Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра вычислительной техники и защиты информации

Е.В. Бурькова

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность

Оренбург
2018

УДК 004.7
ББК 32.811
Б 91

Рецензент – кандидат технических наук, доцент Ю.И. Синицын

Бурькова Е.В.
Б 91 Теория информации: методические указания / Е.В. Бурькова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 50 с.

В методических указаниях представлены теоретические сведения по основам теории информации. Методические указания содержат задачи для проведения практических работ по курсу «Теория информации», а также вопросы для самопроверки.

Методические указания предназначены для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность.

УДК 004.7
ББК 32.811

Содержание

Введение

Теория информации является одним из важных курсов для подготовки бакалавров, бедующая профессиональная деятельность которых связана с процессами обработки и защиты информации. Теория информации связана с изучением систем обработки и передачи информации, измерением количества информации, кодированием. Теория информации решает такие теоретические вопросы как, количественная оценка информации; анализ информационных характеристик источников сообщений и каналов связи и выявление возможности кодирования и декодирования сообщений, обеспечивающих максимально допустимую скорость передачи сообщений по каналу связи с помехами и без помех.

Принципы теории информации используются в различных областях науки и связано это с тем, что в основе своей эта теория математическая. Основные ее понятия: энтропия, количество информации, пропускная способность канала связи определяются только через вероятности событий, которым может быть определено самое различное физическое наполнение. Подход к исследованиям в других областях науки с позиций использования основных идей теории информации получил название теоретико-информационного подхода. Этот подход позволяет решать задачи в области исследования каналов передачи информации, определения оптимальных способов кодирования и декодирования, максимальной скорости передачи и пропускной способности каналов, а также другие важные задачи в области систем связи.

Данные методические указания предназначены для проведения практических работ по курсу «Теория информации» для студентов направления подготовки 10.03.01 Информационная безопасность. Методические указания содержат теоретические сведения, задания и вопросы для самопроверки. Вопросы и задачи, рассматриваемые в данных методических указаниях, являются важными для формирования профессиональных компетенций будущего специалиста в сфере информационной безопасности.

Основные определения теории информации

Информация - это характеристика внутренней организованности материальной системы по множеству состояний, которые она может принимать. Информация объективно существует независимо от нашего сознания, но выявляется при взаимодействии с конкретным объектом.

Информационные системы - это класс технических систем, предназначенных для хранения, передачи и преобразования информации.

Под информационным процессом понимают совокупность последовательных действий со сведениями, направленных на получение определенного результата. Основные информационные процессы: восприятие, преобразование, обработка, хранение, передача, отображение.

Восприятие информации (ввод) – это отображение данных на каком-либо носителе или в каких-либо качественных сторонах объекта. На этапе восприятия информации производится извлечение и анализ информации о каком-либо объекте (процессе), в результате чего формируется образ объекта, проводится его идентификация и оценка.

Преобразование информации – изменение формы и вида сведений.

Передача информации – перенос сведений из одной точки пространства в другую. При этом всегда стремятся минимизировать время передачи.

Обработка информации – любые действия со сведениями, выполняемые по детерминированному алгоритму, которые приводят к изменению их вида, а также содержательности, ценности, полезности.

Хранение информации – перенос сведений от одного момента времени до другого. При этом стремятся минимизировать объем носителя или пространства, в котором сведения хранятся.

Отображение (вывод) информации – представление сведений на каком-либо носителе или в какой-либо качественной стороне объекта в целях восприятия их.

Сообщение – это совокупность символов или первичных сигналов, содержащих информацию.

Дискретные сообщения – это сообщения, которые формируются в результате последовательной выдачи источником сообщений отдельных элементов - знаков.

Множество различных знаков называют **алфавитом источника сообщения,** а число знаков - **объемом алфавита.**

Непрерывные сообщения не разделены на элементы. Они описываются непрерывными функциями времени, принимающими непрерывное множество значений.

Сигнал - это физический процесс, отображающий (несущий) сообщение.

Кодированием называют преобразование сообщения в сигнал, удобный для передачи по данному каналу связи.

Декодирование - операция восстановления сообщения по принятому сигналу.

Помехами называют любые воздействия, как внешние, так и внутренние, вызывающие отклонение принятых сигналов от переданных сигналов.

Верностью передачи называют меру соответствия принятого сообщения посланному сообщению.

Канал связи – это совокупность средств, предназначенных для передачи сообщений.

Количество информации – это основная характеристика сообщения, связанная со степенью его неопределенности. В качестве меры неопределенности выбора состояния источника с равновероятными состояниями принимают логарифм числа состояний.

Бит – единица измерения количества информации, это количество информации, которым характеризуется один двоичный элемент при равновероятных состояниях 0 и 1.

Энтропия - количество информации, приходящееся на один элемент сообщения (знак, букву).

1 Лабораторная работа № 1. Теоремы теории вероятности в теории информации

1.1 Цель работы

Освоение основных понятий теории вероятности и применение их в решении задач теории информации.

1.2 Теоретические сведения

Под событием понимают любой факт, который может произойти в результате какого-либо опыта или эксперимента. Под опытом понимается осуществление определённого комплекса условий. События называются **совместными,** если наступление одного из них не исключает наступления другого. В противном случае события называются **несовместными.** Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в условиях данного опыта. Событие называется **невозможным,** если оно не может произойти в условиях данного опыта. Событие называется **возможным,** или **случайным**, если в результате опыта оно может появиться, но может и не появиться. События называются **равновозможными,** если по условиям испытания ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие.

Важным понятием является **полная группа событий**. Несколько событий в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них.

Вероятностью события А называется число, равное отношению числа исходов m, благоприятствующих появлению события, к числу всех равновозможных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

Вероятность события характеризуется следующими свойствами:

1) $0 \le P(A) \le 1$;

2) P(A) = 0 означает, что A – событие невозможное;

3) P(B) = 1 означает, что B – событие достоверное.

Теорема сложения вероятностей. Если два события несовместны, то вероятность наступления каждого из них равна сумме их вероятностей

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (1.2)$$

Следствие 1. Для полной группы событий сумма их вероятностей равна 1.

Следствие 2. Сумма вероятностей двух противоположных событий A и $\bar{A}$ равна 1.

Условной вероятностью события B называется вероятность наступления события B при условии, что событие A уже наступило. Обозначается P(B/A) или $P_A(B)$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного наступления событий A и B, равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \text{ или } P(AB) = P(B)P(A/B) \quad (1.3)$$

Следствие. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (1.4)$$

Теорема сложения вероятностей для случая, когда события совместны. Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, минус вероятность их совместного появления,

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1.5)$$

Объединение теорем сложения и умножения выражается в **формуле полной вероятности**

Теорема. Вероятность события А, которое может произойти при осуществлении одного из несовместных событий B1, B2, B3, ..., Bn, образующих полную группу, определяется формулой:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots$$
$$+ P(B_n)P(A/B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i) \qquad (1.6)$$

События B_1, B_2, B_3,..., B_n называются **гипотезами.**

В случае, если событие *A,* появляющееся совместно с каким-либо из несовместных событий B_1, B_2, B_3, ..., B_n, образующих полную группу, произошло и требуется произвести оценку вероятностей событий B_1, B_2, B_3,..., B_n, применяется **формула Байеса:**

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A/B_i)} \qquad (1.7)$$

Пример.

По каналу связи с помехами передается одно из двух сообщений:

1) 11111 с вероятностью равной 0,7;

2) 00000 с вероятностью равной 0,3.

Вероятность правильного приема каждого из символов 0 и 1 равна 0,6. Символы искажаются помехами независимо друг от друга. На выходе канала получают кодовое сообщение 10110.

Определить вероятности передачи первого и второго сообщений.

Решение.

Пусть событие *A* состоит в приеме сообщения 10110. Это событие может произойти в совокупности с событием *B1* - передавалось сообщение 11111 и событием *B2* - передавалось сообщение 00000. При этом *P(B1)* = 0,7, *P(B2)* = 0,3.

Условная вероятность приема сообщения 10110 при условии, что передавалась команда 11111 равна

$$P(A/B1)=P(1/1)\cdot P(0/1)\cdot P(1/1)\cdot P(1/1)\cdot P(0/1),$$

где $P(1/1)=0{,}6,\ P(0/1)=1-P(1/1)=0{,}4$

$P(A/B1)=0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}035.$

Условная вероятность приема сообщения 10110 при условии, что передавалась команда 00000 равна

$$P(A/B2\ )=P(1/0)\cdot P(0/0)\cdot P(1/0)\cdot P(1/0)\cdot P(0/0),$$

где $P(0/0)=0{,}6,\ P(1/0)=1-P(0/0)=0{,}4$

$$P(A/B\ )=0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}023.$$

По формуле полной вероятности

$P(A)=P(B1)P(A/B1)+P(B2\ )P(A/B2)=0{,}7\cdot 0{,}035+0{,}3\cdot 0{,}023=0{,}0314$

По формуле Байеса

$$\mathrm{P}(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}035}{0{,}0314}=0{,}78\ ,$$

$$\mathrm{P}(B_2/A\ )=\frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}023}{0{,}0314}=0{,}22\,.$$

Ответ. Сравнивая вероятности, можно сделать вывод о том, что более вероятна передача сообщения 11111.

1.3 Задание

Задача 1. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

Задача 2. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции: 20 % - продукция первого предприятия, 30 % - продукция второго, 50 % - продукция третьего. Продукции высшего сорта, поступившего от первого предприятия 10 %, от второго предприятия – 5 %, от третьего – 20 %. Найти вероятность того, что случайно купленная продукция будет высшего сорта.

