right) \& \left(1 \vee \overline{Z} \right) \right] \vee Z \equiv X \vee \left(\left(X \vee \overline{Y} \right) \& 1 \right) \vee Z \equiv$$

$$\equiv X \vee \left(X \vee \overline{Y} \right) \vee Z \equiv X \vee \overline{Y} \vee Z$$

Этой же функции проводимости соответствует более простая схема.

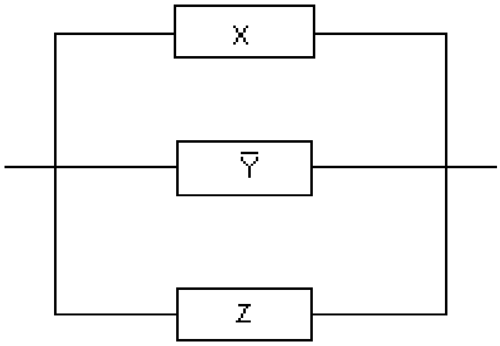


Рисунок 4 – Упрощенная релейно-контактная схема

7.4 Варианты заданий

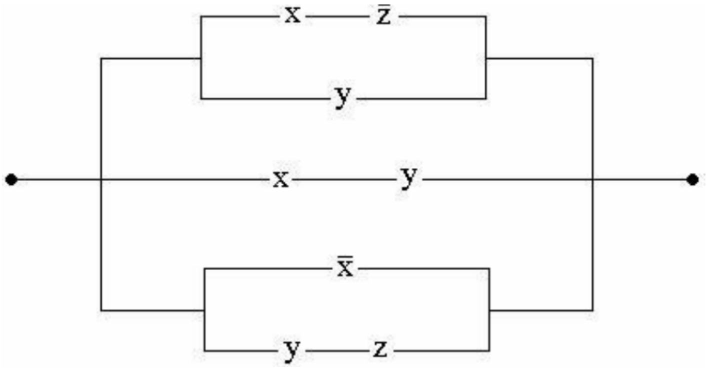
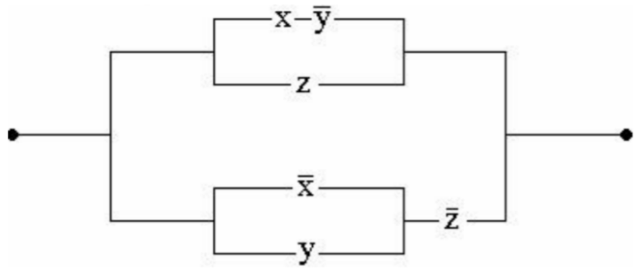
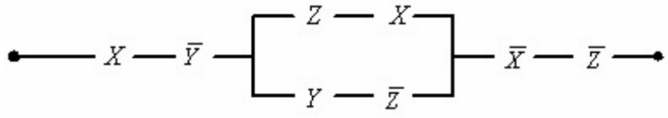
Задание 1. Составить РКС для функции, заданной формулой.

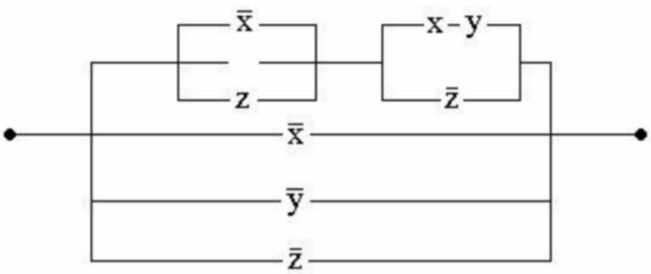
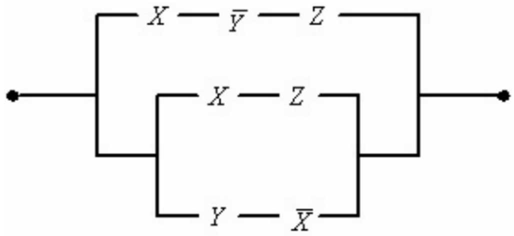
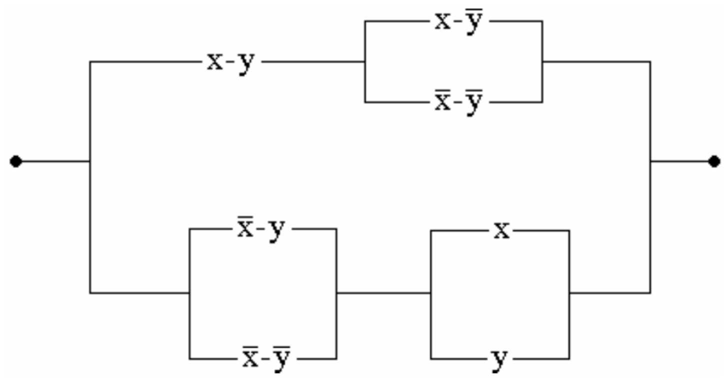
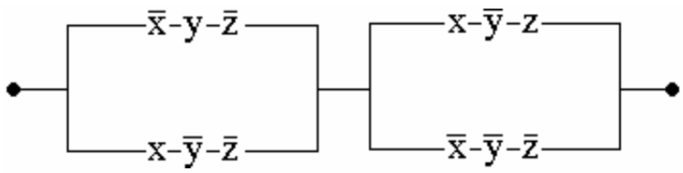
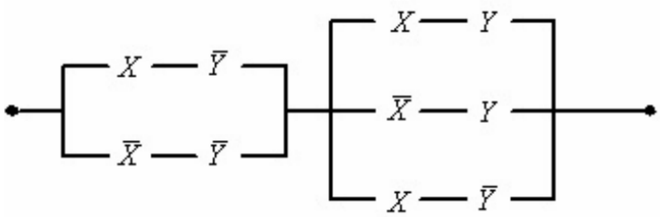
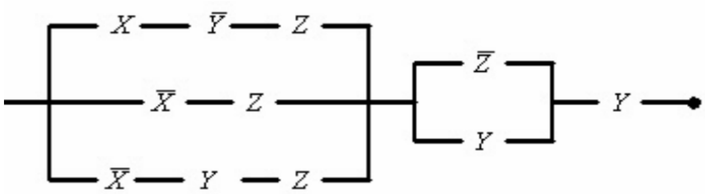
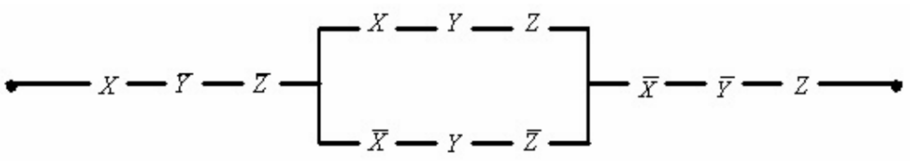
Вариант	Логическая формула	Вариант	Логическая формула
1	$X \to Y \;\leftrightarrow\; X \vee Y \wedge Z$	6	$Q \vee R \;\leftrightarrow\; Q \wedge R \;\to P$
2	$X \to Y \;\to\; X \vee Y \wedge Z$	7	$P\&Q \;\to R \oplus P\&R$
3	$X \to Y \;\wedge\; X \vee Y \wedge Z$	8	$R \to \; P \wedge R \;\leftrightarrow\; Q \mid P$
4	$X \to Z \;\vee\; X \vee Y \wedge Z$	9	$Q \wedge R \;\mid\; P \vee Q \;\to R$
5	$X \wedge Y \to \; Y \vee X \to Z$	10	$Q \to \; P \wedge R \;\wedge\; P \vee R$

