

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра механики материалов, конструкций и машин

Л.И. Кудина

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ БЕЗ УЧЕТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 08.03.01 Строительство

Оренбург
2020

УДК 531.32
ББК 22.21я73
К88

Рецензент – доцент, кандидат технических наук Е.В. Дырдина

Кудина, Л.И.
К88 Исследование свободных колебаний материальной точки без учета сил сопротивления: методические указания / Л. И. Кудина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2020. – 31 с.

Методические указания к выполнению лабораторной работы с использованием MathCad по дисциплине «Теоретическая механика» предназначены для самостоятельной работы обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 08.03.01 Строительство. Содержат необходимые теоретические сведения, контрольные вопросы, варианты индивидуальных заданий, пример выполнения, указания по применению системы MathCad и общие рекомендации по оформлению отчета.

Методические указания будут полезны студентам транспортных, энергетических, машиностроительных направлений подготовки всех форм обучения при изучении курса теоретической механики.

УДК 531.32
ББК 22.21я73

© Кудина Л.И., 2020
© ОГУ, 2020

Содержание

1 Теоретические сведения	4
1.1 Дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки и его решение	4
1.2 Геометрическая интерпретация свободных колебаний точки на фазовой плоскости.....	11
1.3 Контрольные вопросы.....	13
2 Лабораторная работа «Исследование свободных колебаний материальной точки без учета сил сопротивления»	15
2.1 Содержание задания.....	15
2.2 Пример выполнения лабораторной работы.....	17
2.3 Общие рекомендации по оформлению отчета по лабораторной работе.....	29
3 Литература, рекомендуемая для изучения темы.....	31

1 Теоретические сведения

1.1 Дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки и его решение

Свободными колебаниями называется периодическое движение материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы, стремящейся вернуть точку в положение равновесия и пропорциональной отклонению этой точки от положения равновесия. Примером такой восстанавливающей силы может служить сила упругости пружины, величина которой прямо пропорциональна смещению конца пружины из ненапряженного состояния:

$$F_{упр} = c\Delta, \quad (1)$$

где c – коэффициент упругости (коэффициент жесткости) пружины, H/m ;

Δ – величина удлинения (сжатия) пружины, m .

Коэффициент упругости пружины численно равен силе, которую надо приложить к пружине для того, чтобы изменить ее длину на единицу. Коэффициент упругости в СИ измеряется в H/m , однако в связи с неудобством измерения деформации пружины в метрах, в большинстве практических задач коэффициент упругости задается в H/cm или H/mm .

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки M массой m , подвешенной к нижнему концу пружины AB с коэффициентом жесткости c . Верхний конец пружины закреплен неподвижно (рисунок 1).

На рисунке 1а изображена недеформированная пружина длиной l . Подвесим к нижнему концу пружины груз M массой m . В положении *статического равновесия* (рисунок 1б) сила упругости пружины $F_{упр}^{cm}$ уравнивается силой тяжести груза P :

$$F_{упр}^{cm} = P.$$

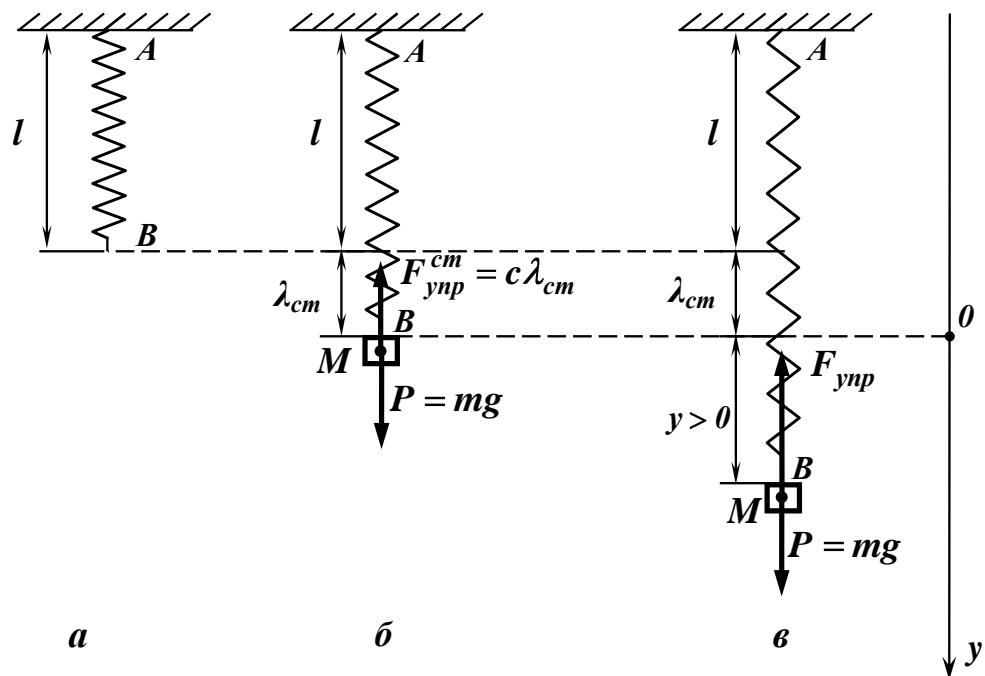


Рисунок 1

Отсюда величина статического удлинения пружины λ_{cm} определяется соотношением:

$$c\lambda_{cm} = mg, \quad (2)$$

или

$$\lambda_{cm} = \frac{mg}{c}, \quad (3)$$

где g – ускорение свободного падения, m/c^2 .

Получим уравнение движения груза M , отнеся его движение к оси y , направленной вертикально вниз из положения статического равновесия груза. Для этого изобразим груз в некотором положении, отклоненном от состояния статического равновесия (рисунок 1в) так, чтобы он имел положительную координату $y > 0$.

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось y :

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky},$$

или

$$m\ddot{y} = mg - F_{\text{упр}}. \quad (4)$$

Сила упругости пружины в рассматриваемом положении (рисунок 1в) равна:

$$F_{\text{упр}} = c\Delta = c \lambda_{cm} + y. \quad (5)$$

Подставив выражение (5) в дифференциальное уравнение (4) с учетом соотношения (2), получим

$$m\ddot{y} = mg - c \lambda_{cm} + y,$$

$$m\ddot{y} = \cancel{mg} - \cancel{c\lambda_{cm}} - cy,$$

$$m\ddot{y} = -cy,$$

$$m\ddot{y} + cy = 0. \quad (6)$$

Разделив обе части уравнения (6) на массу груза m , получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение материальной точки M :

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0,$$

или

$$\ddot{y} + k^2 y = 0, \quad (7)$$

где введено обозначение

$$k^2 = \frac{c}{m} = \text{const}. \quad (8)$$

Уравнение (7) называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний материальной точки*.

Как известно из курса высшей математики, общее решение полученного дифференциального уравнения (7) зависит от вида корней его характеристического уравнения:

$$z^2 + k^2 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет мнимые корни:

$$z_{1,2} = \pm ik .$$

В этом случае общее решение дифференциального уравнения (7) имеет вид:

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt , \quad (9)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями движения.

