Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно – издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Оренбург
2018

УДК 517.31(076.5)
ББК 22.161.1я7
С 17

Рецензент – Носов В.В., доцент, к.ф.-м.н.

Смирнова, Е.Н.
С 17 Гиперболические уравнения с частными производными. Метод. указания / Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 26 с.

Методические указания посвящены основным понятиям по теме «Гиперболические уравнения с частными производными». В них разобраны задачи, приводящие к решению уравнений с частными производными гиперболического типа и методы их решения, задания для самостоятельного решения, а также решение задач и список использованных источников.

Методические указания предназначены для бакалавров очной формы обучения по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

УДК 517.31(076.5)
ББК 22.161.1я7

Содержание

Введение

Методические указания предназначены бакалаврам очной формы обучения по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, для изучения раздела «Гиперболические уравнения с частными производными» по дисциплине «Б.1.В.ОД.8 Уравнения с частными производными» в 5 семестре. Они содержат теоретический материал, необходимый для изучения уравнений с частными производными гиперболического типа: приводятся подробные решения смешанных задач для однородного волнового уравнения с различными краевыми условиями, а также задачи Коши для бесконечной струны; вопросы для самопроверки и контрольные задания (десять вариантов) с примерами решения задач.

Данные методические указания помогут студентам в преодолении трудностей, возникающих при изучении дисциплины «Уравнения с частными производными».

Следует отметить, что методические указания могут быть использованы студентами и других направлений всех форм обучения.

1 Гиперболические уравнения с частными производными

Рассмотрим волновое уравнение: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и т. д.

Определим, к какому типу относится это уравнение.

Составим соответствующую квадратичную форму $Q(\lambda_1,\lambda_2) = -a^2\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

После замены $\xi_1 = a\lambda_1$, $\xi_2 = \lambda_2$ квадратичная форма Q примет вид $Q = -\xi_1^2 + \xi_2^2$.

Здесь один коэффициент положительный, а другой отрицательный. Следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве.

Таким образом, волновое уравнение является простейшим уравнением гиперболического типа.

В этом уравнении искомая функция u зависит от двух переменных. Рассматриваются также соответствующие уравнения и для функций с большим числом переменных [5].

2 Вывод уравнения колебаний струны. Формулировка краевой задачи

В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Напряжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длины l в начальный момент направлена по отрезку оси Ox от 0 до l. Предположим, что концы струны закреплены в точках $x=0$ и $x=l$. Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя струны, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения - говорят, что струна начнет колебаться. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси Оx и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x,t)$, которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент t (рисунок 1).

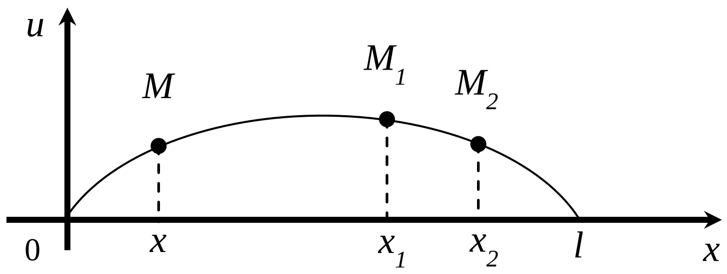

Рисунок 1.

Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости (x, u), то будем предполагать, что длина элемента струны $\cup M_1M_2$ равняется ее проекции на ось Ox, т.е. $\cup M_1M_2=x_2-x_1$.

Также будем предполагать, что натяжение во всех точках, струны одинаковое; обозначим его через T.

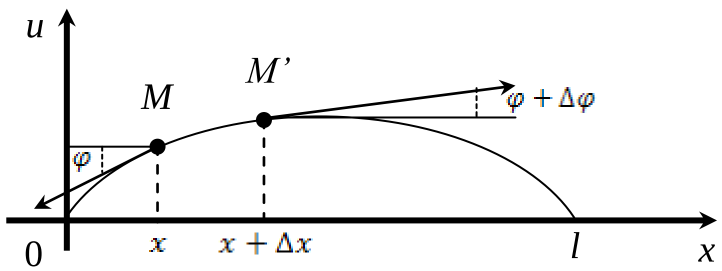

Рисунок 2.

Рассмотрим элемент струны MM' (рисунок 2). На концах этого элемента, по касательным к струне, действуют силы T. Пусть касательные образуют с осью Ox

углы φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Тогда проекция на ось *Ou* сил, действующих на элемент *MM'* будет равна $T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi$. Так как угол φ мал, то можно положить $tg\,\varphi\approx\sin\varphi$ и мы будем иметь:

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi\approx Ttg(\varphi+\Delta\varphi)-$$

$$Ttg\varphi==T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x\approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x\text{, где } 0<\theta<1.$$

Здесь мы применили теорему Лагранжа к выражению, стоящему в квадратных скобках.

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции. Пусть ρ - линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет $\rho\Delta x$. Ускорение элемента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Следовательно, будем иметь: $\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$. Сокращая на Δx и обозначая, $\frac{T}{\rho}=a^2$ получаем уравнение движения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Это и есть волновое уравнение - уравнение колебаний струны. Для полного определения движения струны одного уравнения (1) недостаточно. Искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять еще граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны $(x=0$ *и* $x=l)$, и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент $(t=0)$. Совокупность граничных и начальных условий называется *краевыми условиями*.

