Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра начертательной геометрии, инженерной и
компьютерной графики

Е. А. Ваншина

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по всем инженерно-техническим направлениям подготовки

Оренбург
2020

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73
В17

Рецензент – доцент, кандидат технических наук С.Ю. Соловых

Ваншина, Е.А.
В 67 Начертательная геометрия [Электронный ресурс] : учебное пособие для обучающихся по образовательным программам высшего образования по всем инженерно-техническим направлениям подготовки / Е. А. Ваншина; М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования "Оренбург. гос. ун-т", Каф. начертат. геометрии, инж. и компьютер. графики. - Оренбург : ОГУ. - 2020. - 155 с- Загл. с тит. экрана.
ISBN 978-5-7410-2454-6

В учебном пособии кратко изложена теория проецирования, методы построения проекций, составления комплексного чертежа и решения практических задач геометрического характера по дисциплине «Начертательная геометрия».

Предназначено для обучающихся по образовательным программам высшего образования по всем инженерно-техническим направлениям подготовки всех форм обучения.

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73

© Ваншина Е. А., 2020
© ОГУ, 2020

ISBN 978-5-7410-2454-6

Содержание

Введение 7
1 Обозначения и символы 8
2 Методы проецирования 10
2.1 Центральное проецирование 11
2.2 Параллельное проецирование 12
2.3 Ортогональное проецирование 13
2.4 Инвариантные свойства проецирования 13
2.5 Вопросы для самоконтроля 19
3 Комплексный чертеж (эпюр Монжа), обратимость чертежа 20
3.1 Вопросы для самоконтроля 24
4 Комплексный чертеж точки 25
4.1 Вопросы для самоконтроля 28
5 Комплексный чертеж прямой 29
5.1 Общий случай расположения прямой относительно плоскостей проекций 29
5.2 Следы прямой 30
5.3 Частные случаи расположения прямой относительно плоскостей проекций 31
5.3.1 Прямые уровня 31
5.3.2 Проецирующие прямые 33
5.3.3 Прямая, принадлежащая плоскости проекции 35
4.6 Графическое определение натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона ее к плоскостям проекций 36
5.7 Деление отрезка прямой общего положения в отношении m:n 38
5.8 Вопросы для самоконтроля 39
6 Комплексный чертеж плоскости 40
6.1 Частные случаи расположения плоскости относительно плоскостей проекций 42

6.1.1 Проецирующие плоскости 42
6.1.2 Плоскости уровня 45
6.2 Вопросы для самоконтроля 47
7 Взаимное положение точек, прямых и плоскостей 48
7.1 Взаимное положение точек 48
7.1.1 Условия видимости 49
7.2 Взаимное положение точки и прямой 50
7.3 Взаимное расположение двух прямых 51
7.4 Взаимное положение прямой и плоскости, точки и плоскости 52
7.4.1 Прямая, лежащая в плоскости (принадлежащая плоскости) 52
7.4.2 Прямая, не лежащая в плоскости (параллельная плоскости) 53
7.4.3 Прямая, пересекающая плоскость. Условия видимости 54
7.4.4 Взаимное положение точки и плоскости 55
7.4.5 Следы прямой, лежащей в плоскости 55
7.4.6 Главные линии плоскости 56
7.4.7 Линия наибольшего наклона плоскости или линия наибольшего ската 59
7.4.8 Прямые, перпендикулярные плоскости 61
7.5 Взаимное положение двух плоскостей 63
7.5.1 Параллельные плоскости 63
7.5.2 Перпендикулярные плоскости 64
7.6 Вопросы для самоконтроля 65
8 Методы преобразования ортогональных проекций 67
8.1 Метод замены плоскостей проекций 68
8.1.1 Замена одной плоскости проекции 69
8.1.2 Замена двух плоскостей проекций 73
8.2 Метод вращения вокруг линии уровня 76
8.3 Вопросы для самоконтроля 78
9 Многогранные и кривые поверхности 80
9.1 Многогранники 81

9.2 Поверхности ... 83
9.2.1 Образование поверхности и ее задание на чертеже ... 84
9.3 Поверхности вращения ... 87
9.4 Вопросы для самоконтроля ... 88
10 Задание точек на поверхности ... 90
10.1 Вопросы для самоконтроля ... 93
11 Пересечение поверхностей ... 94
11.1 Пересечение двух плоскостей ... 96
11.2 Пересечение прямой с плоскостью ... 100
11.3 Построение сечения поверхности плоскостью ... 101
11.3.1 Построение сечения гранной поверхности плоскостью ... 102
11.3.2 Частные случаи сечения гранной поверхности плоскостью ... 105
11.3.3 Построение развертки гранных поверхностей ... 107
11.3.4 Построение сечения поверхности вращения плоскостью ... 116
11.3.5 Частные случаи сечения поверхности вращения плоскостью ... 118
11.3.6 Построение приближенных разверток развертывающихся поверхностей ... 121
11.4 Построение линии пересечения двух поверхностей ... 127
11.4.1 Построение линии пересечения двух поверхностей с помощью вспомогательных секущих плоскостей ... 130
11.4.2 Построение линии пересечения двух поверхностей с помощью вспомогательных поверхностей – сфер ... 132
11.4.3 Частные случаи линии пересечения поверхностей ... 137
11.5 Пересечение прямой с поверхностью ... 139
11.6 Вопросы для самоконтроля ... 140
12 Аксонометрические проекции ... 142
12.1 Термины и определения ... 142
12.2 Основные положения ... 142
12.3 Прямоугольные проекции ... 144
12.3.1 Изометрическая проекция ... 144

12.3.2 Диметрическая проекция 146
12.4 Косоугольные проекции 147
12.4.1 Фронтальная изометрическая проекция 147
12.4.2 Горизонтальная изометрическая проекция 149
12.4.3 Фронтальная диметрическая проекция 150
12.5 Вопросы для самоконтроля 151
Список использованных источников 153

Введение

Учебное пособие предназначено для обучающихся по образовательным программам высшего образования по всем инженерно-техническим направлениям подготовки и соответствует программе курса «Начертательная геометрия».

Понимание в узком смысле предмета лишь как теоретической базы начертательной геометрии привели к необходимости систематизации изучаемого материала, разработки способов конструирования и изображения геометрических фигур, решения общегеометрических и прикладных задач. Пособие призвано способствовать самостоятельному изучению предмета студентами, являясь средством организации учебного процесса, подчеркивая единство и взаимосвязь методов начертательной геометрии и аналитической геометрии как базы для автоматизации решения задач прикладной геометрии.

Начертательная геометрия изучает методы отображения пространства на плоскости и способы графических решений задач на чертеже.

Многообразие геометрических фигур трехмерного пространства и отношения между ними составляет предмет начертательной геометрии.

Основным элементом пространства принято считать точку, а все геометрические фигуры можно представить как множество точек. Отношение между фигурами можно представить как позиционные и метрические: позиционные – это задачи, связанные с определением взаимного расположения геометрических объектов в пространстве; метрические – это задачи, связанные с определением длин, площадей, объемов. Правила построения изображений, излагаемые в начертательной геометрии, основаны на методе проекций, то есть используется конструктивный способ отображения пространства.

Начертательная геометрия – одна из дисциплин, составляющих общеинженерную подготовку инженерно-технических специалистов с высшим образованием.

После теоретического изучения курса начертательной геометрии студент должен выполнить расчетно-графические работы по каждой изучаемой теме для ее закрепления.

1 Обозначения и символы

В учебном пособии используются общепринятые обозначения и символы:

– точки в пространстве – прописными буквами латинского алфавита: *A, B, C, …*, и цифрами *1, 2, 3, ...*

– прямые и кривые линии в пространстве – строчными буквами латинского алфавита: *a, b, c, d, ...*

– линии, занимающие особое положение: *h* – горизонтальная прямая уровня (горизонталь); *f* – фронтальная прямая уровня (фронталь); *p* – профильная прямая уровня.

Для линий применяются также следующие обозначения:

– *AB* – прямая, определяемая точками *A* и *B*;

– *[AB]* – отрезок прямой, ограниченный точками *A* и *B*;

– |*AB*| – натуральная величина отрезка *[AB]*.

Поверхности обозначаются прописными буквами греческого алфавита: Γ – гамма, Δ – дельта, Θ – тета, Λ – ламбда, Ξ – кси, Π – пи, Σ – сигма, Φ – фи, Ψ – пси, Ω – омега.

Плоскости проекций: π_1 – горизонтальная плоскость проекций; π_2 – фронтальная плоскость проекций; π_3 – профильная плоскость проекций; π' – аксонометрическая плоскость проекций.

Углы обозначаются строчными буквами греческого алфавита: α, β, γ, δ,…

Проекции точек, линий, поверхностей:

– A_1, B_1, ..., a_1, b_1, ..., *1, 1, ...* – горизонтальные проекции;

– A_2, B_2, ..., a_2, b_2, ..., *2, 2, ...* – фронтальные проекции;

– A_3, B_3, ..., a_3, b_3, ..., *3, 3, ...* – профильные проекции.

Используются следующие символы:

– $\in$ – принадлежность точки (элемент множества) геометрической фигуры (множеству); $A \in M$, $B \in \Phi$;

– $\subset$ – принадлежность (включение) геометрической фигуры (подмножества) данной фигуре $\Delta \subset t$;

– $\cup$ – объединение множеств: $[AB] \cup [BC]$ - ломаная ABC;

– $\cap$ – пересечение множеств;

– $\equiv$ – совпадение: $A_l \equiv B_l$;

– // – параллельность: $a \,//\, m$;

– $\perp$ – перпендикулярность: $a \perp b$;

– $\dot{-}$ – обозначение скрещивающихся прямых: $a \dot{-} b$;

– $\rightarrow$ – отображение, преобразование: $A \rightarrow A_l$.

Если символы перечеркнуты наклонной чертой, это означает наличие частиц «не»:

– $A \notin l$ – точка A не принадлежит прямой l;

– $a \nparallel b$ – прямые a, b не параллельны.

2 Методы проецирования

Предметом начертательной геометрии является изображение геометрических фигур на плоскости чертежа, полностью представляющее форму предмета и его размеры.

Методом начертательной геометрии является **метод проецирования**. В зависимости от поставленной задачи применяются соответствующие методы: для наглядного представления формы предмета используются аксонометрические проекции, для снятия размеров с предмета удобнее пользоваться ортогональными проекциями, для перспективы интерьеров в архитектуре – центральным проецированием и так далее.

Как и любая геометрия, начертательная геометрия построена на ряде определений, аксиом, теорем, многие из которых знакомы из школьного курса геометрии. Например, известно, что основа этих аксиом лежит в «Началах» Евклида, который в своих трудах дал 23 определения, 5 постулатов, 9 аксиом. Постулаты и аксиомы Евклида на протяжении более чем 2000 лет подвергались критике, дополнениям, комментариям и в связи с развитием и совершенствованием математики и ее методов они вылились в ту форму, в которой преподносятся в школьном курсе геометрии.

1. Если точка *A* принадлежит прямой *a*, а прямая *a* принадлежит плоскости *Σ*, то точка *A* принадлежит плоскости *Σ*:

$$A \in a \subset \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma$$

2. Две различные точки *A* и *B* всегда принадлежат одной и той же и только одной прямой *a* или каждой прямой *a* принадлежат, по крайней мере, две точки *A* и *B*:

$$(\forall A, B)(A \neq B) \Rightarrow (\exists 1a)(A, B \in a)$$

3. Три различные точки *A*, *B* и *C*, не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной и той же и только одной плоскости:

$$(\forall A, B, C)(A \neq B \neq C) \wedge (A, B, C \notin a) \Rightarrow (\exists 1\Sigma)(\Sigma \ni A, B, C)$$

4. Если две точки A и B, принадлежащие прямой a, принадлежат плоскости Σ, то прямая a принадлежит плоскости Σ:

$$(\forall A, B)(A \neq B)(A, B \in a) \wedge (A, B \in \Sigma) \Rightarrow (a \in \Sigma)$$

5. Две прямые, принадлежащие одной плоскости, могут принадлежать одной точке, но этого может и не быть:

$$(a \subset \Sigma) \wedge (b \subset \Sigma) \Rightarrow K(\forall a, b)$$

6. Две плоскости могут принадлежать одной и той же прямой, но этого может и не быть:

$$a = \Sigma \cap \Gamma$$

7. Плоскость и не принадлежащая ей прямая могут принадлежать одной точке, но этого может и не быть:

$$K = a \cap \Sigma .$$

2.1 Центральное проецирование

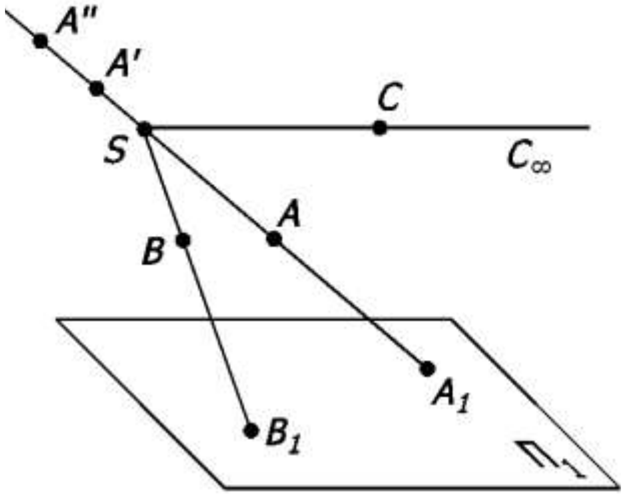


Рисунок 2.1 – Центральное проецирование

Аппарат центрального проецирования: плоскость проекций π_1 и центр проецирования – точка S, не лежащая в плоскости π_1. Если в пространстве (рисунок 2.1) дана точка A, то для построения ее проекции на плоскости π_1 достаточно из точки S провести прямую через точку A до ее пересечения с плоскостью π_1. Точка пересечения и будет ее проекцией. A_1 – центральная проекция точки A на плоскость π_1, прямая (SA) – проецирующая прямая.

Аналогично находится центральная проекция точки B на плоскость проекции π_1. Это будет точка B_1. В том случае, когда точка C расположена так, что проецирующая прямая (SC) оказывается параллельной плоскости проекции π_1, проекция точки C_1 будет несобственной точкой. Таким образом, можно сделать вывод, что при заданном аппарате проецирования каждая точка пространства имеет только одну центральную проекцию. Это утверждение сделано на том основании, что через две точки можно провести только одну прямую.

В то же время, как видно из рисунка 2.1, проекции A_1 может соответствовать множество точек пространства A', A'', A''',… Поэтому одна центральная проекция точки не дает возможности судить о положении самой точки пространства.

2.2 Параллельное проецирование

Аппарат параллельного проецирования – плоскость проекций π_1 и направление проецирования s или несобственная точка S.

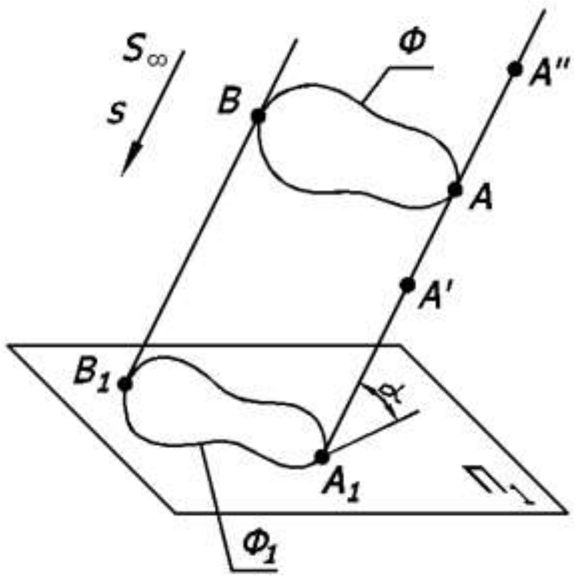


Рисунок 2.2 – Параллельное проецирование

Пусть даны в пространстве точки A и B. Для получения параллельных проекций точек A и B на плоскость π_1 надо провести через эти точки проецирующие лучи, параллельные направлению проецирования. Точки пересечения их с плоскостью проекции π_1 и будут параллельными проекциями точек A и B на плоскость π_1 (рисунок 2.2). Угол α между направлением проецирования и плоскостью π_1 – угол проецирования. При $\alpha \neq 90^0$ **проецирование** называется **параллельным косоугольным**, при $\alpha = 90^0$ – **ортогональным**.

Как и при центральном проецировании, каждой точке пространства соответствует только одна проекция параллельного проецирования, а каждой проекции может соответствовать несколько точек пространства.

2.3 Ортогональное проецирование

Частный случай параллельного проецирования, при котором направление проецирования *s* перпендикулярно плоскости проекции, называется **прямоугольным** или **ортогональным проецированием**. Угол проецирования α = 90^0.

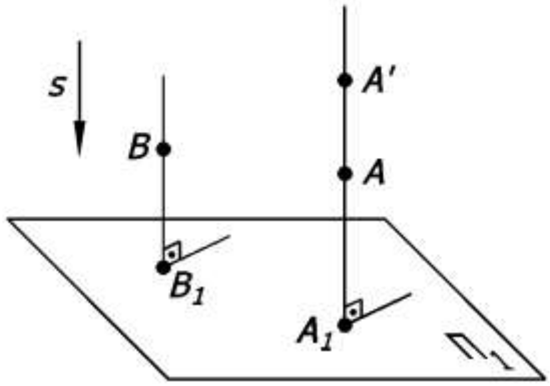


Рисунок 2.3 – Ортогональное проецирование

Наглядное представление об ортогональном проецировании дает рисунок 2.3. Так же как и в описанных выше методах проецирования, в ортогональном проецировании каждой точке пространства соответствует только одна проекция на плоскости проецирования π_1, и в то же время каждой проекции может соответствовать множество точек пространства.

2.4 Инвариантные свойства проецирования

Свойства геометрических фигур, которые не изменяются в процессе проецирования, называются **независимыми** или **инвариантными** относительно выбранного способа проецирования.

Известно, что геометрические фигуры проецируются на плоскость проекции в общем случае с искажением. При этом характер искажения завит от аппарата проецирования и положения проецируемой фигуры относительно плоскости проекции. Из рисунка 2.4 видно, что трапеция *ABCD* при проецировании ее на плоскость π_1 имеет метрические искажения: линейные – сторон трапеции и угловые – ее углов. Вместе с этим, между фигурой-оригиналом и ее проекцией существует определенная связь, выраженная в инвариантных свойствах проецирования. Решение основной задачи начертательной геометрии – построение проекций геометрической фигуры по ее оригиналу или обратной задачи – определение формы и размеров оригинала по его проекциям целиком и полностью базируется на инвариантных свойствах проецирования.

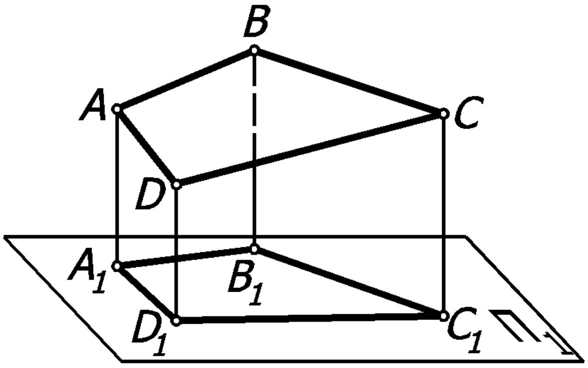


Рисунок 2.4 – Проецирование трапеции

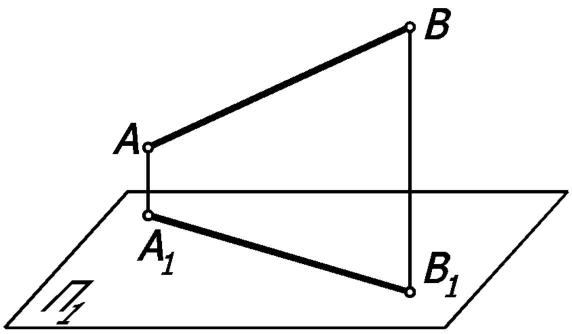


Рисунок 2.5 – Проецирование прямой общего положения

Метод ортогонального проецирования – это частный случай параллельного и центрального методов проецирования, поэтому свойства центрального и параллельного методов проецирования справедливы и для ортогонального метода проецирования, но есть свойства, характерные только для ортогонального метода проецирования.

1. Проекция точки есть точка. Это свойство исходит из самого метода проецирования и доказательства не требует (рисунки 2.1–2.3).

2. Проекция прямой на плоскость есть прямая. В частном случае, когда проецирующая пряма совпадает с заданной прямой, проекция прямой будет точка, что наглядно представлено на рисунках 2.5 и 2.6.

3. *(Свойство сохранения параллельности прямых)*. Если прямые параллельны в пространстве, то параллельны и их проекции.

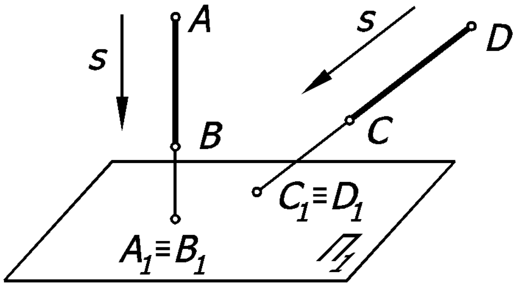


Рисунок 2.6 – Проецирование проецирующих прямых

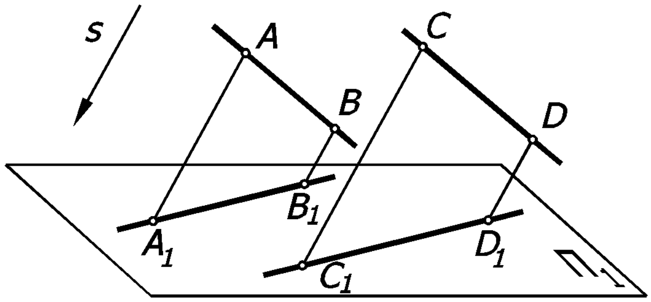


Рисунок 2.7 – Проецирование параллельных прямых

Следствие. Проекции параллельных прямых параллельны.

Это свойство справедливо для параллельного проецирования.

Доказательство (рисунок 2.7). Известно, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны:

$$(AB)//(CD);\ (AA_1)//(CC_1).$$

Две параллельные плоскости при пересечении третьей плоскостью имеют параллельные прямые пересечения. Значит, проекции параллельных прямых есть параллельные прямые.

4. *(Свойство пропорциональности)*. Длины параллельных отрезков пропорциональны длинам проекций этих отрезков (для параллельного проецирования).

Следствие. Сохранение пропорциональности отрезков прямой на проекциях этих отрезков.

Доказательство (рисунок 2.8). В плоскости (ABB_1A_1) проводится прямая $(B\bar{A})//(A_1B_1)$, в плоскости (CDD_1C_1) – прямая $(\bar{C}D)//(C_1D_1)$. Прямые $(\bar{A}B)$ и $(\bar{C}D)$ параллельны. Три стороны одного треугольника параллельны трем сторонам другого треугольника: две стороны по условию, одна – по построению. Тогда можно записать:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|\bar{A}B|}{|\bar{C}D|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}$$

Если представить, что две параллельные прямые слились в одну, то можно записать эти отношения и для одной прямой. Например, если точки B и C совпадут, тогда получим:

$$\frac{|AB|}{|BD|}=\frac{|A_1B_1|}{|B_1D_1|}.$$

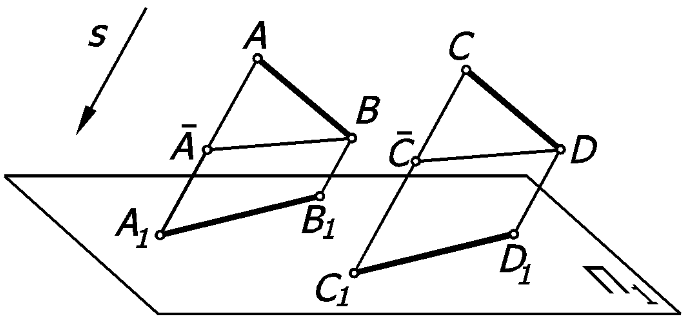


Рисунок 2.8 – Свойство пропорциональности

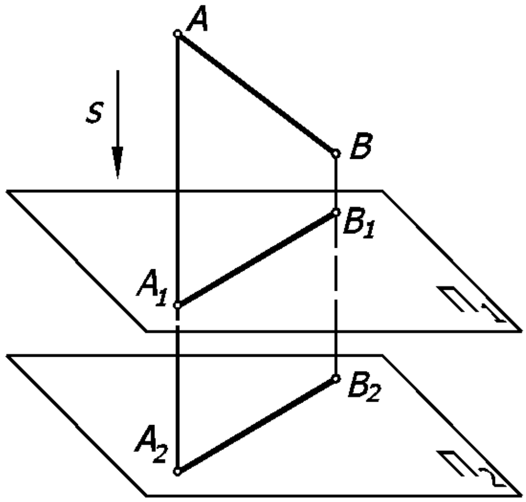


Рисунок 2.9 – Параллельный перенос плоскостей проекций

5. *(Свойство параллельного переноса плоскостей проекций)*. При параллельном переносе плоскостей проекций форма и размер проекции не меняются. Это очевидно из построения (рисунок 2.9).