Запишем *начальные условия* задачи (значения начальной координаты y_0 и проекции начальной скорости $v_{0y} = \dot{y}_0$, соответствующие моменту начала движения точки $t = t_0$):

$$\text{при } t_0 = 0, \quad y = y_0, \quad v_y = \dot{y} = \dot{y}_0. \quad (10)$$

Подставляя начальные условия (10) в общее решение (9), найдем значение постоянной интегрирования C_1 :

$$y_0|_{t_0=0} = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1; \Rightarrow C_1 = y_0. \quad (11)$$

Значение второй постоянной интегрирования C_2 найдем, продифференцировав общее решение (9) и подставив начальные условия (10):

$$\dot{y} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt ,$$

$$\dot{y}_0|_{t_0=0} = -C_1 k \sin 0 + C_2 k \cos 0 = C_2 k ,$$

$$C_2 = \frac{\dot{y}_0}{k} = \frac{v_{0y}}{k} . \quad (12)$$

Подставив найденные значений постоянных (11) и (12) в общее решение (9), получим закон движения точки при действии линейной восстанавливающей силы в виде:

$$y = y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt . \quad (13)$$

Полученному закону движения точки (13) можно придать другой вид, введя новые постоянные a и β так, чтобы были справедливы соотношения:

$$C_1 = a \cdot \sin \beta, \quad C_2 = a \cdot \cos \beta. \quad (14)$$

После подстановки выражений (14) в общее решение (9) получим:

$$y = a \cdot \sin \beta \cdot \cos kt + a \cdot \cos \beta \cdot \sin kt ,$$

или

$$y = a \cdot \sin kt + \beta . \quad (15)$$

Значения новых введенных постоянных можно определить из выражений (14):

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{A \sin \beta}{A \cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \beta; \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{C_1}{C_2} \right);$$

$$a = \frac{C_1}{\sin \beta} = \frac{C_2}{\cos \beta}.$$

С учетом найденных из начальных условий значений постоянных C_1 и C_2 (11) и (12) получим:

$$\beta = \arctg\left(\frac{ky_0}{\dot{y}_0}\right); \quad a = \frac{y_0}{\sin \beta} = \frac{\dot{y}_0}{\cos \beta}. \quad (16)$$

Заметим, что значения постоянных a и β можно также получить, подставив начальные условия движения (10) непосредственно в выражение (15).

Закон движения точки, записанный в виде (15), называется *законом свободных колебаний материальной точки в амплитудной форме*. Из него следует, что в случае действия линейных восстанавливающих сил точка совершает *гармоническое движение*. График этого движения показан на рисунке 2.

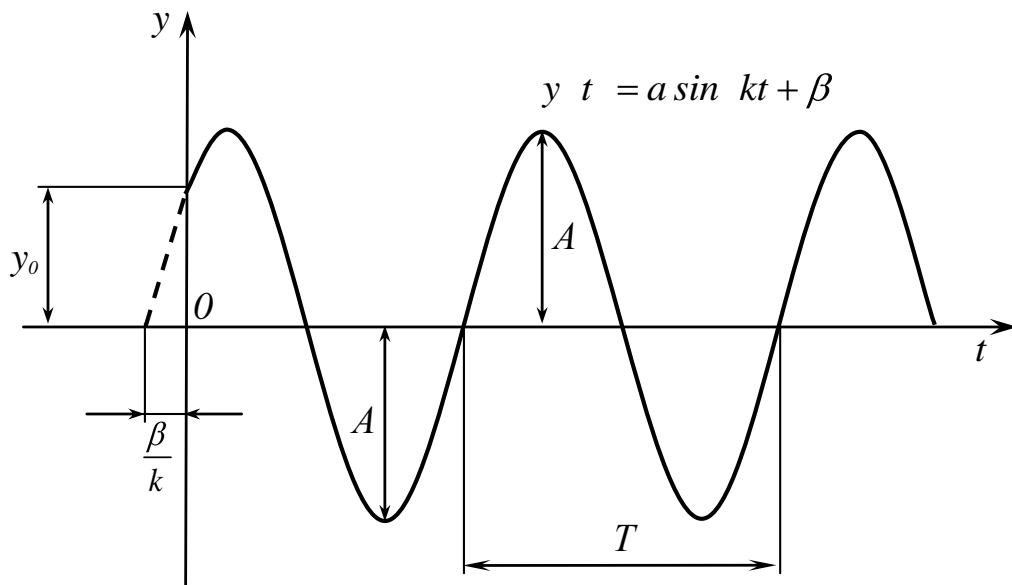


Рисунок 2 – График свободных колебаний материальной точки

Положительная величина $A = |a|$, определяющая максимальное отклонение точки от положения равновесия, называется *амплитудой колебаний*. Из соотношений (14) можно получить выражение для вычисления амплитуды колебаний непосредственно из начальных условий движения (10):

$$C_1^2 + C_2^2 = a^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = a^2; \Rightarrow A = |a| = \sqrt{C_1^2 + C_2^2};$$

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{k}\right)^2}. \quad (17)$$

Аргумент синуса $kt + \beta$ называется *фазой колебаний*, а величина β – *начальной фазой* свободных колебаний. Амплитуда A и начальная фаза колебаний β , как и постоянные интегрирования C_1 и C_2 , определяются из начальных условий движения (10).

Величина k называется *угловой* (круговой, циклической) *частотой свободных колебаний* и определяет число полных колебаний, совершаемых точкой за 2π секунд. С учетом принятого обозначения (8):

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (18)$$

где c – коэффициент упругости пружины, H/m ;

m – масса материальной точки, $кг$.

С учетом соотношения (2) можно получить еще одну формулу для определения угловой частоты свободных колебаний:

$$k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}}, \quad (19)$$

где g – ускорение свободного падения, m/c^2 ;

$\lambda_{ст}$ – статическое удлинение пружины, m .

Промежуток времени T , в течение материальная точка совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний*:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}. \quad (20)$$

Как следует из формул (18) и (20), круговая частота k и период колебаний T не зависят от начальных условий движения. Это свойство свободных колебаний называется *изохронностью*, а сами свободные колебания – *изохронными*.

Полученные соотношения (15) – (20) позволяют сформулировать *основные свойства свободных колебаний* материальной точки при отсутствии сил сопротивления движению:

- 1 Свободные колебания представляют собой *гармонические колебания*.
- 2 Свободные колебания обладают *свойством изохронности*: частота и период этих колебаний не зависят от начальных условий движения.
- 3 Амплитуда и начальная фаза свободных колебаний зависят от начальных условий движения.

1.2 Геометрическая интерпретация свободных колебаний точки на фазовой плоскости

Метод фазовой плоскости широко используется в математике, физике, теории колебаний, радиотехнике и т.д. С помощью этого метода можно получить наглядное представление о движении систем материальных точек при различных начальных условиях движения. Совокупность всех координат и скоростей точек исследуемой системы называют *фазой системы*, а сами эти величины – *фазовыми координатами*.

В рассматриваемом случае для материальной точки существует одна пара *фазовых координат*: координата y , определяющая положение точки, и скорость точки

$v = v_y = \dot{y}$. Состояние материальной точки M в каждый момент времени t удобно представить на *фазовой плоскости*, откладывая по оси абсцисс координату точки y , а по оси ординат – проекцию ее скорости \dot{y} . Точка K с координатами y, \dot{y} , называется *изображающей точкой*. При движении материальной точки M изображающая точка K движется в фазовой плоскости, описывая некоторую кривую, называемую *фазовой траекторией*. Совокупность фазовых траекторий, построенных при различных начальных условиях движения, называется *фазовым портретом*.

Найдем уравнение фазовой траектории для материальной точки при свободных колебаниях. Для этого продифференцируем по времени полученный ранее закон свободных колебаний точки в амплитудной форме (15):

$$\dot{y} = ka \cos kt + \beta . \quad (21)$$

Исключим из уравнений (15) и (21) время t :

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 = \sin^2(kt + \beta), \quad \left(\frac{\dot{y}}{ka}\right)^2 = \cos^2(kt + \beta),$$

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{ka}\right)^2 = 1,$$

или

$$\left(\frac{y}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{kA}\right)^2 = 1. \quad (22)$$

Следовательно, фазовой траекторией материальной точки при свободных колебаниях является эллипс (рисунок 3).