Пусть, например, как мы предполагали, концы струны при $x=0$ и $x=l$ неподвижны. Тогда при любом t должны выполняться равенства: $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$. Эти равенства являются *граничными условиями* для нашей задачи.

В начальный момент $t=0$ струна имеет определенную форму, которую мы ей придали.

Пусть эта форма определяется функцией *f(x)*. Таким образом, должно быть $u(x,0) = u\big|_{t=0} = f(x)$.

Далее, в начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией *φ(x).* Таким образом, должно быть $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \varphi(x)$.

Условия $u(x,0) = u\big|_{t=0} = f(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \varphi(x)$ являются *начальными условиями*.

Замечание. В частности, может быть *f(x)≡0* или *φ(x)≡0*. Если же *f(x)≡0* и *φ (x)≡0*, то струна будет находиться в покое, следовательно, *u(x,t)≡0* [5].

3 Вывод уравнений электрических колебаний в проводах

К уравнению (1) приводит и задача об электрических колебаниях в проводах. Покажем это. Электрический ток в проводе характеризуется величиной *i(x, t)* и напряжением *v(x, t),* которые зависят от координаты *x* точки провода и от времени *t*. Рассматривая элемент провода Δ*x*, можем написать, что падение напряжения на элементе Δ*x* равно: $v(x,t)-v(x+\Delta x,t) \approx -\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$.

Это падение напряжения складывается из омического, равного $iR\Delta x$ и индуктивного, равного $\frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$. Итак, $-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$, где *R* и *L* – сопротивление и коэффициент индуктивности, рассчитанные на единицу длины провода, $\frac{\partial i}{\partial t}$ – плотность тока. Знак минус взят потому, что ток течет в направлении, обратном возрастанию *v*. Сокращая на Δ*x*, получаем уравнение $\frac{\partial v}{\partial x} + iR + \frac{\partial i}{\partial t}L = 0$.

Далее, разность токов, выходящего из элемента Δ *x* и входящего в него за время Δ*t*, будет $[i(x,t)-i(x+\Delta x,t]\,\Delta t \approx -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\Delta t$.

Она расходуется на зарядку элемента, равную $C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$ (C=$\frac{\partial v}{\partial x}$=$const$ – емкость конденсатора), и на утечку через боковую поверхность провода вследствие несовершенства изоляции, равную $Av\Delta x\Delta t$ (здесь A – коэффициент утечки). Приравнивая эти выражения и сокращая на $\Delta x\Delta t$, получим уравнение $\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0$.

Уравнения $\frac{\partial v}{\partial x}$+$iR$+$\frac{\partial i}{\partial t}L$=0 и $\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0$ принято называть *телеграфными уравнениями*. Из системы этих уравнений можно получить уравнение, содержащее только искомую функцию $i(x,t)$, и уравнение, содержащее только искомую функцию $v(x,t)$. Продифференцируем члены уравнения $\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0$ по x; члены уравнения $\frac{\partial v}{\partial x}$+$iR$+$\frac{\partial i}{\partial t}L$=0 продифференцируем по t и умножим их на C. Производя вычитание, получим: $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A\frac{\partial v}{\partial x}-CR\frac{\partial i}{\partial t}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0$.

Подставляя в последнее уравнение выражение $\frac{\partial v}{\partial x}$ из первого уравнения, получим:

$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A(-iR-L\frac{\partial i}{\partial t})-CR\frac{\partial i}{\partial t}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0$ или $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial i}{\partial t}+ARi$.

Аналогичным образом получается уравнение для определения $v(x,t)$: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial v}{\partial t}+ARv$.

Если можно пренебречь утечкой через изоляцию (A=0) и сопротивлением ($R=0$), то приходим к волновым уравнениям: $a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$ и $a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, где обозначено: $a^2=\frac{1}{CL}$.

Исходя из физических условий, формулируются граничные и начальные условия задачи [5].

4 Решение уравнения колебаний струны методом разделения переменных (методом Фурье)

Метод разделения переменных (или метод Фурье), который мы сейчас рассмотрим, является типичным для решения многих задача математической физики. Пусть требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям: $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$ (граничные условия) и $u(x,0)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi(x)$ (начальные условия).

Будем искать (не равное тождественно нулю) частное решение уравнения (1), удовлетворяющее данным граничным условиям, в виде произведения двух функции $X(x)$ и $T(t)$, из которых первая зависит только от x, а вторая только от t: $u(x, t)=X(x)T(t)$.

Подставляя в уравнение (1), получаем: $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$ и, разделив члены равенства на a^2Xt:

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}. \tag{2}$$

В левой части этого равенства стоит функция, которая не зависит от x, справа – функция, не зависящая от t. Равенство (2) возможно только в том случае, когда левая и правая части не зависят ни от x, ни от t, т. е. равны постоянному числу. Обозначим его через $-\lambda$, где $\lambda>0$ (позднее будет рассмотрен и случаи $\lambda<0$). Итак, $\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$.

Из этих равенств получаем два уравнения: $X''+\lambda x=0$ и $T''+a^2\lambda T=0$. Общие решения этих уравнений будут $X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$ и $T(t)=C\cos a\sqrt{\lambda}t+D\sin a\sqrt{\lambda}t$, где A, B, C, D — произвольные постоянные.