Задание 2. Задать релейно-контактной схемой формулу, соответствующие таблице истинности.

№ набора	Значения переменных			Варианты булевых функций									
	x	y	z	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
3	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
4	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
5	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
6	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
7	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0

Задание 3. Записать формулу алгебры логики, соответствующую данной релейно-контактной схеме, упростить ее, если это возможно, и нарисовать новую схему по упрощенной формуле.

Вариант	Релейно-контактная схема
1	
2	
3	

4	$\bar{x}$ z x - y $\bar{z}$ $\bar{x}$ $\bar{y}$ $\bar{z}$
5	X — $\bar{Y}$ — Z X — Z Y — $\bar{X}$
6	x-y x-$\bar{y}$ $\bar{x}$-$\bar{y}$ $\bar{x}$-y $\bar{x}$-$\bar{y}$ x y
7	$\bar{x}$-y-$\bar{z}$ x-$\bar{y}$-$\bar{z}$ x-$\bar{y}$-z $\bar{x}$-$\bar{y}$-$\bar{z}$
8	X — $\bar{Y}$ $\bar{X}$ — $\bar{Y}$ X — Y $\bar{X}$ — Y X — $\bar{Y}$
9	X — $\bar{Y}$ — Z $\bar{X}$ — Z $\bar{X}$ — Y — Z $\bar{Z}$ Y Y
10	X — $\bar{Y}$ — Z X — Y — Z $\bar{X}$ — Y — $\bar{Z}$ $\bar{X}$ — $\bar{Y}$ — Z

7.5 Вопросы к защите практической работы №7

1) Что называется релейно-контактной схемой?

2) Назовите простейшие РКС и соответствующие им формулы логики.

3) Как построить РКС для булевой функции, заданной таблицей истинности?

4) Как построить РКС для булевой функции, заданной формулой логики высказываний?

8 Практическая работа №8 Множества. Операции над множествами

Цель работы: Изучить понятие множества. Научиться выполнять теоретико-множественные операции над множествами.

8.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы;

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

8.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) ход работы;

4) формулировку заданий;

5) решение заданий своего варианта.

8.3 Методические указания к практической работе № 8

Определение. Множеством называется совокупность объектов, объединенных по какому-нибудь общему признаку, свойству.

Пример 28.

а) Множество студентов данной учебной группы.

б) Множество планет солнечной системы.

в) Множество букв русского алфавита.

г) Множество натуральных чисел.

Определение. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами.

Всякое множество состоит из элементов. Множества обозначают большими буквами, например *A. B, C*, а элементы – маленькими буквами, например, *a, b, c*.

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов.

Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Нужно различать элемент a и множество, состоящее из единственного элемента a.

Если элемент a принадлежит множеству A, это записывается следующим образом: $a \in A$.

Если элемент a не принадлежит множеству A, то записывают так: $a \notin A$.

По числу элементов, входящих в множество, множества делятся на три класса:

1 – конечные, 2 – бесконечные, 3 – пустые.

Виды множеств

1) Если элементы множества можно сосчитать, то множество является конечным (счетным).

Пример 29. Множество гласных букв в слове «математика» состоит из трёх элементов – это буквы «а», «е», «и», причем, гласная считается только один раз, т.е. элементы множества при перечислении не повторяются и элементы во множестве могут располагаться в любом порядке.

Определение. Количество элементов счетного множества называется мощностью и обозначается |A|.

2) Если элементы множества сосчитать невозможно, то множество бесконечное.

Пример 30. Множество натуральных чисел бесконечно.

3) Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым. Символически оно обозначается знаком $\varnothing$.

Пример 31. Множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Определение. Множество B является подмножеством множества A тогда и только тогда, когда каждый элемент множества B является элементом множества A.

Отношение «включено» обозначается знаком $\subset$.

Соответственно отношение «включает» – знаком $\supset$.

Определение. Множества C и D называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Определение. Пусть U (или T – total) – некоторое фиксированное множество. Рассмотрим только такие множества A, B, C,…, которые являются подмножествами множества U. В этом случае множество U называется универсальным множеством всех множеств A, B, C,…

Примером универсального множества может служить множество действительных чисел, множество людей на планете Земля.

Множество считается заданным, если мы владеем способом, позволяющим для любого данного элемента определить, принадлежит он данному множеству или не принадлежит.