Доказательство. Прямые (A_1B_1) и (A_2B_2) параллельны, так как две параллельные плоскости π_1 и π_2 пересекаются третьей плоскостью (ABA_2B_2). $(A_1A_2)//(B_1B_2)$ по условию. $(A_1B_1B_2A_2)$ – параллелограмм, а у параллелограмма противоположные стороны равны. Следовательно, $|A_1B_1|=|A_2B_2|$.

6. *(Свойство принадлежности)*. Если фигура Φ^1 принадлежит фигуре Φ, то проекция фигуры $\Phi^1{}_1$ принадлежит проекции фигуры Φ_1:

$$\Phi^1\subset\Phi\Rightarrow\Phi^1{}_1\subset\Phi_1$$

Следующие свойства являются следствиями свойства принадлежности, в общем виде записанного выше.

7. Если точка в пространстве принадлежит прямой, то проекция этой точки будет принадлежать проекции этой прямой.

Доказательство (рисунок 2.10). Прямая *(CC_1)* проходит через точку *C*, принадлежащую плоскости, и параллельна прямой *(AA_1)* этой плоскости. Следовательно, прямая *(CC_1)* пересекает любую не параллельную ей прямую плоскости, в том числе и прямую *(A_1B_1)*, что и требовалось доказать.

8. Если точка *A* принадлежит линии *l*, то проекция точки A_1 принадлежит проекции линии l_1 (рисунок 2.11).

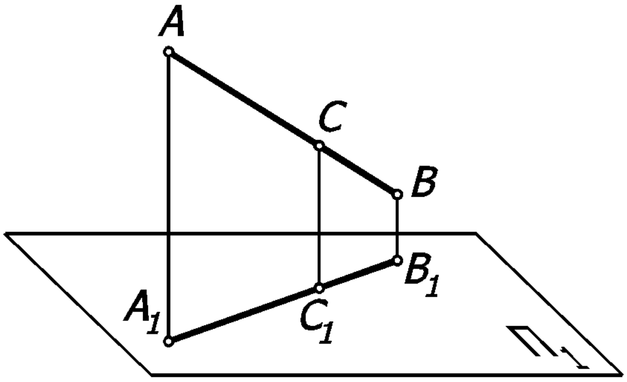


Рисунок 2.10 – Принадлежность точки прямой

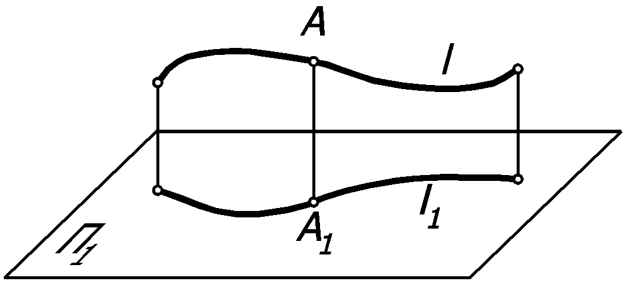


Рисунок 2.11 – Принадлежность точки линии

9. Если линия *l* принадлежит поверхности *Ф*, то проекция линии l_1 принадлежит проекции поверхности $Ф_1$ (рисунок 2.12).

$$l \subset \Phi \Rightarrow l_1 \subset \Phi_1$$

10. Если точка *A* принадлежит поверхности *Ф*, то проекция точки A_1 находится на проекции линии l_1, принадлежащей проекции поверхности $Ф_1$ (рисунок 2.13).

$$(A \in l)(l \subset \Phi) \Rightarrow (A_1 \in l_1)(l_1 \subset \Phi_1)$$

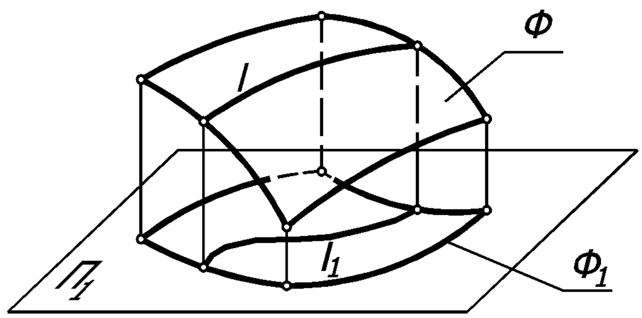


Рисунок 2.12 – Принадлежность линии поверхности

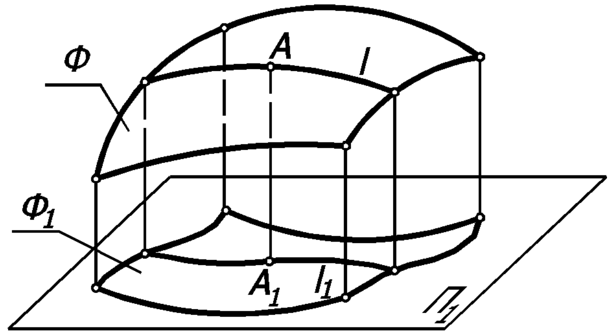


Рисунок 2.13 – Принадлежность точки поверхности

11. Если точка K есть результат пересечения прямых a и b, то проекция этой точки K_1 определяется пересечением проекций прямых a_1 и b_1 (рисунок 2.14).

Доказательство. Если точка $K \in a$, то $K_1 \in a_1$(7-е свойство), но $K \in b$, а это значит, что $K_1 \in b_1$. То есть точка K_1 должна быть общей точкой для прямых a_1 и b_1. Такая точка может быть точкой пересечения прямых a_1 и b_1.

12. Если проецируемой фигурой является прямой угол, то для получения неискаженной ортогональной проекции этого угла достаточно, чтобы только одна из его сторон была параллельна плоскости проекции, а другая сторона – не перпендикулярная плоскости проекции.

Это свойство может быть записано следующим образом:

$$(\angle ABC = 90^0) \wedge ([BC] // \pi_1), [BA] \not\perp \pi_1) \Rightarrow \angle A_1B_1C_1 = 90^0.$$

Во многих учебных пособиях оно представлено в виде **теоремы о частном случае проецирования прямого угла**.

Доказательство. Сторона *(BC)* прямого угла $\angle ABC$ (рисунок 2.15) параллельна плоскости проекции π_1. В этом случае прямая *(BC)* параллельна *(B_1C_1)*. Вторая сторона прямого угла, наклонная *(AB)*, пересекает свою проекцию *(A_1B_1)* в точке *K*. Если провести в плоскости проекции через точку *K* прямую *(KL)* параллельно *(B_1C_1)*, прямая *(KL)* будет также параллельная и *(BC)*. Поэтому угол $\angle BKL$ получается прямым. Угол $\angle KBC$ прямой по условию. Согласно теореме о трех перпендикулярах угол $\angle A_1B_1C_1$ будет тоже прямой.

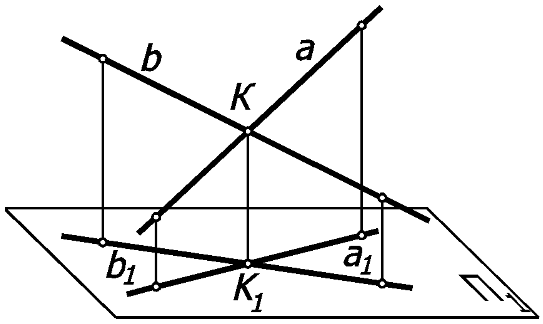


Рисунок 2.14 – Проекция точки пересечения двух прямых

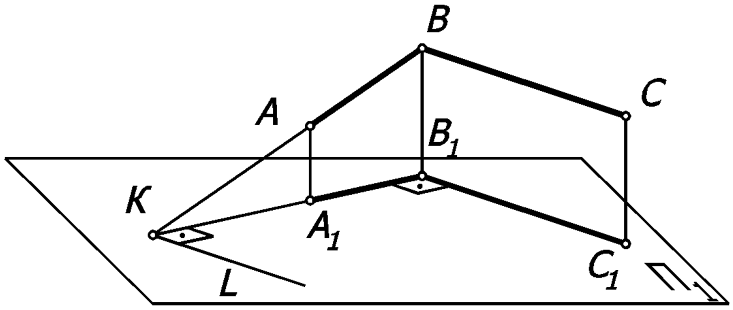


Рисунок 2.15 – Проекция прямого угла

2.5 Вопросы для самоконтроля

1. Что является предметом начертательной геометрии?

2. Перечислите основные методы начертательной геометрии, их применение.

3. Приведите Евклидовы постулаты, изучаемые в школьном курсе геометрии.

4. В чем заключается метод центрального проецирования? Опишите его аппарат и алгоритм.

5. Опишите метод параллельного проецирования, его аппарат и алгоритм.

6. Метод ортогонального проецирования: аппарат, алгоритм.

7. Что такое инвариантные свойства геометрических фигур?

8. От чего зависит характер искажения геометрической фигуры при проецировании ее на плоскость проекции?

9. На каких свойствах проецирования базируется решение основной задачи начертательной геометрии?

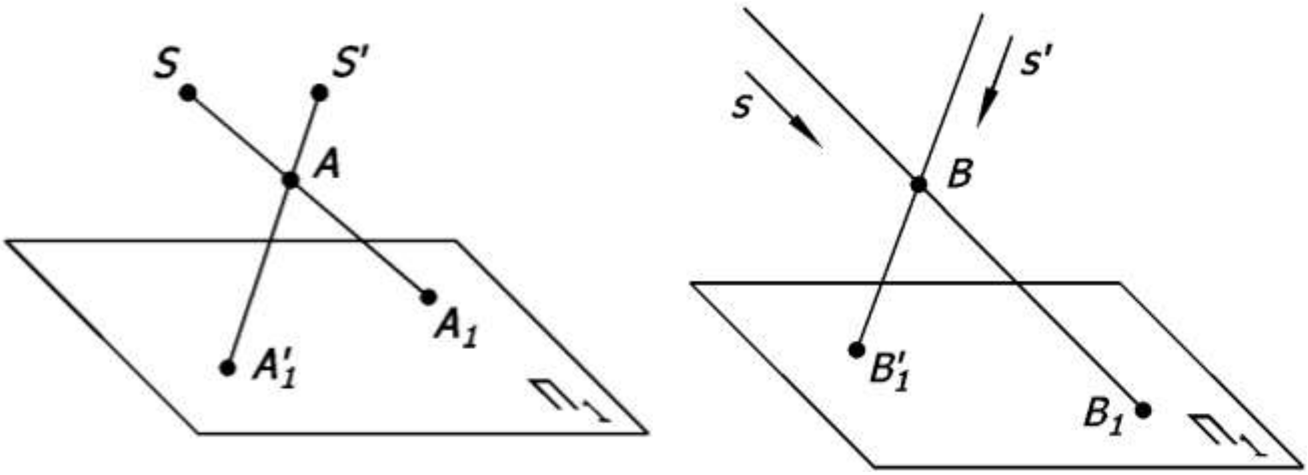
10. Перечислите инвариантные свойства проецирования, их следствия и доказательства.

3 Комплексный чертеж (эпюр Монжа), обратимость чертежа

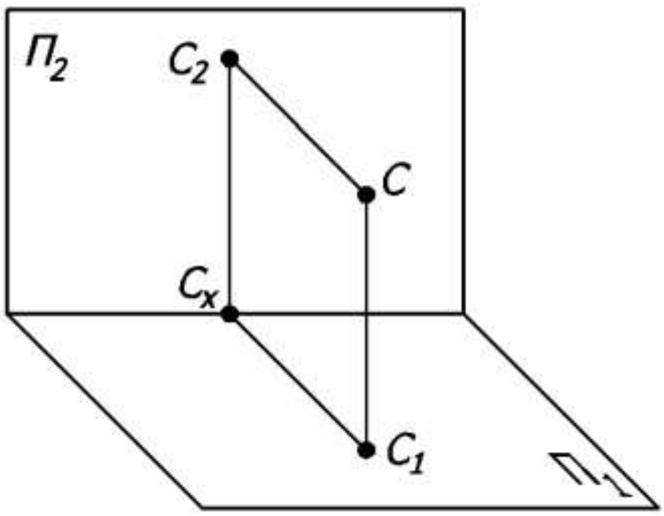
Рассмотренные методы проецирования имеют один и тот же недостаток: не обладают обратимостью чертежа. Что это такое? Известно, что при заданном аппарате проецирования каждая точка пространства имеет только одну проекцию. Но одна проекция точки при любом методе проецирования не дает возможности судить о положении точки в пространстве. Для определения точки в пространстве необходимы: а) для центрального проецирования – два центра проецирования (рисунок 3.1, а); б) для параллельного проецирования – два направления проецирования (рисунок 3.1, б); в) для ортогонального проецирования – две плоскости проецирования (рисунок 3.1, в).

При ортогональном проецировании, как видно из рисунка 3.1, в, каждой точке пространства соответствует две определенные ее проекции на плоскости π_1 и π_2. То есть если положение плоскостей π_1 и π_2 фиксировано, то каждой точке пространства будет соответствовать упорядоченная пара точек на полях проекций. Справедливо и обратное утверждение: упорядоченной паре точек полей проекций соответствует единственная точка пространства.

Это свойство составляет основу построения проекционного чертежа.



а) б)



в)

а) центральным; б) параллельным; в) ортогональным

Рисунок 3.1 – Определение точки в пространстве методами проецирования

В машиностроении, для того чтобы иметь возможность по чертежу судить о форме и размерах изображаемых предметов (деталей, узлов, машин, агрегатов и так далее), при составлении чертежей, как правило, пользуются не двумя, а несколькими плоскостями проекций.

Наиболее часто используются три плоскости проекции. Положение в пространстве точки, а, следовательно, и любой геометрической фигуры может быть определено, если будет задана какая-либо координатная система отнесения. Наиболее удобной для этой цели является **декартова система координат**, которая позволяет фиксировать точку в пространстве с помощью трех взаимно перпендикулярных **осей**: **абсциссы X, ординаты Y, аппликаты Z**. Великий французский математик Гаспар Монж предложил для изображения предмета в пространстве использовать три взаимно перпендикулярные координатные плоскости декартовой системы координат в качестве плоскостей проекций.

Плоскости проекций называются:

$\boldsymbol{\pi_1}$ (оси x, y) – **горизонтальной**;

$\boldsymbol{\pi_2}$ (оси x, z) – **фронтальной**;

$\boldsymbol{\pi_3}$ (оси y, z) – **профильной**.

Линии пересечения плоскостей проекций образуют оси проекций оси *x*, *y* и *z* . при этом ось абсцисс декартовой системы координат совпадает с осью проекций *x*, ось ординат – с осью проекций *y*, ось аппликат – с осью проекций *z*. Ломаная $0A_xA_1A$ (рисунок 3.2) называется **координатной ломаной**. Если каждое звено ее отнести к единице длины *l*, то получится:

$$X = \frac{0A_x}{l}$$ – абсцисса точки *A*;

$$Y = \frac{A_xA_1}{l}$$ – ордината точки *A*;

$$Z = \frac{AA_1}{l}$$ – аппликата точки *A*.

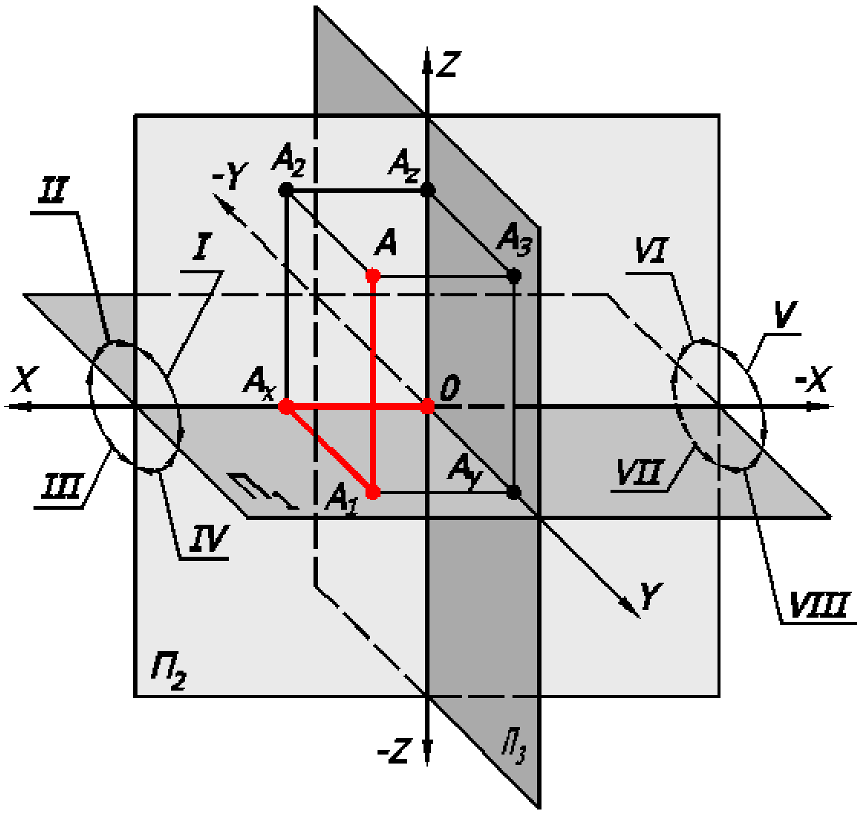


Рисунок 3.2 – Декартова система координат

Как видно из рисунка 3.2, координатные плоскости делят пространство на восемь частей – октантов. Октанты нумеруют так, как показано на рисунке 3.2. Положительное направление осей принято для первого октанта.

Учитывая при отсчете координат точки, отмеченные выше направления осей x, y и z, получим таблицу 1 знаков координат.

Таблица 1 – Знаки координат в октантах

Октант	Знак координаты			Октант	Знак координаты		
	x	y	z		x	y	z
I	+	+	+	V	–	+	+
II	+	–	+	VI	–	–	+
III	+	–	–	VII	–	–	–
IV	+	+	–	VIII	–	+	–

Пользоваться пространственным макетом, показанным на рисунке 3.2, для изображения геометрических фигур неудобно ввиду его громоздкости и искажений, получаемых на плоскостях проекций π_1 и π_3. Поэтому вместо изображений на чертеже пространственного макета пользуются **эпюром Монжа** – чертежом, составленным из двух или трех связанных между собой ортогональных проекций геометрической фигуры. В последнее время в учебной литературе слово «эпюр» заменено словами «комплексный чертеж».

Пространственный макет преобразуется в комплексный чертеж путем совмещения плоскостей проекций π_1 и π_3 с фронтальной плоскостью проекций π_2. Плоскость π_1 для совмещения с плоскостью π_2 поворачивается на 90^0 вокруг оси x в направлении движения часовой стрелки (рисунок 3.3). Затем поворачивается вокруг оси z также на угол 90^0 профильная плоскость в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Расположения плоскостей проекций, осей координат и проекций точки (фигуры) примут вид, показанный на рисунке 3.4.

Так как плоскости проекций условно безграничны, то на комплексном чертеже границы плоскостей можно не показывать. Нет необходимости указывать отрицательное направление осей проекций и надписывать плоскости проекций. Одно из свойств проецирования – свойство параллельного переноса плоскостей проекций – говорит о том, что оси проекций при параллельном их переносе не меняют комплексного чертежа предмета, а меняют только его положение относительно плоскостей проекций. Поэтому в некоторых случаях расположение осей на комплексном чертеже можно не указывать; такой **чертеж** будет называться **безосным**.

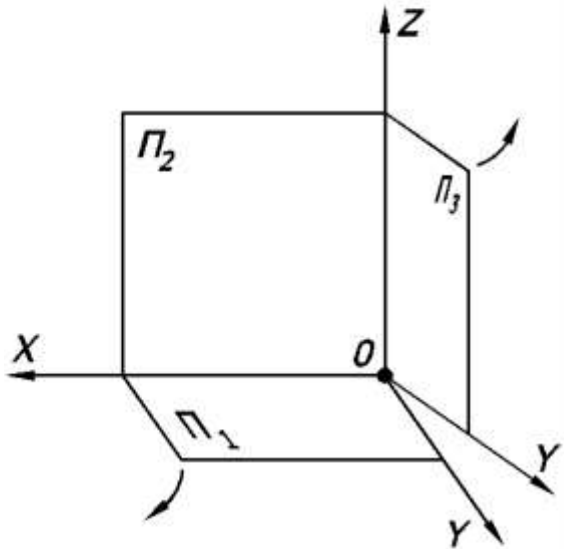


Рисунок 3.3 – Преобразование пространственного макета в комплексный чертеж

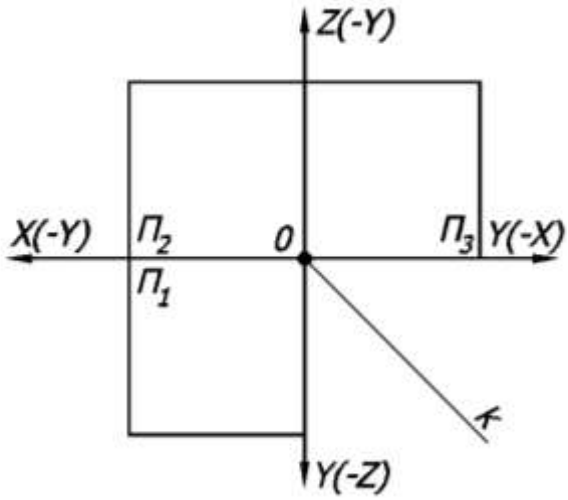


Рисунок 3.4 – Комплексный чертеж (эпюр Монжа)

3.1 Вопросы для самоконтроля

1. Что такое обратимость чертежа?

2. Каким образом пространственная фигура из трех взаимно перпендикулярных плоскостей преобразуется в плоскую модель?

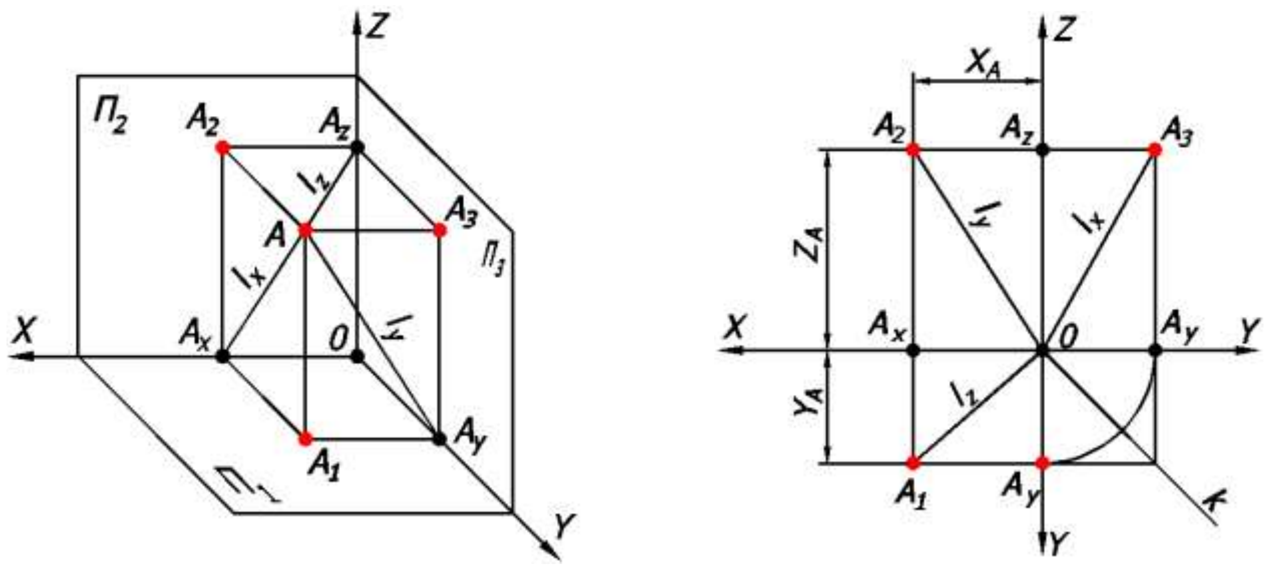
3. Дайте определение эпюра Монжа?