Подставляя выражения $X(x)$ и $T(t)$ в равенство $u(x, t)=X(x)T(t)$, получим: $u(x,t)=(A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x)(C\cos a\sqrt{\lambda}t+D\sin a\sqrt{\lambda}t)$.

Подберем теперь постоянные A и B так, чтобы удовлетворялись граничные условия. Так как $T(t)\neq 0$ (в противном случае будет $u(x,t)=0$, что противоречит поставленному условию), то функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям граничным условиям, т. е. должно быть $X(0)=0,\ X(l)=0$. Подставляя значения $x=0$ и $x=l$ в равенство $X(x)$, на основании граничных условий получаем: $0=A\cdot l+B\cdot 0$ и $0=A\cos\sqrt{\lambda}l+B\sin\sqrt{\lambda}l$.

Из первого уравнения находим $A=0$. Из второго следует: $B\sin\sqrt{\lambda}l=0$.

$B\neq 0$, так как в противном случае было бы $X=0$ и $u=0$, что противоречит условию. Следовательно, должно быть $\sin\sqrt{\lambda}l=0$, откуда $\sqrt{\lambda}=\dfrac{n\pi}{l}$, n=1,2,…. (мы не берем значение n=0, так как в этом случае было бы $X=0$ и $u=0$).

Итак, мы получили:

$$X=B\sin\frac{\pi n}{l}. \tag{3}$$

Найденные значения X называются *собственными значениями* для данной краевой задачи. Соответствующие им функции $X(x)$ называются *собственными функциями*.

Замечание. Если бы мы взяли вместо $-\lambda$ выражение $\lambda=k^2$, то общее решение уравнения $X''-k^2X=0$ имело бы вид: $X=Ae^{kx}+Be^{-kx}$. Отличное от нуля решение в такой форме не может удовлетворять граничным условиям.

Зная $\sqrt{\lambda}$, мы, пользуясь равенством $T(t)=C\cos a\sqrt{\lambda}t+D\sin a\sqrt{\lambda}t$, можем написать:

$$T(t)=C\cos\frac{a\pi n}{l}t+D\sin\frac{a\pi n}{l}t,\ (n=1,2,\ ...).. \tag{4}$$

Для каждого значения n, следовательно, для каждого λ, выражения (3) и (4) подставляем в равенство $u(x, t)=X(x)T(t)$ и получаем решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям. Это решение обозначим $u_n(x,t)$: $u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{l}x(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t)$.

Для каждого значения и мы можем брать свои постоянные C и D и потому пишем C_n и D_n (постоянная B включена в C_n и D_n). Так как уравнение (1) линейное и однородное, то сумма решений также является решением, и потому функция, представленная рядом $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ или

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t) \qquad (5)$$

также будет решением дифференциального уравнения (1), которое будет удовлетворять граничным условиям. Очевидно, ряд (5) будет решением уравнения (1) только в том случае, если коэффициенты C_n и D_n таковы, что этот ряд сходится и сходятся ряды, получающиеся после двукратного почленного дифференцирования по x и по t.

Решение (5) должно еще удовлетворять начальным условиям. Этого мы будем добиваться путем подбора постоянных C_n и D_n. Подставляя в равенство (5) $t=0$, получим:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (6)$$

Если функция $f(x)$ такова, что в интервале $(0,l)$ ее можно разложить в ряд Фурье, то условие (6) будет выполняться, если положить:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \qquad (7)$$

Далее, дифференцируем члены равенства (5) по t и подставляем $t=0$. Из условия $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$ получается равенство $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$.

Определяем коэффициенты Фурье этого ряда: $D_n\frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$ или

$$D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \qquad (8)$$

Итак, мы доказали, что ряд (6), где коэффициенты C_n и D_n определены по формулам (7) и (8), если он допускает двукратное почленное дифференцирование, представляет функцию $u(x,t)$, которая является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным и начальным условиям.

Замечание. Решая рассмотренную задачу для волнового уравнения другим методом, можно доказать, что ряд (5) представляет решение и в том случае, когда он не допускает почленного дифференцирования. При этом функция $f(x)$ должна быть дважды дифференцируемой, $\varphi(x)$ - один раз дифференцируемой [4].

5 Колебание бесконечной струны

Как себе можно представить ограниченную струну со свободными концами? Это значит, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ на концах струны равны нулю. Это имеет место, например, при закреплении концов струны на колечках (с пренебрежимо малой массой), скользящих без трения по параллельным стерженькам.

Рассмотрим задачу Коши для бесконечной струны, т.е. найдем решение волнового уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0)=\psi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \varphi(x)$, $-\infty<x<\infty$, $0<t<\infty$.

С помощью замены $\xi=x+at$, $\eta=x-at$ уравнение (1) приведем к каноническому виду: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Тогда решение этого уравнения имеет вид: $u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$, где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ произвольные дифференцируемые функции. Возвращаясь к старым переменным, приходим к общему решению уравнения (10):

$$u(x,t)=f(x+at)+g(x-at). \qquad (9)$$

Эта формула называется *интегралом Даламбера.*

Найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям. Для этого воспользуемся условием $u(x,0)=\psi(x)$. Положив в формуле (9) $t=0$, получим $f(x)+g(x)=\psi(x)$.