Задача 3. На любой из позиций двоичного кода может быть с равной вероятностью переданы «0» и «1». Помехи преобразуют «1» в «0» с вероятностью 0,02 и «0» в «1» с вероятностью 0,04. Найти вероятность того, что был передан «0», если принят «0».

Задача 4. По линии связи посылаются сигналы «1» и «0» с вероятностями P1 = 0,6 и P0 = 0,4. Если посылается сигнал «1», то с вероятностью r11 = 0,9 принимается сигнал «1», с вероятностью r10 = 0,1 принимается сигнал «0». Если посылается сигнал «0», то с вероятностями r01 = 0,3 принимается сигнал «1», r00 = 0,7 принимается сигнал «0». Какова условная вероятность того, что посылается сигнал «1» при условии, что принимается сигнал «1»?

Задача 5. Вероятность искажения отдельного бита P=0,02, длина кодовой комбинации n=8. Найти вероятность безошибочной передачи всей комбинации, вероятность ошибки передачи, а также вероятности передачи с одной, двумя и тремя ошибками.

Задача 6. По линии связи посылаются сигналы «1» и «0» с вероятностями P1 = 0,6 и P0 = 0,4. Если посылается сигнал «1», то с вероятностью r11 = 0,9 принимается сигнал «1», с вероятностью r10 = 0,1 принимается сигнал «0». Если посылается сигнал «0», то с вероятностями r01 = 0,3 принимается сигнал «1», r00 = 0,7 принимается сигнал «0». Какова вероятность того, что принимается сигнал 1?

Задача 7. По линии связи посылаются сигналы «1» и «0» с вероятностями P1 = 0,6 и P0 = 0,4. Если посылается сигнал «1», то с вероятностью r11 = 0,9 принимается сигнал «1», с вероятностью r10 = 0,1 принимается сигнал «0». Если посылается сигнал «0», то с вероятностями r01 = 0,3 принимается сигнал «1», r00 = 0,7 принимается сигнал «0». Какова вероятность того, что принимается сигнал 0?

1.4 Контрольные вопросы

1 Дать определение понятия «информация», «информационные процессы». Назвать и дать определение видов информационных процессов.

2 Дать определение события с точки зрения теории информации. Какие события называются противоположными, достоверными, невозможными?

3 Дать определение полной группы событий. Какие события называются элементарными?

4 Дать определение вероятности, условной вероятности. Сформулировать теорему умножения вероятностей.

5 Пояснить смысл теоремы сложения вероятностей для несовместных событий, для совместимых событий, пояснить следствия теоремы.

6 Привести теорему о полной вероятности. Пояснить применение данной теоремы в задачах.

7 Привести теорему умножения вероятностей. Пояснить формулу Байеса.

8 Что такое случайные дискретными величины, случайные непрерывные величины?

9 Дать определение понятия «закон распределения случайной величины»? Привести способы задания закона распределения.

10 Привести основные законы распределения.

11 Пояснить понятие «функция распределения случайной величины». Назовите свойства функции распределения случайной величины.

12 Что такое математическое ожидание? Назовите свойства математического ожидания.

13 Дать определение информационной системы. Назвать основные классы информационных систем.

2 Лабораторная работа № 2. Количественная оценка информации

2.1 Цель работы

- Освоение навыков определения количества информации;
- Определение энтропии непрерывных сообщений.

2.2 Теоретические сведения

Важной задачей теории информации является количественная оценка передаваемых сообщений, которая называется количеством информации. Количество информации не отображает качественное содержание сообщения, а определяет меру его неопределенности.

Если алфавит некоторого источника сообщений состоит из m знаков, каждый из которых может служить элементом сообщения, то количество N возможных сообщений длины n равно числу перестановок с неограниченными повторениями:

$$N = m^n \tag{2.1}$$

В том случае, если все N сообщений от источника будут равновероятными, получение определенного сообщения равносильно для него случайному выбору одного из N сообщений с вероятностью P = 1/N.

Чем больше N, тем большая степень неопределенности характеризует этот выбор и тем более информативным можно считать сообщение.

Поэтому число N может служить мерой информации. С точки зрения теории информации, мера информации должна быть пропорциональна длине сообщения. В качестве меры неопределенности выбора состояния источника с **равновероятными состояниями** принимают логарифм числа состояний:

$$I = \log_2 N = \log_2 m^n = n \log_2 m \tag{2.2}$$

Эта логарифмическая функция характеризует количество информации.

Количество информации, приходящееся на один элемент сообщения (знак, букву), называется энтропией:

$$H = \frac{I}{n} = \frac{n \log m}{n} = \log m \qquad (2.3)$$

Вычислительные системы основаны на элементах, имеющих два устойчивых состояния «0» и «1», поэтому выбирают основание логарифма равным двум. При этом единицей измерения количества информации, приходящейся на один элемент сообщения, является двоичная единица - **бит**. Двоичная единица (бит) является неопределенностью выбора из двух равновероятных событий.

Так как из $\log_2 m = 1$ следует $m = 2$, то ясно, что 1 бит - это количество информации, которым характеризуется один двоичный элемент при равновероятных состояниях 0 и 1.

Представленная оценка количества информации базируется на предположении о том, что все знаки алфавита сообщения равновероятны. Для общего случая каждый из знаков появляется в сообщении с различной вероятностью. На основании статистического анализа известно, что в сообщении длины n знак xi появляется ni раз, т.е. вероятность появления знака:

$$P_i = \frac{n_i}{n}, \ (i = 1, 2, 3, \dots, m). \qquad (2.4)$$

Все знаки алфавита составляют полную систему случайных событий, поэтому:

$$\sum_{i=1}^{m} Pi = 1 \qquad (2.5)$$

Формулы Шеннона для количества информации и энтропии:

$$I = -n \sum_{i=1}^{m} P_i \log P_i,$$
$$H = -\sum_{i=1}^{m} P_i \log P_i \qquad (2.6)$$

Свойства энтропии.

1) Энтропия H - величина вещественная, неотрицательная и ограниченная, т.е. $H \geq 0$.

2) Энтропия равна нулю, если вероятность одного из элементов множества равно единице.

3) Энтропия максимальна, если все знаки алфавита равновероятны, т.е.

$$H_{max} = \log m. \qquad (2.7)$$

Избыточностью называется

$$p = 1 - H(\xi) / \max H(\xi) = 1 - H(\xi) / \log_2 N \qquad (2.8)$$

где ξ - это случайная величина, N- число сообщений.

Пример1. Вычислить количество информации, содержащееся в телевизионном сигнале, соответствующем одному кадру развертки. В кадре 625 строк, а сигнал, соответствующий одной строке, представляет собой последовательность из 600 случайных по амплитуде импульсов, причем амплитуда импульса может принять любое из 8 значений с шагом в 1 В.

Решение. В рассматриваемом случае длина сообщения, соответствующая одной строке, равна числу случайных по амплитуде импульсов в ней: n = 600.

Количество элементов сообщения (знаков) в одной строке равно числу значений, которое может принять амплитуда импульсов в строке

$$m = 8.$$

Количество информации в одной строке

$$I = n \log 8,$$

а количество информации в кадре

$$I_к = 625 * I = 625 * 600 * \log 8 = 1{,}125 * 10^6 \text{ бит}.$$

Пример 2. Даны 27 монет равного достоинства, среди которых есть одна фальшивая с меньшим весом. Вычислить сколько раз надо произвести взвешивание на равноплечих весах, чтобы найти фальшивую монету.

Решение. Так как монеты внешне одинаковы, они представляют собой источник с равновероятными состояниями, а общая неопределенность ансамбля, характеризующая его энтропию

$$H1 = \log_2 27.$$

Одно взвешивание способно прояснить неопределенность ансамбля насчитывающего три возможных исхода (левая чаша весов легче, правая чаша весов легче, весы находятся в равновесии). Все исходы являются равновероятными (нельзя заранее отдать предпочтение одному из них), поэтому результат одного взвешивания представляет источник с равновероятными состояниями, а его энтропия

$$H2 = \log_2 3 \text{ бит}.$$

Так как энтропия отвечает требованию аддитивности и при этом

$$H1 = 3*H2 = 3* \log_2 3,$$

то для определения фальшивой монеты достаточно произвести три взвешивания. Алгоритм определения фальшивой монеты следующий. При первом взвешивании на каждую чашку весов кладется по девять монет. Фальшивая монета будет либо среди тех девяти монет, которые оказались легче, либо среди тех, которые не взвешивались, если имело место равновесие. Аналогично, после второго взвешивания число монет, среди которых находится фальшивая монета, сократится до трех. Последнее, третье, взвешивание дает возможность точно указать фальшивую монету.

2.3 Задание

Задача 1. Известно, что одно из k возможных сообщений, передаваемых равномерным двоичным кодом, содержит 3 бита информации. Определить чему равно k.

Задача 2. Сообщения передаются в восьмеричном алфавите m = 8, по 4 символа в каждом сообщении. Всего передано 10 сообщений. Найти количество информации в 10 сообщениях.

Задача 3. Символы алфавита обладают двумя качественными признаками. а) Какое количество сообщений можно получить, комбинируя по 3, 4, 5 и 6 элементов в сообщении? б) Найти количество информации, приходящееся на один элемент указанных сообщений.

Задача 4. Некий алфавит состоит из трех букв X, Y, Z.

Задание: а) составить максимальное количество сообщений, комбинируя по три буквы; б) какое количество информации приходится на одно такое сообщение; в) определить количество информации на символ первичного алфавита.

Задача 5. Устройство генерирует четыре частоты f1, f2, f3, f4. В шифраторе частоты комбинируются по три частоты в кодовой комбинации. а) Определить максимальное количество комбинаций, составленных их этих частот? б) Определить количество информации на одну кодовую посылку?