Способы задания множества

1) Множество можно задать, непосредственно перечислив все его элементы, причём, порядок следования элементов может быть произвольным. В этом случае названия всех элементов множества записываются в строчку, отделяются точкой с запятой и заключаются в фигурные скобки.

Пример 32:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ – конечное множество;

$B = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – бесконечное множество.

Очевидно, что такой способ задания множеств удобно применять для конечных множеств с небольшим количеством элементов.

2) Конечные и бесконечные множества могут быть заданы другим способом: указанием характеристического свойства, т.е. такого свойства, которым обладает любой элемент данного множества и не обладает ни один элемент, не принадлежащий ему.

Пусть P обозначает некоторое свойство, которым обладают все элементы множества A и не обладают элементы никакого другого множества. Тогда множество всех элементов, обладающих свойством P, обозначим так:

A={x | x обладает свойством P}={ x | P(x)}={x : P(x)}.

Свойство P, задающее множество A, есть характеристическое свойство множества A.

Пример 33. Множество чётных натуральных чисел. Зададим его с помощью характеристического свойства:

B={x | x – чётное натуральное число}={x | x=2k, k Є N}.

Пример 34. Задать перечислением элементов множества, заданные указанием характеристического свойства элементов:

$M = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x < 5\}$.

Ответ: $M = \{1; 2; 3; 4\}$.

Диаграммы Эйлера-Венна – геометрические представления множеств. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри его – кругов, представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае и должны быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих.

Определение. Объединением множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В (рисунок 8).

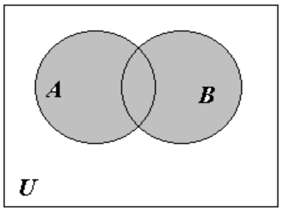


Рисунок 8

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \ x\ x \in A \text{ или } x \in B$$

Определение. Пересечением множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству А, так и множеству В (рисунок 9).

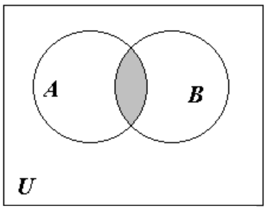


Рисунок 9

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \ x\ x \in A \text{ и } x \in B$$

Определение. Разностью множеств А и В называется множество всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В (рисунок 10).

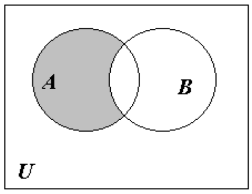


Рисунок 10

$$\mathrm{A}/\mathrm{B} = \ x\ x \in A \text{ и } x \notin B$$

Определение. Симметрической разностью множеств А и В называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству А, либо только множеству В (рисунок 11).

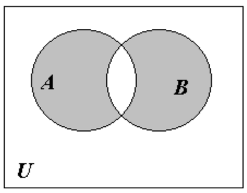


Рисунок 11

$$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \ x \text{ либо } x \in A \text{ либо } x \in B$$

Определение. Абсолютным дополнением множества А называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству А (рисунок 12).

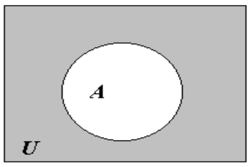


Рисунок 12

$$A = U/A$$

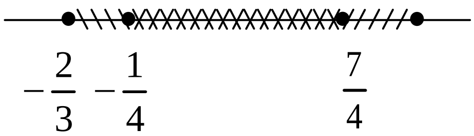
Для произвольных множеств A, B и C справедливы следующие соотношения (таблица 19):

Таблица 19 – Свойства теоретико-множественных операций

1. Коммутативность объединения $A \cup B = B \cup A$	1'. Коммутативность пересечения $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность объединения $A \cup \ B \cup C \ = \ A \cup B \ \cup C$	2'. Ассоциативность пересечения $A \cap \ B \cap C \ = \ A \cap B \ \cap C$
3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения $A \cup \ B \cap C \ = \ A \cup B \ \cap \ A \cup C$	3'. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $A \cap \ B \cup C \ = \ A \cap B \ \cup \ A \cap C$
4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cup \varnothing = A$ $A \cup A = U$ $A \cup U = U$	4'. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cap U = U$ $A \cap A = \varnothing$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. Закон идемпотентности объединения $A \cup A = A$	5'. Закон идемпотентности пересечения $A \cap A = A$
6. Закон де Моргана $A \cup B = A \cup B$	6'. Закон де Моргана $A \cap B = A \cup B$
7. Закон поглощения (расщепления) $A \cup \ A \cap B \ = A$	7'. Закон поглощения (расщепления) $A \cap \ A \cup B \ = A$
8. Закон склеивания $A \cap B \ \cup \ A \cap B \ = A$	8'. Закон склеивания $A \cup B \ \cap \ A \cup B \ = A$
9. Закон Порецкого $A \cup \ A \cap B \ = A \cup B$	9'. Закон Порецкого $A \cap \ A \cup B \ = A \cap B$
10. Закон двойного дополнения $A = A$	

Пример 35. Найдите объединение, разность и пересечение множеств A и B, если $A = \left\{ x \mid x \in R, -\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{4} \right\}$, $B = \left\{ x \mid x \in R, -\frac{1}{4} \le x \le 2 \right\}$.

Решение: Если изобразить данные множества на числовой прямой (1), то объединение $A \cup B$ есть часть прямой, где имеется хотя бы одна штриховка, т. е. отрезок $\left[-\frac{2}{3};\, 2\right]$. Другими словами, $A \bigcup B = \left\{ x \mid x \in R, -\frac{2}{3} \le x \le 2 \right\}$.