Дифференцируя формулу (9) по t и полагая затем t=0, пользуясь вторым начальным условием, получаем: $af'(x)-ag'(x)=\varphi(x)$ или $f'(x)-g'(x)=\frac{1}{a}\varphi(x)$.

Получили систему двух уравнений, относительно неизвестных функций: $f(x)$ и $g(x)$:

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=\psi(x) \\ f'(x)-g'(x)=\dfrac{1}{a}\varphi(x). \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение системы по x и прибавим ко второму уравнению, выражая $f'(x)$ и $g'(x)$, получим:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\psi'(x)+\frac{1}{2a}\varphi(x) \text{ и } g'(x)=\frac{1}{2}\psi'(x)-\frac{1}{2a}\varphi(x).$$

Интегрируя, по x находим функции $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{2}\psi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi(x)dx+C_1,$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\psi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi(x)dx+C_2.$$

Теперь формула (9) дает искомое решение:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\psi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi(x)dx+C_1+\frac{1}{2}\psi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi(x)dx+C_2=$$

$$=\frac{1}{2}\psi(x+at)+\frac{1}{2}\psi(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(x)dx+C_1+C_2.$$

Из условия $u(x,0)=\psi(x)$, следует $\psi(x)+C_1+C_2=\psi(x)$. Поэтому $C_1+C_2=0$.

Записываем ответ:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\psi(x+at)+\frac{1}{2}\psi(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(x)dx. \tag{10}$$

Формула (10) называется *формулой Даламбера* [5].

Вопросы для самопроверки

1. Записать волновое уравнение.
2. Изучение каких процессов приводит к исследованию волнового уравнения?
3. К какому типу относится волновое уравнение?
4. Вывести уравнение колебаний струны.
5. Сформулировать краевую задачу.
6. Какие условия называются граничными?
7. Какие условия называются начальными?
8. Вывести уравнение электрических колебаний в проводах.
9. Решить уравнение колебаний струны методом разделения переменных.
10. Сформулировать и решить задачу Коши для бесконечной струны.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить смешанную задачу.

1) $u_{tt} = 64u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 8\pi \sin \pi x;\ u(0,t) = u(6,t) = 0;$

2) $u_{tt} = 49u_{xx};\ u(x,0) = 3\sin 2\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(4,t) = 0;$

3) $u_{tt} = 36u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 12\pi \sin 2\pi x;\ u(0,t) = u(5,t) = 0;$

4) $u_{tt} = 25u_{xx};\ u(x,0) = 5\sin 3\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(3,t) = 0;$

5) $u_{tt} = 16u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 12\pi \sin 3\pi x;\ u(0,t) = u(4,t) = 0;$

6) $u_{tt} = 9u_{xx};\ u(x,0) = 7\sin 4\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(2,t) = 0;$

7) $u_{tt} = 4u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 8\pi \sin 4\pi x;\ u(0,t) = u(3,t) = 0;$

8) $u_{tt} = u_{xx};\ u(x,0) = 9\sin 5\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(1,t) = 0;$

9) $u_{tt} = u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 5\pi \sin 5\pi x;\ u(0,t) = u(3,t) = 0;$

10) $u_{tt} = 9u_{xx};\ u(x,0) = 21\sin 6\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(3,t) = 0.$

2. Решить смешанную задачу.

1) $u_{tt} = 64u_{xx};\ u(0,t) = u(6,t) = 0;\ u(x,0) = 2\sin \pi x;\ u_t(x.0) = 8\pi \sin \pi x;$

2) $u_{tt} = 49u_{xx}; u(0,t) = u(4,t) = 0; u(x,0) = 3\sin 2\pi x; u_t(x.0) = 21\pi \sin 3\pi x;$

3) $u_{tt} = 36u_{xx}; u(0,t) = u(5,t) = 0; u(x,0) = 4\sin 2\pi x; u_t(x.0) = 12\pi \sin 2\pi x;$

4) $u_{tt} = 25u_{xx}; u(0,t) = u(3,t) = 0; u(x,0) = 5\sin 3\pi x; u_t(x.0) = 20\pi \sin 4\pi x;$

5) $u_{tt} = 16u_{xx}; u(0,t) = u(4,t) = 0; u(x,0) = 6\sin 3\pi x; u_t(x.0) = 12\pi \sin 3\pi x;$

6) $u_{tt} = 9u_{xx}; u(0,t) = u(2,t) = 0; u(x,0) = 7\sin 4\pi x; u_t(x.0) = 15\pi \sin 5\pi x;$

7) $u_{tt} = 4u_{xx}; u(0,t) = u(3,t) = 0; u(x,0) = 8\sin 4\pi x; u_t(x.0) = 8\pi \sin 4\pi x;$

8) $u_{tt} = u_{xx}; u(0,t) = u(1,t) = 0; u(x,0) = 9\sin 5\pi x; u_t(x.0) = 6\pi \sin 6\pi x;$

9) $u_{tt} = u_{xx}; u(0,t) = u(3,t) = 0; u(x,0) = 10\sin 5\pi x; u_t(x.0) = 5\pi \sin 5\pi x;$

10) $u_{tt} = 64u_{xx}; u(0,t) = u(3,t) = 0; u(x,0) = \sin \pi x; u_t(x.0) = 18\pi \sin 2\pi x.$

3. Решить смешанную задачу.