Задача 6. Дать описание всех возможных способов определения расположения шахматных фигур на доске. Определить количество информации для каждого способа.

Задача 7. Какое количество информации приходится на одну букву алфавита, состоящего из 16, 25, 32 букв?

Задача 8. Алфавит состоит из букв A, B, C, D. Заданы вероятности встречаемости букв, они равны соответственно PA=PB=0,25; PC=0,34; PD= 0,16. Найти количество информации, приходящееся на один символ сообщения, составленного из такого алфавита.

Задача 9. Задан алфавит, количество символов которого равно 5. Найти количество информации, приходящееся на один символ сообщения, составленного из этого алфавита при условии:

а) символы алфавита равновероятны;

б) символы алфавита встречаются с вероятностями P1=0,8; P2=0,15; P3= 0,03; P4=0,015; P5=0,005.

Определить недогрузку символов во втором случае?

Задача 10. Определить количество информации в каждом сообщении (алфавит русский). а) Ра, ра, ра, ра, ра, ра, ра. б) Соблюдай правила техники безопасности! Не стой под краном! в) Черемуха душистая весною расцвела и ветки золотистые, что кудри завила.

Задача 11. Чему равна вероятность появления комбинации 10110 при передаче пятизначных двоичных кодов? Чему равно среднее количество информации, приходящейся на одну комбинацию? (P=1/32=0, 0312; I=5 бит).

Задача 12. Сообщения составлены из равновероятного алфавита, содержащего m=128 качественных признаков. Чему равно количество символов в принятом сообщении, если известно, что оно содержит 42 бита информации? Чему равна энтропия этого сообщения? (n=6; H=7 бит/символ)

2.4 Контрольные вопросы

1 Дать определение понятия «количество информации», привести формулу и пояснить все составляющие этой формулы.

2 В чем отличие формулы количества информации для равновероятных событий и разновероятных? Пояснить на примере, привести формулы.

3 Дать определение энтропии. Записать и пояснить формулу Шеннона.

4 Перечислить и доказать основные свойства энтропии.

5 Записать и пояснить формулу Хартли.

6 Что является единицей измерения количества информации, энтропии? Назвать и пояснить все единицы измерения количества информации.

7 Приведите примеры, в которых энтропия сообщения равна нулю, принимает максимальное значение?

8 Дать определение и пояснить правило сложения энтропий для независимых источников?

9 Пояснить как определяется количество информации непрерывных сообщений.

10 Записать и пояснить формулу избыточности кода.

3 Лабораторная работа № 3. Условная энтропия и энтропия объединения

3.1 Цель работы

- Вычисление условной энтропии;
- Вычисление энтропии объединения.

3.2 Теоретические сведения

Условная энтропия в теории информации применяется для определения взаимозависимости между символами кодируемого алфавита. Это необходимо с целью определения потерь информации при передаче данных по каналам связи.

Для того, чтобы определить условную энтропию используются условные вероятности.

Пусть при передаче n сообщений символ А появился m раз, символ В появился l раз, а символ А совместно с символом В появился k раз, то вероятность появления символа А будет $P(A) = m/n$, вероятность появления символа В будет $P(B) = l/n$, вероятность совместного появления символов А и В будет $P(AB) = k/n$. Условная вероятность появления символа А относительно В и наоборот будет

$$P(A/B) = P(AB)/P(B) = k/l,$$

$$P(B/A) = P(AB)/P(A) = k/m. \qquad (3.1)$$

Вероятность совместного появления символов А и В

$$P(AB) = P(B)*P(A/B) = P(A)*P(B/A). \qquad (3.2)$$

Условная энтропия символов А и В определяется выражением

$$H(bj/ai) = -\sum_j P(bj/ai)\log P(bj/ai)$$

$$H(ai/bj) = -\sum_i P(ai/bj)\log P(ai/bj) \qquad (3.3)$$

Индексы i и j выбраны для характеристики произвольного состояния источника сообщений А и адресата В.

Различают общую условную энтропию и частную. **Общая условная энтропия** сообщения B относительно сообщения A характеризует количество информации, содержащееся в любом символе алфавита, и определяется усреднением по всем символам, т.е. по всем состояниям с учетом вероятности появления каждого из состояний, и равна сумме вероятностей появления символов алфавита, умноженной на неопределенность, которая остается после того как адресат принял сигнал.

$$H(B/A) = -\sum_i P(ai)H(bj/ai) = -\sum_i \sum_j P(ai,bj)\log P(bj/ai). \qquad (3.4)$$

Если передавать m сигналов A и ожидать получить m сигналов B, влияние помех в канале связи описывается канальной матрицей

	b1	b2	…	bj	…	bm
a1	**P(b1/a1)**	P(b2/a1)	….	P(bj /a1)	…	P(bm /a1)
a2	P(b1/a2)	**P(b2/a2)**	…	P(bj/a2)	…	P(bm/a2)
…	…	…	…	…	…	…
ai	P(b1/ai)	P(b2/ai)	…	**P(bj/ai)**	…	P(bm/ai)
…	…	…	…	…	…	…
am	P(b1/am)	P(b2/am)	…	P(bi/am)	…	**P(bm/am)**

Вероятности, расположенные по диагонали, определяют правильный прием сообщений, а остальные – ложный. Если описывать канал связи со стороны источника сообщений, то прохождение данного сигнала описывается распределением условных вероятностей вида P(bj / ai). Для сигнала a1 это будет распределение вида

$$P(b1/a1) + P(b2/a1) + \ldots + P(bj/a1) + \ldots + P(bm/a1). \qquad (3.5)$$

Сумма вероятностей распределения всегда должна равняться единице. Потери информации, которые приходятся на долю сигнала a1, описываются с помощью **частной условной энтропии** вида

$$H(bj/a1) = -\sum_{j-1} P(bj/a1)\log P(bj/a1) \qquad (3.6)$$

Суммирование производится по j, так как i-тое состояние (в данном случае) остается постоянным.

Чтобы учесть потери при передаче всех сигналов по данному каналу связи, надо просуммировать все частные условные энтропии. Для случая равновероятных появлений сигналов на выходе источника

$$H(B/A) = -\frac{1}{m}\sum_{j} P(bj/ai)\log P(bj/ai) \tag{3.7}$$

Для случая неравновероятного появления следует учесть вероятность появления каждого символа. Тогда общая условная энтропия будет

$$H(B/A) = -\frac{1}{m}\sum_{i} P(ai)\sum_{j} P(bj/ai)\log P(bj/ai) \tag{3.8}$$

Если мы исследуем канал связи со стороны приемника сообщений, то с получением сигнала bjпредполагаем, что был послан какой-то из сигналов a1, a2, … ai, … am. При этом канальная матрица будет иметь вид

	b1	b2	…	bj	…	bm
a1	P(a1/b1)	P(a1/b2)	….	P(a1/bj)	…	P(a1/bm)
a2	P(a2/b1)	P(a2/b2)	…	P(a2/bj)	…	P(a2/bm)
…	…	…	…	…	…	…
ai	P(ai/b1)	P(ai/b2)	…	P(ai/bj)	…	P(ai/bm)
…	…	…	…	…	…	…
am	P(am/b1)	P(am/b2)	…	P(am/bj)	…	P(am/bm)

В этом случае единице должны равняться суммы условных вероятностей по столбцам канальной матрицы

$$P(a1/bj) + P(a2/bj) + \ldots + P(ai/bj) + \ldots + P(am/bj) = 1 \tag{3.9}$$

Частная условная энтропия

$$H(ai/bj) = -\sum_{i=1}^{m} P(ai/bj)\log P(ai/bj) \tag{3.10}$$

Общая условная энтропия

$$H(A/B) = -\sum_j P(bj)\sum_i P(ai/bj)\log P(ai/bj) \qquad (3.11)$$

Наравне с выражением (3.8) для вычисления общей условной энтропии может быть использовано выражение

$$H(B/A) = -\sum_i \sum_j P(ai,bj)\log P(bj/ai) \qquad (3.12)$$

Если заданы безусловные вероятности источника и канальная матрица, то можно вычислить энтропию приемника

$$H(B) = -\sum_j P(bj)\log P(bj) \qquad (3.13)$$

Если взаимозависимость связывает 3 элемента ai, aj, ak, то условная энтропия вычисляется по формуле

$$H(A/B,K) = -\sum_i \sum_j \sum_k P(ai,aj,ak)\log P(ai,aj,ak) \qquad (3.14)$$

Энтропия объединения используется для вычисления энтропии совместного появления статистически зависимых сообщений. Например, передав сто раз цифру 5 по каналу связи с помехами, эта цифра была принята 90 раз, цифра 6 была принята 8 раз, цифра 4 – 2 раза. Неопределенность возникновения комбинаций может быть описана с помощью энтропии объединения. H(A, B) - неопределенность того, что будет послано A, а принято B. Для ансамблей переданных сообщений A и принятых сообщений B энтропия объединения представляет собой сумму вида

$$H(A,B) = -\sum_i \sum_j P(ai,bj)\log P(ai,bj) \text{ бит/ два символа}$$

Энтропия объединения и условная энтропия связаны соотношениями

$$H(A,B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B)$$

$$H(B/A) = H(A,B) - H(A);\ \ H(A/B) = H(A,B) - H(B) \qquad (3.15)$$

Количество информации на символ сообщения, переданного по каналу связи, в котором влияние помех описывается при помощи энтропии объединения, вычисляется так

$$I(A,B) = H(A) + H(B) – H(B/A). \qquad (3.16)$$

3.3 Задание

Задача 1. При передаче каждых 100 сообщений длиной по 5 символов в сообщении символ К встречается 50 раз, символ Т – 30 раз. Совместно К и Т встречаются 10 раз. Определить условные энтропии H(К/Т) и H(Т/К).