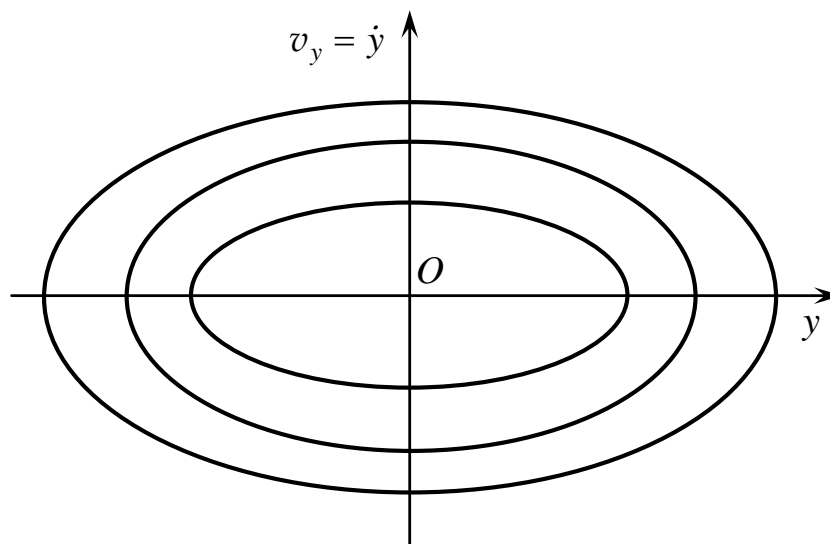


Рисунок 3 – Фазовый портрет свободных колебаний материальной точки

Замкнутая фазовая траектория свидетельствует о незатухающем периодическом характере движения точки M при свободных колебаниях без учета сил сопротивления движению. Из выражения (22) очевидно, что размер полуосей эллипса зависит от амплитуды колебаний A , а значит, и от начальных условий движения точки M . Следовательно, фазовый портрет свободных колебаний точки представляет собой непрерывную последовательность подобных эллипсов с общим центром. Центры эллипсов (начало координат точка O) соответствуют положению статического равновесия, относительно которого точка M совершает колебания.

1.3 Контрольные вопросы

- 1 Какие силы называются восстанавливающими?
- 2 Запишите дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки при отсутствии сил сопротивления движению.
- 3 Какой вид имеет общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний материальной точки при отсутствии сил сопротивления движению?
- 4 Как записывается закон свободных колебаний в амплитудной форме?
- 5 Что называется амплитудой свободных колебаний точки? начальной фазой колебаний?

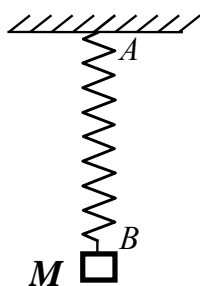
- 6 Зависят ли амплитуда и начальная фаза свободных колебаний от начальных условий движения материальной точки?
- 7 Что называется угловой (круговой, циклической) частотой свободных колебаний?
- 8 Какая величина называется периодом колебаний?
- 9 Как определяются угловая частота и период свободных колебаний точки?
- 10 Зависят ли угловая частота и период свободных колебаний от начальных условий движения материальной точки?
- 11 Какие факторы оказывают влияние на частоту, период, амплитуду и начальную фазу колебаний материальной точки?
- 12 В чем заключается свойство изохронности свободных колебаний?
- 13 Перечислите основные свойства свободных колебаний материальной точки при отсутствии сил сопротивления движению.
- 14 Что называется фазовой плоскостью?
- 15 Какие параметры принимаются в качестве фазовых координат точки?
- 16 Какой вид имеет фазовая траектория точки при свободных колебаниях без учета сил сопротивления?
- 17 О чем свидетельствует замкнутый характер фазовой траектории?
- 18 Как выглядит фазовый портрет свободных колебаний точки при отсутствии сил сопротивления движению?
- 19 Точка массой $m = 5 \text{ кг}$ подвешена к пружине и совершает свободные колебания с периодом $T = 0,6 \text{ с}$. Чему равен коэффициент жесткости пружины?
- 20 Статическое удлинение пружины под действием веса точки M $\lambda_{cm} = 4 \text{ см}$. Чему равен период свободных колебаний этой точки?
- 21 Дифференциальное уравнение колебаний груза, подвешенного к пружине, имеет вид $2\ddot{y} + 32y = 0$. Чему равна угловая частота колебаний груза?
- 22 Дифференциальное уравнение движения груза, подвешенного к пружине с коэффициентом жесткости $c = 3 \text{ Н/см}$, имеет вид $\ddot{y} + 60y = 0$. Чему равна масса груза?

2 Лабораторная работа «Исследование свободных колебаний материальной точки без учета сил сопротивления»

Цель работы:

Исследовать характер и изучить основные параметры свободных колебаний материальной точки при отсутствии сил сопротивления движению.

2.1 Содержание задания



Груз M массой m подвешен к нижнему концу B пружины с коэффициентом жесткости c , верхний конец A которой закреплен неподвижно. В некоторый момент времени груз отклоняют от положения равновесия и сообщают ему начальную скорость v_0 , направленную вертикально. Для заданных начальных условий движения груза требуется:

- 1) найти уравнение дальнейшего движения груза в виде $y=y(t)$, отнеся его движение к оси, направленной вертикально вниз из положения статического равновесия груза;
- 2) вычислить основные параметры свободных колебаний груза (угловую частоту, период, амплитуду и начальную фазу колебаний);
- 3) получить в MathCad численное решение составленного дифференциального уравнения движения груза при заданных начальных условиях движения;
- 4) построить графики полученных решений дифференциального уравнения свободных колебаний груза;
- 5) определить значения периода и амплитуды свободных колебаний с помощью построенных графиков и сравнить их с найденными аналитически значениями;
- 6) построить фазовую траекторию свободных колебаний материальной точки при заданных начальных условиях движения;
- 7) исследовать влияние начальных условий движения на величину периода и амплитуды совершаемых колебаний;
- 8) проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

Исходные данные для выполнения лабораторной работы выбираются студентом по таблице 1 в соответствии с трехзначным вариантом, в качестве которого принимаются три последние цифры номера зачетной книжки студента.

Силы сопротивления при движении груза не учитывать.

Таблица 1 – Исходные данные

Первая цифра шифра	m , кг	c , Н/см	$\lambda_{ст}$, см	Вторая цифра шифра	v_0 , м/с	Третья цифра шифра	l , см	l_0 , см	Направление v_0
0	1,2	3	-	0	2	0	30	32	вертикально вверх
1	1,5	-	2	1	1,5	1	20	18	вертикально вниз
2	-	2,5	3	2	3	2	25	27	вертикально вверх
3	3,2	2	-	3	2,8	3	40	42	вертикально вниз
4	4	-	5	4	3,2	4	30	27	вертикально вверх
5	-	2,8	4	5	1,2	5	25	21	вертикально вниз
6	2	4	-	6	3,8	6	50	45	вертикально вверх
7	2,5	-	1,5	7	2,5	7	35	38	вертикально вниз
8	-	1,8	3	8	0,8	8	20	24	вертикально вверх
9	3	1,5	-	9	4	9	40	36	вертикально вниз

В таблице 1 приняты следующие обозначения: m – масса груза; c – коэффициент жесткости пружины; $\lambda_{ст}$ – статическое удлинение пружины под действием веса груза M ; v_0 – начальная скорость груза; l – длина пружины в недеформированном (ненапряженном) состоянии; l_0 – длина пружины в начальный момент времени.

Прочерк в таблице 1 означает, что соответствующая величина подлежит определению при решении.