1) $u_{tt} = 81u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0; u(x,0) = 2\cos \pi x; u_t(x.0) = 0;$

2) $u_{tt} = 36u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0; u(x,0) = 0; u_t(x.0) = 12\pi \cos 2\pi x;$

3) $u_{tt} = 49u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0; u(x,0) = 4\cos 2\pi x; u_t(x.0) = 0;$

4) $u_{tt} = 16u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0; u(x,0) = 0; u_t(x.0) = 12\pi \cos 3\pi x;$

5) $u_{tt} = 25u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0; u(x,0) = 6\cos 3\pi x; u_t(x.0) = 0;$

6) $u_{tt} = 4u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0; u(x,0) = 0; u_t(x.0) = 8\pi \cos 4\pi x;$

7) $u_{tt} = 9u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0; u(x,0) = 8\cos 4\pi x; u_t(x.0) = 0;$

8) $u_{tt} = u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0; u(x,0) = 0; u_t(x.0) = 5\pi \cos 5\pi x;$

9) $u_{tt} = u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0; u(x,0) = 10\cos 5\pi x; u_t(x.0) = 0;$

10) $u_{tt} = 121u_{xx}; u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0; u(x,0) = 0; u_t(x.0) = 8\pi \cos \pi x.$

4. Решить смешанную задачу.

1) $u_{tt} = u_{xx}; u(x,0) = \sin 9\pi x; u_t(x,0) = 0; u(0,t) = 0; u_x(1{,}5;t) = 0;$

2) $u_{tt} = 4u_{xx}; u(x,0) = 2\cos 7\pi x; u_t(x,0) = 0; u_x(0,t) = 0; u(0{,}5;t) = 0;$

3) $u_{tt} = 4u_{xx}; u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 18\pi \sin 9\pi x; u(0,t) = 0; u_x(1{,}5;t) = 0;$

4) $u_{tt} = 4u_{xx}; u(x,0) = 0; u_t(x,0) = 14\pi \cos 7\pi x; u_x(0,t) = 0; u(1{,}5;t) = 0;$

5) $u_{tt} = 9u_{xx}; u(x,0) = 5\sin 5\pi x; u_t(x,0) = 0; u(0,t) = 0; u_x(2{,}5;t) = 0;$

6) $u_{tt} = 9u_{xx};\ u(x,0) = 6\cos 3\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u_x(0,t) = 0;\ u(2{,}5;t) = 0;$

7) $u_{tt} = 9u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 15\pi\sin 5\pi x;\ u(0,t) = 0;\ u_x(3{,}5;t) = 0;$

8) $u_{tt} = 4u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 9\pi\cos 3\pi x;\ u_x(0,t) = 0;\ u(3{,}5;t) = 0;$

9) $u_{tt} = 16u_{xx};\ u(x,0) = 9\sin 9\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0;\ u_x(4{,}5;t) = 0;$

10) $u_{tt} = 36u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 42\pi\cos 7\pi x;\ u_x(0,t) = 0;\ u(4{,}5;t) = 0.$

5. Решить смешанную задачу.

1) $u_{tt} = 81u_{xx};\ 0 < x < 2,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-2),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 0;$

2) $u_{tt} = u_{xx};\ 0 < x < 3/2,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-3/2),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(3/2,t) = 0;$

3) $u_{tt} = 9u_{xx};\ 0 < x < 3,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-3),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(3,t) = 0;$

4) $u_{tt} = 4u_{xx};\ 0 < x < 2,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-2),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 0;$

5) $u_{tt} = 1/4u_{xx};\ 0 < x < 1/2,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-1/2),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(1/2,t) = 0;$

6) $u_{tt} = 4u_{xx};\ 0 < x < 1,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-1),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0;$

7) $u_{tt} = 4/9u_{xx};\ 0 < x < 2/3,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-2/3),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(2/3,t) = 0;$

8) $u_{tt} = 4u_{xx};\ 0 < x < 1/2,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-1/2),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(1/2,t) = 0;$

9) $u_{tt} = u_{xx};\ 0 < x < 2,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-2),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 0;$

10) $u_{tt} = u_{xx};\ 0 < x < 1/2,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x-1/2),$
$u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(1/2,t) = 0.$

6. Решить задачу Коши.

1) $u_{tt} = 4u_{xx};\ -\infty < x < +\infty,\ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x^2,\ u_t(x,0) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2};$

2) $u_{tt}=5u_{xx};-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty,\ u(x,0)=arctg(2x+3),\ u_t(x,0)=xe^x;$

3) $u_{tt}=9u_{xx};-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty,\ u(x,0)=e^{\frac{1}{x}},\ u_t(x,0)=\dfrac{x}{1+x^4};$

4) $u_{tt}=25u_{xx};-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty,\ u(x,0)=tg3x,\ u_t(x,0)=\dfrac{1}{x^2+9};$

5) $u_{tt}=4u_{xx};-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty,\ u(x,0)=\dfrac{1}{x+3},\ u_t(x,0)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}};$

6) $u_{tt}=u_{xx};-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty,\ u(x,0)=x^2+x,\ u_t(x,0)=\dfrac{arctgx}{1+x^2};$

7) $u_{tt}=6u_{xx};-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty,\ u(x,0)=e^{x^2},\ u_t(x,0)=xe^{3-x};$

8) $u_{tt}=5u_{xx};-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty,\ u(x,0)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ u_t(x,0)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$

9) $u_{tt}=4u_{xx};-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty,\ u(x,0)=e^{\frac{1}{x}},\ u_t(x,0)=x\cos x^2;$

10) $u_{tt}=5u_{xx};-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty,\ u(x,0)=e^{-x^2},\ u_t(x,0)=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Решение задач нулевого варианта

Задача 1. Найти решение смешанной задачи:

$u_{tt}=81u_{xx}$ $u(x,0)=\sin\pi x$; $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=u(5,t)=0$.