Задача 2. При передаче текстовых сообщений наблюдения показали, что для слов со средней длиной в 6 букв на каждые 100 сообщений буква А встречается 80 раз, буква В встречается 50 раз, буквы А и В вместе встречаются 10 раз. Определить условную энтропию появления А, если в слове присутствует В, и условную энтропию появления В, если в слове присутствует А.

Задача 3. Определить общую условную энтропию сообщений, составленных из алфавита А, В, если вероятности появления символов в сообщении равны PA=0,6; PB=0,4. Условные вероятности переходов одного символа в другой равны P(B/A)=0,15; P(A/B)= 0,1.

Задача 4. В одной корзине два яблока и одна груша, в другой три яблока и одна груша, в третьей – два яблока и две груши. Определить полную условную энтропию возможности вытащить яблоко из любой корзины.

Задача 5. Влияние помех в канале связи описывается следующим распределением условных вероятностей

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}15 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$

Вычислить полную условную энтропию сообщений, передаваемых по данному каналу связи:

а) при равновероятном появлении символов в сообщении;

б) при вероятностях P(a1) = 0,7; P(a2) = 0,2; P(a3) = 0,1.

Задача 6. а) Определить частные условные энтропии для каждого символа алфавита a1, a2, a3, a4, если канал связи для передачи сообщений описывается следующей канальной матрицей

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,94 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0,98 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \end{vmatrix}$$

б) Найти общую условную энтропию для сообщений, передаваемых по каналу связи, описанному приведенной выше канальной матрицей, если символы источника равновероятны;

в) Найти общую условную энтропию для сообщений, передаваемых по каналу связи, если распределение вероятностей появления символов на выходе источника сообщений имеет вид P(a1) = 0,15; P(a2) = 0,32; P(a3) = 0,25; P(a4) = 0,28.

Задача 7. Определить общую условную энтропию сообщений, передаваемых по каналу связи, описанному канальной матрицей

$$P(a/b) = \begin{vmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,84 & 0,01 & 0 \\ 0,03 & 0,06 & 0,98 & 0,1 \\ 0,02 & 0 & 0,01 & 0,9 \end{vmatrix}$$

Символы алфавита равновероятны.

Задача 8. Определить энтропию приемника сообщений, если вероятности появления символов на выходе источника сообщений равны P(a1) = 0,5; P(a2) = 0,3; P(a3) = 0,2 и канальная матрица имеет вид

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} 0,97 & 0,03 & 0 \\ 0,01 & 0,98 & 0,01 \\ 0 & 0,04 & 0,96 \end{vmatrix}$$

Задача 9. Определить энтропию источника сообщений, если вероятности появления символов на входе приемника сообщений равны P(b1) = 0,1; P(b2) = 0,3; P(b3) = 0,4; P(b4) = 0,2 и канальная матрица имеет вид

$$P(a/b) = \begin{vmatrix} 0{,}99 & 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0 & 0 & 0{,}98 & 0{,}02 \\ 0 & 0 & 0{,}01 & 0{,}97 \end{vmatrix}$$

Задача 10. Задана матрица вероятностей системы, объединенной в одну систему из двух взаимозависимых систем A и B

$$P(A/B) = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{vmatrix}$$

Определить полные условные энтропии H(B/A) и H(A/B).

3.4 Контрольные вопросы

1 Дать определение условной энтропии. Пояснить для чего она применяется в теории информации.

2 Что такое общая и частная условная энтропия?

3 Какие формулы используются для расчета условной энтропии?

4 Что такое канальная матрица и как она используется при решении задач в теории информации?

5 Пояснить, что такое энтропия объединения и для чего она используется.

6 Привести определение понятия «полной средней взаимной информация».

7 Пояснить, что подразумевают под дискретными системами передачи информации.

8 Дать определение непрерывных систем передачи информации. Привести их характеристику.

9 Пояснить способ определения условной энтропии для непрерывной системы передачи сообщений.

10 Какие отличия есть при вычислении условной энтропии при равновероятном и неравновероятном появлении сигналов сообщения?

4 Лабораторная работа № 4. Вычисление информационных потерь при передаче сообщений по каналам связи с шумами

4.1 Цель работы

Освоение метода вычисления информационных потерь при передаче сообщений по каналам связи

4.2 Теоретические сведения

Потери информации в каналах связи с шумами описывают с помощью условной энтропии и энтропии объединения. Если помех нет или их уровень низкий настолько, что они не могут уничтожить сигнал или имитировать сигнал в отсутствие передачи, то при передаче ai будет получен сигнал bj, соответствующий переданному сигналу. События A и B жестко связаны, при этом условная вероятность максимальна P(bj/ai) = 1, и условная энтропия H(A/B) = 0, так как log P(bj/ai) = 0. Для этого случая количество информации в принятом ансамбле сообщений B, равно энтропии передаваемых сообщений ансамбля A

$$I(B,A) = H(A) \tag{4.1}$$

Если уровень помех высок, то любой из принятых сигналов bj может соответствовать любому переданному сигналу ai, статистическая связь между переданными и принятыми сигналами отсутствует. Поэтому вероятности P(ai) и P(bj) являются вероятностями независимых событий и P(bj/ai) = P(bj); P(ai/bj) = P(ai).

$$\begin{aligned} H(A/B) &= -\sum_i \sum_j P(bj)P(ai/bj)\log P(ai/bj) = \\ &= -\sum_i \sum_j P(bj)P(ai)\log P(ai) = \sum_j P(bj)H(A) = H(A) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Так как $\sum_j P(bj) = 1$, условная энтропия равна безусловной, а количество информации, содержащееся в B, относительно A равно нулю

$$I(A,B) = H(A) – H(A/B) = 0 \tag{4.3}$$

Информационные характеристики реальных каналов связи лежат между этими двумя предельными случаями. При этом потери информации при передаче k символов по данному каналу связи

$$\Delta I = kH(A/B) \tag{4.4}$$

Из-за помех часть информации искажается, однако между переданными и принятыми сообщениями существует статистическая взаимосвязь. Это позволяет описывать информационные характеристики реальных каналов связи с помощью энтропии объединения статистически зависимых событий. Так как

$$H(A,B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B), \tag{4.5}$$

то потери в канале связи могут быть учтены с помощью энтропии объединения следующим образом

$$I(B,A) = H(A) + H(B) - H(B,A). \tag{4.6}$$

Если использовать условную энтропию, то получим

$$I(B,A) = H(A) - H(A/B) = H(B) - H(B/A). \tag{4.7}$$

Для вычисления среднего количества информации, содержащегося в принятом ансамбле сообщений B относительно переданного ансамбля A в условиях действия помех, пользуются следующими выражениями

$$\begin{gathered} I(B,A) = \sum_i \sum_j P(ai)P(bj/ai)\log\frac{P(bj/ai)}{P(bj)}, \\ I(A,B) = \sum_i \sum_j P(bj)P(ai/bj)\log\frac{P(ai/bj)}{P(ai)} \end{gathered} \tag{4.8}$$

Для вычислений часто применяют выражения

$$I(A,B) = \sum_j P(bj)\sum_i [P(ai/bj)\log P(ai/bj) - P(ai/bj)\log P(ai)], \tag{4.9}$$

$$I(B,A) = \sum_i P(ai)\sum_i [P(bj/ai)\log P(bj/ai) - P(bj/ai)\log P(bj)], \tag{4.10}$$

$$I(A,B) = I(B,A) = \sum_i \sum_j P(ai,bj)\log P(ai,bj) - \sum_i \sum_j P(ai,bj)\log P(ai)P(bj) \tag{4.11}$$

Для полного описания канала связи необходимо задать: канальную матрицу вида P(ai/bj) и безусловные вероятности вида P(bj) или канальную матрицу вида P(bj/ ai) и безусловные вероятности P(ai), или канальную матрицу вида P(ai, bj). В последнем случае сумма значений матрицы по столбцам дает безусловные вероятности вида P(bj) ($\sum_j P(bj) = 1$), а сумма по строкам дает безусловные вероятности вида P(ai) ($\sum_i P(ai) = 1$). Условные вероятности могут быть найдены из выражений

$$P(ai/bj) = \frac{P(bj, ai)}{P(bj)}; P(bj/ai) = \frac{P(ai, bj)}{P(ai)} \tag{4.12}$$

Знная условные и безусловные вероятности, можно найти энтропии H(A), H(B), H(A/B), H(B/A). Если уровень помех настолько высок, что с равной вероятностью можно ожидать переход любого символа источника сообщения в произвольный символ первичного алфавита, то энтропия канала связи будет равна log m, а количество информации I = H(A) – log m $\leq$ 0, значение I может отрицательной величиной, что означает, что канал связи вносит дезинформацию.

Пример. Канал связи задан следующей канальной матрицей

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$

Вычислить среднее количество информации, которое переносится одним символом сообщения, если вероятности появления символов источника сообщений равны P(a1) = 0,7; P(a2) = 0,2; P(a3) = 0,1. Определить информационные потери при передаче сообщения из 400 символов алфавита a1, a2, a3. Вычислить количество принятой информации.