2.2 Пример выполнения лабораторной работы

Груз M массой m подвешен к нижнему концу пружины с коэффициентом жесткости c , верхний конец которой закреплен неподвижно (рисунок 4). Длина пружины в недеформированном (ненапряженном) состоянии $l = 40$ см, а ее статическая деформация под действием веса груза $\lambda_{ст} = 4$ см. В начальный момент времени пружина растянута до длины $l_0 = 47$ см, а груз получает начальную скорость $v_0 = 2$ м/с, направленную вверх. Силы сопротивления при движении груза не учитывать.

Дано: $m = 1,5$ кг; $\lambda_{ст} = 4$ см; $l = 40$ см; $l_0 = 47$ см; $v_0 = 2$ м/с.

1 Аналитическое решение

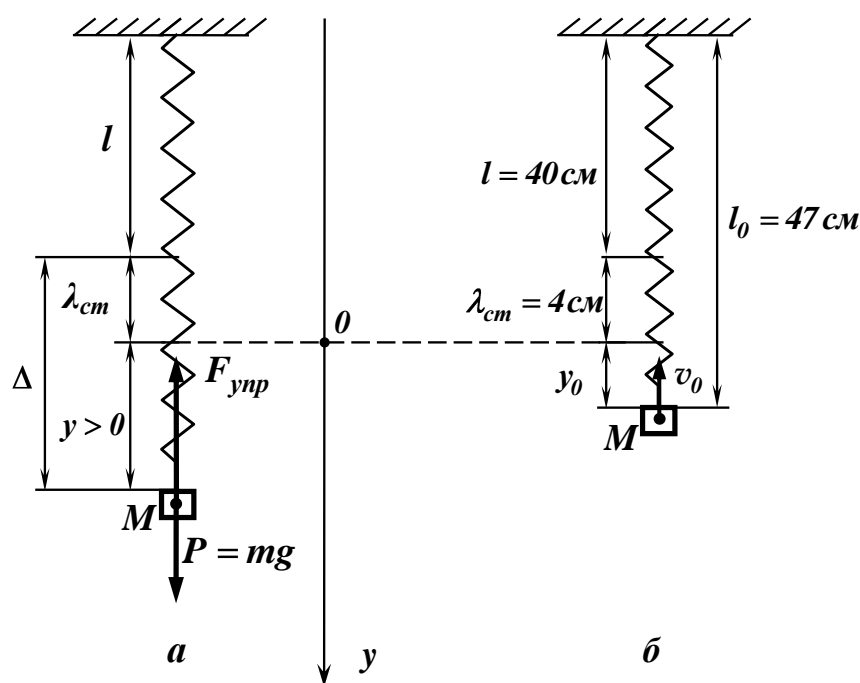


Рисунок 4

Для получения дифференциального уравнения движения груза M рассмотрим груз как материальную точку. Проведем ось y вертикально вниз из положения ста-

тического равновесия и изобразим груз M в некотором промежуточном положении так, чтобы он имел положительную координату $y > 0$ (рисунок 4а). Покажем силы, действующие на груз M при движении: силу тяжести \bar{P} и силу упругости пружины $\bar{F}_{упр}$. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось y :

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky},$$

$$m\ddot{y} = mg - F_{упр}. \quad (23)$$

Сила упругости пружины в рассматриваемом положении (рисунок 4а):

$$F_{упр} = c\Delta = c \lambda_{cm} + y.$$

Подставив записанное выражение для силы упругости $F_{упр}$ в правую часть уравнения (23) и проведя преобразования с учетом формулы (2), получим дифференциальное уравнение движения груза M :

$$m\ddot{y} = mg - c \lambda_{cm} + y,$$

$$m\ddot{y} = \cancel{mg} - \cancel{c\lambda_{cm}} - cy,$$

$$m\ddot{y} = -cy,$$

$$m\ddot{y} + cy = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0,$$

$$\ddot{y} + k^2 y = 0, \quad (24)$$

где введено обозначение

$$k^2 = \frac{c}{m}. \quad (25)$$

Из выражения (2) получаем значение коэффициента жесткости пружины:

$$c = \frac{mg}{\lambda_{cm}} = \frac{1,5 \cdot 9,81}{0,04} = 367,875 \text{ Н/м}$$

и значение частоты собственных колебаний груза (коэффициента k):

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{367,875}{1,5}} = 15,66 \text{ с}^{-1}. \quad (26)$$

Заметим, что значение частоты собственных колебаний можно получить непосредственно из формулы (19):

$$k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,04}} = \sqrt{245,25} = 15,66 \text{ с}^{-1}.$$

Корни характеристического уравнения – мнимые:

$$z^2 + k^2 = 0,$$

$$z_{1,2} = \pm ik.$$

В этом случае общее решение дифференциального уравнения (24) записывается в виде (9):

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (27)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями движения.

Запишем начальные условия движения (рисунок 4б):

$$\text{при } t_0 = 0 \quad \begin{cases} y_0 = l_0 - l + \lambda_{cm} = 47 - 40 + 4 = 3 \text{ см} = 0,03 \text{ м}; \\ \dot{y}_0 = v_{0y} = -v_0 = -2 \text{ м/с}. \end{cases} \quad (28)$$

Подставляя начальные условия (28) в общее решение (27), найдем значение постоянной интегрирования C_1 :

$$y_0|_{t_0=0} = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1; \Rightarrow C_1 = y_0 = 0,03 \text{ м}.$$

Продифференцировав общее решение (27) и подставив в него начальные условия (28), найдем значение второй постоянной интегрирования C_2 :

$$\dot{y} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt,$$

$$\dot{y}_0|_{t_0=0} = -C_1 k \sin 0 + C_2 k \cos 0 = C_2 k = -v_0,$$

$$C_2 = -\frac{v_0}{k} = -\frac{2}{15,66} = -0,128 \text{ м}.$$

С учетом найденных значений постоянных общее решение (27) примет вид:

$$y = 0,03 \cos 15,66t - 0,128 \sin 15,66t, \text{ м}. \quad (29)$$

Запишем полученный закон движения груза в амплитудной форме (15):

$$y = a \cdot \sin kt + \beta .$$

Для этого вычислим значения начальной фазы β , коэффициента a и амплитуды A по формулам (16) - (17):

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{ky_0}{\dot{y}_0} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{15,66 \cdot 0,03}{-2} \right) = -0,231 \text{ рад.}$$

$$a = \frac{C_1}{\sin \beta} = -\frac{0,03}{\sin 0,231} = -0,131 \text{ м,}$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{0,03^2 + -0,128^2} = 0,131 \text{ м.}$$

После подстановки найденных значений закон движения груза M при заданных начальных условиях примет вид:

$$y = -0,131 \sin 15,66t - 0,231 ; \text{ м.} \quad (30)$$

Полученный закон движения (30) показывает, что груз M совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 0,131$ м и частотой $k = 15,66 \text{ с}^{-1}$ относительно положения статического равновесия.

Период колебаний груза вычислим по формуле (19):

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{15,66} = 0,4 \text{ с.} \quad (31)$$

Воспользовавшись возможностями Mathcad, построим графики полученных

аналитических решений (29) и (30). Результаты вычисления основных характеристик свободных колебаний и построения графиков показаны на рисунках 5 - 7.