4. Какой октант имеет отрицательное направление всех осей?

5. Какими по́лами плоскостей проекций ограничены II, III, VI, VII октанты?

4 Комплексный чертеж точки

Пусть даны в пространстве точка *A* и три взаимно перпендикулярные плоскости проекций (рисунок 4.7). Положение точки в пространстве определяется тремя координатами *X*, *Y* и *Z*, показывающими величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей проекций. Чтобы определить эти расстояния, достаточно через точку *A* провести прямые, перпендикулярные к плоскостям проекций, определить точки A_1, A_2, A_3 встречи этих прямых с плоскостями проекций и измерить величины отрезков $/AA_1/$, $/AA_2/$, $/AA_3/$, которые укажут соответственно значения абсциссы *X*, ординаты *Y*, аппликаты *Z* точки *A*.



а) б)

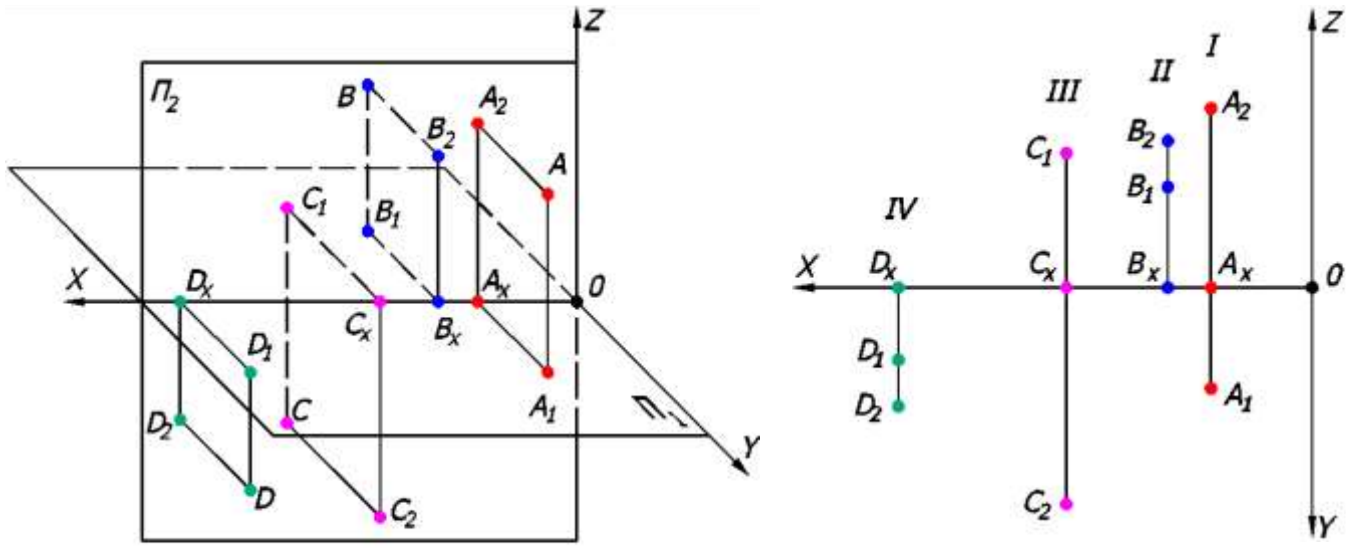
Рисунок 4.1 – Комплексный чертеж точки

Точки A_1, A_2, A_3 – ортогональные проекции точки *A*: A_1 – горизонтальная, A_2 – фронтальная, A_3 – профильная.)

Прямые (AA_1), (AA_2), (AA_3) называют соответственно горизонтально, фронтально и профильно проецирующими прямыми. Две проецирующие прямые, проходящие через точку *A*, определяют плоскость, которую принято называть проецирующей. Эти плоскости пересекают плоскости проекций по взаимно связанным прямым (A_1A_z) и (A_2A_x); (A_1A_y) и (A_3A_y); (A_2A_z) и (A_3A_z). Эти пары прямых взаимно перпендикулярны и перпендикулярны осям x, y и z.

Чтобы получить комплексный чертеж точки A (рисунок 4.1, б), надо преобразовать пространственный макет, изображенный на рисунке 4.1, а, так, как это было указано выше. Горизонтальная и фронтальная проекции точки A окажутся расположенными на одной прямой, называемой ***линией связи***. Отрезок $/0A_x/$ будет соответствовать координате X, $/A_xA_1/$ – координате Y, $/A_xA_2/$ – координате Z. Как видно из построения, две проекции точки A определяют ее положение в пространстве. Поэтому при решении задач можно обойтись без третьей проекции, но если она нужна, то ее можно простроить по двум данным проекциям. Точка A_3 будет находиться на линии связи A_2A_z, перпендикулярной оси z; отрезок $/A_zA_3/$ будет равен отрезку $/A_xA_1/$, то есть координате Y. На чертеже его можно построить с помощью циркуля или используя ***постоянную чертежа «k»*** – биссектрису угла A_y0A_y.

Из рисунка 4.1 видно, что ортогональные проекции точек можно определить, исходя из координат этих точек: A_1 (X,Y), A_2 (X,Z), A_3 (Y,Z). По комплексному чертежу можно при необходимости определить и расстояние точек до осей проекций l_x, l_y, l_z (см. рисунок 4.1). Для того, чтобы выяснить расположение проекций точек для четырех октантов пространства, необходимо воспользоваться пространственным макетом, где точки A, B, C и D расположены соответственно в октантах I, II, III и IV (рисунок 4.2, а).



а) б)

Рисунок 4.2 – Комплексный чертеж точек,
расположенных в I, II, III и IV октантах

При построении проекций этих точек надо следить за положительным или отрицательным расположением осей *y* и *z*. На оси *x* откладываются координаты X точек: A_x, B_x, C_x и D_x. Через эти точки проводятся линии связи, перпендикулярные оси *x*, и на них откладываются координаты *Y* (+ или -) – это проекции A_1, B_1, C_1 и D_1 – горизонтальные проекции. Затем откладываются координаты *Z* (+ или -) – это проекции A_2, B_2, C_2 и D_2 – фронтальные проекции. Как видно из рисунка 4.2, б, для каждого октанта расположение проекций точек определенное:

– октант I – горизонтальная проекция точки ниже оси *x*, фронтальная – выше оси *x*;

– октант II – обе проекции выше оси *x*;

– октант II – горизонтальная проекция выше оси *x*, фронтальная – ниже оси *x*;

– октант IV – обе проекции ниже оси *x*.

4.1 Вопросы для самоконтроля

1. Как обозначаются проекции точки на плоскостях проекций?

2. Как по отношению к осям проекций располагаются проекции точек, находящихся в I, II, III, …, VIII октантах?

3. Какие знаки имеют координаты x, y, z точки, находящейся в I, II, III, …, VIII октанте?

4. Какие координаты на эпюре определяют горизонтальную и фронтальную проекции точки?

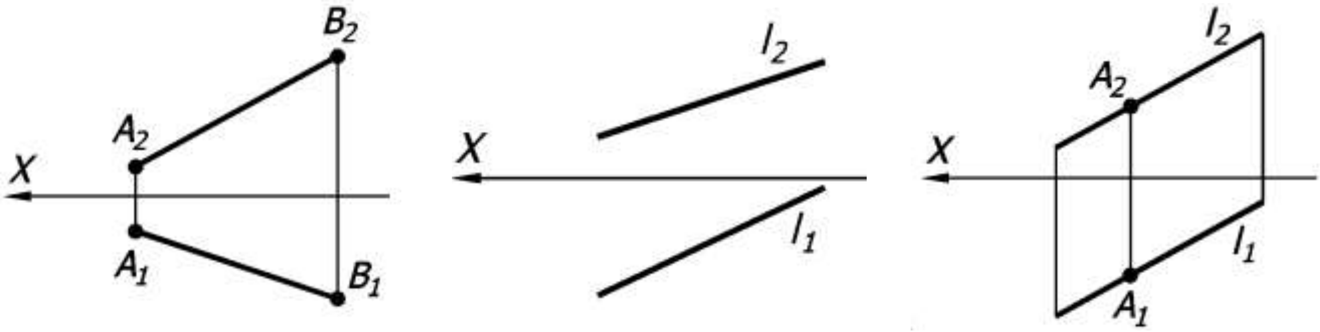
5. В каких октантах значения координат точки отрицательны, в каких положительны?

6. Как определить положение третьей проекции точки на безосном чертеже, если известны две ее проекции и три проекции другой точки?

5 Комплексный чертеж прямой

5.1 Общий случай расположения прямой относительно плоскостей проекций

При построении проекции прямой следует исходить из одного из свойств проецирования: проекция прямой есть прямая (частный случай – точка). Поэтому для определения проекции прямой достаточно знать проекции двух не тождественных точек, принадлежащих этой прямой. Если прямая расположена относительно плоскостей проекций под любым углом, кроме 0 и 90^0, то такая прямая называется **прямой общего положения**. Ее проекции будут также наклонены к осям проекций. Отрезок прямой на комплексном чертеже можно задать его проекциями, например $[A_1B_1]$ *и* $[A_2B_2]$, как на рисунке 5.1, а, или произвольной длины прямой, не ограниченной точками (рисунок 5.1, б).



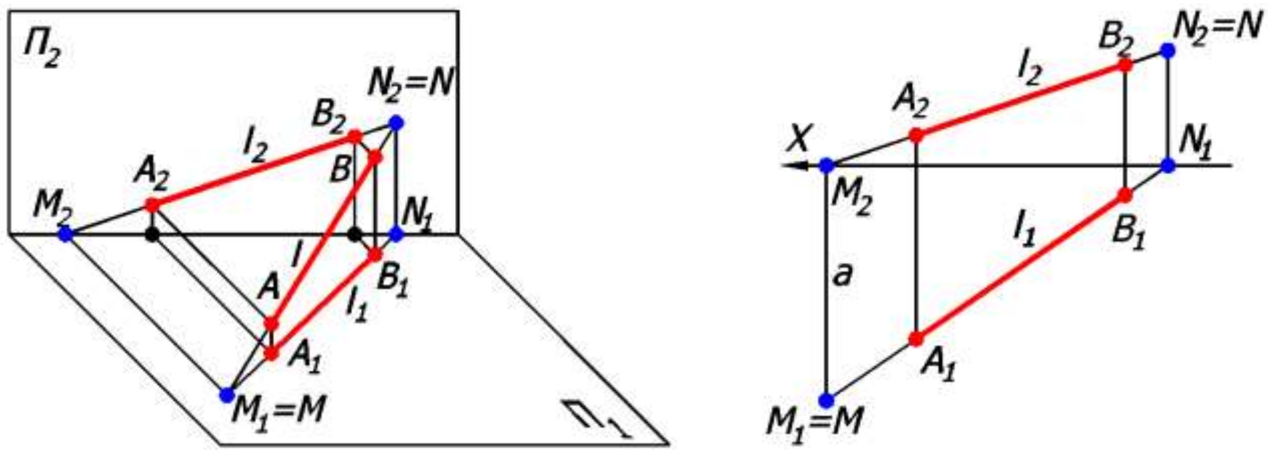
а) б) в)

Рисунок 5.1 – Общий случай расположения прямой относительно плоскостей проекций

Если на прямой в пространстве лежит точка, то проекции ее, соединенные между собой линией связи, будут лежать на проекциях прямой (рисунок 5.1, в).

5.2 Следы прямой

Прямая общего положения пересекает все основные плоскости проекций. Точку пересечения (встречи) прямой с плоскостью проекции называют *следом прямой* (рисунок 5.2, а, б). В зависимости от того, с какой плоскостью проекции происходит встреча прямой, следы обозначают и называют: *M* (M_1, M_2) – *горизонтальным следом прямой*; *N* (N_1, N_2) – *фронтальным следом прямой*.



а) б)

Рисунок 5.2 – Следы прямой

На рисунке 5.2, а, наглядно видно как можно по заданным проекциям отрезка прямой *l* определить его горизонтальный *M* и фронтальный *N* следы. Горизонтальный след – точка, принадлежащая как прямой *l*, так и плоскости проекции π_1; $M = l \cap \pi_1$, поэтому M_2 будет лежать на оси *X* и на проекции прямой l_2. Следовательно $M_2 = l_2 \cap x$. Горизонтальная проекция следа прямой находится на l_1, поэтому ее легко можно найти по линии связи с M_2. Итак, для нахождения горизонтального следа прямой необходимо:

1) отметить точку пересечения фронтальной проекции прямой с осью *X*;

2) через полученную точку провести прямую *a*, перпендикулярную оси *X* (линию связи);

3) найти точку пересечения перпендикуляра а (линия связи) с горизон-

тальной проекцией прямой.

Алгоритм определения горизонтального следа прямой можно записать следующим образом:

$$M_l = ((l_2 \cap x = M_2); (a \perp x, a \in M_2); a \cap l_1)$$

Алгоритм определения фронтального следа прямой по аналогии с предыдущим будет следующий:

$$N_l = ((l_1 \cap x = N_1); (a \perp x, a \in N_1); a \cap l_2)$$

5.3 Частные случаи расположения прямой относительно плоскостей проекций

Кроме рассмотренного общего случая, существуют следующие частные случаи расположения прямой по отношению к заданной системе плоскостей проекций:

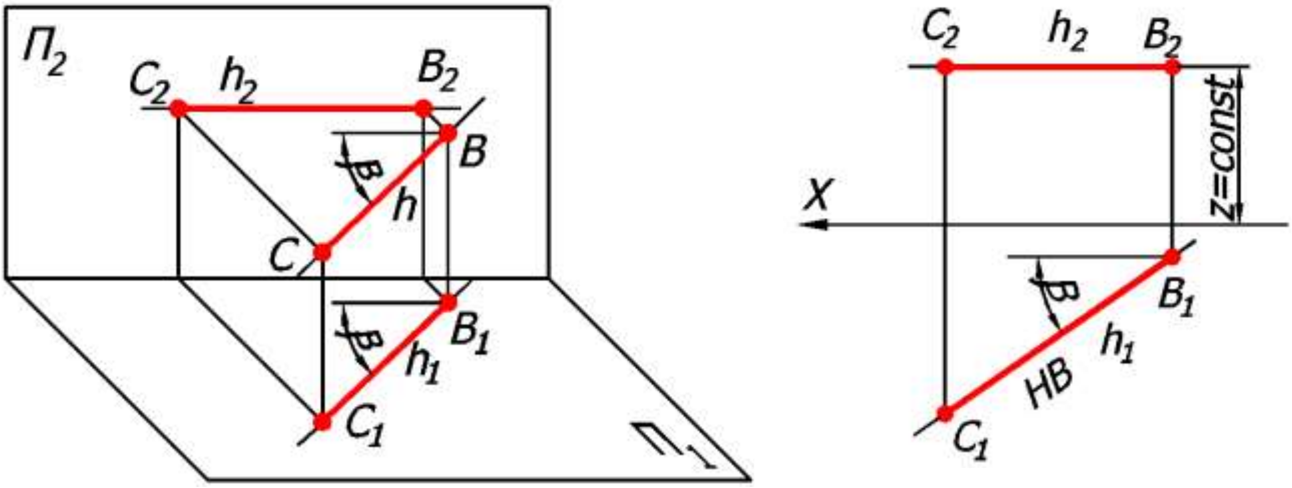
– прямая параллельна плоскости проекции – *прямая уровня*;

– прямая перпендикулярна плоскости проекции – *проецирующая прямая*;

– прямая лежит в плоскости проекции (частный случай параллельности).

5.3.1 Прямые уровня

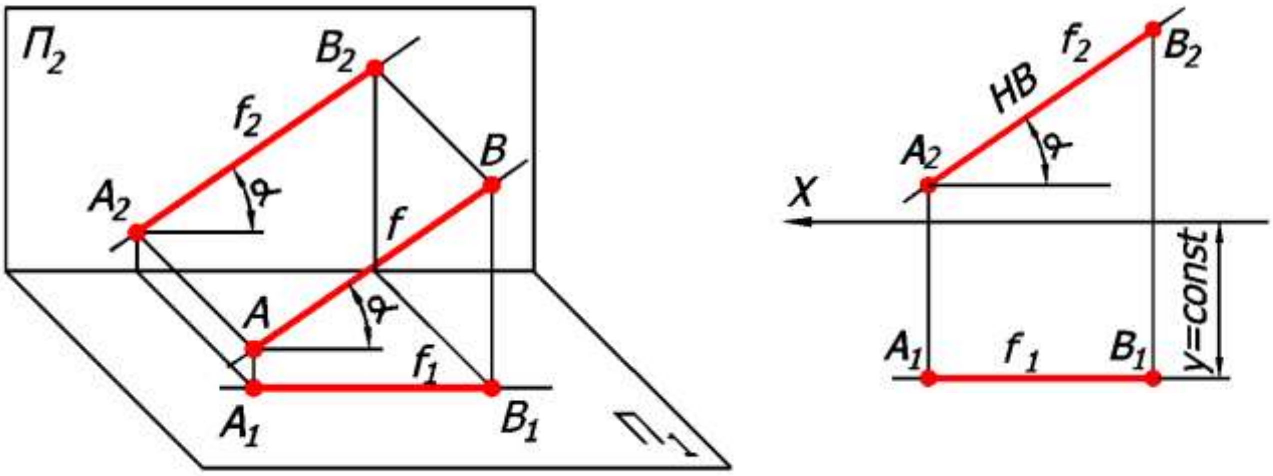
а) ***Горизонтальная прямая уровня (горизонталь)*** – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекции: $h // \pi_1$ (рисунок 5.3, а). Все точки горизонтали удалены на одинаковое расстояние от плоскости π_1. Поэтому фронтальная проекция любой горизонтали параллельна оси X (рисунок 5.3, б). На горизонтальной плоскости проекции горизонтальная прямая проецируется в натуральную величину *(НВ)*, а угол между осью X и горизонтальной проекцией прямой есть истинная величина угла наклона горизонтальной прямой к плоскости π_2.



а) б)

Рисунок 5.3 – Горизонтальная прямая уровня

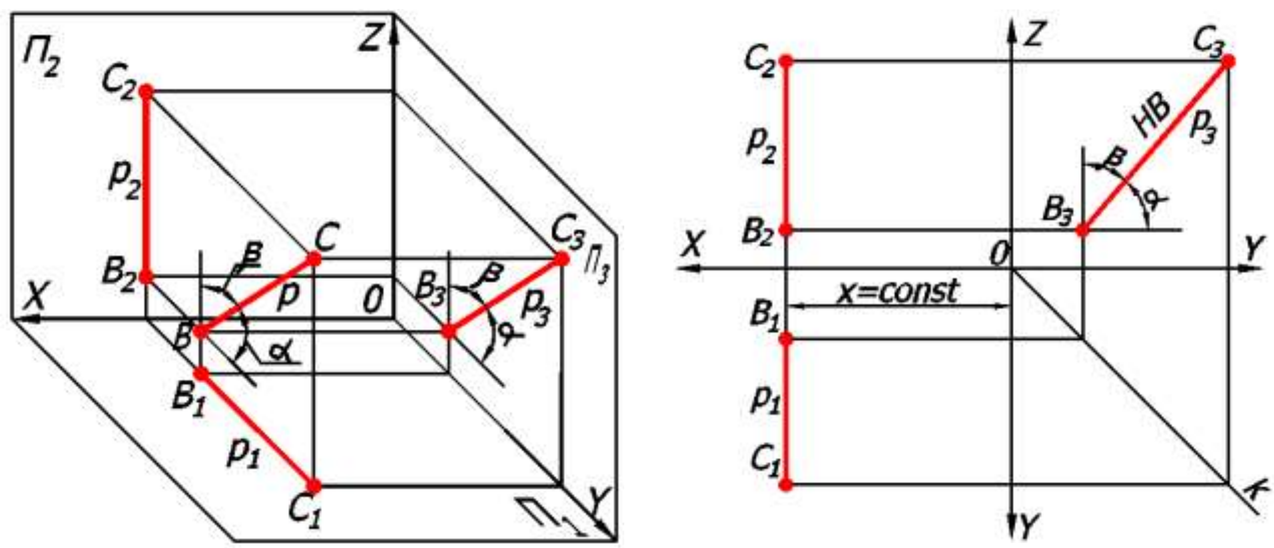
б) ***Фронтальная прямая уровня (фронталь)*** – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекции: $f//\pi_2$ (рисунок 5.4, а). Все точки фронтали удалены на одинаковое расстояние от плоскости π_2. Поэтому горизонтальная проекция любой фронтали параллельна оси X (рисунок 5.4, б). На фронтальной плоскости проекции отрезки фронтальной прямой проецируются в натуральную величину, а угол между осью X и фронтальной проекцией прямой есть истинная величина угла наклона фронтальной прямой к плоскости π_1.



а) б)

Рисунок 5.4 – Фронтальная прямая уровня

в) ***Профильная прямая уровня*** – прямая, параллельная профильной плоскости проекции: $p//\pi_3$ (рисунок 5.5, а). Все точки этой прямой одинаково удалены от профильной плоскости π_3 (рисунок 5.5, б). Поэтому горизонтальная проекция этой прямой будет параллельна оси *Y*, фронтальная – оси *Z*. Обе эти проекции будут перпендикулярны оси *X*. На профильной плоскости проекции отрезки профильной прямой будут проецироваться в натуральную величину, а углы наклона профильной проекции к осям *Y* и *Z* есть истинные величины углов наклона к плоскостям π_1 и π_2 соответственно.

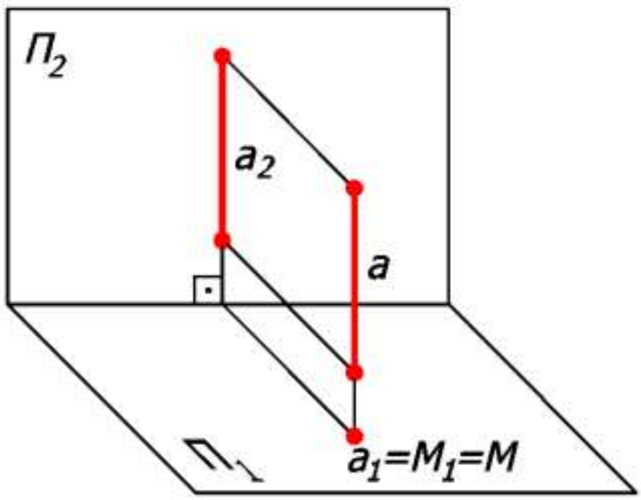


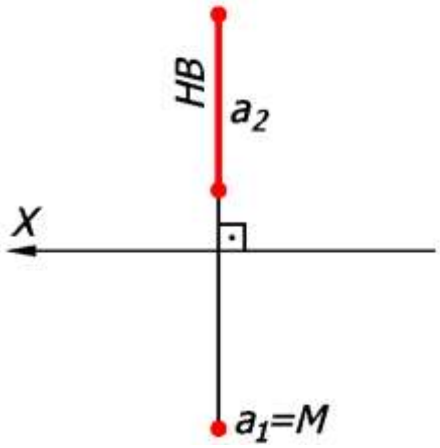
а) б)

Рисунок 5.5 – Профильная прямая уровня

5.3.2 Проецирующие прямые

а) ***Горизонтально проецирующая прямая*** – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекции: $a \perp \pi_1$ (рисунок 5.6, а). Такая прямая проецируется на плоскость π_1 в точку; ее фронтальная проекция перпендикулярная оси *X* (рисунок 5.6, б). Отрезки прямой на фронтальной проекции проецируются в натуральную величину.