Решение. Энтропия источника сообщений

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} Pi \log Pi = -(0{,}7\log 0{,}7 + 0{,}2\log 0{,}2 + 0{,}1\log 0{,}1) = 1{,}1568 \text{ бит/символ}$$

Общая условная энтропия

$$H(A) = -\sum_i Pi \log(ai) \sum_j P(bj/ai) \log P(bj/ai) = -[0{,}7(0{,}98 \log 0{,}98 +$$

$$+ 2 * 0{,}01 \log 0{,}01) + 0{,}2(0{,}75 \log 0{,}75 + 0{,}1 \log 0{,}1 + 0{,}15 \log 0{,}15) + 0{,}1(0{,}2 \log 0{,}2$$

$$+ 0{,}3 \log 0{,}3 + 0{,}5 \log 0{,}5)] = 0{,}473 \quad (\textit{бит/символ}).$$

Потери в канале связи

$$\Delta I = kH(B/A) = 400*0{,}473 = 189{,}5 \text{ бит.}$$

Энтропия приемника

$$H(B) = -\sum_{j=1}^{m} P(bj) \log P(bj);$$

$$P(b1) = \sum_i P(ai)P(b1/ai) = P(a1)P(b1/a1) + P(a2)P(b1/a2) +$$

$$+ P(a3)P(b1/a3) = 0{,}726;$$

$$P(b2) = \sum_i P(ai)P(b2/ai) = P(a1)P(b2/a1) + P(a2)P(b2/a2) +$$

$$+ P(a3)P(b2/a3) = 0{,}187;$$

$$P(b3) = \sum_i P(ai)P(b3/ai) = P(a1)P(b3/a1) + P(a2)P(b3/a2) +$$

$$+ P(a3)P(b3/a3) = 0{,}087;$$

P(b1) + P(b2) + P(b3) = 1

H(B) = - (0,726 log 0,726 + 0,187 log 0,187 + 0,087 log 0,087) =
= 1,094 бит/символ

Среднее количество принятой информации

I = k [H(B) – H(B/A)] = k H(B) - ΔI = 400* 1,094 – 189,5 = 248,1 бит.

4.3 Задание

Задача 1. Найти информационные потери в канале связи, заданном канальной матрицей.

$$P(a/b) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Определить информационные потери в канале связи. Заданном матрицей, если символы алфавита встречаются в сообщениях с равной вероятностью.

$$P(a/b) = \begin{vmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}98 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 1 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Определить среднее количество информации, содержащееся в принятом ансамбле сообщений относительно переданного, если сообщения составлены из алфавита A, B, C. Вероятности появления букв алфавита на выходе источника сообщений P(Ai) = P(Bi) = 0,25; P(Ci) = 0,5. Условные вероятности пар вида bi/ai следующие

P(A/A) = 0,97; P(A/B) = 0,02; P(A/C) = 0,01;

P(B/A) = 0,015; P(B/B) = 0,97; P(B/C) = 0,01;

P(C/A) = 0,015; P(C/B) = 0,01; P(C/C) = 0,98.

Проверить правильность результата.

Задача 4. Определить информационные потери в канале связи, заданном следующей канальной матрицей

$$P(a/b) = \begin{vmatrix} 0{,}99 & 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0 & 0 & 0{,}98 & 0{,}02 \\ 0 & 0 & 0{,}01 & 0{,}97 \end{vmatrix}$$

Вероятности появления символов A, B, C, D на выходе источника сообщений соответственно равны PA = 0,4; PB = PC =PD =0,2. Определить среднее количество информации в принятых сообщениях относительно переданных.

Задача 5. Используя энтропию объединения, определить количество информации при передаче сообщений, построенных из алфавита 1, 2, 3, если априорные вероятности появления символов первичного алфавита равны между собой, а в результате действия помех 5% символов передаваемых сообщений могут с равной вероятностью перейти в любой другой символ данного алфавита.

Задача 6. Определить количество информации в принятом ансамбле сообщений, если заданы условные вероятности перехода одного сигнала в другой и вероятности появления сигналов на выходе источника сообщений Pa = 0,2; Pb = 0,3; Pc = 0,5; $P(a^1/a) = P(b^1/b) = P(c^1/c) = 0{,}97$; $P(b^1/a) = P(c^1/a) = P(a^1/b) = P(c^1/b) = P(a^1/c) = P(b^1/c) = 0{,}015$.

4.4 Контрольные вопросы

1 Чему равна энтропия объединения при независимости входящих в нее систем?

2 Как вычислить среднее количество информации в условиях помех?

3 Чему равна энтропия объединения при функциональной зависимости входящих в нее систем?

4 Чему равна взаимная информация между независимыми системами?

5 Может ли быть взаимная информация между двумя системами больше, чем наименьшая из энтропий этих систем?

6 Как вычислить информационные потери при передаче ее от одной системы к другой?

7 Что необходимо для полного описания канала связи?

8 Какие характеристики канала связи можно определить из канальной матрицы?

5 Лабораторная работа № 5. Информационные характеристики каналов связи

5.1 Цель работы

Вычисление скорости передачи информации и пропускной способности каналов связи

5.2 Теоретические сведения

Основными характеристиками информационных систем являются такие понятия, как энтропия, скорость передачи информации, избыточность, пропускная способность канала связи. Для организации передачи информации по канала связи надо учитывать не только количество информации, но и обеспечение передачи его в более короткий срок, не только хранение определенного количества, но и хранение с помощью минимального объема аппаратуры и т.д.

Предположим, что по каналу связи передали за время T количество информации, которое равно

$$I_T = H_T - H_T(Y/X). \qquad (5.1)$$

Можно вычислить скорость передачи данных

$$V = \frac{I_T}{T} = \frac{1}{T}(H_T(X) - H_T(X/Y) = H(X) - Y(X/Y). \qquad (5.2)$$

Скорость передачи данных представляет собой количество информации, приходящееся на одно сообщение. Если количество сообщений равно n, то скорость передачи n сообщений в секунду будет определяться

$$V = n(H(X) - H(X/Y)). \qquad (5.3)$$

В этом случае максимальная пропускная способность данного канала представляет собой c

$$c = maxV = n(H(X) - H(X\ /\ Y))_{max} = n \cdot I(X,Y)_{max} \qquad (5.4)$$

Различают техническую скорость передачи и информационную скорость передачи информации.

Технической скоростью передачи информации по каналу связи называется число символов, передаваемых в единицу времени

$$V_T = \frac{1}{\tau}\text{бод}. \tag{5.5}$$

Информационной скоростью передачи информации по каналу связи называется среднее количество информации, которое передается в единицу времени

$$V = nH \text{ бит/сек}. \tag{5.6}$$

Если сообщения являются равновероятными, составленные из равновероятных взаимно независимых символов, то их информационная скорость равна

$$V = \frac{1}{\tau} logm. \tag{5.7}$$

Если символы в сообщении не равновероятны, то скорость определяется

$$V = -\frac{1}{\tau}\sum_i p_i log_2 p_i. \tag{5.8}$$

В случае, если символы имеют разную длительность

$$V = -\frac{\sum_i p_i log_2 p_i}{\sum_i \tau_i p_i}. \tag{5.9}$$

Пропускная способность канала передачи информации характеризуется максимальной энтропией

$$c_{max} = \frac{H_{max}}{\tau} \text{ бит/с}. \tag{5.10}$$

Для двоичного кода

$$c_{max} = \frac{log_2 2}{\tau} = \frac{1}{\tau} \text{бит/с}. \tag{5.11}$$

1 Теорема Шеннона.

Пусть есть источник информации с энтропией H(X) и канал связи с пропускной способностью *c*, то если *c* > H(X), то всегда можно закодировать достаточно длинное сообщение таким образом, что оно будет передано без задержек. Если с < H(X), то передача информации без задержек невозможна.

Для всех практических каналов характерно наличие помех. На есть случаи, когда помехи малы, то вероятность искажения передаваемого сообщения равна нулю и можно считать, что все сигналы передаются верно. В этом случае среднее количество информации, переносимое одним символом

$$I(X,Y) = I(Y,X) = H(X), \quad H_{max} = log_2 m. \tag{5.12}$$

Следовательно, пропускная способность канала без помех за единицу времени

$$c = nlog_2 m, \tag{5.13}$$

Реальные каналы характеризуются тем, что в них всегда есть помехи. Пропускная способность дискретного канала с помехами вычисляется

$$c = n(H(Y) - H(Y / X))_{max}. \tag{5.14}$$

где $H(Y) = log_2 m$.

2 Теорема Шеннона.

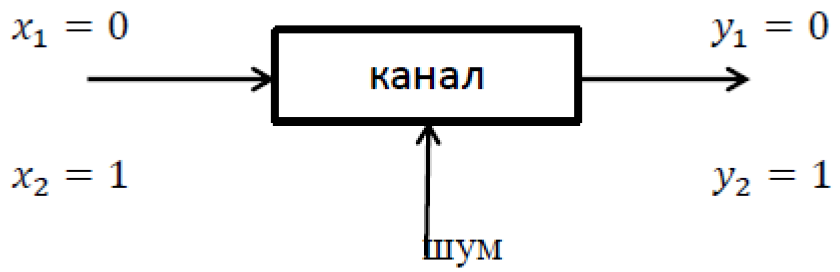
Для дан источник информации *X*, энтропия равна H(X), и пропускная способность равна *с*. Если H(X) > c , то справедливо, что при любом методе кодировании передача сообщений без задержек и искажений невозможна. Если H(X) < c , то любое достаточно длинное сообщение можно всегда закодировать так, что оно будет предано без задержек и искажений с вероятностью сколь угодно близкой к единице.

Пример 1. Дан дискретный симметричный канал без памяти, на вход которого поступают двоичные символы x1= 0; x2 = 1 с априорными вероятностями P(x1) = 0,85; P(x2) = 0,15. Переходные вероятности задаются соотношением

$$p(y_j/x_i) = \begin{cases} p, & j \neq i \\ 1 - p, & j = i \end{cases}$$

где P = 0,05 – это вероятность ошибки. Определить апостериорные вероятности.

Решение. Ситуация в канале характеризуется схемой



Так как вероятность ошибки P= 0,05, то вероятность правильного приема q = 1 - 0,05 = 0,95.