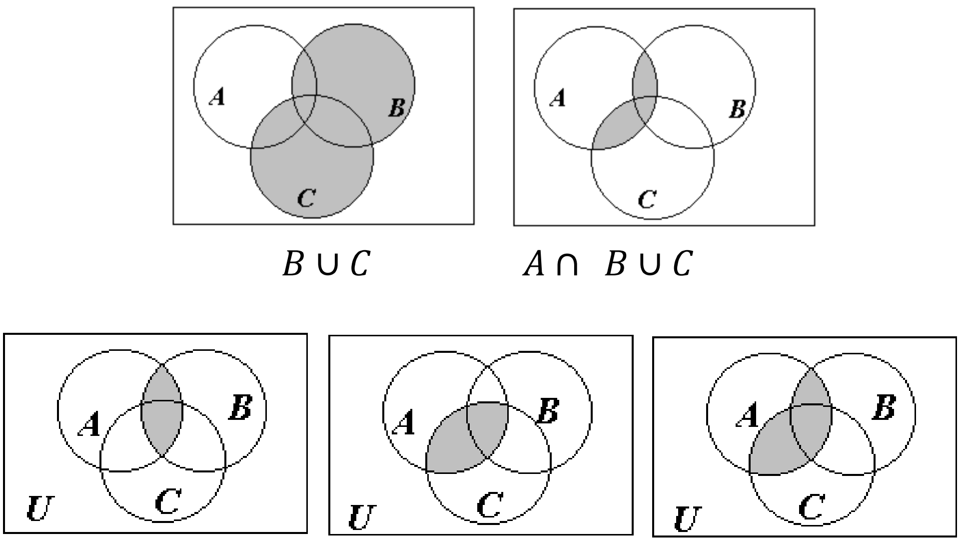


(1)

Разность $A \setminus B$ есть часть отрезка, изображающего множество A, отмеченная лишь одной штриховкой, т. е. полуинтервал $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}\right)$. Другими словами $A \setminus B = \left\{ x \mid x \in R, -\frac{2}{3} \le x < -\frac{1}{4} \right\}$.

Пересечение $A \cap B$ есть часть прямой, где имеется двойная штриховка, т. е. отрезок $\left[-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right]$. Другими словами, $A \bigcap B = \left\{ x \mid x \in R, -\frac{1}{4} \le x \le \frac{7}{4} \right\}$.

Пример 36. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проиллюстрируем справедливость соотношения $A \cap \;\; B \cup C \;\; = \;\; A \cap B \;\; \cup \;\; A \cap C$ (рисунок 9).



$B \cup C$ $\qquad$ $A \cap \;\; B \cup C$

$A \cap B$ $\qquad$ $A \cap C$ $\qquad$ $A \cap B \;\; \cup \;\; A \cap C$

Рисунок 13 - Диаграммы Эйлера-Венна

Убедились, что в обоих случаях получаем равные множества.

Следовательно, исходное соотношение справедливо.

Пример 37. Доказать следующее тождество $(A \cap B) \cup (A \cap B) = A$.

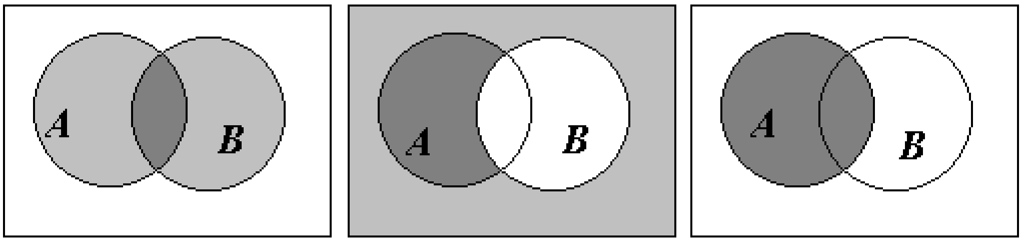
Решение.

Докажем это тождество двумя способами: аналитически (используя равносильности алгебры множеств) и конструктивно (используя диаграммы Эйлера-Венна).

1. $(A \cap B) \cup (A \cap B) = (A \cup (A \cap B)) \cap (B \cup (A \cap B)) =$

$= A \cap (B \cup A) \cap (B \cup B) = A \cap (B \cup A) \cap U = A \cap (B \cup A) = A$

2. Построим соответствующие диаграммы Эйлера-Венна (рисунок 10).



$A \cap B$ $A \cap B$ $(A \cap B) \cup (A \cap B) = A$

Рисунок 14 – Диаграммы Эйлера-Венна

8.4 Варианты заданий

Задание 1. Прочитайте следующие записи и перечислите элементы каждого из множеств. Определите мощность конечных множеств.

Вариант	Множества	Вариант	Множества
1	а) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, -2 \le x \le 5\}$; б) $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \lvert x \rvert < 3\}$; в) $C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 2x^2 + 5x - 3 = 0\}$.	6	а) $A = \{x \mid x \in \mathbf{Q}, 3x^2 = 9\}$; б) $B = \{x \mid x \in \mathbf{U}, x - 3 = (x+2) \cdot 4x\}$; в) $C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, -3x \le x < 1\}$.

2	а) $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, \lvert x\rvert=4\}$; б) $B=\{x\mid x\in\mathbf{N}, -2<x\le 5\}$; в) $C=\{x\mid x\in\mathbf{Q}, x^2+3x+4=0\}$.	7	а) $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, -2\le x\le 3\}$; б) $B=\{x\mid x\in\mathbf{N}, (6x+6)(x-4)\le 0\}$; в) $C=\{x\mid x\in\mathbf{N}, \lvert y\rvert=7\}$.
3	а) $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}, \lvert x\rvert\le 5\}$; б) $B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, 2x-3=5x+7\}$; в) $C=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, -1\le x\le 3\}$.	8	а) $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}, x\le 4\}$; б) $B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, (x+1)(-x-3)>0\}$; в) $C=\{x\mid x\in\mathbf{N}, \lvert x\rvert=7\}$.
4	а) $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}, -3\le x\le 2\}$; б) $B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, \lvert x\rvert<3\}$; в) $C=\{x\mid x\in\mathbf{N}, 3x^2+5x-2=0\}$.	9	а) $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, \lvert x\rvert\le 4\}$; б) $B=\{x\mid x\in\mathbf{N}, (x+1)(2x+5)<0\}$; в) $C=\{x\mid x\in\mathbf{N}, -7\le x\le 4\}$.
5	а) $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}, 3=(6x+2)x\}$; б) $B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, \lvert x\rvert<2\}$; в) $C=\{x\mid x\in\mathbf{N}, -5\le x<4\}$.	10	а) $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, -1\le x<3\}$; б) $B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, \lvert x\rvert\le 3\}$; в) $C=\{x\mid x\in\mathbf{N}, 4x^2+4x-3=0\}$.