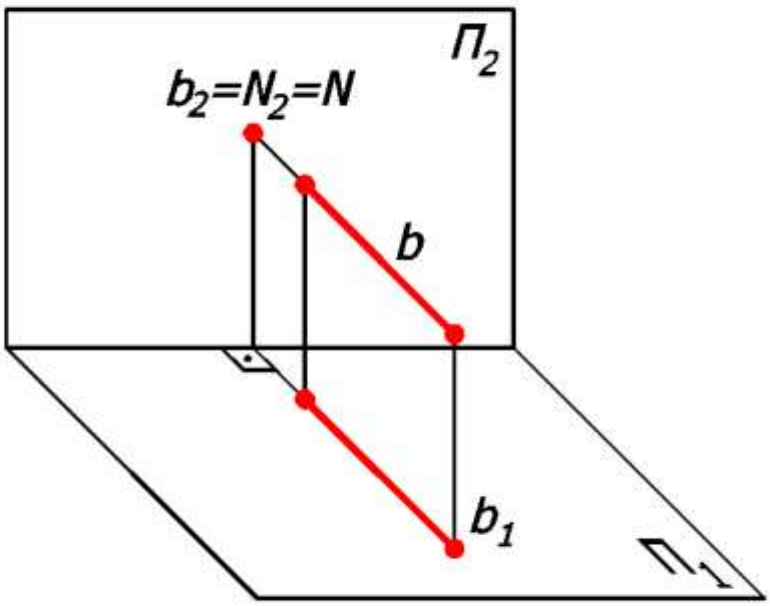


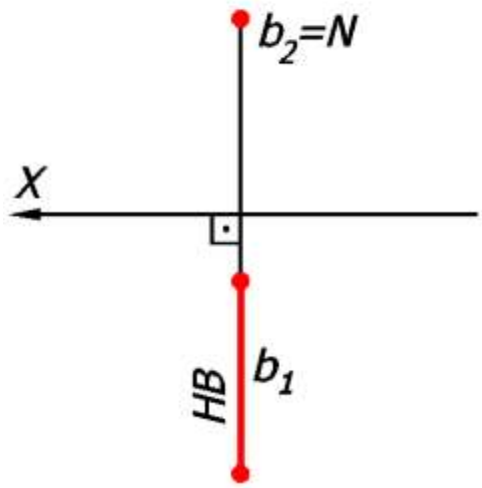


а) б)

Рисунок 5.6 – Горизонтально проецирующая прямая

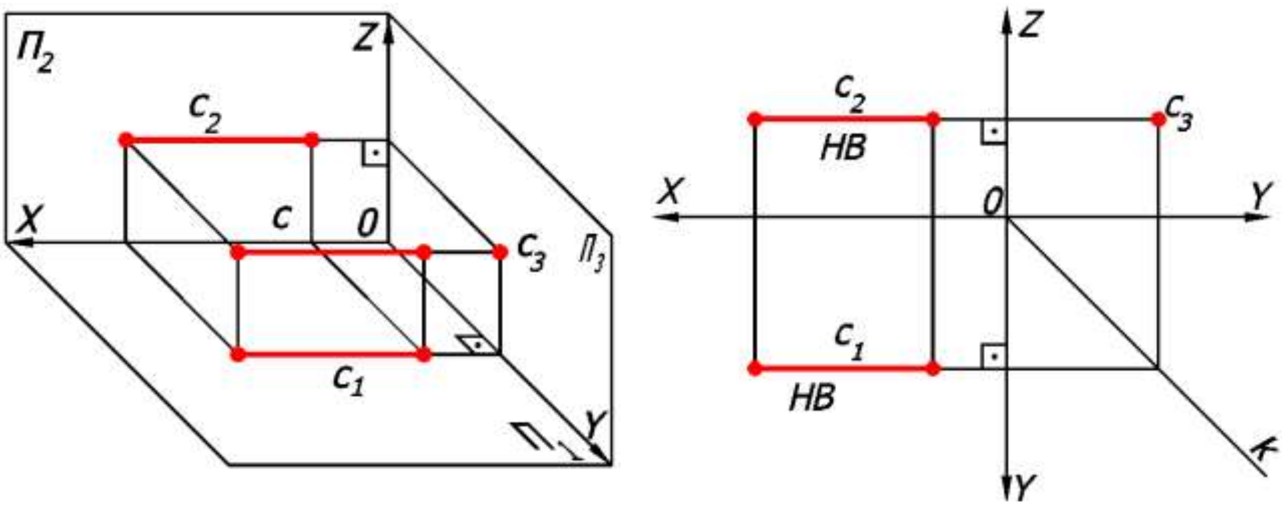
б) ***Фронтально проецирующая прямая*** – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекции: $b \perp \pi_2$ (рисунок 5.7, а). Такая прямая проецируется на плоскость π_2 в точку; ее горизонтальная проекция перпендикулярная оси X (рисунок 5.7, б). Отрезки прямой на горизонтальной проекции проецируются в натуральную величину.





а) б)

Рисунок 5.7 – Фронтально проецирующая прямая в) ***Профильно проецирующая прямая*** – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекции: $c \perp \pi_3$ (рисунок 5.8, а). Такая прямая проецируется на плоскость π_3 в точку; ее горизонтальная и фронтальная проекция параллельны оси X (рисунок 5.8, б). Отрезки прямой на горизонтальной и фронтальной проекциях проецируются в натуральную величину.

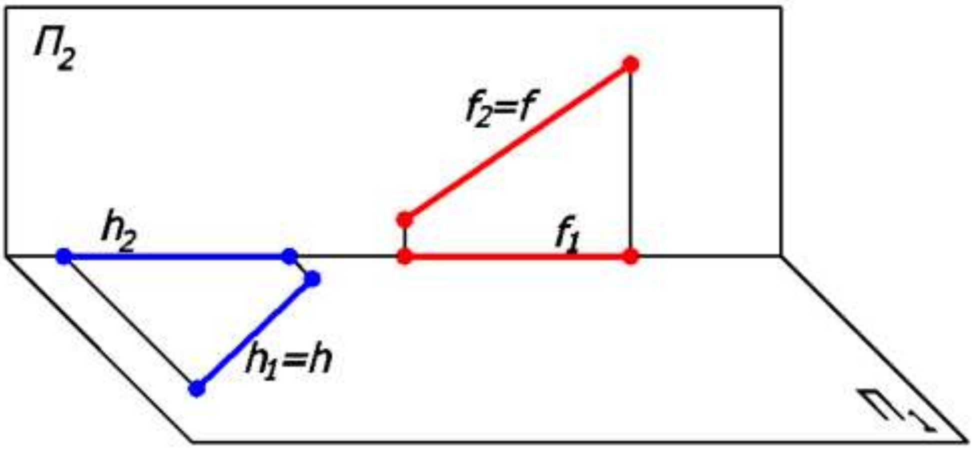


а) б)

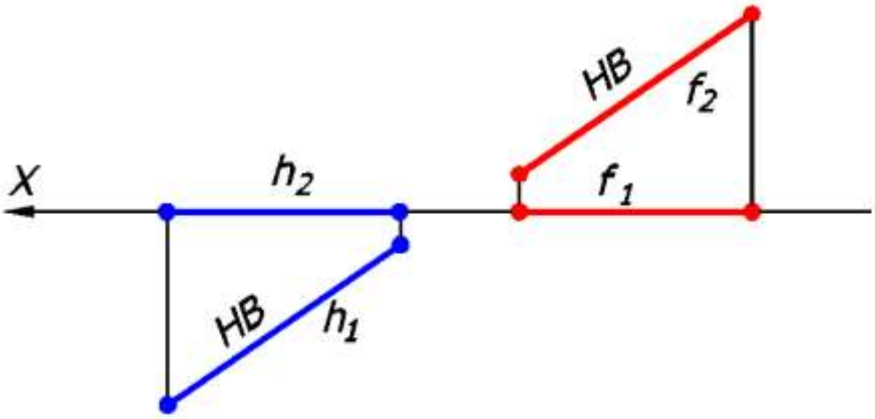
Рисунок 5.8 – Профильно проецирующая прямая

5.3.3 Прямая, принадлежащая плоскости проекции

Характерным признаком для комплексного чертежа, на котором изображена прямая, принадлежащая плоскости проекции, будет принадлежность одной из ее проекций оси. На рисунке 5.9, а, показаны проекции прямых h и f. Прямая h принадлежит плоскости π_1, прямая f – плоскости π_2: $h \subset \pi_1$; $f \subset \pi_2$ (рисунок 5.9, б).



а)



б)

Рисунок 5.9 – Прямая, принадлежащая плоскости проекции

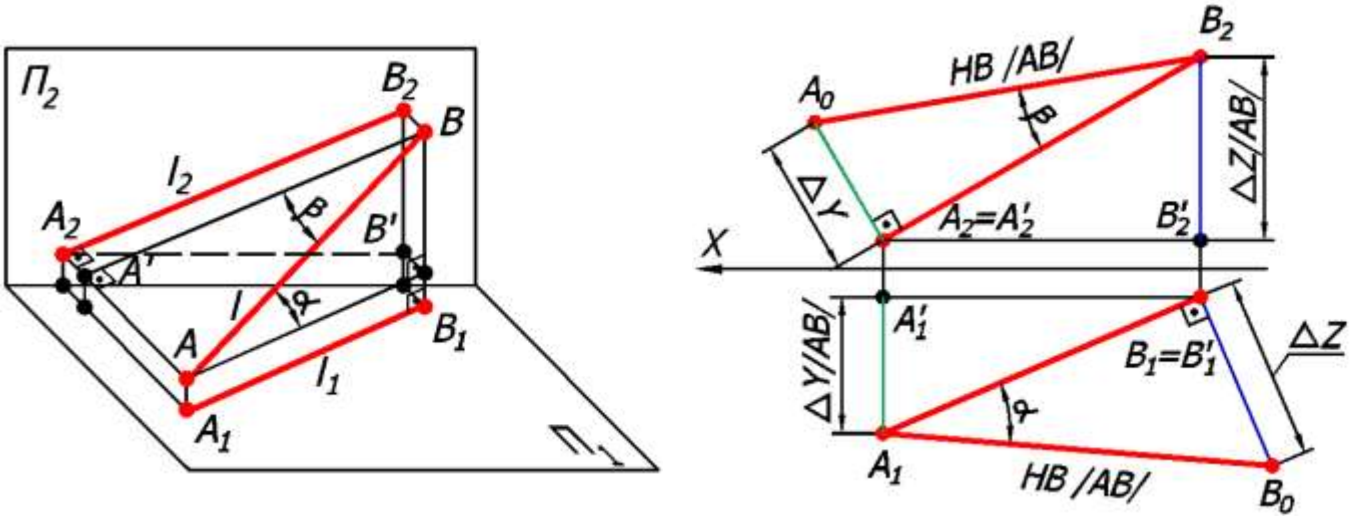
4.6 Графическое определение натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона ее к плоскостям проекций

Во всех перечисленных выше случаях частного расположения прямой относительно плоскостей проекций на одной из каких-нибудь проекций эта прямая дана в натуральную величину: горизонтальная прямая – на горизонтальной проекции, горизонтально проецирующая – на фронтальной проекции, профильно проецирующая – на горизонтальной и фронтальной проекциях и т.д.

Иногда необходимо определить натуральную величину отрезка прямой общего положения, которая никогда не проецируется в натуральную величину.

Для решения такой задачи можно использовать ***метод прямоугольного треугольника***.

Такая задача представлена в пространственной модели на рисунке 5.10, а.



а) б)

Рисунок 5.10 – Определение натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона ее к плоскостям проекций

Пусть в системе двух плоскостей проекций дана прямая общего положения, натуральную величину отрезка *[AB]* которой надо определить. Следует перенести плоскость π_1 в точку *A* прямой *[AB]* и найти линию пересечения проецирующей плоскости с плоскостью π_1. Очевидно, что $[AB^1]$ параллельна $[A_1B_1]$. Теперь *[AB]* можно представить как гипотенузу прямоугольного треугольника ABB^1, где один катет – горизонтальная проекция прямой *[AB]*, второй катет – разность высот точек *A* и *B*. Отсюда: натуральная величина отрезка прямой общего положения есть гипотенуза прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция на какой-либо плоскости проекции, а другим – относительная разность расстояний концов второй проекции до той плоскости, на которой расположен первый катет. Если на комплексном чертеже (рисунок 5.10, б) прямой *[AB]* взять ее горизонтальную проекцию за один катет, построить к ней в точке A_1 или B_1 прямой угол и отложить на нем отрезок, равный разности высот точек *A* и *B* (отрезок $[B_2B_2^1]$ на фронтальной проекции), то гипотенуза этого треугольника будет натуральной величиной отрезка *[AB]*. Угол между гипотенузой и горизонтальной проекцией прямой (угол α) будет углом наклона этой прямой к горизонтальной плоскости проекции π_1. Если аналогичные построения осуществить на фронтальной плоскости проекции, где за второй катет взять разность удаления точек *A* и *B* от фронтальной плоскости проекции, то определятся *[AB]* и угол наклона к плоскости π_2 - угол β.

5.7 Деление отрезка прямой общего положения в отношении m:n

В одном из концов отрезка *B*, под произвольным углом α (удобнее острым), проводится прямая *l*, на которой откладывается *n* равных между собой отрезков. Конечная ее точка *C* соединяется прямой со вторым концом отрезка *A*. Прямые, параллельные *AC,* отсекут на *AB* равные отрезки. На рисунке 5.11 приведен пример деления отрезка *[AB]* прямой общего положения в отношении *2:4*.

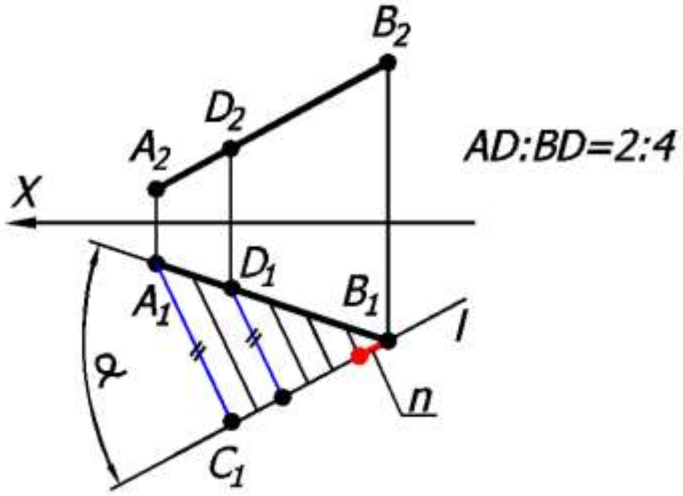


Рисунок 5.11 – Деление отрезка прямой общего положения в отношении 2:4

5.8 Вопросы для самоконтроля

1. Как на комплексном чертеже задается прямая линия?

2. Приведите классификацию прямых в зависимости от их положения в пространстве относительно плоскостей проекций.

3. Что называется следами прямой? Как они строятся на эпюре?

4. В чем заключается метод прямоугольного треугольника?

5. Определите углы наклона прямой линии к плоскостям проекций.

6. Разделите отрезок прямой общего положения на равные части.

6 Комплексный чертеж плоскости

Плоскость является простейшей поверхностью. Положение плоскости в пространстве однозначно определяется тремя различными точками A, B и C, не принадлежащими одной прямой. Поэтому для задания плоскости на комплексном чертеже достаточно указать проекции (рисунок 6.1) (***способы задания плоскости на чертеже***):

1) трех различных, не принадлежащих одной прямой точек (рисунок 6.1, а);

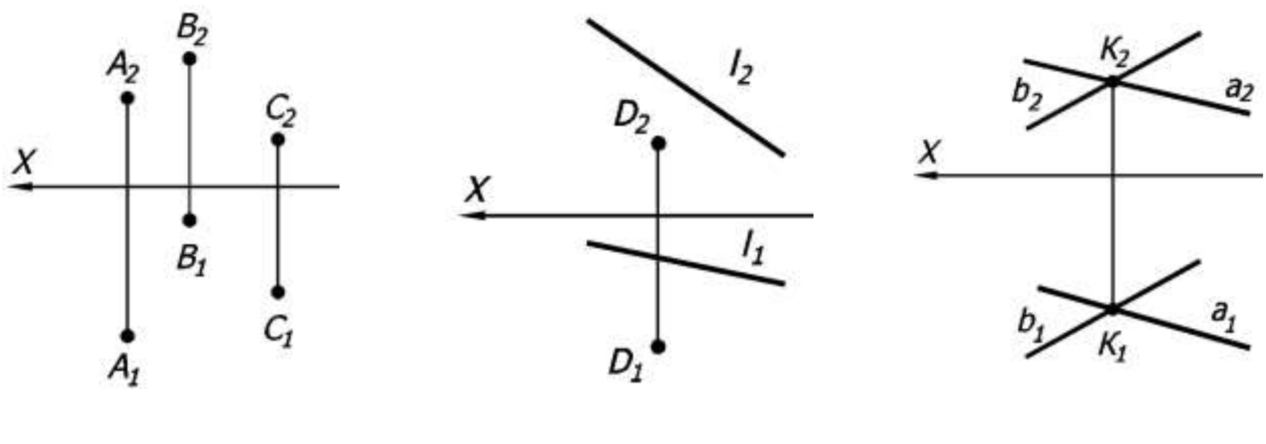
2) прямой и не принадлежащей ей точки (рисунок 6.1, б);

3) двух пересекающихся прямых (рисунок 6.1, в);

4) двух параллельных прямых, пересекающихся в несобственной точке (рисунок 6.1, г);

5) плоскость может быть задана также проекциями отсека плоской фигуры *Ф*, например треугольника (рисунок 6.1, д).

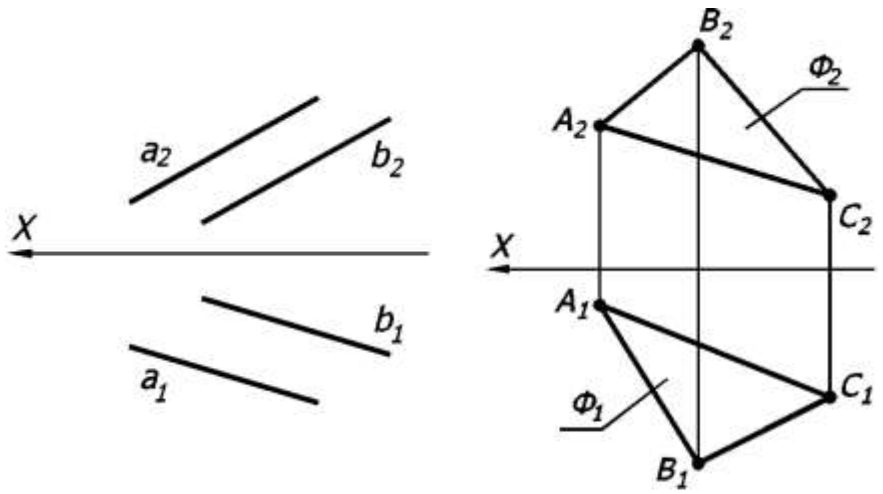
6) В некоторых случаях целесообразно задавать плоскость не произвольными пересекающимися прямыми, а прямыми, по которым эта плоскость пересекает плоскости проекции. Такой вариант задания плоскости называется заданием плоскости следами. На рисунке 6.2, а показана плоскость P, заданная следами. **Следом плоскости** называется прямая, по которой плоскость пересекает плоскости проекций. P_1 – ***горизонтальный след плоскости***. P_2 – ***фронтальный след плоскости*** (рисунок 6.2, б). Точка P_x пересечения оси x с плоскостью P называется ***точкой схода следов***, так как в этой точке сходятся два следа.



а) тремя различными, не принадлежащими одной прямой точками

б) прямой и не принадлежащей ей точкой

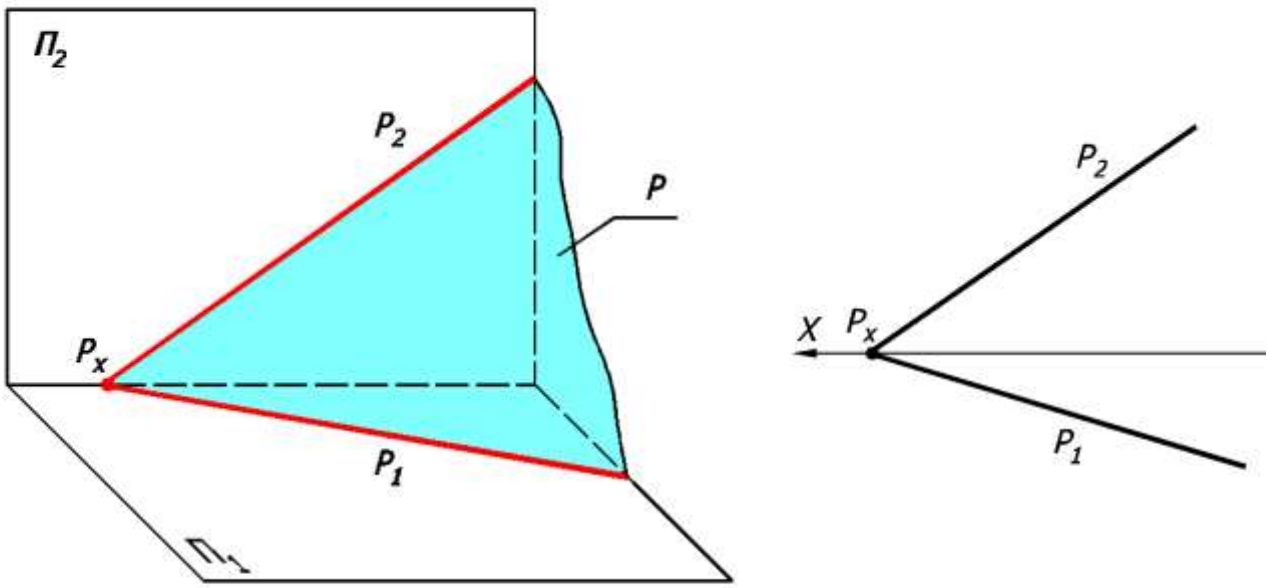
в) двумя пересекающимися прямыми



г) двумя параллельными прямыми

д) отсеком плоской фигуры

Рисунок 6.1 – Способы задания плоскости на чертеже



а) пространственный макет

б) комплексный чертеж

Рисунок 6.2 – Задание плоскости на чертеже следами

Задание плоскости следами обладает преимуществом перед другими вариантами ее изображения на комплексном чертеже: 1) сохраняется наглядность изображения, что позволяет легко представить плоскость в пространстве; 2) достаточно указать только по одной проекции двух прямых, так как другая проекция каждой прямой совпадает с осью.

Показанные на рисунках 6.1, 6.2 плоскости – **плоскости общего положения относительно плоскостей проекций**. Угол наклона таких плоскостей не равен 0 или 90^0.

6.1 Частные случаи расположения плоскости относительно плоскостей проекций

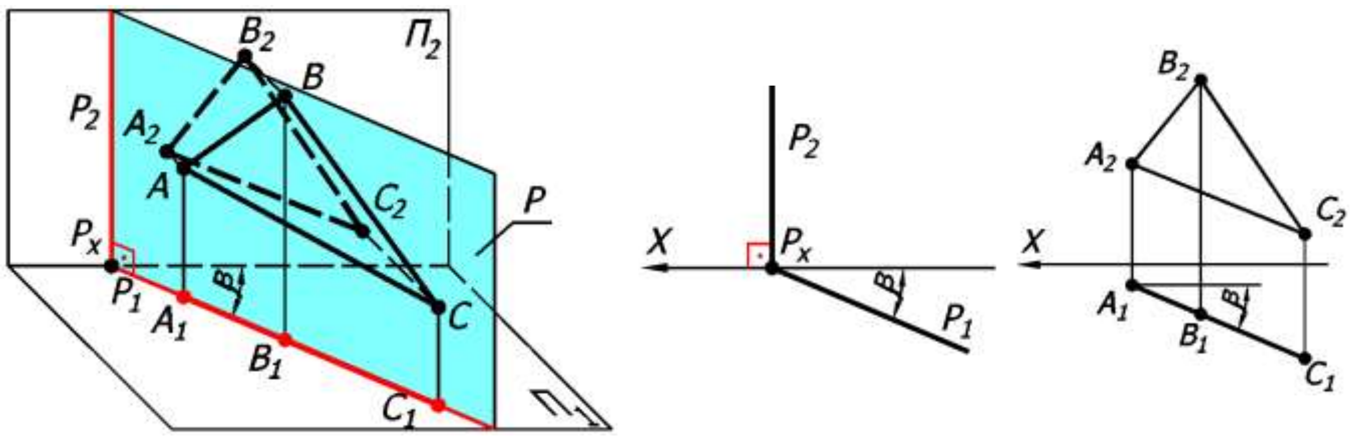
Кроме рассмотренного общего случая, плоскость по отношению к плоскостям проекций может занимать следующие частные положения:

– плоскость перпендикулярна плоскости проекции – *проецирующая плоскость;*

– плоскость параллельна плоскости проекции – *плоскость уровня.*

6.1.1 Проецирующие плоскости

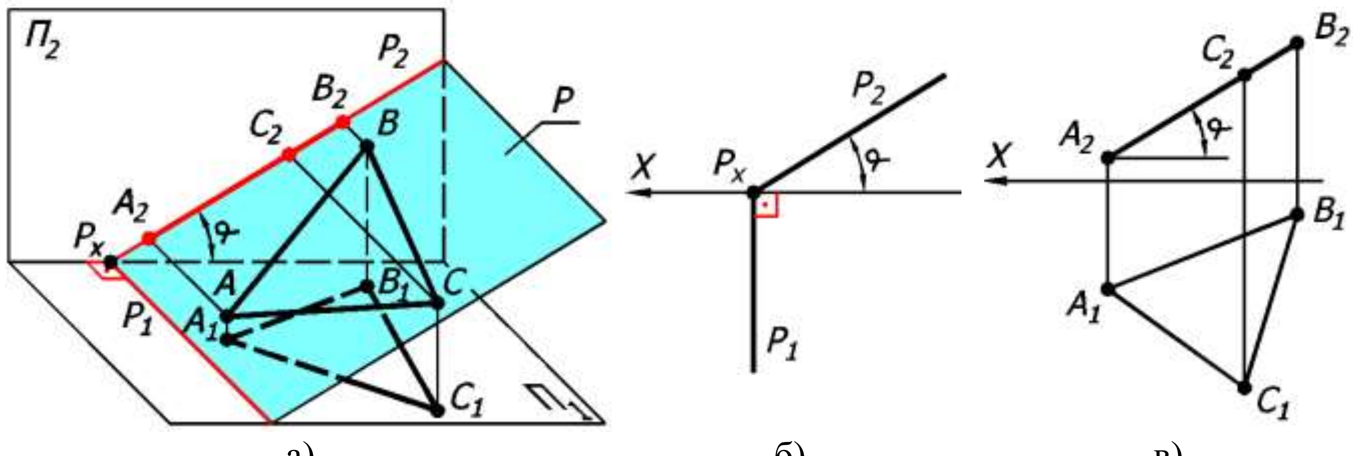
1. ***Горизонтально проецирующая плоскость*** – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекции: $P \perp \pi_1$ (рисунок 6.3, а). Горизонтальная проекция такой плоскости вырождается в прямую линию, а угол между этой прямой и осью x – истинный угол наклона плоскости к плоскости π_2. Горизонтальные проекции всех точек, линий и фигур, принадлежащих плоскости P, будут совпадать с вырожденной проекцией плоскости (рисунок 6.3, б, в).