В таком канале каждый кодовый символ может быть принят с ошибочной вероятностью

$$p(y_1/x_2) = p(y_2/x_1) = p = 0{,}05.$$

Правильно переданная информация описывается

$$p(y_1/x_1) = p(y_2/x_2) = q = 0{,}95.$$

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i)p(y_j/x_i)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i)p(y_j/x_i)}{\sum_{i=1}^{N} p(x_i)p(y_j/x_i)}.$$

$$p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1)p(y_1/x_1)}{p(x_1)p(y_1/x_1) + p(x_2)p(y_1/x_2)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}95}{0{,}85 \cdot 0{,}95 + 0{,}15 \cdot 0{,}05} =$$

$$= 0{,}991,$$

$$p(x_1/y_2) = \frac{p(x_1)p(y_2/x_1)}{p(x_1)p(y_2/x_1) + p(x_2)p(y_2/x_2)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}05}{0{,}85 \cdot 0{,}05 + 0{,}15 \cdot 0{,}95} =$$

$$= 0{,}23,$$

$$p(x_2/y_1) = \frac{p(x_2)p(y_1/x_2)}{p(x_2)p(y_1/x_2) + p(x_1)p(y_1/x_1)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}05}{0{,}15 \cdot 0{,}05 + 0{,}85 \cdot 0{,}95} =$$

$$=0{,}009,$$

$$p(x_2/y_2) = \frac{p(x_2)p(y_2/x_2)}{p(x_2)p(y_2/x_2) + p(x_1)p(y_2/x_1)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}95}{0{,}15 \cdot 0{,}95 + 0.85 \cdot 0{,}05} = 0{,}77.$$

5.3 Задание

Задача 1. Задан канал передачи информации без шума, по которому передается сообщение из ансамбля:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ 0{,}34 & 0{,}46 & 0{,}16 & 0{,}04 \end{pmatrix}$$

Средняя длительность передачи одного элемента сообщения в канале $\tau = 0{,}2$мс.

Найти: пропускную способность канала; скорость передачи информации в канале без шума.

Задача 2. Задан источник с вероятностями появления символов источника алфавита p(x1) = 0,5; p(x2) =0,25; p(x3) = 0,125; p(x4) = 0,125. Между соседними символами имеются корреляционные связи, заданные матрицей вероятностей

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{16} & \frac{3}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Определить избыточность источника при статистической независимости символов и избыточность при зависимости символов.

Задача 3. Задан канал передачи информации, алфавит передаваемых сообщений содержит три символа с вероятностями p1 = 0,2; p2 = 0,7; p3 = 0,1. Чтобы передать информации по каналу без помех был применен равномерный двоичный код. Задана частота тактовых импульсов генератора 500 Гц. Найти пропускную способность канала и скорость передачи информации.

Задача 4. Задан канал связи, по которому передается три символа длительностью $\tau = 0{,}01$с и частотой следования $F = \frac{1}{\tau}$.

Матрица безусловных вероятностей источника сигналов

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Канал связи характеризуется при p1 = 0,01; p2 = 0,02; p3 = 0,97 матрицей условных вероятностей

$$P(Y/X) = \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_3 \end{pmatrix}$$

Определить пропускную способность канала. Сравнить производительность источника и пропускную способность канала.

Задача 5. По двоичному симметричному каналу связи с помехами передаются два символа с вероятностями p(x1) = 0,75 и p(x2) = 0,25. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из сигналов уменьшается до 0,875.

Длительность одного сигнала $\tau = 0{,}1$ с.

Необходимо определить: производительность и избыточность источника; скорость передачи информации и пропускную способность канала связи.

Задача 6. Определить скорость передачи информации для сообщений английского алфавита, при этом известно, что буквы e, t, o, n передаются за 10 мс каждая, а остальные за 20 мс каждая. При решении применить данные о распределении вероятностей букв в английском тексте.

5.4 Контрольные вопросы

1 Дать определения и пояснения технической и информационной скорости передачи. Назвать единицы измерения и области применения этих понятий.

2 Дать определение информационной скорости для равновероятных сообщений. В чем заключается отличие от случая неравновероятных сообщений?

3 Дать определение пропускной способности канала без помех и с помехами, назвать единицы измерения, привести области применения этого понятия.

4 Сформулируйте и поясните первую и вторую теоремы Шеннона. В каких задачах нашли применение эти теоремы?

6 Лабораторная работа № 6. Избыточность и оптимальное кодирование информации

6.1 Цель работы

- Вычисление избыточности кодов.
- Освоение приемов кодирования на основе кода Шеннона-Фано.

6.2 Теоретические сведения

Преобразование информации из одной формы представления (знаковой системы) в другую называется кодированием. Все виды информации в вычислительных системах кодируются на машинном языке в виде последовательностей логических нуля и единицы.

Двоичный код можно представить как два равновероятных состояния: «0» и «1». Количество информации любого двоичного символа равно одному биту. Два символа двоичного кода несут информацию в 2 бита, три цифры – в 3 бита и т.д. Количество информации в битах равно количеству цифр двоичного машинного кода. Восемь последовательных бит равно одному байту. В одном байте можно закодировать значение одного символа из 256 возможных.

Используют умножительные приставки:

$$2^8 \text{бит} = 1 \text{ байт} = 256 \text{ бит}$$
$$2^{10} \text{бит} = 1 \text{ Кбайт}$$
$$2^{20} \text{бит} = 1 \text{ Мбайт}$$
$$2^{30} \text{бит} = 1 \text{ Гбайт}$$
$$2^{40} \text{бит} = 1 \text{ Тбайт}$$

Кодирование - это процесс преобразования информации в форму, удобную для передачи по определённому каналу связи. **Декодирование** – восстановление принятого сообщения из кодированного вида в вид доступный для потребителя. Одно и тоже сообщение можно закодировать различными способами.

Одной из основных проблем кодирования при передаче информации по каналам связи является **оптимальный способ** кодирования, когда на передачу сообщения уходит минимальное время.

Предположим, что на передачу каждого элементарного символа (0 или 1) затрачивается одно и тоже время, то оптимальным будет такой код, при котором на передачу сообщения заданной длины будет затрачено минимальное количество символов.

Например, пусть имеются буквы русского алфавита а, б, в, г,…+ промежуток между словами (-). Если не различать ь и ъ (как принято в телеграфии), то получим 32 буквы. Требуется закодировать двоичным кодом буквы так, чтобы каждой букве соответствовала определенная комбинация символов 0 и 1 и, чтобы среднее число этих символов на букву текста было минимальным.

1 вариант. Не меняя порядка букв, пронумеровав их от 0 до 31 и перевести их в двоичную систему счисления, получим следующий код:

а ~ 00000
б ~ 00001
в ~ 00010
г ~ 00011
....
я ~ 11110
- ~ 11111

В этом коде на каждую букву тратится ровно пять элементарных символов. Является ли этот код оптимальным? Модно ли составить другой код, при котором на одну букву в среднем приходится меньше элементарных символов?

2 вариант. Так как одни буквы встречаются часто (а, о, е), а другие (щ, э, ф) редко, то часто встречающиеся буквы целесообразно закодировать меньшим числом символов, а реже встречающиеся – большим. Чтобы составить такой код нужно знать частоты букв русского алфавита (таблица 5.1) . Пользуясь такой таблицей, можно составить наиболее экономичный код на основе соображений, связанных с количеством информации. Код будет *самым экономичным*, когда каждый символ будет передавать максимальную информацию.

Рассмотрим элементарный символ, т.е. изображающий его сигнал, как физическую систему с двумя возможными состояниями 0 и 1. Информация, которую дает этот символ, равна энтропии системы и максимальна в случае, когда оба состояния равновероятны.

Таблица 5.1 - Статистические данные русского алфавита

буква	частота	буква	частота	буква	частота
-	0,145	к	0,029	ч	0,013
о	0,095	м	0,026	й	0,01
е	0,074	д	0,026	х	0,009
а	0,064	п	0,024	ж	0,008
и	0,064	у	0,021	ю	0,007
т	0,056	я	0,019	ш	0,006
н	0,056	ы	0,016	щ	0,003
с	0,047	з	0,015	э	0,003
р	0,041	ъ,ь	0,015	ф	0,002
в	0,039	б	0,015		
л	0,036	г	0,014		

Метод Шеннона-Фано.

Метод Шеннона-Фано является методом оптимального кодирования. Алгоритм построения кода Шеннона-Фано состоит в том, что кодируемые символы (буквы) разделяются на две равновероятные подгруппы: для символов 1-й подгруппы на втором месте ставится 0, а для 2-й подгруппы – 1 и т.д. Возможен другой вариант, когда первая подгруппа соответствует «1», а вторая - «0». Главное, определить правило изначально и следовать ему на протяжении всего процесса кодирования.

Необходимо взять первые шесть букв (от – до т). Сумма их вероятностей равна 0,498, на все остальные (от н до ф) приходится 0,502. Первые шесть букв будут иметь на первом месте 0, остальные 1. Далее снова первая группа делится на две приблизительные равновероятные подгруппы: (от – до щ) и (от е до т) и т.д.

Для всех букв первой подгруппы на втором месте ставится 0, а второй подгруппы – 1. Процесс продолжается до тех пор, пока в каждой группе не останется ровно одна буква, которая и будет закодирована определенным двоичным кодом.

Пример. Имеется алфавит символов и их вероятности, с которыми они встречаются в тексте. Построить таблицу кодов символов методом Шеннона-Фано. Закодировать сообщение «вилка» и раскодировать заданную последовательность кодов.