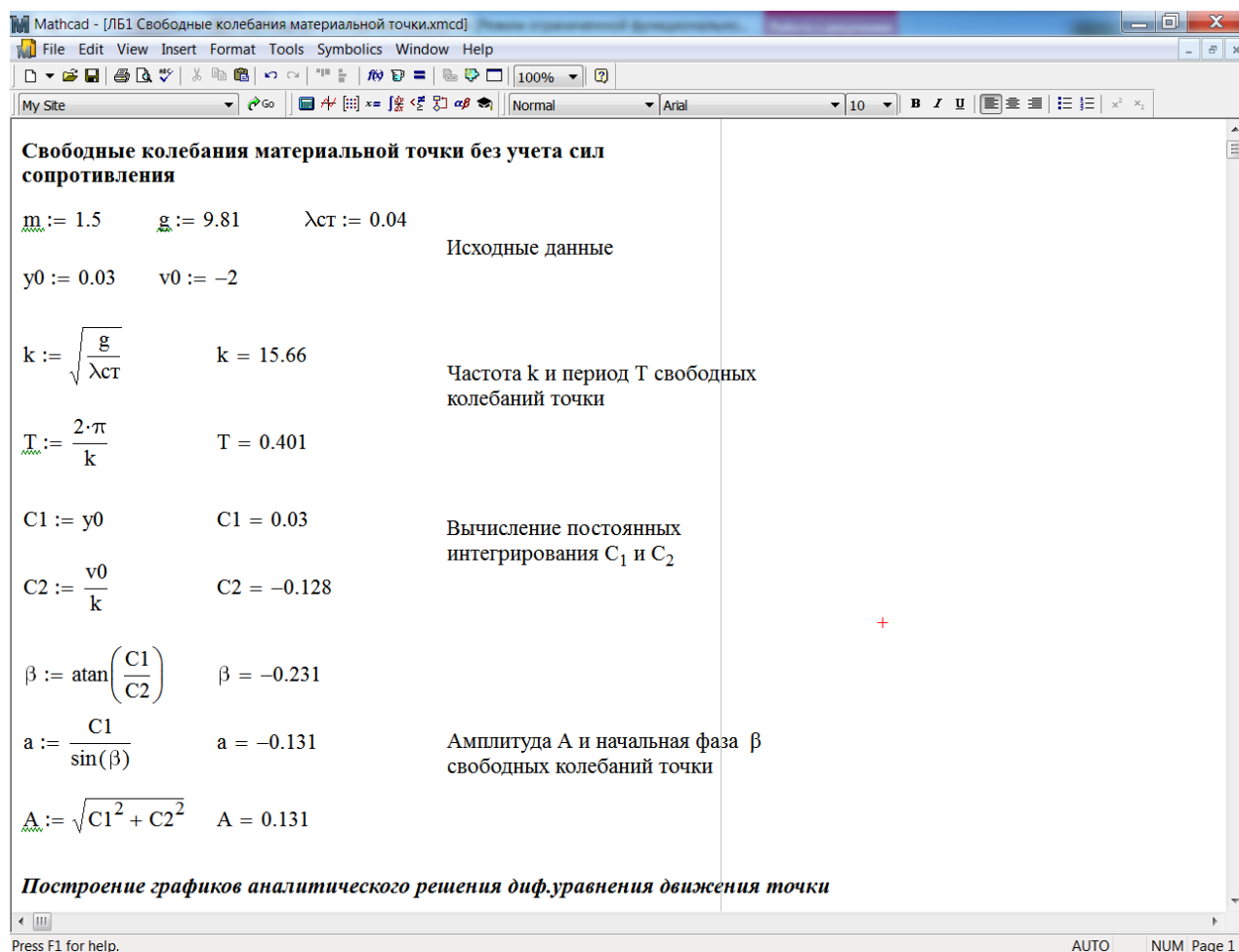


Рисунок 5 – Вычисление основных характеристик движения

Для построения плоских графиков в декартовой системе координат в MathCad используется команда «*X-Y Plot*», которая выводит шаблон построения двумерной графики. Вывод шаблона производится либо непосредственно из строки меню «*Insert* → *Graph* → *X-Y Plot*» (рисунок 6), либо с помощью клавиатуры нажатием клавиши «@». Для автоматического построения графика достаточно ввести обозначение функции и ее аргумента в шаблоны данных (небольшие темные прямоугольники), расположенные около осей абсцисс и ординат будущего графика. Двойной щелчок левой кнопки мыши в области уже построенного графика выводит окно форматирования, позволяющее редактировать внешний вид построенного графика.

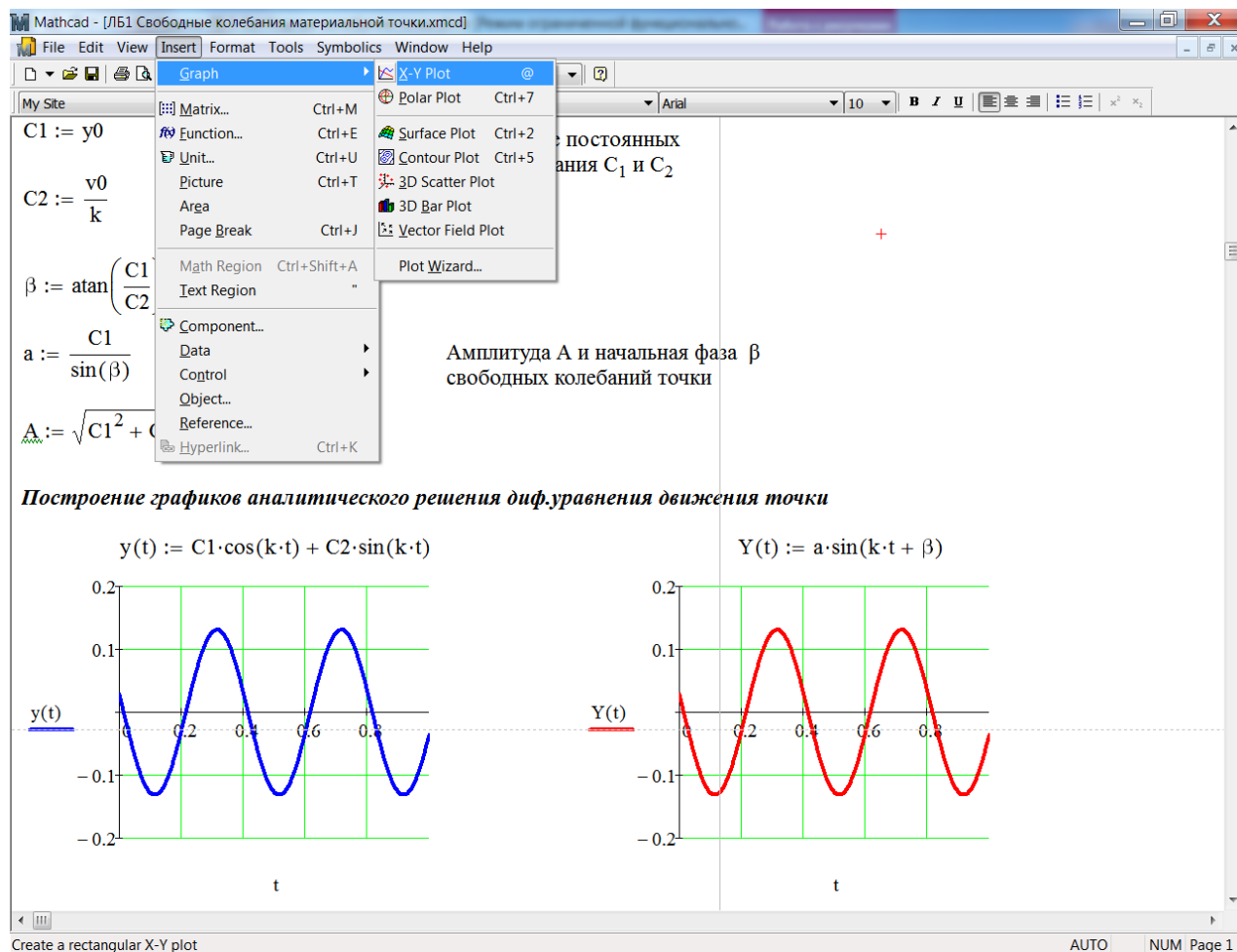


Рисунок 6 – Графическое представление результатов аналитического решения

Команды форматирования также доступны из контекстного меню «*Format...*», которое появляется при щелчке правой кнопки мыши в области графика. Более подробные сведения о построении двумерных графиков и их форматировании содержатся в различных справочниках и руководствах по применению системы Mathcad, например [4, 5].