а) б) в)

Рисунок 6.3 – Горизонтально проецирующая плоскость

2. ***Фронтально проецирующая плоскость*** – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекции: $P \perp \pi_2$ (рисунок 6.4, а). Фронтальная проекция такой плоскости вырождается в прямую линию, а угол наклона ее к оси x есть истинная величина угла наклона плоскости P к плоскости π_1. Фронтальные проекции всех точек, линий и плоских фигур, лежащих в плоскости P, совпадут с фронтальным следом плоскости (рисунок 6.4, б, в).

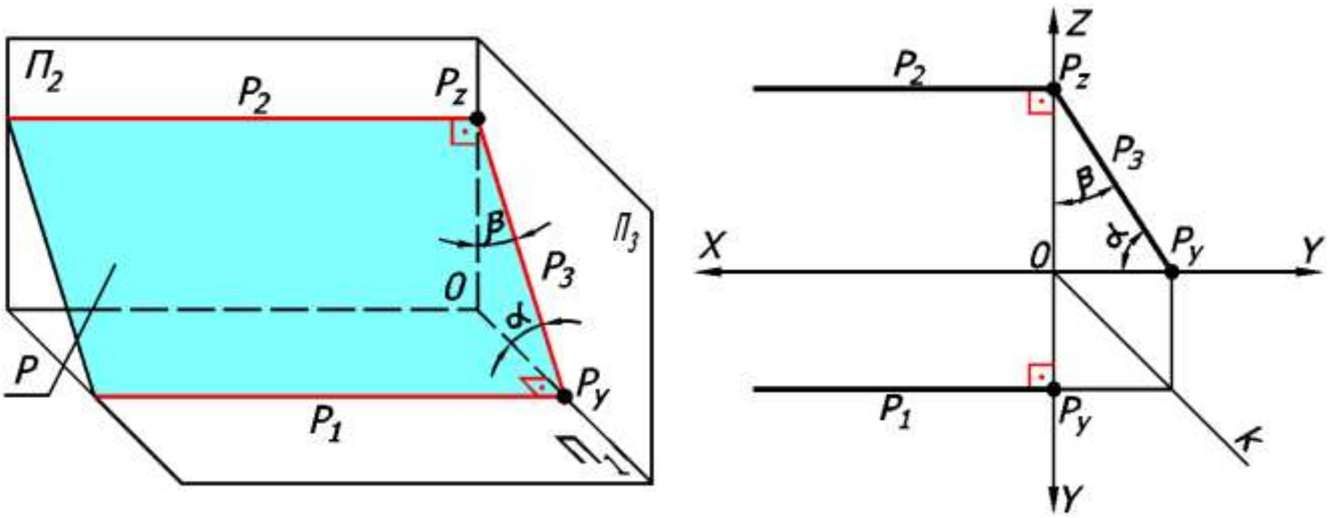


а) б) в)

Рисунок 6.4 – Фронтально проецирующая плоскость

3. ***Профильно проецирующая плоскость*** – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекции: $P \perp \pi_3$ (рисунок 6.5, а). Профильная проекция есть прямая линия, а углы наклона ее к осям y и z есть истинные углы наклона плоскости к плоскостям проекций π_1 и π_2 соответственно. Профильные проек-

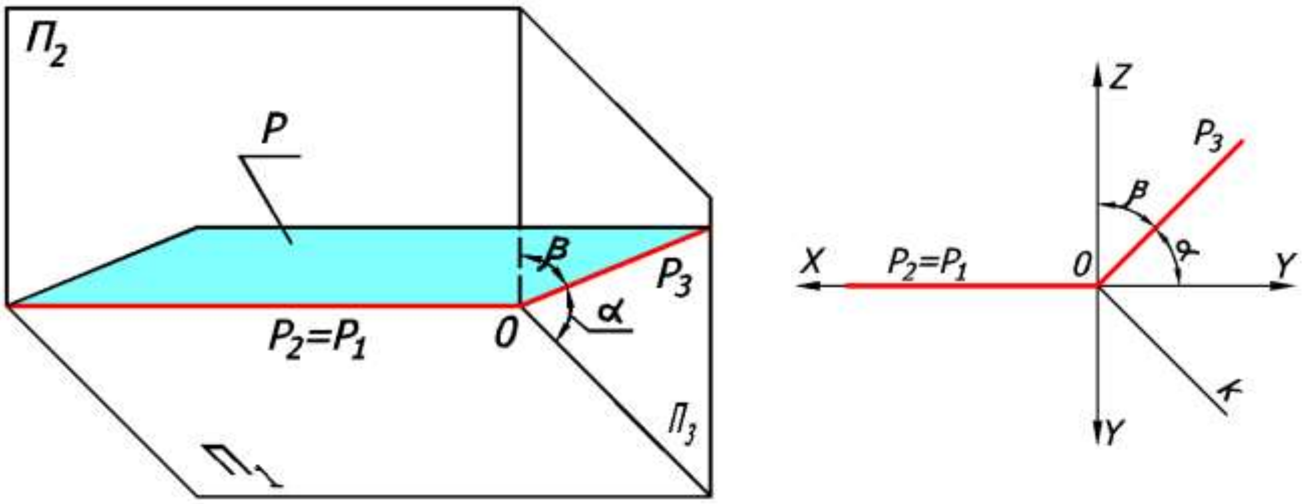
ции всех точек, линий и плоских фигур, лежащих в плоскости P, будут находиться на профильном следе плоскости (рисунок 6.5, б).



а) пространственный макет б) комплексный чертеж

Рисунок 6.5 – Профильно проецирующая плоскость

Профильно проецирующая плоскость, проходящая через ось x, называется ***осевой***, а при равных углах наклона ее к плоскостям проекций π_1 и π_2 – ***биссекторной*** (рисунок 6.6, а, б).



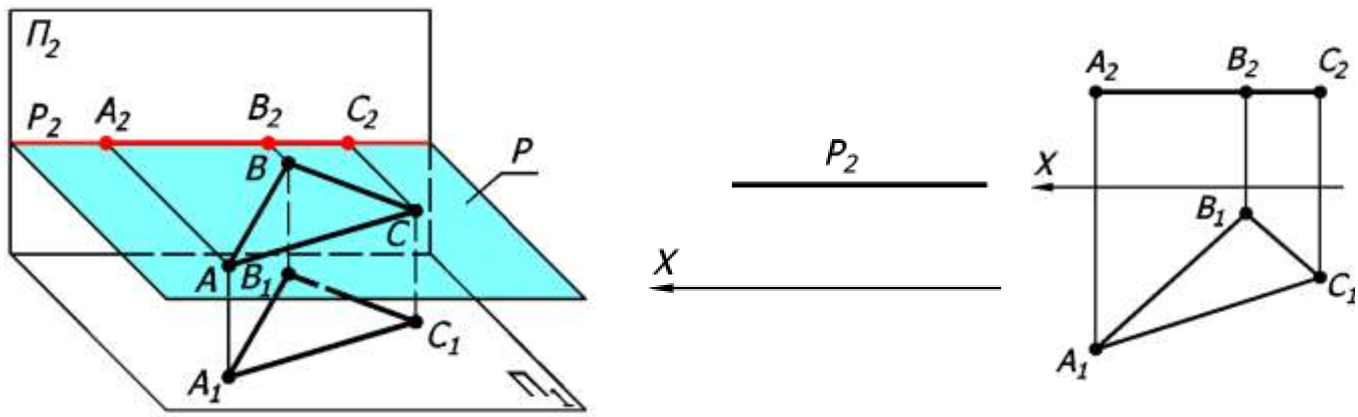
а) пространственный макет б) комплексный чертеж

Рисунок 6.6 – Профильно проецирующая плоскость:

осевая и биссекторная

6.1.2 Плоскости уровня

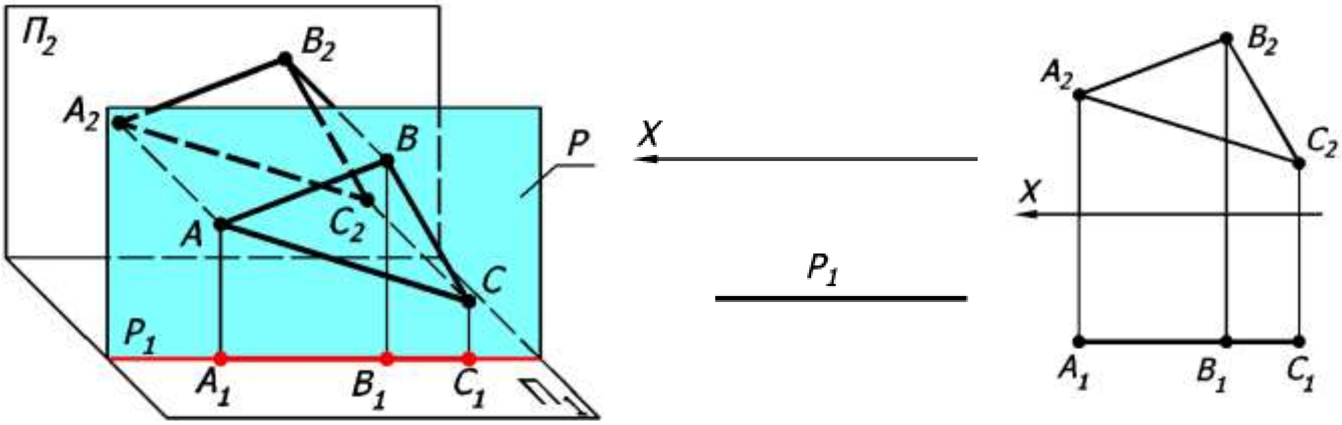
1. ***Горизонтальная плоскость уровня*** – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекции: $P \parallel \pi_1$ (рисунок 6.7, а). Фронтальный след такой плоскости будет параллелен оси x, а все плоские фигуры, расположенные в плоскости P, на горизонтальную проекцию спроецируются в истинную величину (рисунок 6.7, б, в).



а) б) в)

Рисунок 6.7 – Горизонтальная плоскость уровня

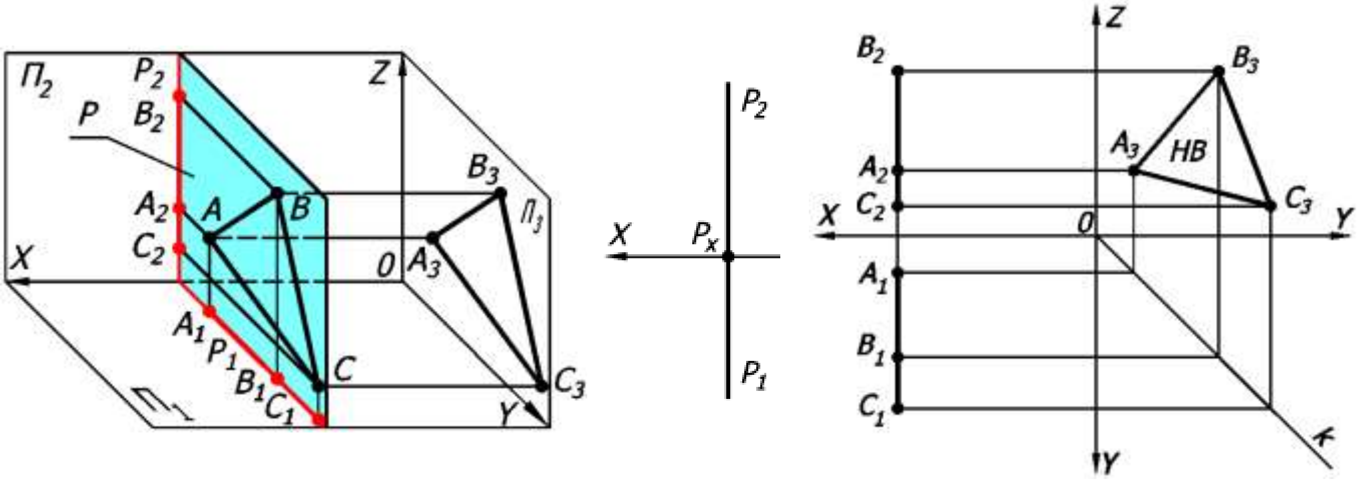
2. ***Фронтальная плоскость уровня*** – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекции: $P \parallel \pi_2$ (рисунок 6.8, а). Фронтальная проекция всех плоских фигур, лежащих в P, будет отображать истинную их величину, а горизонтальная проекция плоскости P выродится в прямую линию, параллельную оси x (рисунок 6.8, б, в).



а) б) в)

Рисунок 6.8 – Фронтальная плоскость уровня

3. ***Профильная плоскость уровня*** – плоскость, параллельная профильной плоскости проекции: $P \parallel \pi_3$ (рисунок 6.9, а). Горизонтальная и фронтальная проекции этой плоскости выродятся в прямую линию, перпендикулярную оси x, и все точки, лежащие в этой плоскости, будут проецироваться на эту прямую. Профильная проекция плоскости P будет отображать истинную величину всех плоских фигур, лежащих в этой плоскости (рисунок 6.9, б, в).



а) б) в)

Рисунок 6.9 – Профильная плоскость уровня

6.2 Вопросы для самоконтроля

1. Что такое плоскость?

2. Какими способами задается плоскость на комплексном чертеже?

3. Что называется следами плоскости?

4. Перечислите преимущества задания плоскости следами перед другими способами ее задания на комплексном чертеже?

5. Что такое плоскость общего положения относительно плоскостей проекций?

5. Приведите классификацию плоскостей частного положения по отношению к плоскостям проекций.

6. Опишите проецирующие плоскости.

7. Опишите плоскости уровня.

7 Взаимное положение точек, прямых и плоскостей

В инженерной практике часто приходится решать как позиционные, так и метрические задачи. **Позиционные задачи** – задачи на определение общих элементов различных геометрических фигур. К ним относятся задачи на взаимопринадлежность (взять точку на линии или на поверхности, провести поверхность через данные линии и так далее) и задачи на пересечение различных геометрических фигур (найти точку пересечения с поверхностью или линию пересечения двух поверхностей и так далее).

Рассмотрим методы решения позиционных задач на примере простейших фигур – прямых линий и плоскостей. Параллельность геометрических фигур является частным случаем их пересечения, так как параллельные прямые пересекаются в несобственной точке, параллельные плоскости пересекаются по несобственной прямой.

Метрическими называются задачи, в которых необходимо определить значения геометрических величин – длин отрезков, размеры углов, расстояние между геометрическими фигурами, площади, объемы и так далее.

Решение многих метрических задач требует построения перпендикулярных прямых и плоскостей и основывается на свойствах ортогонального проецирования прямого угла.

7.1 Взаимное положение точек

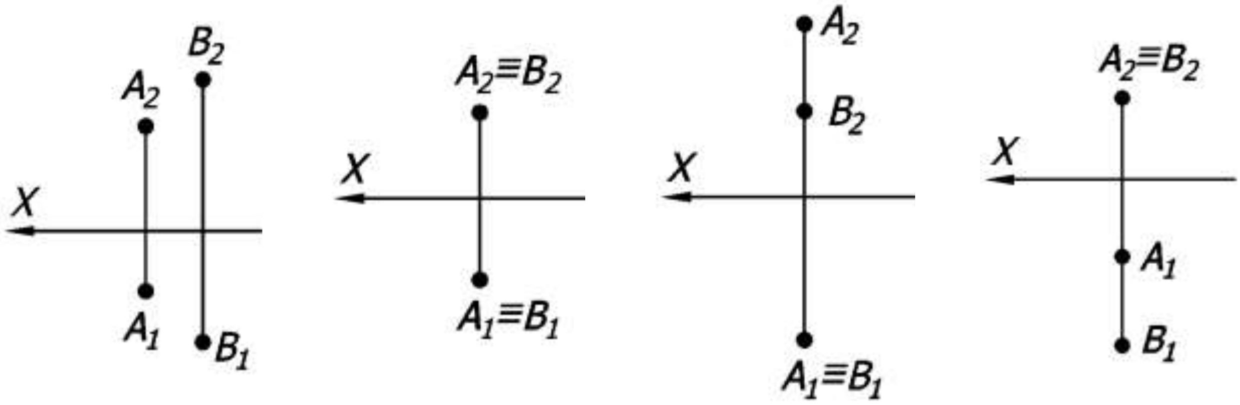
В зависимости от расположения в пространстве относительно друг друга точки могут быть:

– не взаимосвязанными: на комплексном чертеже такие точки определены каждая своими проекциями (рисунок 7.1, а);

– совпадающими (рисунок 7.1, б);

– конкурирующими относительно плоскости π_1; горизонтальные проекции этих точек совпадают (рисунок 7.1, в);

– конкурирующими относительно плоскости π_2; фронтальные проекции этих точек совпадают (рисунок 7.1, г).



а) б) в) г)

Рисунок 7.1 – Взаимное положение точек

7.1.1 Условия видимости

Для большей наглядности чертежа прибегают к некоторой условной видимости. Видимые для наблюдателя линии показываются сплошными, невидимые – штриховыми. При определении видимости на комплексном чертеже предполагается следующее:

– наблюдатель всегда находится пред плоскостью проекций;

– луч зрения от наблюдателя всегда перпендикулярен той плоскости, относительно которой определяется видимость;

– плоскости и поверхности непрозрачны.

Видимость на комплексном чертеже определяется с помощью конкурирующих точек. Две **точки**, лежащие на одном проецирующем луче к плоскости проекций, называются **конкурирующими относительно этой плоскости**. При этом видимой считается точка, ближайшая в направлении проецирования, или, что то же самое, точка, которая дальше от плоскости проекции. Например, на рисунке 7.1, в точка *A* видима относительно плоскости π_1, точка *B* невидима; на рисунке 7.1, г точка *B* видима относительно плоскости π_2, точка *A* невидима.

7.2 Взаимное положение точки и прямой

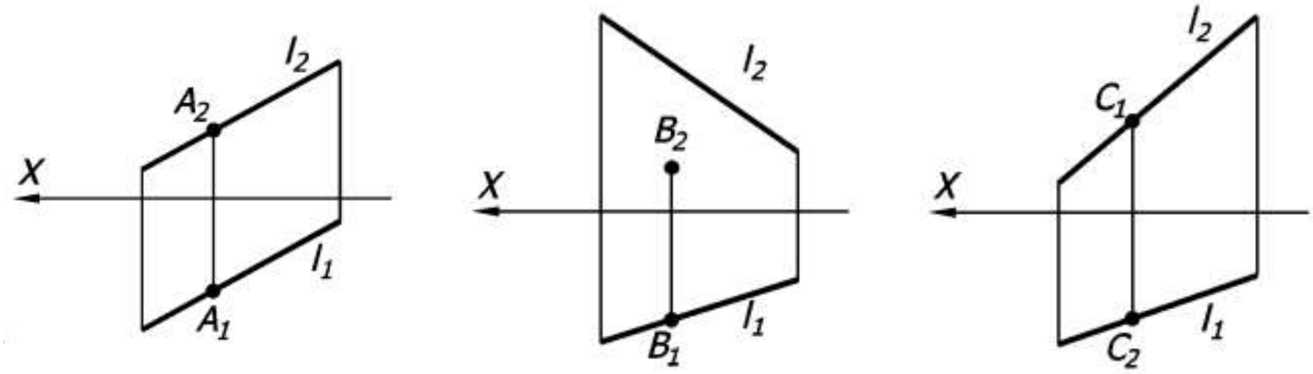
Точка относительно прямой может занимать определенное положение: принадлежать или не принадлежать прямой.

1. Точка *лежит на прямой (принадлежит прямой)*, если обе ее проекции лежат на одноименных проекциях прямой (рисунок 7.2, а).

$$A \in l = \begin{pmatrix} A_1 \in l_1 \\ A_2 \in l_2 \end{pmatrix}$$

2. Точка *не лежит на прямой (не принадлежит прямой)*, если хотя бы одна из ее проекций не лежит на одноименной проекции прямой (рисунок 7.2, б, в).

$$B \notin l = \begin{pmatrix} B_1 \in l_1 \\ B_2 \notin l_2 \end{pmatrix}; \ C \notin l = \begin{pmatrix} C_1 \notin l_1 \\ C_2 \notin l_2 \end{pmatrix}$$



а) б) в)

Рисунок 7.2 – Взаимное положение точки и прямой

7.3 Взаимное расположение двух прямых

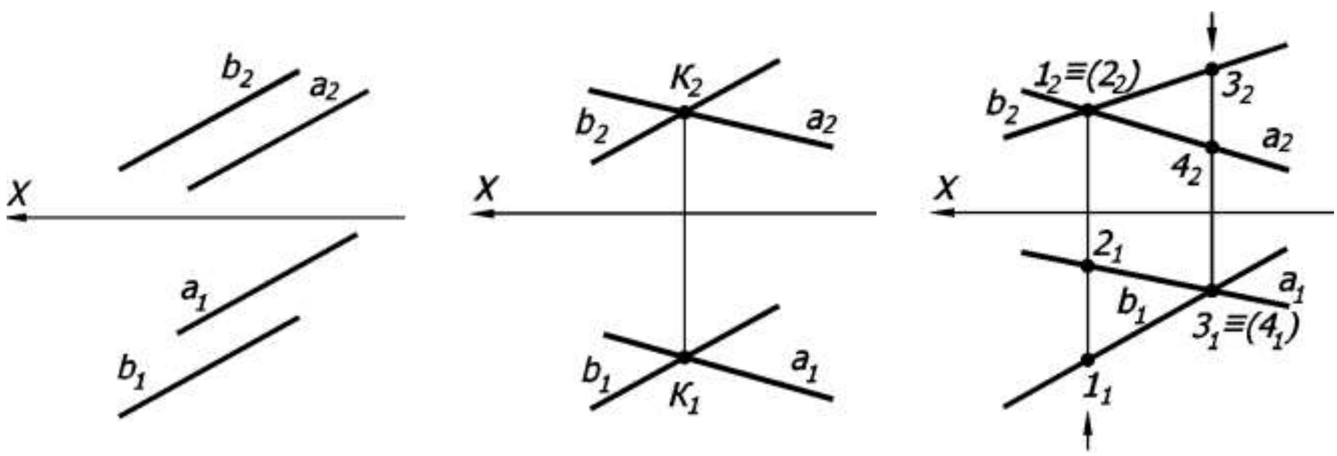
В пространстве прямые относительно друг друга могут занимать различные положения. Это могут быть:

1) ***параллельные прямые***; *одноименные* проекции таких прямых параллельны (рисунок 7.3, а) $a \parallel b = \begin{pmatrix} a_1 \parallel b_1 \\ a_2 \parallel b_2 \end{pmatrix}$;

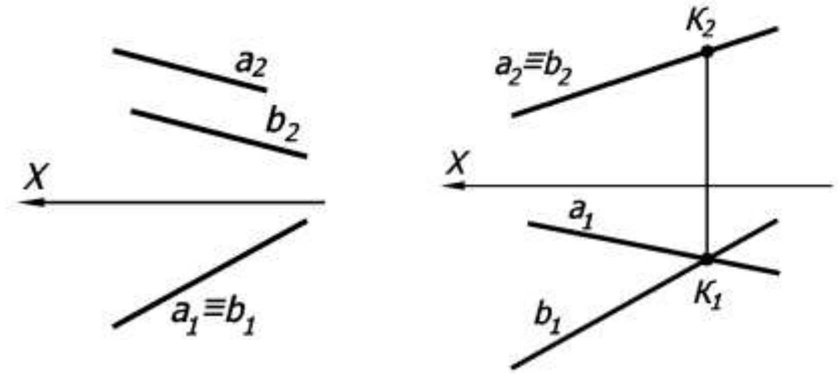
2) ***пересекающиеся прямые***; *одноименные* проекции таких прямых пересекаются; точки пересечения проекций при этом должны находиться на одной линии связи (рисунок 7.3, б) $a \cap b = \begin{pmatrix} a_1 \cap b_1 = K_1 \\ a_2 \cap b_2 = K_2 \end{pmatrix}$;

3) ***скрещивающиеся прямые***; одноименные проекции таких прямых могут пересекаться или не пересекаться (рисунок 7.3, в); точки пересечения этих проекций не лежат на одной линии связи. Эти *точки* не являются общими для прямых и называются *конкурирующими*;

4) ***конкурирующие прямые***: относительно горизонтальной плоскости проекции π_1, когда горизонтальные проекции этих прямых совпадают (рисунок 7.3, г); относительно фронтальной плоскости проекции π_2, когда фронтальные проекции прямых совпадают (рисунок 7.3, д).