а	в	л	и	е	с	к
0,3	0,2	0,15	0,1	0,1	0,08	0,07

Решение. Составим таблицу кодов для символов алфавита

<table>
<tr><th>буква</th><th>вероятности</th><th colspan="4">символы кода</th><th>код</th></tr>
<tr><td>а</td><td>0,3</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="5"></td><td>00</td></tr>
<tr><td>в</td><td>0,2</td><td>1</td><td>01</td></tr>
<tr><td>л</td><td>0,15</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>100</td></tr>
<tr><td>и</td><td>0,1</td><td>1</td><td>101</td></tr>
<tr><td>е</td><td>0,1</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td>110</td></tr>
<tr><td>с</td><td>0,08</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1110</td></tr>
<tr><td>к</td><td>0.07</td><td>1</td><td>1111</td></tr>
</table>

Сообщению «вилка» соответствует выходная последовательность кодов 01101100111100. Выходной последовательности кодов 100101111000 соответствует сообщение «лиса».

Избыточность и оптимальное кодирование.

Если энтропия источника сообщений не равна максимальной энтропии для алфавита с заданным количеством качественных признаков, то это означает, что сообщения данного источника могли нести большее количество информации. Абсолютная недогруженность на символ такого источника

$$\Delta D = (H\max - H)\,бит/символ \tag{6.1}$$

Для определения количества «лишней» информации, которая заложена в структуре алфавита либо в природе кода, вводится понятие **избыточности. Ин-**

формационная избыточность показывает относительную недогруженность на символ алфавита и является безразмерной величиной

$$D = \frac{H\max - H}{H\max} = 1 - \frac{H}{H\max} \quad , \tag{6.2}$$

где $\frac{H}{H\max} = \mu$ – коэффициент сжатия (относительная энтропия).

Кроме общего понятия избыточности есть частные виды избыточности. Избыточность, обусловленная неравновероятным распределением символов в сообщении (6.3)

$$Dp = 1 - \left(\frac{-\sum_i pi \log pi}{\log m} \right) \tag{6.3}$$

Избыточность, вызванная статистической связью между символами сообщения (6.4)

$$Ds = 1 - \left[\frac{-\sum_i \sum_j p(ai)p(bj/ai)\log p(bj/ai)}{-\sum_i pi \log pi} \right] \tag{6.4}$$

Полная информационная избыточность

$$D = Ds + Dp - DsDp \tag{6.5}$$

Для данного способа кодирования характерна избыточность. Это объясняется тем, что в результате неравномерного распределения качественных признаков этого кода не может быть задана одной цифрой на основании статистических испытаний. При передаче десятичных цифр двоичным кодом максимально загруженными бывают только те символы вторичного алфавита, которые передают значения, являющиеся целочисленными степенями двойки. В остальных случаях тем же количеством символов может быть передано большее количество цифр (сообщений). Фактически для передачи сообщения достаточно иметь длину кодовой комбинации (6.6)

$$L \geq \frac{\log N}{\log m}, \qquad (6.6)$$

где N – общее количество передаваемых сообщений. L можно представить как

$$L \geq \frac{\log m1}{\log m2}, \qquad (6.7)$$

где m1 и m2 – соответственно качественные признаки первичного и вторичного алфавитов. Поэтому для цифры 5 в двоичном коде L $\geq$ log5/log2 = 2,32 дв. символа. Однако эту цифру надо округлить в большую сторону до ближайшего целого числа, так как длина кода не может быть выражена дробным числом. В общем случае избыточность от округления

$$D0 = \frac{k - \varphi}{k}, \qquad (6.8)$$

где $\varphi = \frac{\log m1}{\log m2}$, k – округленное до ближайшего целого числа значение.

Для нашего примера D0 = (3-2,32)/3 = 0,227.

Таким образом, избыточность может быть заложена как в первичном алфавите, так и в природе кода, составленного во вторичном алфавите.

Избыточность – не всегда нежелательное явление. Для повышения помехоустойчивости кодов избыточность необходима и ее вводят искусственно в виде добавочных символов. (6.9)

Наиболее эффективным способом уменьшения избыточности является построение оптимальных кодов. **Оптимальными называются коды, которые имеют практически нулевую избыточностью.** Оптимальные коды имеют минимальную среднюю длину кодовых слов - L. Верхняя и нижняя границы L определяются из неравенства

$$\frac{H}{\log m} \leq L \leq \frac{H}{\log m} + 1, \qquad (6.9)$$

где H – энтропия первичного алфавита, m – число качественных признаков вторичного алфавита.

Под термином «оптимальный код» понимают коды с практически нулевой избыточностью, так как сравнивают длину кодовой комбинации с энтропией источника сообщений, не учитывая взаимозависимость символов. С учетом взаимозависимости символов эффективность кодирования никогда не будет 100%, т.е.

$$Lcc \neq H; H = -\sum_{i}\sum_{j} p(ai)\,p(bj/ai)\log p(bj/ai). \qquad (6.10)$$

При построении оптимальных кодов наибольшее распространение получили методы Шеннона-Фано и Хаффмана.

6.3 Задание

Задача 1. Сообщения составляются из алфавита a, b, c, d. Вероятность появления букв в текстах равна соответственно: pa = 0,2; pb = 0,3; pc = 0,4; pd = 0,1. Найти избыточность сообщений, составленных из данного алфавита.

Залача 2. Чему равна минимальная длина кодовых слов для передачи 16, 128, 57, 10, 432 сообщений в восьмиричном и в двоичном кодах.

Задача 3. Пусть алфавит источника содержит шесть элементов {А, Б, В, Г, Д, Е}, появляющихся с вероятностями Р(А)=0,15, Р(В)=0,1, Р(Б)=0,25, Р(Г)=0,13, Р(Д)=0,25, Р(Е)=0,12. Найти энтропию такого источника, среднее число символов на одну букву при кодировании методом Ш-Ф.

Задача 4. Закодировать методом Шеннона-Фано блоки «мы все учились понемногу чему-нибудь и как-нибудь». Каково среднее число символов на знак?

блок	мы	все	учились	понемногу	чему	нибудь	и	как	-
вероятность	0,37	0,13	0,125	0,08	0,06	0,052	0,023	0,11	0,05

Задача 5. Сообщение состоит из последовательности букв А, В и С, вероятности которых не зависят от предыдущего сочетания букв и равны Р(А)=0,7, Р(В)=0,2, Р(С)=0,1. Провести кодирование по алгоритму Шеннона-Фано отдель-

ных букв и двухбуквенных сочетаний. Сравнить коды по их эффективности и избыточности.

Задача 6. Закодировать сообщение методом Шеннона-Фано «Теория информацииКодированияМодуляции».

Задача 7. Построить код Шеннона-Фано для системы из семи букв: A, B, C, D, E, F, G, вероятности появления которых соответственно 0,1; 0,2; 0,05; 0,3; 0,05; 0,15; 0,15. Определить среднее количество разрядов на одну букву. Декодировать этим кодом последовательность:

100111010010001111011101011110000.

6.4 Контрольные вопросы

1 Что понимают под кодированием сообщения? Приведите примеры простейших кодовых сообщений.

2 Дать определение равномерных кодов. Привести пример.

3 Поясните принцип кодирования методом Шеннона-Фано. Привести пример.

4 В чем заключается процесс декодирования сообщения? Привести пример.

5 Пояснить сущность понятия «избыточность кода». Дать характеристику видов избыточности.

6 Привести и пояснить формулу для вычисления длины кодовой комбинации. Привести пример.

7 Поясните за счет чего, обеспечивается сжатие информации при применении эффективного кодирования.

8 Чем определяется минимальная длина кодовой комбинации при применении эффективного кодирования?

9 Что такое оптимальный код? Какой параметр определяет оптимальность кода? Привести пример.

10 В каких случаях избыточность кода является полезным явлением? Привести примеры.

7 Лабораторная работа № 7. Эффективное кодирование. Метод Хаффмана

7.1 Цель работы

Освоение кодирования сообщений методом Хаффмана.

7.2 Теоретические сведения

Эффективное кодирование – это такой способ кодирования, при котором получается наименьший объем передаваемой информации и избыточность минимальна.

Для кодирования символов исходного алфавита используются двоичные коды переменной длины: чем больше частота символа, тем короче его код.

Эффективность кода определяется средним числом двоичных разрядов для кодирования одного символа. При эффективном кодировании существует предел сжатия, ниже которого не «спускается» ни один метод эффективного кодирования – иначе будет потеряна информация. Этот параметр определяется предельным значением двоичных разрядов возможного эффективного кода (7.1)

$$l_{\text{пр}} = -\sum_{i=1}^{n} f_i log_2 f_i, \tag{7.1}$$

где n – мощность кодируемого алфавита, fi- частота i-го символа кодируемого алфавита.

Метод Хаффмана относится к методу эффективного кодирования. Если имеются сообщения входного алфавита А {x1, x2,…, xn} с заданными вероятностями p1, p2, …, pn. Рассмотрим метод кодирования Хаффмана.

1. Необходимо расположить все сообщения в столбик в порядке убывания вероятностей их появления.

2. Затем два самых маловероятных сообщения объединить в одно *y*, которое имеет вероятность равную сумме вероятностей события x_{n-1}, x_n т.е., $p_{n-1}+ p_n$. В

результате получаются сообщения x1, x2, x_{n-2}, y вероятности которых p1, p2, p_{n-2}, $p_{n-1}+p_n$.