Задание 2. Для заданных множеств A, и B найдите: $A\cup B$, $A\cap B$, A/B, B/A, $A\oplus B$. Найдите $\bar{A}$, $\bar{B}$ считая универсальным множеством множество R – всех вещественных чисел.

Вариант	Множества
1	A = [–25; 1]– отрезок числовой оси B = (0; +∞) – интервал на числовой оси
2	A = (–16; 8]– полуинтервал на числовой оси B = [–9; 9] – отрезок числовой оси
3	A = (–1; +∞)– интервал на числовой оси B = (–10; 10] – полуинтервал на числовой оси
4	A = (0; 2) – интервал на числовой оси B = [–5; 3] – отрезок числовой оси
5	A = (0; 10] – полуинтервал на числовой оси B = [–1; 5] – отрезок числовой оси

6	A = [-3; 0] – отрезок числовой оси B = (-1; 3] – полуинтервал на числовой оси
7	A = (–5; 5]– полуинтервал на числовой оси B = (0; +∞)– интервал на числовой оси
8	A = (–2; 3) – интервал на числовой оси B = [0; 4] – отрезок числовой оси
9	A = (–∞; 2]– полуинтервал на числовой оси B = [–3; 3] – отрезок числовой оси
10	A = (–10; 5]– полуинтервал на числовой оси B = [0; 10] – отрезок числовой оси

Задание 3. Доказать тождество двумя способами: аналитически (используя равносильности алгебры множеств) и конструктивно (используя диаграммы Эйлера-Венна). В противном случае, докажите, что оно неверно.

Вариант	Множества	Вариант	Множества
1	а) $A \cap B = \ A \cup B \ \cap B$ б) $B/A = \ A/B \ \cap A$	6	а) $A \cup B = \ A \cap B \ \cup A$ б) $B/A = \ A \cap B \ \cap B$
2	а) $A \cup B = \ A \cap B \ \cup A$ б) $B/A = \ A \cup B \ \cap A$	7	а) $A \cup B = \ A \cup B \ \cup A$ б) $B/A = \ A \cap B \ \cup A$
3	а) $A \cap B = A/ \ A \cap B$ б) $A \cup B = B \cup \ A/B$	8	а) $A \cap B = B/ \ B \cap A$ б) $A \cup B = A \cup \ A/B$
4	а) $A \cap B = \ A \cup B \ \cap A$ б) $A/B = \ A \cap B \ \cup A$	9	а) $A \cap B = \ A \cup B \ /A$ б) $A \cup B = B \cup \ B/A$
5	а) $A \cap B = A/ \ A/B$ б) $A/B = \ A \cup B \ \cap A$	10	а) $A \cap B = A/ \ B/A$ б) $B/A = \ A \cap B \ \cup A$

8.5 Вопросы к защите практической работы № 8

1) Что такое множество? Как его обозначают? Приведите примеры.
2) Что такое подмножество? Приведите пример.
3) Способы задания множеств.
4) Какое множество можно назвать универсальным?
5) Поясните термин «мощность множества».
6) Что называется пересечением множеств?
7) Что называется объединением множеств?
8) Что понимается под разностью двух множеств?
9) Что называется симметрической разностью множеств?
10) Что называется дополнением множества?
11) Перечислите основные свойства теоретико-множественных операций.

9 Практическая работа №9 Предикаты. Операции над предикатами

Цель работы: Изучить понятие предиката. Научиться выполнять операции над предикатами, находить область истинности предиката.

9.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

9.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) ход работы;

4) формулировку заданий;

5) решение заданий своего варианта.

9.3 Методические указания к практической работе № 9

В высказывании все четко: это конкретное утверждение о конкретных объектах – истинное или ложное. Предикат – предложение, похожее на высказывание, но все же им не являющееся: о нем нельзя судить, истинно оно или ложно.

Определение. n-местным предикатом, определенном на множествах M_1, M_2, …, M_n, называется предложение, содержащее n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств M_1, M_2, …, M_n соответственно.

Обозначение. Чаще всего предикаты обозначают большими латинскими буквами, а число переменных указывает на его размерность: $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Предикат также называют функцией-высказыванием.

Пример 38. Рассмотрим три высказывания:

A – «Рубль – валюта России»;

B – «Доллар – валюта России»;

C – «Доллар – валюта США».

Высказывания A и C – истинны, B – ложно. Если вместо конкретных наименований валюты в выражениях A, B подставить предметную переменную x и определить ее на множестве наименований денежных единиц M, то получим одноместный предикат:

P(x): «x – валюта России», где $x \in M$.

Если же в высказывания подставить не только предметную переменную x, определенную на множестве M, но и вместо наименований стран ввести предметную переменную y, определенную на множестве названий стран $У$, то получим двуместный предикат:

Q(x, y): «x - валюта страны y», где $x \in M$, $y \in У$.

Определение. Множеством истинности предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданного на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется совокупность всех упорядоченных n-систем $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в которых $a_1 \in M_1,\ a_2 \in M_2, .., a_n \in M_n$ таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание при подстановке $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$.

Это множество будем обозначать I_P.

Пример 39. Определить множество истинности предикатов, заданных на соответствующих множествах:

а) P(x): «x кратно 3», $x \in M$, где $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

б) G(x, y): «$x^2 + y^2 < 0$», $(x, y) \in R\times R$;

в) Q(x): «$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$», $x \in R$.

R – множество действительных чисел.

Решение.

а) $I_P = \{3, 6, 9\}$;

б) $I_G = \varnothing$;

в) $I_Q = R$.