а) б) в)



г) д)

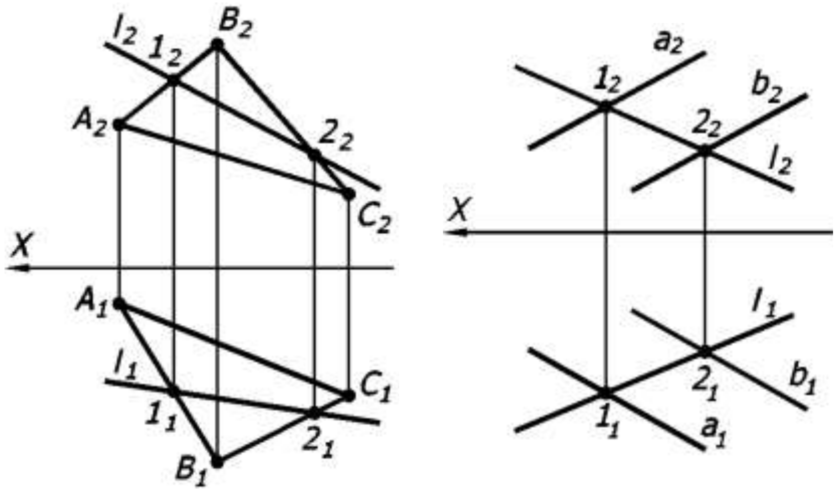
Рисунок 7.3 – Взаимное положение двух прямых

7.4 Взаимное положение прямой и плоскости, точки и плоскости

7.4.1 Прямая, лежащая в плоскости (принадлежащая плоскости)

Для определения **прямой, лежащей в плоскости (принадлежащей плоскости)** (рисунок 7.4, а), необходимо воспользоваться одной из аксиом геометрии: если две точки прямой лежат в плоскости, то и сама прямая лежит в этой плоскости. Значит, если на комплексном чертеже есть две точки, принадлежащие и прямой, и плоскости, то такая прямая лежит в этой плоскости (рисунок 7.4, б).

Для определения или построения прямой, лежащей в плоскости, заданной следами, необходимо помнить, что следы прямой лежат на следах плоскости (рисунок 7.5).



а) б)

Рисунок 7.4 – Прямая, лежащая в плоскости

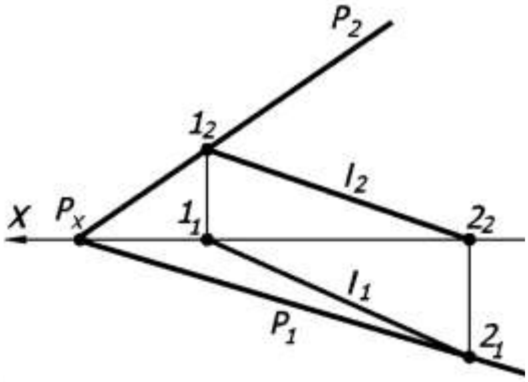
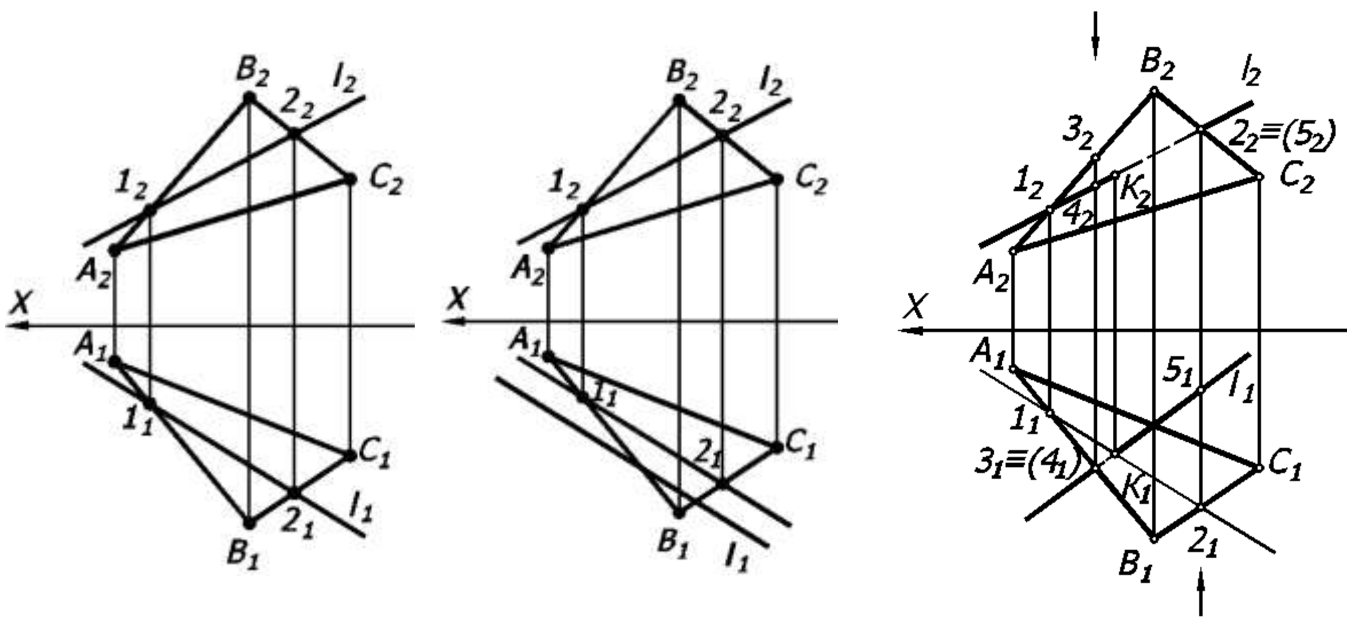


Рисунок 7.5 – Прямая, лежащая в плоскости, заданной следами

7.4.2 Прямая, не лежащая в плоскости (параллельная плоскости)

Для определения положения **прямой, не лежащей в плоскости (параллельной плоскости)**, относительно плоскости общего положения достаточно взять прямую, конкурирующую с заданной прямой относительно какой-либо плоскости проекции и лежащую в заданной плоскости (рисунок 7.6, а, б).



а) б) в)

Рисунок 7.6 – Прямая, не лежащая в плоскости

Прямая *(12)* конкурирует с прямой *l* относительно плоскости π_2 и принадлежит плоскости треугольника. Далее следует построить вторую проекцию конкурирующей прямой и посмотреть, какое положение она займет относительно заданной прямой. Если построенная проекция прямой *(12)* параллельна проекции заданной прямой *l*, то прямая и плоскость параллельны; если совпадает – то прямая лежит в плоскости (частный случай параллельности); если пересекает – то прямая пересекает плоскость (рисунок 7.6, в).

$$((1_1 2_1) \equiv l_1) \Rightarrow l \subset \Sigma(A,B,C); ((1_1 2_1) // l_1) \Rightarrow l // \Sigma(A,B,C);$$
$$((1_1 2_1) \cap l_1) \Rightarrow l \cap \Sigma(A,B,C)$$

7.4.3 Прямая, пересекающая плоскость. Условия видимости

Задача на определение точки пересечения прямой с плоскостью является одной из основных позиционных задач. Для определения точки пересечения необходимо сделать построения, описанные выше: взять прямую, конкурирующую с заданной прямой и лежащую в заданной плоскости (рисунок 7.6, в). Построить вторую проекцию конкурирующей прямой и, если она пересекает одноименную проекцию заданной прямой, найти точку пересечения. Построенная точка и будет точкой пересечения прямой с заданной плоскостью.

Для *определения видимости прямой* относительно плоскости треугольника достаточно использовать *конкурирующие точки*, принадлежащие и прямой, и плоскости. Например, для определения видимости прямой *l* относительно плоскости π_1 используются конкурирующие точки *3* и *4*: $3 \in (AB), 4 \in l.$ Определяются фронтальные проекции этих точек. Точка 3_2 находится выше относительно плоскости π_1, следовательно, прямая *(AB)* перекрывает прямую *l*. Значит, отрезок прямой $[K_1 4_1]$ невидим относительно плоскости треугольника. Аналогично определяется невидимый отрезок прямой l относительно плоскости π_2 – $[K_2 5_2]$. Для этого используются конкурирующие относительно плоскости π_2 точки 2 и 5: $2 \in (BC), 5 \in l$.

7.4.4 Взаимное положение точки и плоскости

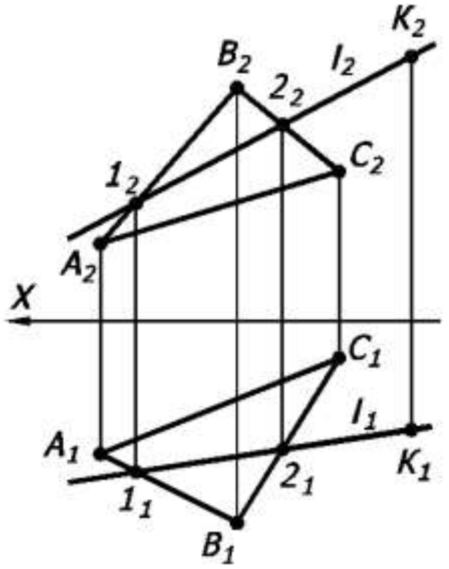
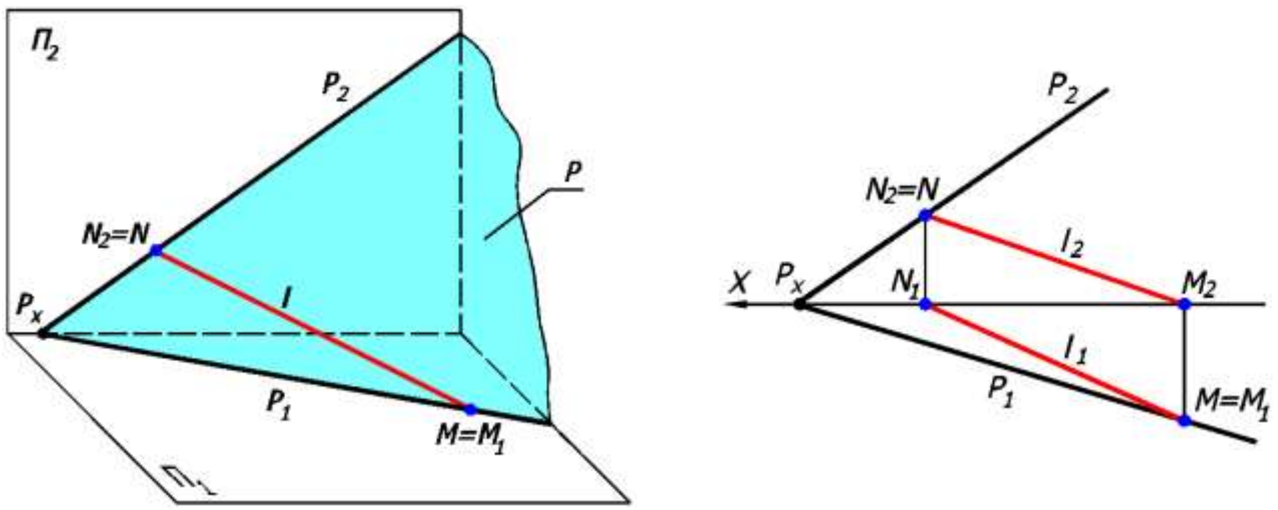


Рисунок 7.7 – Взаимное положение точки и плоскости

Точка относительно плоскости может занимать двоякое положение: принадлежать плоскости или лежать вне ее. Для определения положения точки относительно плоскости необходимо взять прямую (рисунок 7.7), конкурирующую с точкой и лежащую в заданной плоскости. Построить вторую проекцию этой прямой, и если окажется, что построенная проекция прямой совпадает с одноименной проекцией точки, значит, точка принадлежит плоскости; если не совпадает – то точка лежит вне плоскости.

7.4.5 Следы прямой, лежащей в плоскости

Как видно из пространственного макета, если прямая лежит в плоскости, то следы этой прямой будут лежать на следах этой плоскости (рисунок 7.8, а).



а) б)

Рисунок 7.8 – Следы прямой, лежащей в плоскости

Об этом рассматривалось выше, в пункте 7.4.1. Это положение намного облегчает решение ряда задач, особенно для случаев, когда плоскость задана следами. Поэтому, если необходимо определить, лежит ли заданная прямая в плоскости, достаточно знать, лежат ли ее следы на следах плоскости (рисунок 7.8, б).

7.4.6 Главные линии плоскости

Горизонталь – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекции (рисунок 7.9, а):

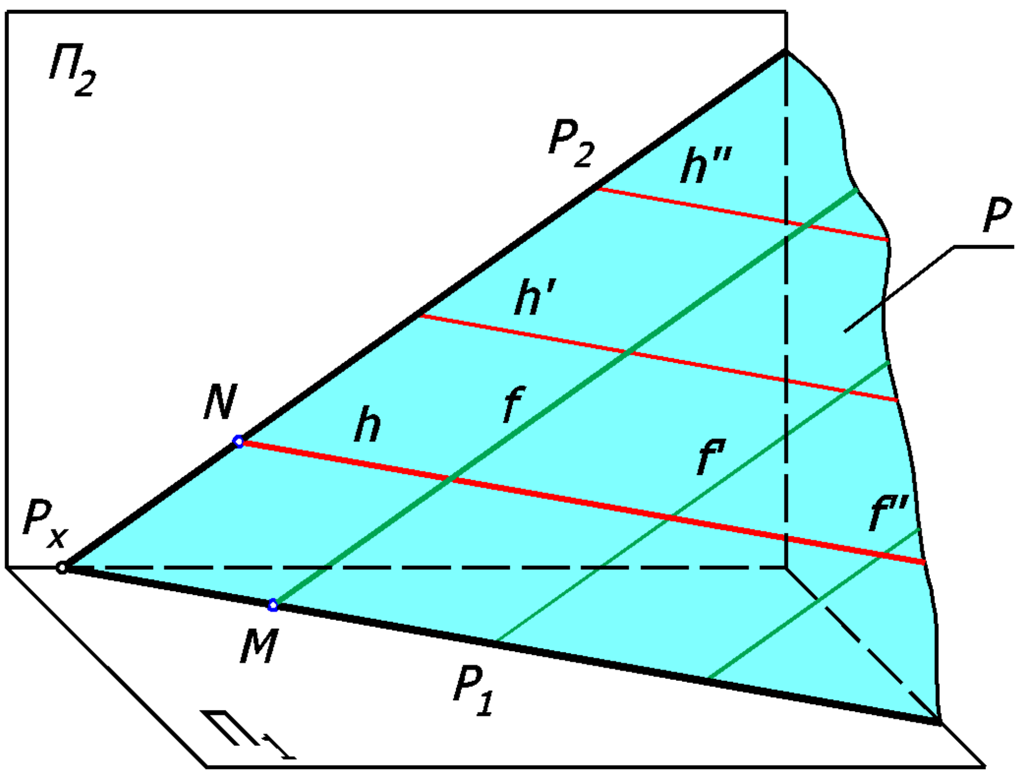
$$(h \in P) \wedge (h // \pi_1) \Rightarrow h_1 // P_1,\ \ h_2 // оси\ x$$

Другими словами, горизонталь – это горизонтальная прямая, принадлежащая плоскости. Поэтому комплексный чертеж горизонтали – это комплексный чертеж горизонтальной прямой (h_2 // оси x), одна точка которой принадлежит плоскости (фронтальный след горизонтали), а вместо второй точки дано направление – горизонталь параллельна горизонтальному следу плоскости, так как он тоже горизонталь (рисунок 7.9, б). Если плоскость задана треугольником, комплексный чертеж горизонтали будет таким, как на рисунке 7.9, в.

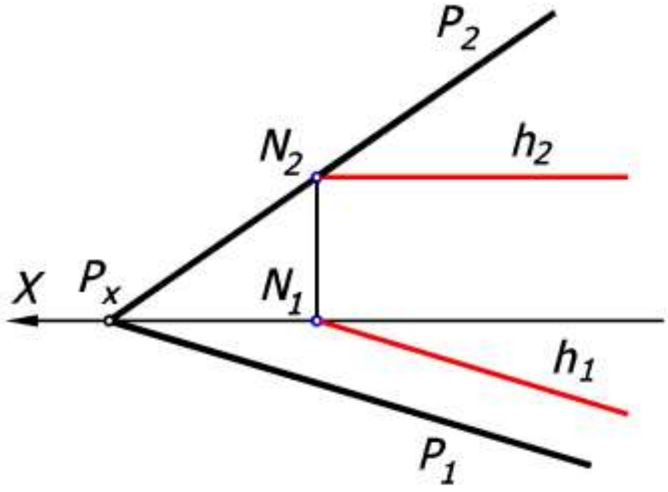
Фронталь – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекции (рисунок 7.9, а):

$$(f \in P) \wedge (f \,//\, \pi_2) \Rightarrow f_2 \,//\, P_2, \quad f_1 \,//\, оси\ x$$

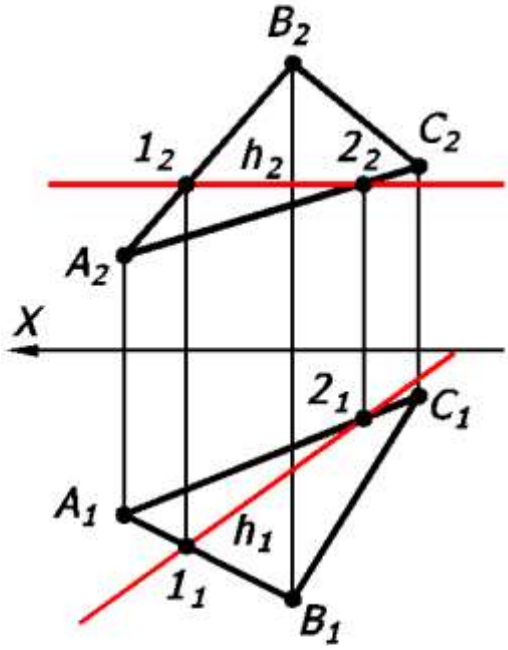
То есть фронталь – фронтальная прямая, лежащая в плоскости. Ее комплексный чертеж: горизонтальная проекция параллельна оси *x* (f_1 // оси *x*), фронтальная проекция параллельна фронтальному следу плоскости; общая точка, принадлежащая и прямой, и плоскости и легко определяющаяся на комплексном чертеже, – горизонтальный след фронтали. Комплексный чертеж фронтали для плоскости, заданной следами, показан на рисунке 6.9, г, для плоскости, заданной треугольником, – на рисунке 6.9, д.



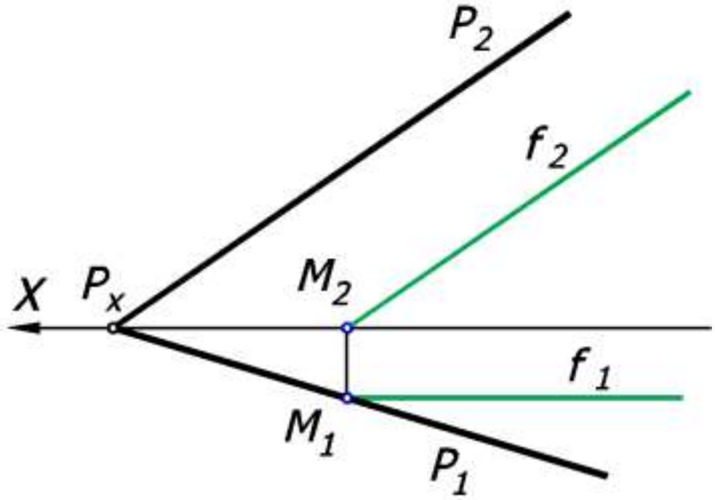
а)



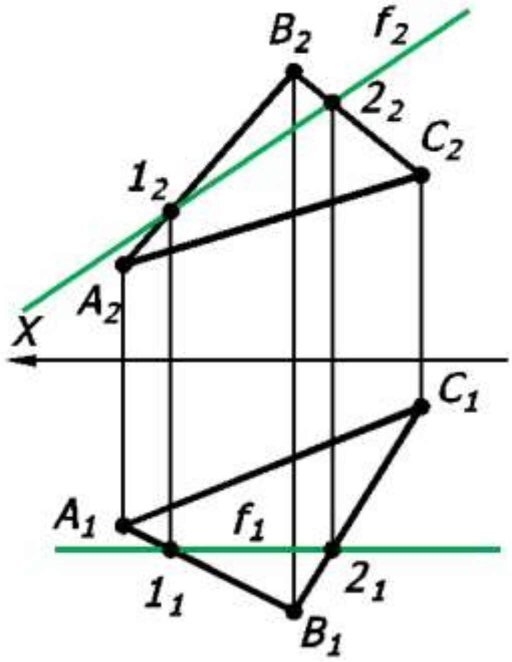
б)



в)



г)



д)

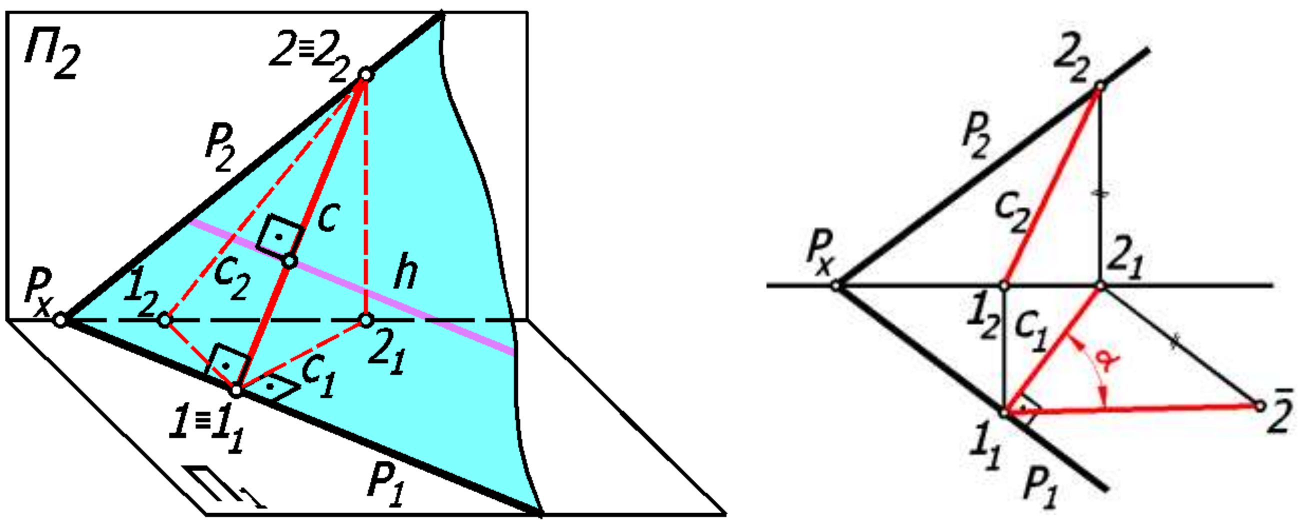
Рисунок 7.9 – Главные линии плоскости

Как видно из рисунка 7.9, а, отличительной особенностью всех горизонталей и фронталей является то, что все горизонтали, принадлежащие одной плоскости, параллельный между собой и все фронтали, принадлежащие одной плоскости, тоже параллельны между собой.