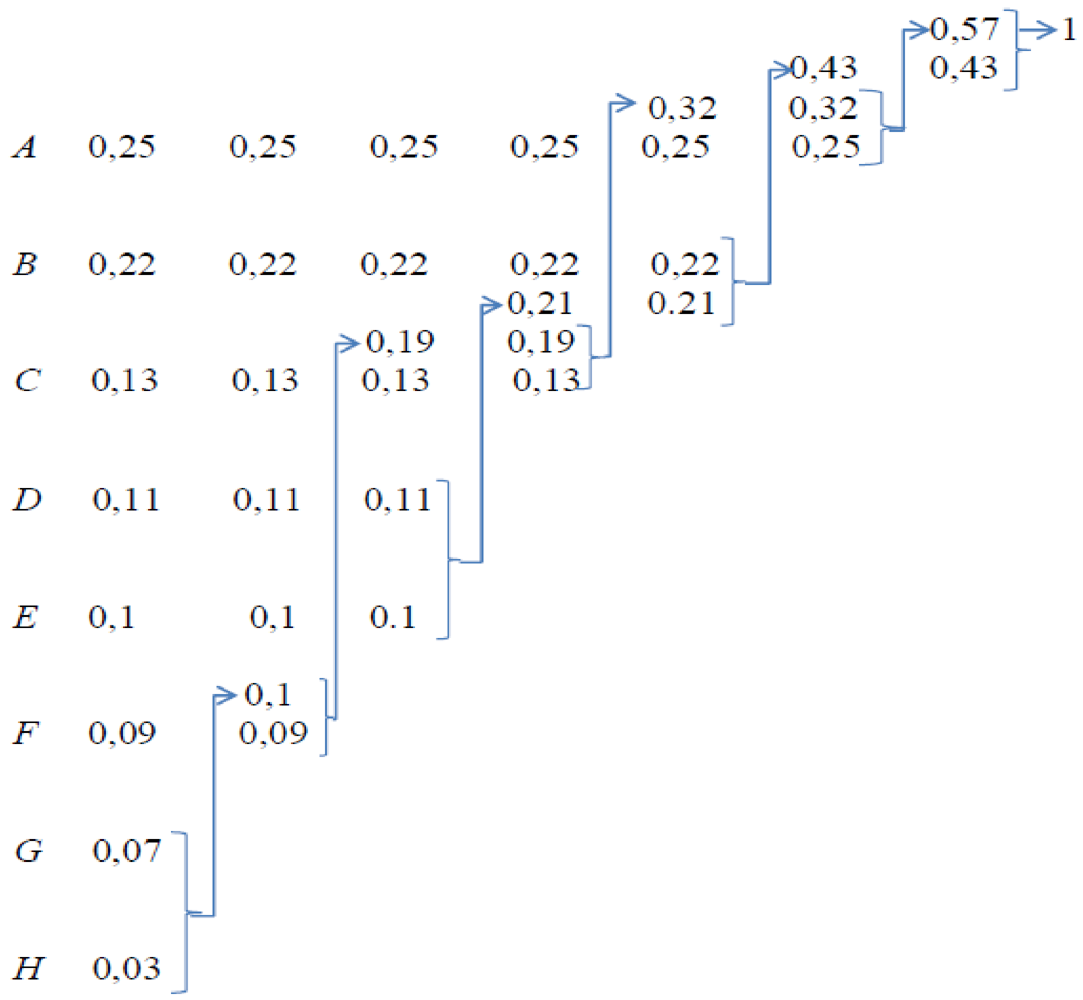
3. Необходимо повторять шаги 1 и 2 до тех пор, пока не получится единственное сообщение, вероятность которого равна 1.

4. Построить дерево, проводя линии, объединяющие сообщения и образующие последовательности подмножества. В этом дереве отдельные сообщения являются концевыми узлами. Соответствующие им кодовые слова можно определить, приписывая правым ветвям объединения символ 1, а левым – 0 (или наоборот).

Пример. Построить код Хаффмана для следующих данных:

A	B	C	D	E	F	G	H
0,25	0,22	0,13	0,11	0,1	0,09	0,07	0,03

Решение. Расположим сообщения в столбец в порядке убывания их вероятности



На основании полученной таблицы можно построить кодовое дерево (рисунок 7.1).

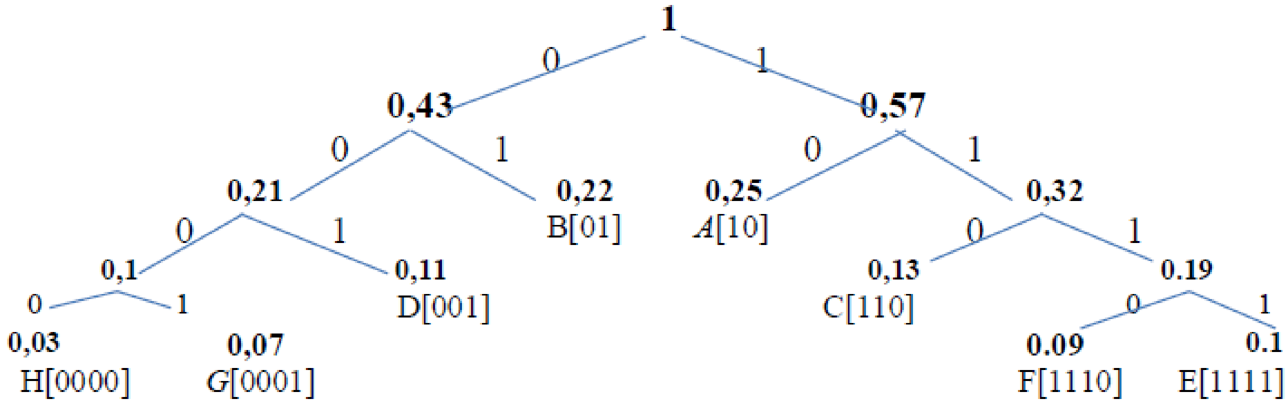


Рисунок 7.1 – Кодовое дерево

7.3 Задание

Задача 1. 1.Построить код Хаффмана для ансамбля сообщений

$\{x_i\},\ i = 1 \dots 8$ с с вероятностями $P(X) = \left\{\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\right\}$.

Определить характеристики кода.

Задача 2. Построить код Хаффмана для ансамбля сообщений

$\{x_i\},\ i = 1 \dots 5$ с вероятностями $P(X) = \{0{,}2\ \ 0{,}2\ \ 0{,}2\ \ 0{,}2\ \ 0{,}2\}$.

Определить характеристики эффективного кода.

Задача 3. Построить код Хаффмана для ансамбля сообщений

$\{x_i\},\ i = 1 \dots 4$ с вероятностями $P(X) = \{0{,}45\ \ 0{,}3\ \ 0{,}15\ \ 0{,}1\}$.

Определить характеристики кода и скорость передачи сообщений по каналу при условии, что длительность двоичного символа

$$\tau = 0.01\text{с} \cdot \text{бит}^{-1}$$

Сравнить с обычным двоичным кодированием.

Задача 4. Закодировать методом Хаффмана блоки «мы все учились понемногу чему-нибудь и как-нибудь».

блок	мы	все	учились	понемногу	чему	нибудь	и	как	-
вероятность	0,37	0,13	0,125	0,08	0.06	0,052	0,023	0,11	0,05

Каково среднее число символов на знак? Сравнить с ответом задачи № 4, выполненной по методу Шеннона-Фано.

Задача 5. Задан алфавит из трех символов с вероятностями 0,75; 0,1; 0,15. Произвести кодирование отдельных букв и двухбуквенных сочетаний по методу Хаффмана. Для полученных кодов найти средние длины и коэффициенты оптимальности.

7.4 Контрольные вопросы

1 Поясните назначение и цели эффективного кодирования.

2 Что такое средняя длина кодовой комбинации? Как ее определить?

3 За счет чего при эффективном кодировании уменьшается средняя длина кодовой комбинации?

4 До какого предела может уменьшиться длина кодовой комбинации при эффективном кодировании?

5 При каком распределении букв первичного алфавита оптимальный неравномерный код оказывается самым эффективным?

6 К какому типу алгоритмов кодирования относится метод Хаффмана, дать пояснение.

7 Приведите пояснение метода Хаффмана на примере.

8 Какая информация необходима для восстановления сообщения, закодированного по методу Хаффмана?

9 Какой код наиболее эффективный: по методу Хаффмана или Шеннона-Фано? Привести пример.

10 Привести случаи, когда метод Хаффмана не способен уменьшить размер данных.

Список использованных источников

1 Балюкевич, Э.Л. Основы теории информации: учебно-практическое пособие / Э.Л. Балюкевич. – М.: Евразийский открытый институт, 2008. – 216 с.

2 Задачи кодирования сообщений. Код Шеннона-Фэно. Алгоритм Шеннона – Фано. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://intellect.ml/18-8-zadachi-kodirovaniya-soobshhenij-kod-shennona-feno-algoritm-shennona-fano-7001.

3 Зверева, Е.Н. Сборник примеров и задач по основам теории информации и кодирования сообщений / Е.Н. Зверева, Е.Г. Лебедько. – СПб: НИУ ИТМО, 2014. – 76 с.

4 Метод сжатия Хаффмана. Кодирование методом Хаффмана. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://life-prog.ru/view_programmer.php?id=2 .

5 Кудряшов, Б.Д. Теория информации / Б.Д. Кудряшов - Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2010. - 188 с.

6 Куприянов, А. И. Основы защиты информации: учеб. пособие для вузов / А. И. Куприянов, А. В. Сахаров, В. А. Шевцов.- 3-е изд., стер. - М. : Академия, 2008. - 254 с.

7 Осокин, А.Н. Теория информации: учебное пособие / А.Н. Осокин, А.Н. Мальчуков. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 208 с.

8 Фурсов, В.А. Теория информации: учебник / В.А. Фурсов. - Самара: Изд-во Самар.,гос. аэрокосм, ун-та, 2011. - 128 с.

9 Хохлов, Г. И. Основы теории информации: учеб. пособие / Г.И. Хохлов. - М. : Академия, 2008. - 172 с.