Определение. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется:

1) тождественно-истинным, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$;

2) тождественно-ложным, если при любой подстановке вместо переменных

$x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}}$ любых конкретных предметов из множеств M_1, M_2, …, M_n соответственно он превращается в ложное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{n}})$;

3) выполнимым (опровержимым), если существует, по крайней мере, один набор конкретных предметов, при подстановке которого вместо соответствующих переменных в предикат, последний обращается в истинное (ложное) высказывание.

Определение. Два n-местных предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}})$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}})$, заданных над одними и теми же множествами M_1, M_2, …, M_n, называются равносильными, если набор элементов $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2, .., a_n \in M_n$ превращает первый предикат в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{n}})$ в том и только в том случае, когда этот набор превращает в истинное высказывание $Q(a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{n}})$ второй предикат.

Утверждение о равносильности двух предикатов P и Q символически будем записывать так: $P \Leftrightarrow Q$.

Пример 40. Необходимо решить уравнение (или, другими словами, найти множество истинности предиката): $4x - 2 = -3x - 9$.

Решение.

Делая равносильные преобразования, найдем множество истинности предиката:

$$4x - 2 = -3x - 9 \Leftrightarrow 4x + 3x = -9 + 2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Предикаты так же, как высказывания, могут принимать два значения: «истина» (1) и «ложь» (0), поэтому к ним применимы все операции логики высказываний, в результате чего из элементарных предикатов формируются сложные предикаты.

Пусть на некотором множестве M определены два предиката P(x) и Q(x).

Определение. Конъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x) называется новый (сложный) предикат $P(x) \wedge Q(x)$, который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина», и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Область истинности предиката $P(x) \wedge Q(x)$ является общая часть области истинности предикатов P(x) и Q(x), т.е. пересечение $I_P \cap I_Q$.

Пример 41. Для предикатов P(x): «x – четное число» и Q(x): «x кратно 3» конъюнкцией $P(x) \wedge Q(x)$ является предикат «x – четное число и x кратно трем», т.е. предикат $P(x) \wedge Q(x)$: «x делится на 6».

Определение. Дизъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$, который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях$x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь», и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Ясно, что областью истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ является объединение области истинности предикатов P(x) и Q(x), т.е. $I_P \cup I_Q$.

Определение. Отрицанием предиката P(x) называется новый предикат $P(x)$ или $P(x)$, который принимает значение «истина» при всех значениях$x \in M$, при которых предикат P(x) принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях$x \in M$, при которых предикат P(x) принимает значение «истина».

Очевидно, что $I_P = I_P$, т.е. множество истинности предиката $P(x)$ является дополнением к множеству I_P.

Определение. Импликацией предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат $P(x) \rightarrow Q(x)$, который является ложным при тех и только тех значениях$x \in M$, при которых одновременно P(x) принимает значение «истина», а Q(x) – значение «ложь», и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Поскольку при каждом фиксированном $x \in M$ справедлива равносильность $P\ \ x\ \ \rightarrow Q\ \ x\ \ = P(x) \vee Q(x)$, то $I_{P \rightarrow Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q$.

Определение. Эквиваленцией предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат$P(x) \leftrightarrow Q(x)$, который обращается в «истину» при всех тех и только тех$x \in M$, при которых P(x) и Q(x) обращаются оба в истинные или оба в ложные высказывания.

Для его множества истинности имеем: $I_{P \leftrightarrow Q} = \ \ I_{\overline{P}} \cap I_{\overline{Q}}\ \ \cup\ \ I_P \cap I_Q\ \ $.

9.4 Варианты заданий

Задание 1. Найти множество истинности коньюнкции двух предикатов.

Вариант	Предикат	Вариант	Предикат
1	A(x): «14≥2x» B(x): «4x+1=17», x∈R	6	B(x): «4<x» A(x): «2x+5=7», x∈R
2	A(x): «20≥2x» B(x): «3x+12=48», x∈R	7	A(x): «13≥x» B(x): «x+3=11», x∈R
3	A(x): «12≥x» B(x): «x+9=16», x∈R	8	B(x): «6<x» A(x): «-2x+3=-9», x∈R
4	A(x): «15≥x» B(x): «2x+4=16», x∈R	9	A(x): «18≥x» B(x): «x-4=14», x∈R
5	B(x): «9<x» A(x): «4x+3=7», x∈R	10	A(x): «6≥x» B(x): «3x+4=16», x∈R

Задание 2. Найти множество истинности дизъюнкции двух предикатов

Вариант	Предикат	Вариант	Предикат
1	P(x): «2-x≥10» Q(x): «2x+1=7»	6	P(x): «x+4≥10» Q(x): «3x+2=8»
2	P(x): «4+x≥23» Q(x): «3x+2=16»	7	P(x): «4+2x≥12» Q(x): «3x-9=6»
3	P(x): «x+2≥20» Q(x): «2x+3=17»	8	P(x): «3x-2≥10» Q(x): «5x-3=7»
4	P(x): «4+3x≥13» Q(x): «7x+8=6»	9	P(x): «3+x≥13» Q(x): «4x+2=6»
5	P(x): «2x+1≥11» Q(x): «2x+3=7»	10	P(x): «-x-2≥10» Q(x): «6x+3=7»

Задание 3. Найти области истинности предикатов: $P\ x\ ,\ Q\ x\ ,\ P\ x\ \wedge Q\ x\ ,$ $P\ x\ \vee Q\ x\ ,\ P\ x\ \rightarrow Q\ x\ ,\ P(x) \leftrightarrow Q(x)$ заданных на множестве М.