Показанные на рисунке 6 графики позволяют наглядно продемонстрировать, что движение точки представляет собой гармонические колебания, а совпадение двух построенных графиков подтверждает правильность произведенных ранее преобразований при переходе к амплитудной форме записи закона движения точки.

Проверим с помощью построенных графиков найденные ранее значения амплитуды и периода свободных колебаний. Для этого воспользуемся возможностью трассировки графиков (рисунок 7), предварительно выделив требуемый график

щелчком левой кнопки мыши. Окно трассировки графиков выводится либо непосредственно из строки меню «Format → Graph → Trace», либо из контекстного меню «Trace...» после щелчка правой кнопкой мыши в области графика.

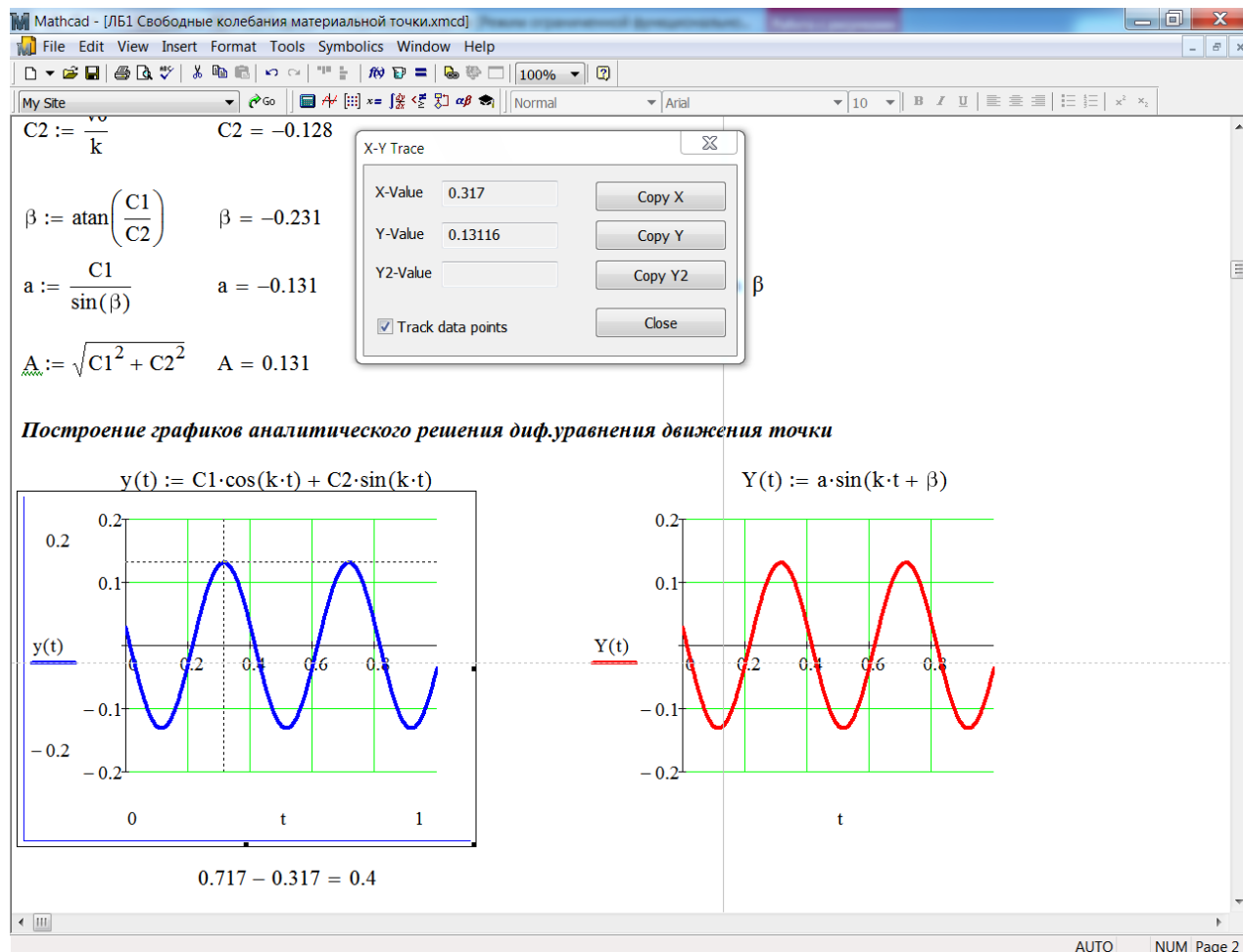


Рисунок 7

Появившиеся на графике после вызова команды «X-Y Trace» две перекрещивающиеся черные пунктирные линии перемещаются с помощью мыши. При этом в окне трассировки появляются координаты ближайшей точки графика. Измерив на графике ординату максимального отклонения графика от оси абсцисс, получаем значение амплитуды колебаний $A = 0,131$ м. Величину периода колебаний найдем, отметив на графике две соседние точки максимального отклонения в одну и ту же сторону. Скопировав значения ординат этих точек с помощью кнопки «Copy X» и вставив затем значения в документ, определим значение периода колебаний

$T = 0,4$ с. Вычисление периода колебаний показано на рисунке 7 ниже левого графика. Найденное значение совпадает со значением периода T , полученным ранее по формуле (31).

2 Численное решение

Решим теперь полученное дифференциальное уравнение движения точки (24) с помощью вычислительного блока *Given* и встроенной в MathCad функции интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений *Odesolve*, реализующей численный метод Рунге – Кутта.

Содержание вычислительного блока для численного решения дифференциального уравнения показано на рисунке 8.