Решение

Решение смешанной задачи будем искать в виде

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$, где $C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$ являются коэффициентами разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,l]$

$\frac{an\pi}{l}D_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$ – коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,l]$.

В данном случае задан отрезок [0,5], $f(x)=\sin\pi x$, $\varphi(x)$=0.

Тогда $D_n = 0$, т.к. $\varphi(x)$=0. И решение принимает вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{an\pi}{l} t \cdot \sin\frac{n\pi}{l} x.$$

Получим:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l} x = u(x,0) = \sin\pi x = \sin\frac{\pi \cdot 5}{5} x.$Отсюда $C_5 = 1$, а все остальные коэффициенты равны 0.

Тогда решением данной задачи является функция:

$$u(x,t) = \cos\frac{9\pi \cdot 5}{5} x \cdot \sin\frac{9\pi \cdot 5}{5} x = \cos 9\pi t \cdot \sin\pi x.$$

Задача 2. Найти решение смешанной задачи:

$u_{tt} = 81 u_{xx}$ $u(x,0) = \sin\pi x$; $u_t(x,0) = 18\pi \sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(5,t) = 0$.

Решение

Решение смешанной задачи будем искать в виде

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos\frac{an\pi}{l} t + D_n \sin\frac{an\pi}{l} t) \sin\frac{n\pi}{l} x$, где $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l} x dx$ являются коэффициентами разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,l]$ $\frac{an\pi}{l} D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l} x dx$ – коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,l]$.

В данном случае задан отрезок [0,5], $f(x) = \sin\pi x$, $\varphi(x) = 18\pi \sin 2\pi x$.

Тогда $\varphi(x) = \frac{an\pi}{l} \sum D_n \sin\frac{n\pi}{l} x = u_t(x,0) = 18\pi \sin 2\pi x = \frac{9 \cdot \pi \cdot 10}{5} \sin\frac{10 \cdot \pi}{5} x$.

Значит, $D_{10} = 1$, а все остальные коэффициенты равны 0.

Получим:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l} x = u(x,0) = \sin\pi x = \sin\frac{\pi \cdot 5}{5} x.$ Отсюда $C_5 = 1$, а все остальные коэффициенты равны 0.

Тогда решением данной задачи является функция

$$u(x,t)=\cos\frac{9\cdot 5\pi}{5}t\cdot\sin\frac{5\pi}{5}x+\cos\frac{9\cdot 10\pi}{5}t\cdot\sin\frac{10\pi}{5}x \text{ или}$$

$$u(x,t)=\cos 9\pi t\cdot\sin\pi x+\cos 18\pi t\cdot\sin 2\pi x.$$

Задача 3. Найти решение смешанной задачи:

$u_{tt}=64u_{xx}$, $u_x(0,t)=u_x(6,t)=0$, $u_t(x,0)=8\pi\cos\pi x$, $u(x,0)=0$.

Решение

Решим задачу методом Фурье. Для этого решение будем искать в виде: $u(x,t)=X(x)T(t)$. Подставим в данное уравнение $u(x,t)$, получим

$X(x)T'(t)=64X''(x)T(t)$. Разделим переменные: $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T'(t)}{64T(t)}=-\lambda$, (λ>0).

Решение сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

1) $X''(x)+\lambda X(x)=0$;

2) $T'(t)+64\lambda T(t)=0$.

Решим первое уравнение: $X''(x)+\lambda X(x)=0$. В этом случае характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения $k^2+\lambda=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}\cdot i$. Отсюда общим решением уравнения $X''+\lambda X=0$ будет являться $X(x)=C\cos\sqrt{\lambda}\cdot x+D\sin\sqrt{\lambda}\cdot x$.

Найдем C, D и λ, используя граничные условия.

Так как $X'(0)=0$, то получим:

$X'(0)=-\sqrt{\lambda}C\sin\sqrt{\lambda}\cdot 0+\sqrt{\lambda}D\cos\sqrt{\lambda}\cdot 0\Rightarrow D=0$, $X(x)=C\cos\sqrt{\lambda}\cdot x$.

Так как $X'(6)=0$, то получим:

$X'(x)=-D\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\cdot x$, $X'(6)=-D\sqrt{\lambda}\cos 6\sqrt{\lambda}=0$.

Следовательно, $C=0$ или $\sin 6\sqrt{\lambda}=0$.

Очевидно, что равенство $C=0$ невозможно, так как в противном случае $X(x)\equiv 0$ и $u(x,t)\equiv 0$.