Вариант	Предикат
1	М={1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 18} P(x): «x – число, кратное 5», Q(x): «x- нечетное число».
2	М={1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 23} P(x): «x – число, кратное 7», Q(x): «x- нечетное число».
3	М={1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 21} P(x): «x – простое число», Q(x): «x- число, заканчивающееся на 7».
4	М={3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 18, 20 22} P(x): «x – число, делящееся 5», Q(x): «x- нечетное число».
5	М={1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15} P(x): «x – составное число», Q(x): «x- нечетное число».
6	М={2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20} P(x): «x – четное число», Q(x): «x- число, делящееся на 4».
7	М={2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 18, 22} P(x): «x – составное число», Q(x): «x- число, заканчивающееся на 2».
8	М={1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 14, 13, 15, 16} P(x): «x – число, кратное 3», Q(x): «x- нечетное число».

9	M={1, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19} P(x): «x – простое число», Q(x): «x- нечетное число».
10	M={1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 19} P(x): «x – составное число», Q(x): «x- четное число».

9.5 Вопросы к защите практической работы № 9

1) Что называется предикатом? Приведите примеры предикатов.
2) Что называется множеством истинности предиката?
3) Какие предикаты называются одноместными, двуместными, n-местными? Как они обозначаются? Приведите примеры.
4) Перечислите операции, которые можно осуществлять над предикатами.
5) Что называют конъюнкцией двух предикатов?
6) Что называют дизъюнкцией двух предикатов?
7) Что называют импликацией двух предикатов?
8) Что называют эквиваленцией двух предикатов?
9) Что называют отрицанием предиката?
10) Какие предикаты называются равносильными? Приведите примеры равносильных предикатов.

10 Практическая работа №10 Высказывания с кванторами. Построение отрицания высказывания с кванторами

Цель работы: Изучить понятие кванторы. Научиться записывать высказывания, используя кванторы, и определять их истинность. Научиться строить отрицание высказывания с кванторами.

10.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы;
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

10.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) тему работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировку заданий;
5) решение заданий своего варианта.

10.3 Методические указания к практической работе № 10

Рассмотрим операции, преобразующие предикаты в высказывания.

Определение. Пусть имеется предикат P(x) определенный на множестве М. Если «а» – некоторый элемент из множества М, то подстановка его вместо x в предикат P(x) превращает этот предикат в высказывание P(a). Такое высказывание называют единичным.

Пример 42.

P(x): «x – четное число» – предикат,

P(6) – истинное высказывание,

P(3) – ложное высказывание.

Наряду с образованием из предикатов высказываний в результате таких подстановок в логике предикатов рассматриваются еще операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание. Эти операции называются операциями квантификации (или просто квантификацией, или связыванием кванторами, или навешиванием кванторов).

Определение. Квантор – это логическая операция, которая по предикату P(x) строит высказывание, характеризующее область истинности предиката P(x).

Квантор всеобщности

Пусть P(x) – предикат, определенный на множестве М. Под выражением $\forall x\, P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда P(x) истинно для каждого элемента x из множества М, и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение звучит так: «Для всякого x P(x) истинно».

Символ $\forall$ называют квантором всеобщности (общности).

Переменную x в предикате P(x) называют свободной (ей можно придавать различные значения из М), в высказывании же $\forall x\, P(x)$ x называют связанной квантором всеобщности.

Квантор существования

Пусть P(x) - предикат определенный на множестве М. Под выражением $\exists x\, P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in M$, для которого P(x) истинно, и ложным – в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение звучит так: «Существует x, при котором P(x) истинно».

Символ $\exists$ называют квантором существования. В высказывании $\exists x\, P(x)$ переменная x связана этим квантором (на нее навешен квантор).

Квантор единственности

Можно составить и такое высказывание «Во множестве X есть один и только один элемент a, такой что F(a) - истинное высказывание».

Это высказывание обозначают: $\exists! \, x \in X \quad F(x)$.

Символ ! – называют квантором единственности.

Квантор единственности выражается словами «единственный», «один и только один».

Пример 43. Пусть на множестве натуральных чисел задан предикат $P(x)$ - «число x кратно 3». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания:

$\forall x\, P(x)$- «все натуральные числа кратны 3»;

$\exists x\, P(x)$- «существуют натуральные числа, кратные 3».

Очевидно, что первое из данных высказываний ложно, а второе – истинно.

При навешивании кванторов на многоместные предикаты, каждая переменная может быть связанная своим квантором. При этом два квантора одного предиката можно менять местами, истинность высказывания при этом не изменится. При навешивании разноименных кванторов нельзя менять местами их порядок, т.к. может измениться истинность высказывания.

Пример 44. Пусть предикат $P(x, y)$ означает «x делится на y без остатка», причем обе переменные определены на множестве натуральных чисел. Тогда применение кванторных операций приводит к следующим высказываниям:

а) $\forall x\, \forall y P(x, y)$- «для любого x и для любого y справедливо, что x делится на y без остатка.

б) $\forall x\, \exists y P(x, y)$ - «для любого x существует y, который является делителем x без остатка.

Нетрудно заметить, что первое высказывание является ложным, а второе – истинным.

Известно, что часто для отрицания некоторого предложения достаточно предпослать сказуемому этого предложения отрицательную частицу «не». Например, отрицанием предложения «Река x впадает в Черное море» является предложение «Река x не впадает в Черное море».

Правило: Для того, чтобы построить отрицание высказываний с кванторами, нужно заменить квантор общности на квантор существования (и наоборот), а предложение стоящие после квантора - на его отрицание.

В символическом виде эти правила можно записать так:

$$\forall x \in X \;\; F \; x \; = \; \exists x \in X \;\; F(x)$$

$$\exists x \in X \;\; F \; x \; = \; \forall x \in X \;\; F(x)$$

Таким образом, отрицание высказывания с кванторами может быть построена двумя способами:

1) Заменить квантор общности на квантор существования (и наоборот), а предложение стоящие после квантора, - на его отрицание.
2) Перед данным высказыванием ставятся слова «неверно, что».

Кванторы общности и существования называют двойственными относительно друг друга. Выясним теперь, как строить отрицание предложения, начинающегося с нескольких кванторов, например, такого: $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z)$.