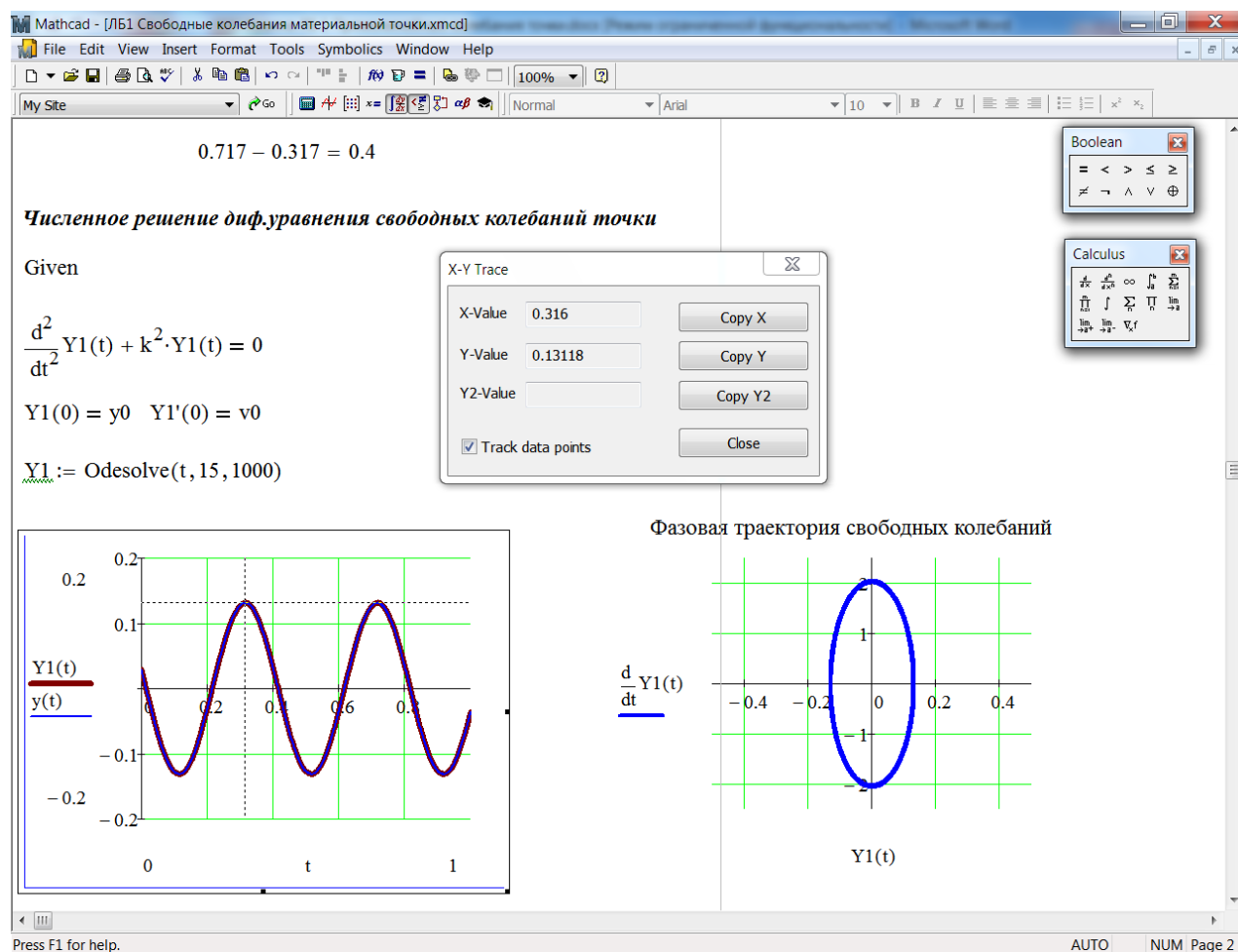


Рисунок 8 – Результаты численного решения

Для вставки шаблона производной функции можно воспользоваться панелью математических операторов «*Calculus*» (вычисление), выводимой на экран с помощью меню «*View*→*Toolbars* → *Calculus*». После вставки в текст документа шаблона производной надо ввести имена функции, переменной дифференцирования и порядок производной в маркеры данных в виде небольших черных прямоугольников. Обратим внимание, что символ производной (в виде штриха) при задании начальных условий вводится непосредственно с клавиатуры (клавиша « $\ddot{}$ »). Жирный знак равенства при задании начальных условий вводится комбинацией клавиш «*Ctrl*» + « $=$ » или с панели логических (булевых) операторов «*View*→*Toolbars* → *Boolean*».

Аргументами встроенной функции $Odesolve(t, t_k, step)$ являются имя переменной интегрирования t , значение правой границы интервала интегрирования $[t_0, t_k]$, количество шагов интегрирования на данном интервале «*step*». Параметр «*step*» не является обязательным и может быть опущен.

Построив на одном рисунке два графика движения точки, полученных аналитическим и численным способом, убеждаемся в том, что результаты расчетов совпадают: на рисунке 8 оба графика накладываются друг на друга и видна практически одна линия. Заметим, что при построении нескольких графиков на одном рисунке, имена функций вводятся в маркер оси ординат через запятую.

По результатам численного интегрирования дифференциального уравнения движения точки (24) построим также фазовую траекторию свободных колебаний материальной точки при заданных начальных условиях (рисунок 8).

Фазовая траектория при свободных колебаниях материальной точки без учета сил сопротивления представляет собой эллипс с центром в начале координат. Замкнутый характер траектории свидетельствует о том, что движение точки имеет периодический незатухающий характер. Центр эллипса находится в начале координат (точка O). Это говорит о том, что свободные колебания совершаются относительно положения статического равновесия, выбранного за начало отсчета (рисунок 4а).

С целью изучения влияния начальных условий на свободные колебания точки повторим процедуру численного решения дифференциального уравнения (24) при различных начальных условиях. Результаты решения представим графически (ри-

сунки 9 и 10).

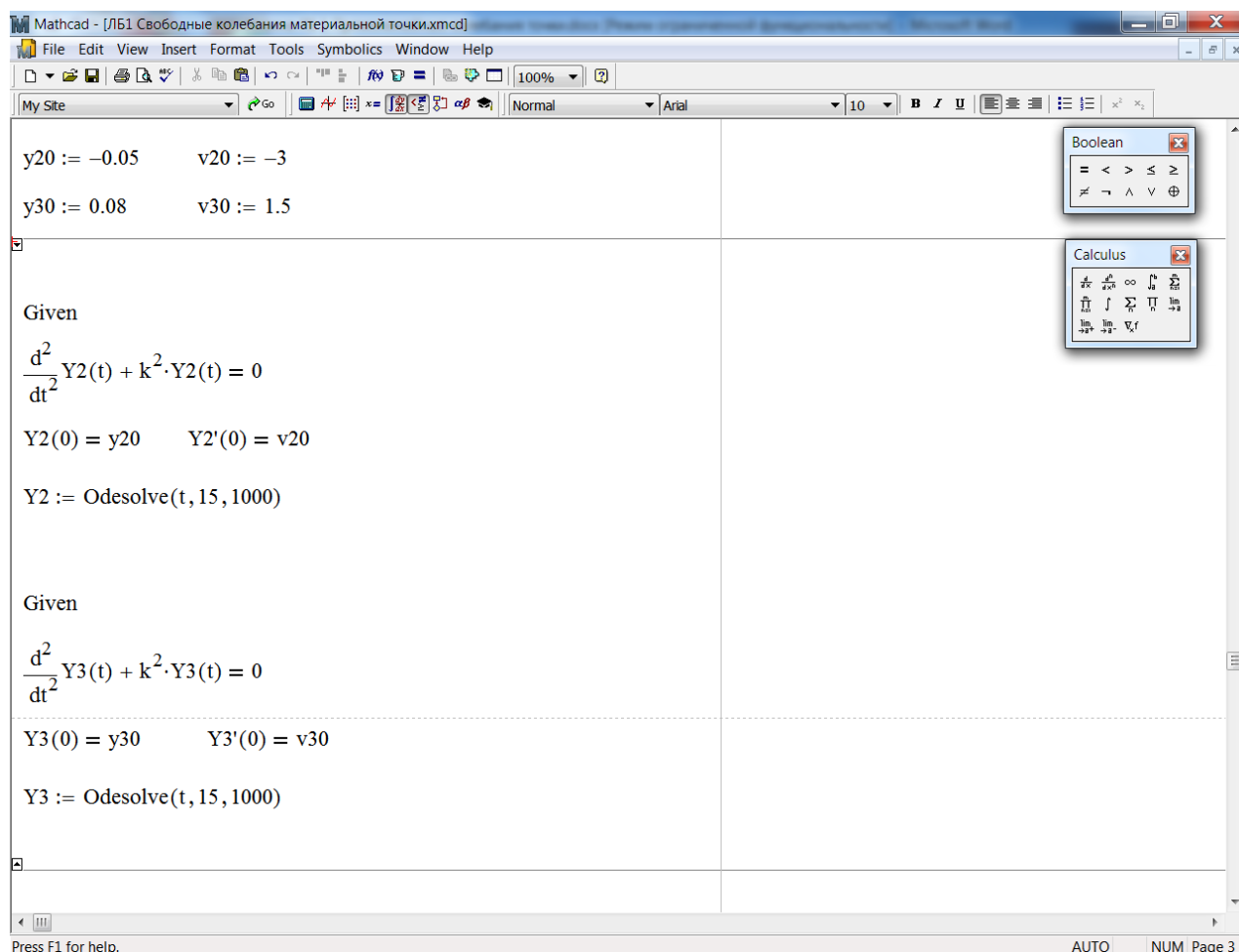


Рисунок 9 – Содержание скрытой области

Для удобства решение дифференциального уравнения (24) при различных начальных условиях (выбираются студентом самостоятельно) располагается в скрытой области (рисунок 9), которая добавляется в документ из строки меню «*Insert* → *Area*». Область закрывается и разворачивается двойным щелчком левой кнопки мыши по ограничивающим ее маркерам.