7.4.7 Линия наибольшего наклона плоскости или линия наибольшего ската

Линия наибольшего наклона плоскости или линия наибольшего ската – это прямая, перпендикулярная линиям уровня плоскости, с помощью которой можно определить угол наклона плоскости к той или иной плоскости проекции.

Известно, что угол между двумя плоскостями определяется перпендикулярами, проведенными в этих плоскостях к их линии пересечения. Угол между плоскостью и плоскостью проекции определится прямой, лежащей в плоскости перпендикулярно ее следу (то есть линией наибольшего ската), и ее проекцией. На рисунке 7.10, а показаны такие прямые *(12)* и *($1_1 2_1$)*.



а) пространственный макет б) комплексный чертеж

Рисунок 7.10 – Линия наибольшего наклона плоскости или линия наибольшего ската

На рисунке 7.10,б приведен пример определения угла наклона плоскости *P* к горизонтальной плоскости проекции. В данном примере построение удобнее начинать с горизонтальной проекции, так как по теореме о проецировании плоского прямого угла именно на горизонтальной проекции сохранится прямой угол. Из произвольно взятой точки *1 (1_1,1_2)* проводится горизонтальная проекция линии наибольшего ската c_1 ($c_1 \perp \Sigma_1$), находится фронтальный след прямой c – точка 2 (2_1,2_2) и строится фронтальная проекция линии наибольшего ската.

Для определения угла наклона заданной плоскости к горизонтальной плоскости проекции можно использовать метод прямоугольного треугольника, показанного на рисунке 7.10, б (см. пункт 5.6).

Для определения угла наклона заданной плоскости к фронтальной плоскости проекции выполняются аналогичные построения для фронтали, проведенной в заданной плоскости. Построения удобнее начинать с проведения фронтальной проекции линии наибольшего ската, как показано на рисунке 7.11.

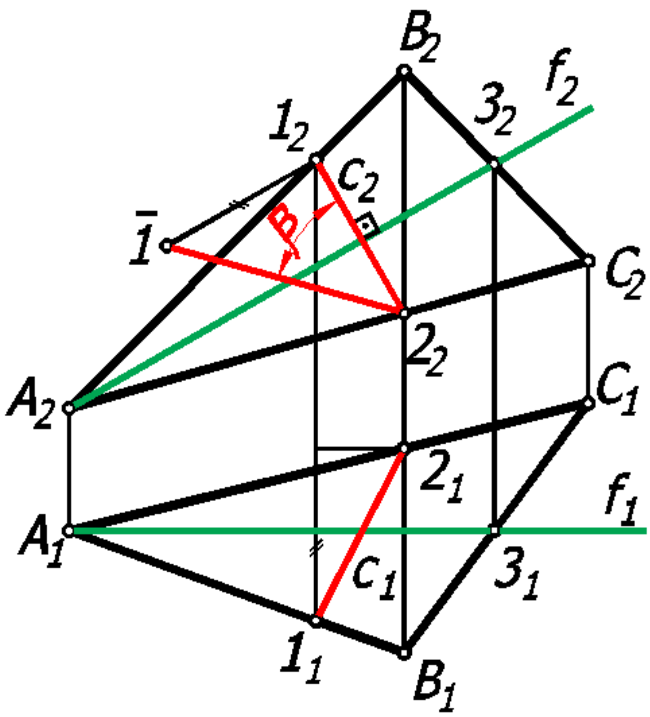


Рисунок 7.11 – Линия наибольшего наклона плоскости или линия наибольшего ската, перпендикулярная фронтали плоскости

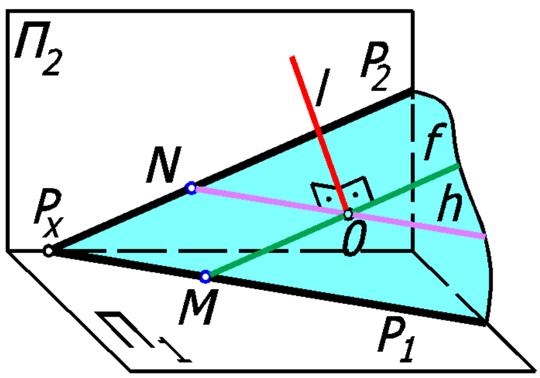
Алгоритм решения:

$$(f \subset \Sigma) \wedge ((12) \subset \Sigma; (1_2 2_2) \perp f_2) \Rightarrow \angle 1_2 2_2 \bar{1} = \angle \beta .$$

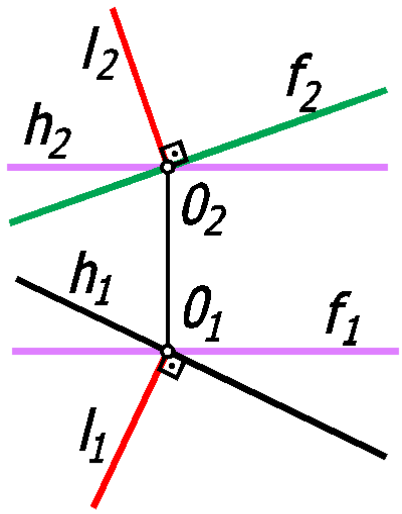
7.4.8 Прямые, перпендикулярные плоскости

Известно, что **прямая перпендикулярна плоскости**, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Так как на комплексном чертеже прямой угол сохраняется только в том случае, если одна из прямых – прямая уровня, то очевидно, чтобы построить перпендикуляр к плоскости, необходимо в этой плоскости провести горизонталь и фронталь, что отражено на рисунке 7.12, а. Прямая l перпендикулярна горизонтали h и фронтали f. Поэтому для построения перпендикуляра l к плоскости P на комплексном чертеже достаточно на горизонтальной проекции провести прямую, перпендикулярную горизонтали, на фронтальной проекции – фронтали (рисунок 7.12, б).



а) пространственный макет



б) комплексный чертеж

Рисунок 7.12 – Прямая, перпендикулярная плоскости

Пример. Из точки *А* провести перпендикуляр к плоскости *Σ (a//b)* и найти его основание, как показано на рисунке 7.13.

Алгоритм решения:

1. Провести в плоскости *Σ* фронталь *f (12)*.

2. Провести в плоскости *Σ* горизонталь *h (34)*.

3. Построить прямую l, перпендикулярную плоскости Σ:

$$\boxed{l_1 \perp h_1;\ l_2 \perp f_2}$$

4. Взять прямую (56), конкурирующую с прямой l относительно фронтальной плоскости проекции: $5_2 6_2 = l_2$.

5. Найти горизонтальную проекцию точки пересечения перпендикуляра l с плоскостью Σ: $(5_1 6_1) \cap l_1 = K_1$.

6. По линии связи определить фронтальную проекцию точки K (K_2).

Точка K (K_1, K_2) будет искомой точкой пересечения перпендикуляра l с плоскостью Σ $(a//b)$.

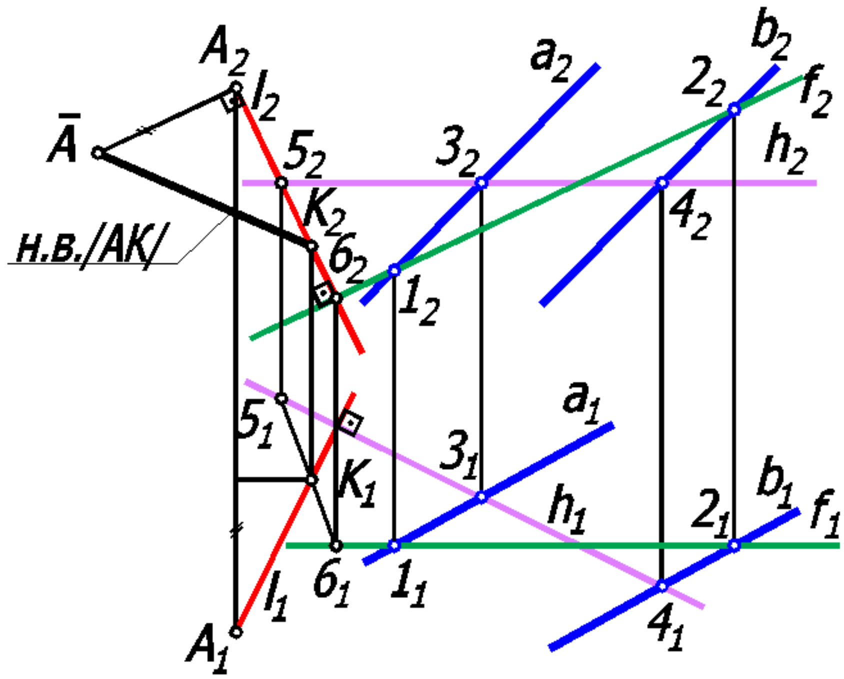
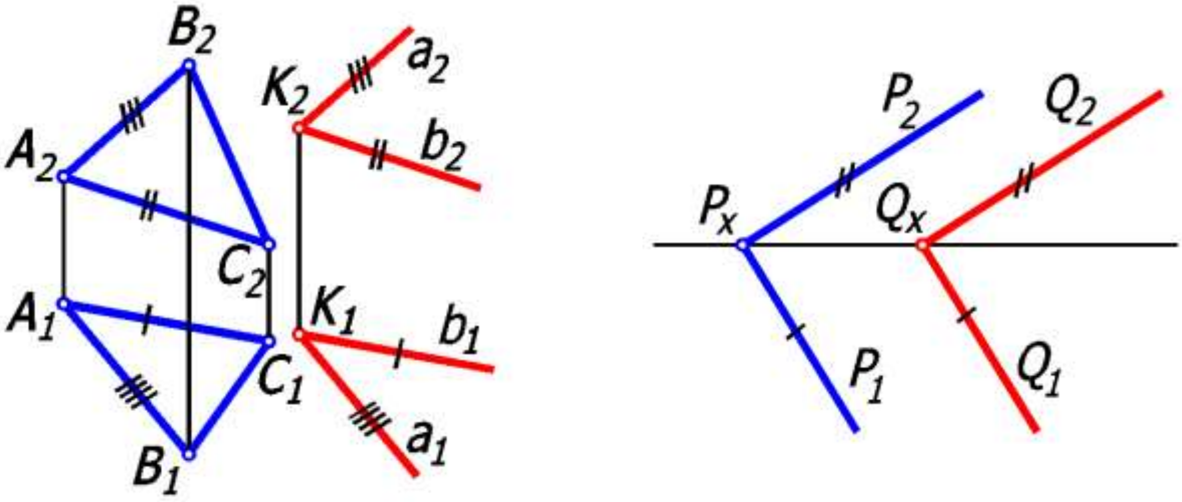


Рисунок 7.13 – Построение перпендикуляра из точки к плоскости и определение его основания

7.5 Взаимное положение двух плоскостей

7.5.1 Параллельные плоскости

Две плоскости будут **параллельными**, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Таким образом, чтобы задать на комплексном чертеже плоскость, параллельную заданной плоскости, достаточно провести две пересекающиеся прямые, параллельные двум пересекающимся прямым заданной плоскости. На рисунке 7.14, а показана плоскость $\Sigma(A,B,C)$, параллельная плоскости $T(a \cap b)$, так как $a//(AB)$, $b//(AC)$.



а) заданы треугольником и пересекающимися прямыми

б) заданы следами

Рисунок 7.14 – Параллельные плоскости

Для *параллельных плоскостей*, *заданных следами*, достаточно, чтобы были параллельны их одноименные следы $P//Q$ ($P_1//Q_1$, $P_2//Q_2$), как показано на рисунке 7.14, б.

7.5.2 Перпендикулярные плоскости

Две плоскости считаются **перпендикулярными**, если в одной из них лежит прямая, перпендикулярная другой плоскости. То есть если плоскость прошла через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Пример. Через прямую *n* провести плоскость, перпендикулярную заданной плоскости *Σ(A,B,C)*, как показано на рисунке 7.15. Для того чтобы через прямую *n* провести плоскость, перпендикулярную заданной плоскости, достаточно через любую точку, лежащую на прямой *n*, провести прямую, перпендикулярную плоскости *Σ(A,B,C)*. Как было указано выше в пункте 7.4.8, это будет прямая *l*, горизонтальная проекция которой перпендикулярна горизонтали плоскости *Σ(A,B,C)* $l_1 \perp h_1$, фронтальная проекция – перпендикулярна фронтали плоскости *Σ(A,B,C)* $l_2 \perp f_2$. Таким образом, плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми *n* и *l*, перпендикулярная данной плоскости, так как прямая *l* перпендикулярна плоскости *Σ(A,B,C)*.

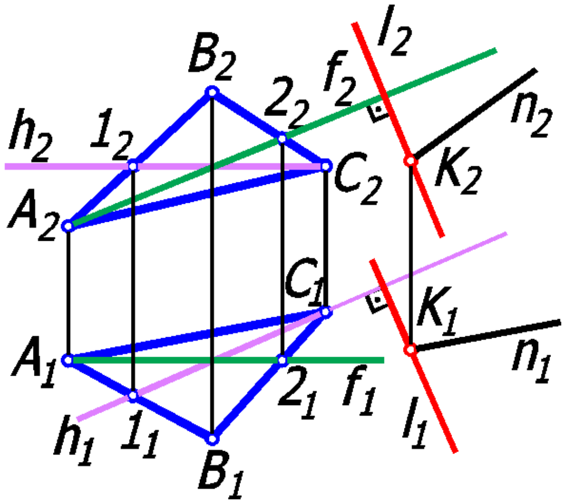


Рисунок 7.15 – Построение через прямую плоскости, перпендикулярной заданной плоскости

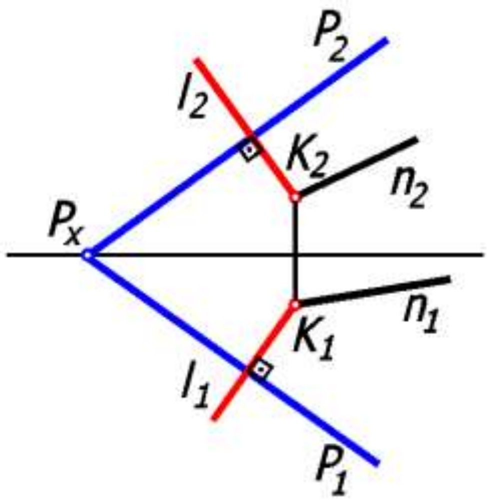


Рисунок 7.16 – Построение через точку плоскости, перпендикулярной заданной плоскости

Пример. Через данную точку K провести плоскость, перпендикулярную плоскости P: $T(n \cap l) \perp P$ как показано на рисунке 7.16. Эта задача облегчается тем, что горизонталь и фронталь заданы следами плоскости. Поэтому для построения прямой l, перпендикулярной плоскости, достаточно провести ее горизонтальную проекцию перпендикулярно горизонтальному следу $l_1 \perp P_1$, фронтальную проекцию – перпендикулярно фронтальному следу $l_2 \perp P_2$. Вторая прямая n берется произвольно, так как задача имеет бесчисленное множество решений.

7.6 Вопросы для самоконтроля

1. Что такое позиционные задачи?
2. Приведите примеры позиционных задач.
3. Что такое метрические задачи?
4. Приведите примеры метрических задач.
5. Опишите точки в зависимости от расположения в пространстве относительно друг друга.
6. Приведите условия определения видимости линий.
7. С помощью каких точек определяют видимость линий?
8. При каких условиях точка принадлежит прямой?
9. Когда точка не лежит на прямой?
10. Назовите варианты взаимного расположения прямых в пространстве.
11. Что такое параллельные прямые?
12. Что такое пересекающиеся прямые?
13. Что такое скрещивающиеся прямые?
14. Что такое конкурирующие прямые?
15. Опишите признак принадлежности прямой плоскости.
16. Приведите признак параллельности прямой и плоскости.

17. Алгоритм решения задачи на построение точки пересечения прямой с плоскостью. Опишите условия определения их видимости с помощью конкурирующих точек.

18. Какой признак принадлежности точки плоскости?

19. При каких условиях точка не принадлежит плоскости?

20. Чему принадлежат следы прямой, лежащей в плоскости?

21. Что такое главные линии плоскости?

22. Что такое линия наибольшего наклона плоскости или линия наибольшего ската?

23. Опишите алгоритм построения линии наибольшего наклона плоскости или линии наибольшего ската к горизонтали плоскости.

24. Опишите алгоритм построения линии наибольшего наклона плоскости или линии наибольшего ската к фронтали плоскости.

25. Дайте определение прямой, перпендикулярной плоскости.

26. Опишите алгоритм построения через точку перпендикуляра к плоскости и определения его основания.

27. Что такое параллельные плоскости?

28. Что такое перпендикулярные плоскости?

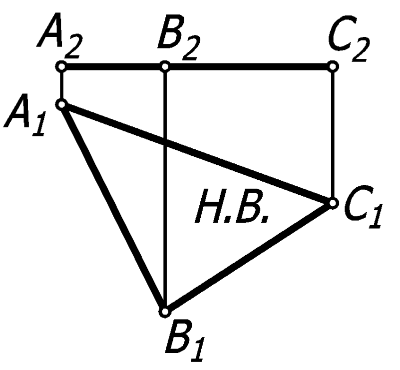
29. Раскройте алгоритм построения через прямую плоскости, перпендикулярной заданной плоскости.

30. Опишите алгоритм построения через точки плоскости, перпендикулярной заданной плоскости.

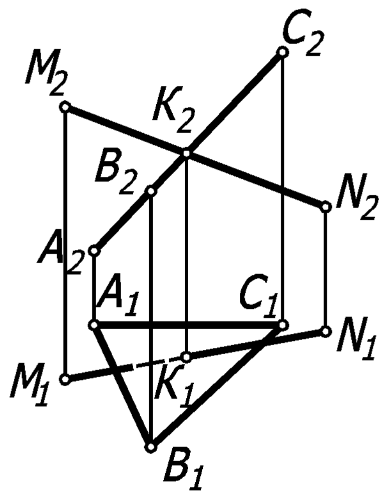
8 Методы преобразования ортогональных проекций

Трудоемкость и точность графического решения некоторых задач часто зависят не только от их сложности, но и от того, какое положение занимают геометрические фигуры, входящие в условие задачи, по отношению к плоскостям проекций. Например, нетрудно представить, что очень легко найти натуральную величину плоскости треугольника, если этот треугольник параллелен одной из плоскостей проекций, или найти точку пересечения прямой с плоскостью, если плоскость является проецирующей относительно одной из плоскостей проекций. Это очевидно из рисунка 8.1, б.

Из этих примеров можно сделать вывод, что решение задач значительно упрощается, если иметь дело с геометрическими фигурами частного расположения относительно плоскостей проекций. Наиболее выгодными частными положениями проецируемых фигур являются: а) положение, перпендикулярное к плоскости проекции; б) положение, параллельное к плоскости проекции.



а) параллельное к плоскости проекции π_1



б) перпендикулярное к плоскости проекции π_1

Рисунок 8.1 – Частные положения проецируемых фигур

Перейти от общего положения геометрической фигуры к частному можно изменением взаимного положения проецирующей фигуры и плоскости проекции. Это может быть достигнуто двумя путями:

1) перемещением в пространстве проецируемой фигуры так, чтобы она заняла частное положение относительно плоскостей проекций, которые при этом не меняют своего положения в пространстве;

2) выбором новой плоскости проекции, по отношению к которой проецируемая фигура, не меняющая своего положения в пространстве, окажется в частном положении.

Первый путь лежит в основе метода плоскопараллельного перемещения, второй составляет теоретическую базу метода замены плоскостей проекций.

8.1 Метод замены плоскостей проекций

Изменение взаимного положения проецирующей фигуры и плоскостей проекций **способом замены плоскостей проекций** достигается путем перехода от заданных плоскостей проекций к новым. Новая плоскость проекции выбирается перпендикулярной к одной из старых. Проецирующие геометрические фигуры при этом не меняют своего положения в пространстве.

При выборе положения новой плоскости проекции следует руководствоваться тем, что по отношению к новой плоскости проецируемая фигура должна занимать частное положение, обеспечивающее получение проекций, наиболее удобных для решения поставленной задачи. В некоторых случаях достаточно заменить только одну плоскость проекции π_1 на π_4 или π_2 на π_4. Если замена одной плоскости проекции не обеспечивает решения поставленной задачи, производят замену двух плоскостей проекций. При этом переход от исходной системы плоскостей проекции $x\ (\pi_2/\pi_1)$ к новой $x_2\ (\pi_4/\pi_5)$ возможен по одной из следующих схем:

$$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_2}{\pi_4} \rightarrow x_2\frac{\pi_5}{\pi_4}$$

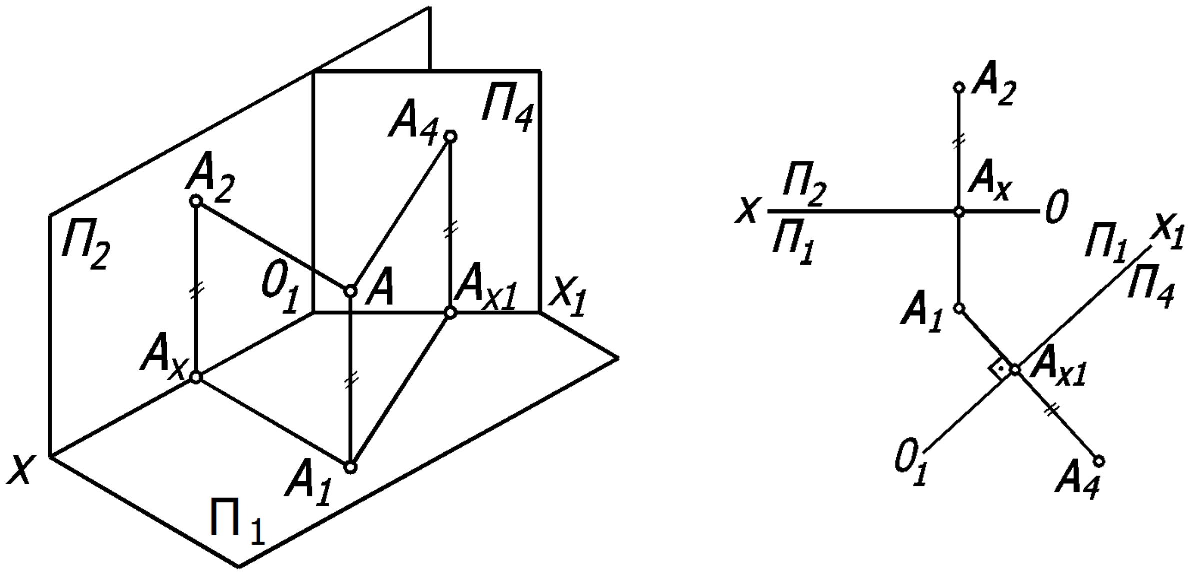
$$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_4}{\pi_1} \rightarrow x_2\frac{\pi_4}{\pi_5}$$

Приведенные схемы показывают, что одновременно может меняться только одна плоскость проекции, другая в это время остается неизменной. После того как будут определены новые проекции в системе оси x_1, можно переходить ко второй системе оси x_2. Наличие одной плоскости проекции, которая не меняет своего положения, позволяет использовать ее как связующее звено между старыми (исходными) проекциями и новыми.

8.1.1 Замена одной плоскости проекции

Пусть в системе плоскостей $x\ (\pi_2/\pi_1)$ дана точка A и указаны ее проекции A_1 и A_2, как показано на рисунке 8.2. Как изменится положение проекции точки A, если плоскость π_2 заменить новой плоскостью π_4, перпендикулярной к π_1? Горизонтальная плоскость проекции не изменит своего положения. Плоскость π_4 пересечется с плоскостью π_1 по прямой x_1, которая определит новую ось проекции, то есть новую систему $x_1\ (\pi_1/\pi_4)$. Положение горизонтальной проекции A_1 точки A останется без изменения, так как точка A и горизонтальная плоскость проекции π_1 не меняли своего положения в пространстве. Для нахождения новой фронтальной проекции точки A_4 достаточно спроецировать точку A на плоскость π_4. Из рисунка 8.2, а видно, что расстояние от A_{x1} до A_4 равно расстоянию от A_x до A_2, так как и на плоскости π_2 и на плоскости π_4 отражается высота точки (координата z точки), которая не менялась.