Последовательно применяя сформулированное выше правило, получим $\overline{\forall} x \exists y \forall z P(x, y, z)$ равносильно $\exists x \; \overline{\exists} y \forall z P(x, y, z)$, что равносильно $\exists x \forall y \; \overline{\forall} z P(x, y, z)$, что равносильно $\exists x \forall y \exists z \overline{P}(x, y, z)$.

10.4 Варианты заданий

Задание 1. На множестве натуральных чисел заданы предикаты P(x) и Q(x). Сформулировать высказывания, в словесной форме и определите их истинность.

а) $(\forall x \in N): P(x)$ б) $(\exists x \in N): Q(x)$

Вариант	Предикат	Вариант	Предикат
1	P(x): «Число x – чётное», Q(x): «Число x – кратно 3»	6	P(x): «Число x – π» (π=3,14…), Q(x): «Число x – делится на 1»
2	P(x): «Число x – нечётное», Q(x): «Число x – начинается на 1»	7	P(x): «Квадрат числа x – нечётное число», Q(x): «Число x – простое»
3	P(x): «Число x – целое», Q(x): «Число x – оканчивается на 3»	8	P(x): «Четное число x делятся на 3», Q(x): «Число x – нуль»
4	P(x): «Число x – составное» Q(x): «Число x – кратно 7»	9	P(x): «Число x – единица», Q(x): «Число x – кратно 6»
5	P(x): «Число x – простое», Q(x): «Число x – кратно 5»	10	P(x): «Число x – нечётное», Q(x): «Число x – простое»

Задание 2. Записать следующие высказывания, воспользовавшись кванторами и определить их истинность.

Вариант	Предикат
1	а) «Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику» б) «Существует натуральное число, являющееся решением уравнения $x^2 = -1$»
2	а) «Некоторые натуральные числа четные» б) «Любое натуральное число является решением уравнения: $2x - 3 = 1$»
3	а) «Некоторые нечетные числа делятся на 4» б) «Все прямоугольники являются многоугольниками»
4	а) «Некоторые четные числа делятся на 3» б) «Сумма двух любых нечетных чисел кратна 2»
5	а) «Квадрат любого числа положителен» б) «В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны»

6	а) «Любое число из множества A = {6, 8, 12, 28} кратно 2» б) «Среди чисел множества X = {1, 2, 3, 4} найдется простое число»
7	а) «Всякое число, умноженное на нуль, есть нуль» б) «Уравнение $x + 3 = 5$ имеет решение во множестве натуральных чисел»
8	а) «Некоторые двузначные числа делятся на 12» б) «В каждом классе хотя бы один ученик не справился с контрольной работой».
9	а) «Какого бы ни было число у, квадрат его не отрицателен» б) «Для любого числа х справедливо неравенство $x^2 + 6 > 0$»
10	а) «Всякое число, либо положительно, либо отрицательно, либо равно нулю» б) «Существует число $x \in R$, которое является корнем уравнения $x^2 + 1 = 0$»

Задание 3. Рассмотреть все варианты навешивания кванторов на предикат P(x,y), описать в словесной форме полученные высказывания и определить их истинность, если P(x,y), определенный на множестве людей.

Вариант	Предикат	Вариант	Предикат
1	«х является другом у»	6	«х является сыном у»
2	«х является отцом у»	7	«х учится в одной школе с у»
3	«х помогает работать у»	8	«х живёт в одном городе с у»
4	«х является соседом у»	9	«х живёт в соседнем доме с у»
5	«х является родителем у»	10	«х отдыхает в одном городе с у»

Задание 4. Построить отрицание высказывания. Определить истинность высказывания и его отрицание:

Вариант	Предикат	Вариант	Предикат
1	«Из всякого положения есть выход»	6	«Некоторые млекопитающие не живут на суше»
2	«Найдется треугольник с двумя прямыми углами»	7	«Каждый моряк умеет плавать»
3	«Существуют числа, не кратные 7»	8	«Все птицы имеют черную окраску»
4	«Всякий цветок красив»	9	«Все воздушные шары зелёные»
5	«Любое действительное число является натуральным»	10	«Во всякой школе некоторые ученики увлекаются программированием»

10.5 Вопросы к защите практической работы № 10

1) Что такое квантор?
2) Что называется квантификацией?
3) Что называется квантором всеобщности? С помощью, каких слов выражается квантор всеобщности?
4) Что называется квантором существования?
5) Измениться ли истинность высказывания, если поменять местами в многоместном предикате одноименные кванторы? Привести примеры.
6) Измениться ли истинность высказывания, если поменять местами в многоместном предикате разноименные кванторы? Привести примеры.
7) Перечислить способы построения отрицания высказывания с кванторами.

Список использованных источников

1 Ерусалимский, Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения: учебное пособие для вузов. / Я.М. Ерусалимский. – 10-е изд, перераб. и доп. – М.: Вузовская книга, 2009. – 288 с.

2 Игошин, В.И. Математическая логика: учебное пособие. / В.И. Игошин. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 399 с.

3 Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. / В. И. Игошин. – 3-е изд., стер. – М.: Академия, 2008. — 304 с.

4 Канцедал, С.А. Дискретная математика: учебное пособие. / С.А. Канцедал. – М.: МНФРА-М, 2013. – 224 с.

5 Новиков, Ф.А. Дискретная математика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. / Ф.А. Новиков. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2013. – 432 с.

6 Просветов, Г.И. Дискретная математика: задачи и решения: учебно-практическое пособие. / Г.И. Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2015. – 240 с.

7 Спирина, М.С. Дискретная математика: учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования. / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Академия, 2015. – 368 с.

8 Тюрин, С.Ф. Дискретная математика. Практическая дискретная математика и математическая логика. / С. Ф. Тюрин, Ю. А. Аляев. – М.: Финансы и статистика, 2012. – 384 с.

9 Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов [Электронный ресурс] / Р. Хаггарти. – М.: Техносфера, 2014. – **Режим доступа:** http://www.studfiles.ru/preview/2622301/page:2/