Построив на одном рисунке три графика движения при различных начальных условиях (рисунок 10), приходим к выводу, что изменение начальных условий вызывает изменение амплитуды и начальной фазы колебаний (графики вытягиваются вдоль оси ординат и сдвигаются относительно друг друга вдоль оси абсцисс). С помощью описанной ранее процедуры трассировки графиков вычислим период коле-

баний. Результаты вычислений показаны на рисунке 10 справа от построенных графиков. Для всех трех случаев получаем одно и то же значение периода колебаний.

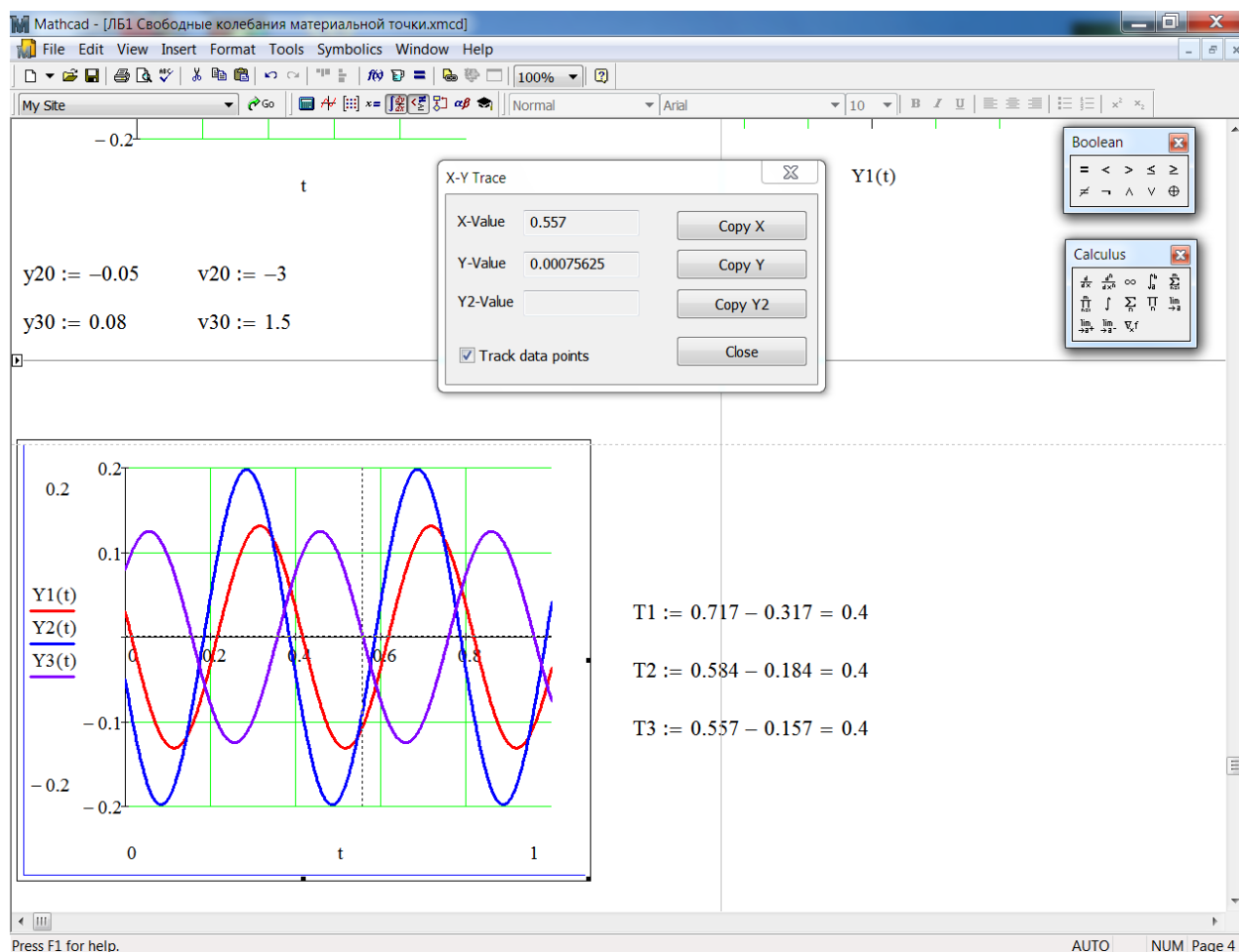


Рисунок 10 – Результаты численного решения при различных начальных условиях

Следовательно, изменение начальных условий не влияет на величину периода, а значит и угловой частоты свободных колебаний точки, что подтверждает свойство изохронности свободных колебаний при отсутствии сил сопротивления движению.

3 Выводы

Проведенное исследование позволило проверить и подтвердить основные свойства свободных колебаний материальной точки при отсутствии сил сопротивления движению:

1 Движение материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы имеет периодический незатухающий характер и представляет собой гармонические колебания.

2 Частота и период свободных колебаний не зависят от начальных условий движения точки (свойство изохронности свободных колебаний).

3 Амплитуда и начальная фаза свободных колебаний зависят от начальных условий движения.

2.3 Общие рекомендации по оформлению отчета по лабораторной работе

Отчет по лабораторной работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями СТО 02069024.101 – 2015 «Работы студенческие. Общие требования и правила оформления».

Отчет обязательно должен содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- аналитическую часть;
- практическую часть (файл MathCad);
- анализ полученных результатов и сделанные по результатам исследования

выводы.

Аналитическая часть отчета должна включать:

- исходные данные задания;
- цель и задачи исследования;
- чертеж с указанием действующих сил, размеров, выбранной оси координат, начала отсчета (пример чертежа показан на рисунке 4);
- подробное аналитическое решение составленного дифференциального уравнения свободных колебаний точки с необходимыми краткими пояснениями;
- анализ полученных в практической части результатов и выводы, сделанные по результатам исследования.

Практическая часть отчета представляется в виде документа (файла) MathCad

с расширением *xmcd*.

Документ MathCad должен содержать:

– вычисление основных характеристик свободных колебаний (угловой частоты, периода, амплитуды и начальной фазы колебаний);

– численное решение составленного дифференциального уравнения движения при заданных начальных условиях движения и двух вариантах начальных условий движения, выбранных студентом самостоятельно;

– построение графиков аналитического и численного решений составленного дифференциального уравнения движения точки;

– построение фазовой траектории свободных колебаний точки.

Примерное содержание документа MathCad показано на рисунках 5 - 10. Все формулы и графики документа MathCad должны быть активными (результаты вычислений должны изменяться автоматически при изменении исходных данных).

Документ MathCad с расширением *xmcd* является **обязательным** приложением к отчету.

3 Литература, рекомендуемая для изучения темы

1 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учебное пособие / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с. – ISBN 978-5-8114-0052-2.

2 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т. Т.2. Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – СПб.: Лань, 2013. – 640 с. – ISBN 978-5-8114-1021-7.

3 Курс теоретической механики: учебник для вузов / под ред. К. С. Колесникова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с. – ISBN 5-7038-1371-9.

4 Бертяев, В.Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум : учебное пособие / В.Д. Бертяев. – СПб.: БХВ, 2005. – 752 с. – ISBN 5-94157-625-0.

5 Макаров, Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15 / Е. Г. Макаров. – СПб. : Питер, 2011. – 400 с. – ISBN 978-5-459-00357-4.