Таким образом, верно равенство $\sin 6\sqrt{\lambda}=0$. Отсюда $6\sqrt{\lambda}=\pi n$, $\sqrt{\lambda}=\frac{\pi n}{6}$, $n=1,2,...$. Тогда $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{6}\right)^2$ ($n=1,2,...$) и $X_n(x)=C_n\cos\frac{\pi n}{6}x$.

При решении смешанной задачи методом Фурье будет получено еще одно однородное дифференциальное уравнение:

$T'(t)+64\lambda T(t)=0$.

Его общее решение имеет вид: $T_n(t)=A\cos 8\sqrt{\lambda}t+B\sin 8\sqrt{\lambda}t$.

Т.к. $\sqrt{\lambda}=\frac{\pi n}{6}$, ($n=1,2,...$), то $T_n(t)=\tilde{A}_n\cos\frac{4\pi n}{3}t+\tilde{B}_n\sin\frac{4\pi n}{3}t$.

Решение исходной задачи будем искать в виде:

$u(x,t)=T_n(t)X_n(x)=C_n\cos\frac{\pi n}{6}x\,(\tilde{A}_n\cos\frac{4\pi n}{3}t+\tilde{B}_n\sin\frac{4\pi n}{3}t)$ или

$u(x,t)=\cos\frac{\pi n}{6}x\,(A_n\cos\frac{4\pi n}{3}t+B_n\sin\frac{4\pi n}{3}t)$, где $A_n=C_n\tilde{A}_n$ и $B_n=C_n\tilde{B}_n$.

Так как, сумма решений также является решением уравнения, поэтому решение уравнения имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum\cos\frac{\pi n}{6}x(A_n\cos\frac{4\pi n}{3}t+B_n\sin\frac{4\pi n}{3}t).$$

Используем начальное условие: $u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{\pi n}{6}x=0$, тогда $A_n=0$.

Дифференцируя равенство $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$ по переменной *t*, имеем

$$u_t(x,t)=\sum\cos\frac{\pi n}{6}x(-A_n\frac{4\pi n}{3}\sin\frac{4\pi n}{3}t+B_n\frac{4\pi n}{3}\cos\frac{4\pi n}{3}t).$$

Используя начальное условие: $u_t(x,0)=8\pi\cos\pi x$, имеем

$u_t(x,t)=\sum B_n\frac{4\pi n}{3}\cos\frac{\pi n}{6}x=8\pi\cos\pi x=\frac{4\cdot\pi\cdot 6}{3}\cos\frac{\pi\cdot 6x}{6}$, т.е. $B_6=1$, остальные коэффициенты равны 0.

Решение данной задачи имеет вид $u(x,t)=\cos\pi x\cdot\sin 8\pi t$.

Задача 4. Найти решение смешанной задачи:

$u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(0,t) = 0$, $\quad u_x(0{,}5;t) = 0$ $u_t(x,0) = 0$, $u(x,0) = \sin 9\pi x$.

Решение

Решим задачу методом Фурье. Для этого решение будем искать в виде: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставим в данное уравнение $u(x,t)$, получим $X(x)T'(t) = 4X''(x)T(t)$. Разделим переменные: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{4T(t)} = -\lambda$, (λ>0). Решение сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

1) $X''(x) + \lambda X(x) = 0$;

2) $T'(t) + 4\lambda T(t) = 0$.

Решим первое уравнение: $X''(x) + \lambda X(x) = 0$. В этом случае характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения $k^2 + \lambda = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \cdot i$. Отсюда общим решением уравнения $X'' + \lambda X = 0$ будет являться $X(x) = C\cos\sqrt{\lambda} \cdot x + D\sin\sqrt{\lambda} \cdot x$.

Найдем C, D и λ, используя граничные условия.

Так как $X(0) = 0$, то получим:

$X(0) = C\cos\sqrt{\lambda} \cdot 0 + D\sin\sqrt{\lambda} \cdot 0 \Rightarrow C = 0$, $X(x) = D\sin\sqrt{\lambda} \cdot x$.

Так как $X'(0{,}5) = 0$, то получим:

$X'(x) = D\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} \cdot x$, $X'(0{,}5) = D\sqrt{\lambda}\cos 0{,}5\sqrt{\lambda} = 0$.

Следовательно, $D = 0$ или $\cos 0{,}5\sqrt{\lambda} = 0$.

Очевидно, что равенство $D = 0$ невозможно, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$ и $u(x,t) \equiv 0$.

Таким образом, верно равенство $\cos 0{,}5\sqrt{\lambda} = 0$.

Отсюда $0{,}5\sqrt{\lambda} = \dfrac{\pi n}{2}$, $\sqrt{\lambda} = \pi n$, ($n = 1,2,...$). Тогда $\lambda_n = (\pi n)^2$ ($n = 1,2,...$) и $X_n(x) = D_n \sin \pi n x$.

При решении смешанной задачи методом Фурье будет получено еще одно однородное дифференциальное уравнение:

$T'(t) + 4\lambda T(t) = 0$.

Его общее решение имеет вид: $T_n(t) = A\cos 2\sqrt{\lambda}t + B\sin 2\sqrt{\lambda}t$.

Т.к. $\sqrt{\lambda} = \pi n$, ($n = 1,2,...$), то $T_n(t) = \tilde{A}_n \cos 2\pi nt + \tilde{B}_n \sin 2\pi nt$.

Решение исходной задачи будем искать в виде

$u(x,t) = T_n(t)X_n(x) = D_n \sin \pi nx\ (\tilde{A}_n \cos 2\pi nt + \tilde{B}_n \sin 2\pi nt)$ или

$u(x,t) = \sin \pi nx\ (A_n \cos 2\pi nt + B_n \sin 2\pi nt)$, где $A_n = D_n \tilde{A}_n$ и $B_n = D_n \tilde{B}_n$.

Так как, сумма решений также является решением уравнения, поэтому решение уравнения имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum \sin \pi nx(A_n \cos 2\pi nt + B_n \sin 2\pi nt).$$

Используем начальное условие: $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \pi nx = \sin 9\pi x$, тогда $A_9 = 1$, остальные коэффициенты равны 0.

Дифференцируя равенство $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$ по переменной t, имеем

$$u_t(x,t) = \sum \sin \pi nx(-2\pi n A_n \sin 2\pi nt + 2B_n \pi n \cos \pi nt).$$

Используя начальное условие: $u_t(x,0) = 0$, имеем $B_n = 0$.

Решение данной задачи имеет вид $u(x,t) = \sin 9\pi x \cdot \cos 18\pi t$.

Задача 5. Найти решение смешанной задачи:

$u_{tt} = 36u_{xx}$ $(t > 0,\ 0 < x < 4)$; $u(x,0) = x(x-4)$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$.

Решение

Решение смешанной задачи будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum C_n \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \cos \frac{a\pi n}{l} t,$$

где $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$ являются коэффициентами разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,l]$.

В данном случае получим:

$$C_n = \frac{2}{4}\int_0^4 x(x-4)\sin\frac{\pi n}{4}xdx = \frac{1}{2}\int_0^4 (x^2-4x)\sin\frac{\pi n}{4}xdx = \frac{32}{(\pi n)^2}(-1)^n - 1)$$

или $C_n = \begin{cases} 0, & \text{åñëè } n = 2k, \\ \dfrac{-64}{\pi^2(2k-1)^2}, & \text{åñëè } n = 2k-1. \end{cases}$

Решение данной задачи будет иметь вид:

$$u(x,t) = \frac{-64}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\sin\frac{\pi(2k-1)}{4}x\cdot\cos\frac{6\pi(2k-1)}{4}t.$$

Задача 6. Найти решение задачи Коши $u_{tt} = 9u_{xx}$ $(t > 0,\ -\infty < x < +\infty)$:

$$u(x,0) = 2x+1,\ u_t(x,0) = \frac{1}{3x+5}.$$

Решение

Решение уравнения будем искать в виде: $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$, где f и g – произвольные дважды дифференцируемые функции. В нашем случае a=3 и решение имеет вид: $u(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t)$.

Найдем конкретный вид функций f и g, чтобы выполнялись начальные условия: $u(x,0) = 2x+1$ и $u_t(x,0) = \dfrac{1}{3x+5}$.

Т.е. $u(x,0) = f(x) + g(x) = 2x+1$ и $u_t(x,0) = 3f'(x) - 3g'(x) = \dfrac{1}{3x+5}$.

Получаем систему уравнений относительно неизвестных функций $f(x)$ и $g(x)$ $\begin{cases} f(x) + g(x) = 2x+1, \\ 3f'(x) - 3g'(x) = \dfrac{1}{3x+5}. \end{cases}$

Продифференцируем первое уравнение:

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 2, \\ f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{3(3x+5)}. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} g'(x) = 2 - f'(x), \\ f'(x) = 1 + \dfrac{1}{6(3x+5)}. \end{cases}$$

Интегрируя эти равенства, получим:

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{1}{18}\ln|3x+5| + C_1, \\ g(x) = x - \dfrac{1}{18}\ln|3x+5| + C_2, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Т.к. решение мы ищем в виде $u(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t)$, то получаем

$u(x,t) = (x+3t) + \dfrac{1}{18}\ln|3(x+3t)+5| + C_1 + (x-3t) - \dfrac{1}{18}\ln|3(x-3t)+5| + C_2$ или

$u(x,t) = 2x + \dfrac{1}{18}\ln|3x+9t+5| - \dfrac{1}{18}\ln|3x-9t+5| + C_1 + C_2$.

Используя начальное условие $u(x,0) = 2x+1$, получим

$2x + \dfrac{1}{18}\ln|3x+5| - \dfrac{1}{18}\ln|3x+5| + C_1 + C_2 = 2x+1$. Поэтому $C_1 + C_2 = 1$.

И решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = 2x + 1 + \frac{1}{18}\ln|3x+9t+5| - \frac{1}{18}\ln|3x-9t+5|.$$

Список использованных источников

1. Афанасьев, В.И. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев, О.В. Зимина, А.И. Кириллов, И.М. Петрушко, Т.А. Сальникова; под редакцией А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 400 с.

2. Боголюбов, А. Н. Задачи по математической физике: учеб. пособие / А. Н. Боголюбов. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.

3. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 240 с.

4. Михлин, С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин – М.: Высш. школа, 1977. – 432 с.

5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2: учебное пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – 13-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.

6. Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М.: Наука, 1975. – 128 с.: ил.

7. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): учеб. пособие для втузов / В. Ф. Чудесенко. – М.: Высш. школа, 1983. – 112 с.