Чтобы перейти от пространственного макета к комплексному чертежу, необходимо совместить плоскость π_4 с плоскостью чертежа, как показано на рисунке 8.2, б. Метод замены плоскостей проекций предусматривает совмещение новой плоскости с той из старых плоскостей, к которой она перпендикулярна. В рассматриваемом случае ввиду перпендикулярности плоскостей π_4 и π_1 плоскость π_4 совмещена с π_1. За ось вращения принята новая ось проекций x_1. Направление поворота не оказывает никакого влияния на результат преобразования. Поворот следует делать в таком направлении, при котором новые проекции не накладываются на старые и не затрудняют чтения чертежа.



а) пространственный макет б) комплексный чертеж

Рисунок 8.2 – Преобразование точки заменой одной плоскости проекции π_2 на π_4

Для нахождения на комплексном чертеже точки A_4 надо от старой горизонтальной проекции A_1 провести линию связи относительно новой оси x_1, замерить отрезок $|A_xA_2|$ и отложить его на новой линии связи от точки A_{x1}.

Замена горизонтальной плоскости π_1 новой плоскостью π_5 и построение новых проекций точки A в системе x_1 (π_2/π_5) осуществляются аналогично рассмотренному случаю, с той лишь разницей, что теперь остается без изменения фронтальная проекция точки, а для нахождения новой горизонтальной проекции точки A на плоскость π_5 необходимо из старой фронтальной проекции точки A опустить перпендикуляр на новую ось x_1 и отложить на нем от точки пересечения с осью x_1 отрезок, равный расстоянию от старой горизонтальной проекции до старой оси x, как показано на рисунке 8.3, а.

На рисунке 8.3, б дано построение в новой системе плоскостей проекций отрезка прямой общего положения $|AB|$, другими словами, двух точек A и B. Новая плоскость проекции в этом случае взята так, чтобы прямая $|AB|$ была ей параллельна, то есть стала прямой уровня относительно плоскости π_4. Это значит, что отрезок $|AB|$ на плоскость π_4 спроецируется в истинную величину.

Таким образом, чтобы найти натуральную величину отрезка методом замены плоскостей проекций, необходимо новую плоскость проекции взять так, чтобы ось новой системы плоскостей была параллельна одной из исходных проекций.

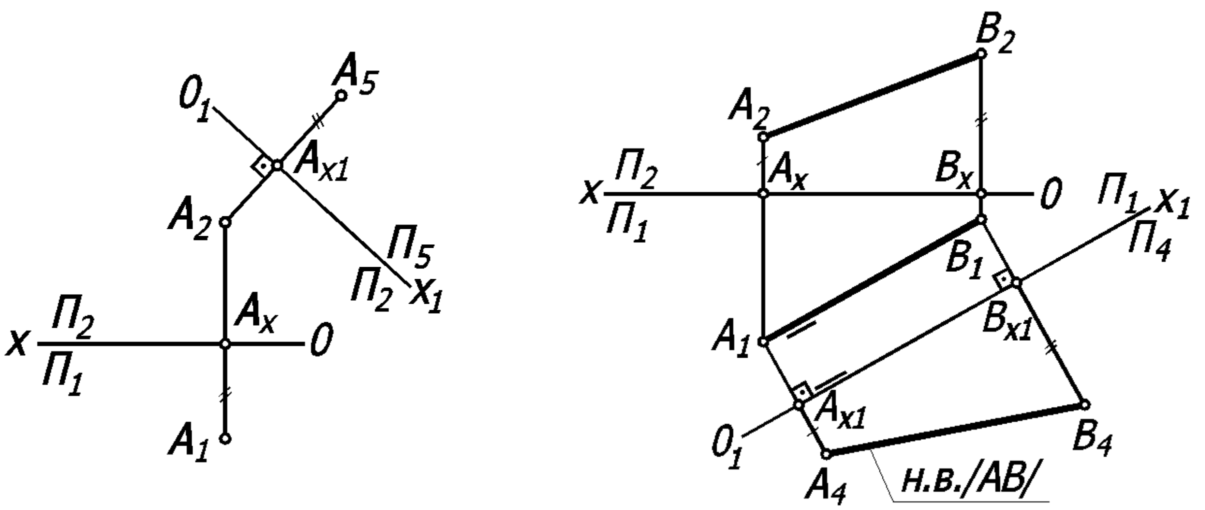
Алгоритм решения задачи, приведенной на рисунке 8.3, б:

1. $|AB| \parallel \pi_4$; $\pi_4 \perp \pi_1$.

2. $x_1 \dfrac{\pi_1}{\pi_4} // (A_1B_1)$

3. $(A_1A_{x1}) \perp x_1$; $(B_1B_{x1}) \perp x_1$.

4. $|A_{x1}A_4| = |A_xA_2|$; $|B_{x1}B_4| = |B_xB_2|$.



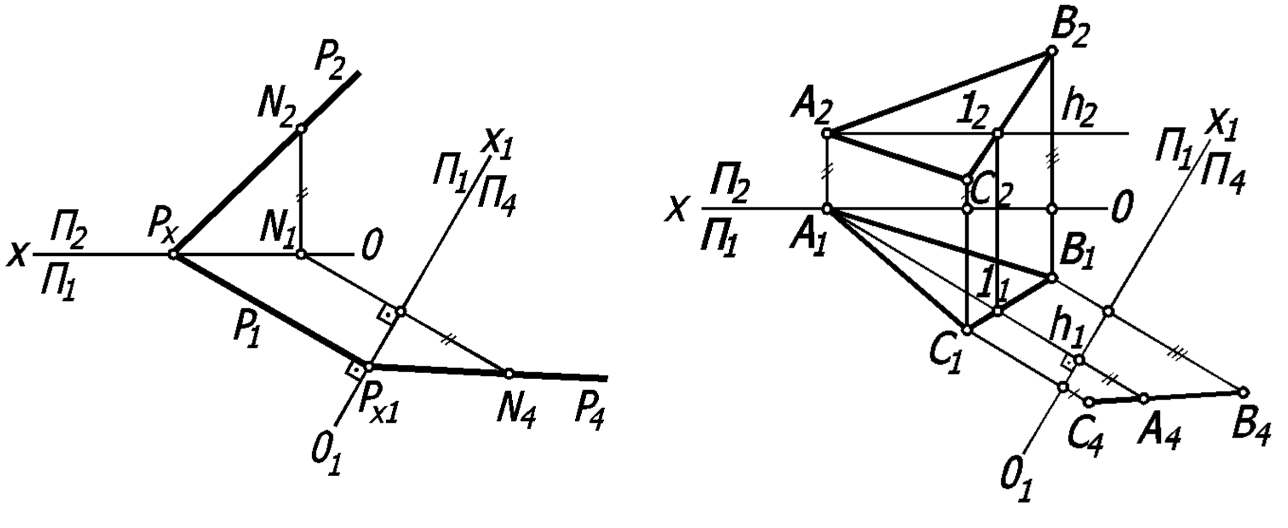
а) преобразование точки заменой плоскости проекции π_1 на π_5

б) преобразование прямой общего положения в прямую уровня заменой плоскости проекции π_2 на π_4

Рисунок 8.3 – Замена одной плоскости проекции

На рисунке 8.4, а приведено решение задачи, при котором **плоскость общего положения *P* становится проецирующей относительно плоскости π_4**. Известно, что один из следов проецирующей плоскости перпендикулярен оси x. Поэтому, чтобы плоскость P стала проецирующей, необходимо новую ось x_1 провести перпендикулярно следу плоскости, в данном примере следу P_1. Через точку P_{x1}, в которой P_1 пересекает ось x_1, пройдет фронтальный след P_4. Для определения его направления достаточно найти одну точку, которая, как и все точки, принадлежащие этой плоскости, должна спроецироваться на след P_4. Удобнее всего точку брать на старом следе P_2, так как известно, что горизонтальная проекция этой точки будет лежать на оси x. Новая проекция точки определяется аналогично описанным выше примерам. Соединив полученную точку M_4 с точкой схода следов P_{x1}, найдем направление нового следа плоскости P в новой системе плоскостей проекций, где плоскость P стала проецирующей.

На рисунке 8.4, б приведено решение такой же задачи для случая задания плоскости треугольником $P(\Delta ABC)$. Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать методом замены плоскостей проекций в проецирующую, необходимо новую плоскость проекции взять перпендикулярно линии уровня (перпендикулярно горизонтали при замене фронтальной плоскости проекции и перпендикулярно фронтали при замене горизонтальной плоскости проекции).



а) преобразование плоскости общего положения, заданной следами, в проецирующую плоскость заменой плоскости проекции π_2 на π_4

б) преобразование плоскости общего положения, заданной треугольником, в проецирующую плоскость заменой плоскости проекции π_2 на π_4

Рисунок 8.4 – Замена одной плоскости проекции

Алгоритм решения задачи, приведенной на рисунке 8.4, б:

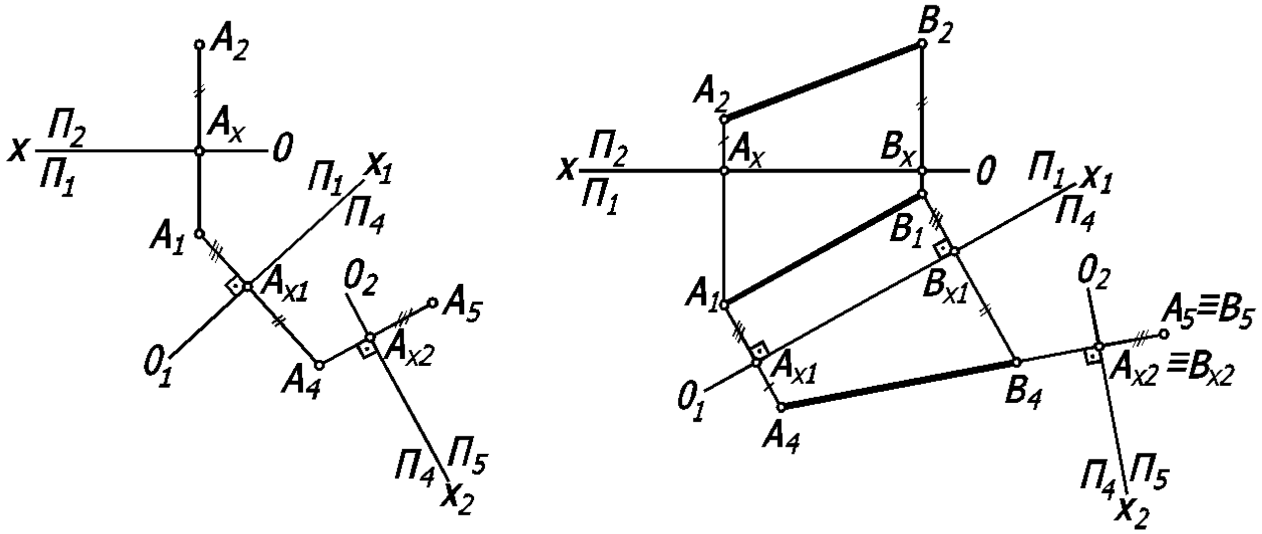
1. $h\ (h_1, h_2) \subset P(A,B,C)$.
2. $\pi_4 \perp \pi_1$; $\pi_4 \perp h$; $x_1 \perp h_1$.
3. $(A_1A_4) \perp x_1$; $(B_1B_4) \perp x_1$; $(C_1C_4) \perp x_1$.
4. $|A_{x1}A_4|=|A_xA_1|$; $|B_{x1}B_4|=|B_xB_1|$; $|C_{x1}C_4|=|C_xC_1|$.

8.1.2 Замена двух плоскостей проекций

Для решения таких задач, как "Прямую общего положения преобразовать в проецирующую прямую" или "Плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня", недостаточно замены одной плоскости проекции. В таких случаях осуществляют замену двух плоскостей проекций.

Как определяются новые ортогональные проекции точки в новой системе плоскостей проекций $x_2(\pi_4/\pi_5)$, если известны ее проекции в старой системе $x(\pi_1/\pi_2)$? Пусть A_1 и A_2 – исходные проекции точки. Для того чтобы определить положение новых проекций A_4 и A_5 в системе $x_2(\pi_4/\pi_5)$, надо заменить вначале плоскость проекции π_2 на π_4. Расположение оси x_1 в данном примере, как показано на рисунке 8.5, а, берется произвольно. Находится положение новой проекции A_4 так, как было показано на рисунке 8.2. Теперь надо заменить плоскость проекции π_1 на плоскость π_5. Расположение оси x_2 снова выбирается произвольно, и находится новая проекция точки A_5 аналогично предыдущему построению, но принимается уже система $x_1(\pi_1/\pi_4)$ с проекциями точки A_1 и A_4 за исходную. Для этого отрезок $|A_{x2}A_5|$ берется равным отрезку $|A_{x1}A_1|$.

При решении многих позиционных и метрических задач часто необходимо прямые общего положения преобразовать в проецирующие, а плоскости общего положения – в плоскости уровня. При решении этих задач не должно возникнуть никаких трудностей, так как прямая в пространстве определяется двумя точками, плоскость – тремя. Надо только четко определить расположение новых плоскостей, а точнее, расположение новых осей относительно исходных проекций.



а) преобразование точки заменой: сначала – π_2 на π_4; затем – π_1 на π_5

б) преобразование прямой общего положения заменой: в прямую уровня (π_2 на π_4); в проецирующую прямую (π_1 на π_5)

Рисунок 8.5 – Замена двух плоскостей проекций

Для **преобразования прямой общего положения методом замены плоскостей проекций в проецирующую прямую** необходимо сначала сделать ее прямой уровня (ось x_1 параллельна одной из исходных проекций), а затем проецирующей прямой (ось x_2 перпендикулярна новой проекции).

На рисунке 8.5, б показано решение этой задачи, где все ясно из построения и нет необходимости в подробном описании. Общая схема решения:

$$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \to x_1\frac{\pi_4}{\pi_1} \to x_2\frac{\pi_4}{\pi_5}$$

$x_1//(A_1B_1)$; $x_2\perp(A_4B_4)$

Для **преобразования плоскости общего положения методом замены плоскостей проекций в плоскость уровня** необходимо первой заменой сделать плоскость проецирующей (ось x_1 перпендикулярна горизонтали или фронтали плоскости), а затем второй заменой сделать ее плоскостью уровня (ось x_2 параллельна новой проекции плоскости).

Решение этой задачи показано на рисунке 8.6. Общая схема решения:

$$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_4}{\pi_1} \rightarrow x_2\frac{\pi_4}{\pi_5}$$

$x_1\perp h_1$; $x_2//(A_4B_4C_4)$

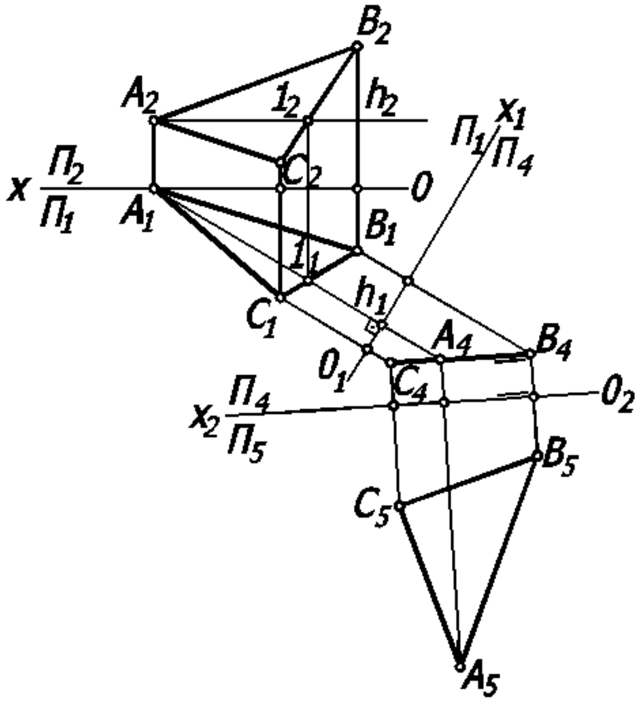


Рисунок 8.6 – Преобразование плоскости общего положения заменой двух плоскостей проекций: в проецирующую плоскость (π_2 на π_4); в плоскость уровня (π_1 на π_5)

Рассмотренные задачи, где требовалось преобразовать: 1) прямую общего положения в прямую уровня; 2) прямую общего положения в проецирующую прямую; 3) плоскость общего положения в проецирующую плоскость; 4) плоскость общего положения в плоскость уровня, – в курсе начертательной геометрии считаются **четырьмя основными задачами преобразования**, так как умея оперировать ими, можно решать многие графические задачи.

8.2 Метод вращения вокруг линии уровня

Этот метод применяется, в основном, для решения **четвертой основной задачи преобразования – преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня**. В отличие от рассмотренных выше методов этот метод позволяет решать данную задачу одним преобразованием, что и определяет рациональность ее решения именно методом вращения вокруг линии уровня.

На рисунке 8.7 приведен пример определения натуральной величины треугольника ΔABC вращением его вокруг горизонтали h. Горизонталь h проводится через вершину A. В этом случае точка A и точка $1=h\cap(BC)$, как находящиеся на оси вращения, останутся неподвижными: $A=\overline{A}, 1=\overline{1}$.

Вершины B и C, вращаясь вокруг оси h, опишут окружности, плоскости Γ^1 и Γ^2 которых будут перпендикулярно проецирующими, так как они перпендикулярны горизонтали h. Вначале определяется образ $\overline{B}$ точки B из условия, что треугольник $\Delta\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ будет горизонтальной плоскостью уровня. Точка B, вращаясь вокруг оси h, опишет окружность с центром $O=h\cap\Gamma^1$ и радиусом $OB(O_1B_1, O_2B_2)$.

Радиус $O\overline{B}=|OB|$ должен спроецироваться на плоскость π_1 в натуральную величину. Натуральная величина радиуса OB определяется методом прямоугольного треугольника. Она откладывается от точки O на траектории вращения (плоскость Γ^1) и получается образ $\overline{B}$ точки B при вращении ее вокруг горизонтали h. Образ точки $\overline{C}$ находится как точка, лежащая на прямой (B_1) и траектории вращения точки C – плоскости Γ^2: $\overline{C}_1=(\overline{B}_1\overline{1}_1)\cap\Gamma_1$.

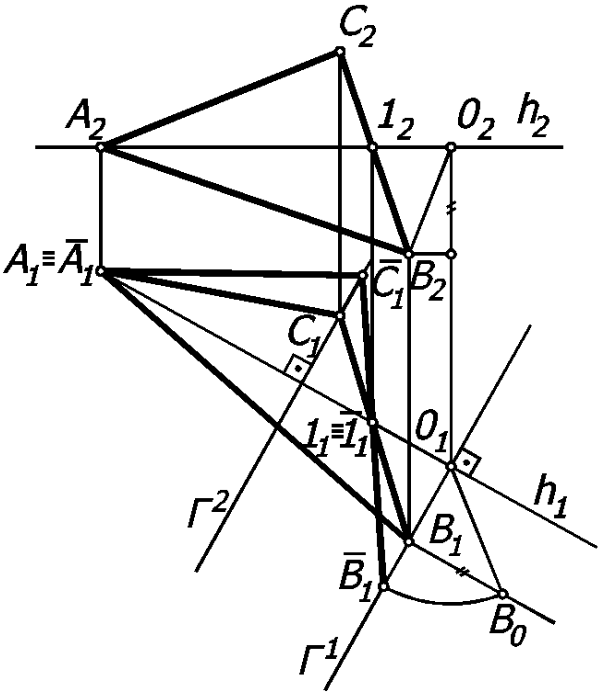


Рисунок 8.7 – Построение натуральной величины треугольника методом вращения вокруг горизонтали

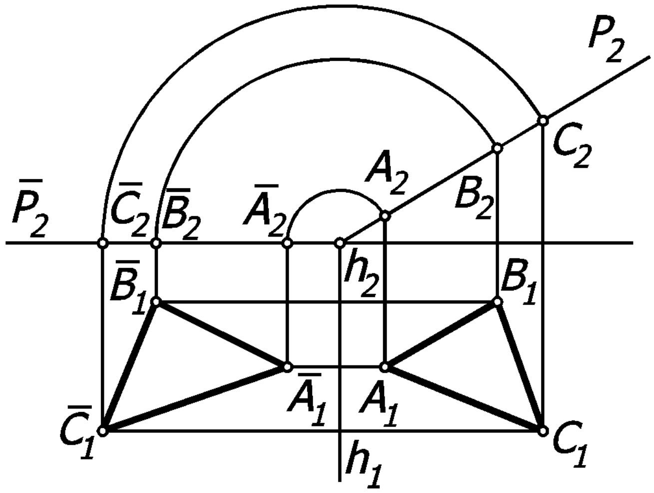


Рисунок 8.8 – Построение натуральной величины треугольника методом совмещения

При решении геометрических задач иногда удобнее выбрать в качестве оси вращения линию нулевого уровня – линию пересечения плоскости вращаемой фигуры с плоскостью проекции. Этот способ вращения вокруг линии уровня называется **методом совмещения**. Построение натуральной величины треугольника, лежащего во фронтально проецирующей плоскости *P*, методом совмещения с горизонтальной плоскостью проекции π_1 показано на рисунке 8.8.

За ось вращения принята горизонталь *h* – линия пересечения плоскости *P* с горизонтальной плоскостью проекции π_1. В данном случае горизонталь вырождается во фронтально проецирующую прямую. Поэтому окружности, описываемые вершинами треугольника, проецируются на плоскость π_2 в натуральную величину.

8.3 Вопросы для самоконтроля

1. От чего зависит трудоемкость и точность графического решения некоторых задач?

2. Приведите наиболее удобные частные положения проецируемых фигур относительно плоскостей проекций при решении геометрических задач.

3. Перечислите пути перехода от общего положения геометрической фигуры к частному относительно плоскостей проекций. Каким методам преобразования они соответствуют?

4. В чем суть метода замены плоскостей проекций?

5. По каким схемам возможен переход от исходной системы плоскостей проекций к новой? Что они показывают?

6. Опишите преобразование точки заменой одной, фронтальной, плоскости проекции на новую на пространственном макете и на комплексном чертеже.

7. Опишите преобразование точки заменой одной, горизонтальной, плоскости проекции на новую.

8. Опишите алгоритм определения натуральной величины отрезка преобразованием прямой общего положения в прямую уровня заменой одной, фронтальной, плоскости проекции на новую.

9. Опишите преобразование плоскости общего положения, заданной следами, в проецирующую плоскость заменой одной, фронтальной, плоскости проекции на новую.

10. Опишите алгоритм преобразования плоскости общего положения, заданной треугольником, в проецирующую плоскость заменой одной, фронтальной, плоскости проекции на новую.

11. Для решения каких геометрических задач применяют замену двух плоскостей проекций?

12. Опишите преобразование точки заменой двух плоскостей проекций: сначала фронтальной на новую; затем – горизонтальной на новую. Приведите общую схему решения.

13. Опишите преобразование прямой общего положения заменой двух плоскостей проекций: сначала фронтальной на новую (в прямую уровня); затем – горизонтальной на новую (в проецирующую прямую). Приведите общую схему решения.

14. Опишите преобразование плоскости общего положения заменой двух плоскостей проекций: сначала фронтальной на новую (в проецирующую плоскость); затем – горизонтальной на новую (в плоскость уровня). Приведите общую схему решения.

15. Перечислите четыре основные задачи преобразования чертежа.

16. В чем заключается первая основная задача преобразования чертежа?

17. Опишите вторую основную задачу преобразования чертежа?

18. В чем заключается третья основная задача преобразования чертежа?

19. Что такое четвертая основная задача преобразования чертежа?

20. В каких случаях при решении геометрических задач применяют метод вращения вокруг линии уровня?

21. В чем отличие метода вращения вокруг линии уровня от метода замены плоскостей проекции?

22. Опишите алгоритм определения натуральной величины треугольника вращением его вокруг горизонтали.

23. Приведите алгоритм определения натуральной величины треугольника методом совмещения.

9 Многогранные и кривые поверхности

Перед тем как переходить к заданию геометрических тел и предметов на чертеже, необходимо учесть то, что тела ограничиваются поверхностями, в частном случае плоскостями, и от их задания и построения зависит задание и построение проекций тел. **Геометрический образ поверхности** считается **заданным**, если относительно произвольной точки пространства можно решить вопрос о том, принадлежит ли она данной поверхности или нет. Таким образом, если геометрический образ задан, можно построить любое количество точек, ему принадлежащих.

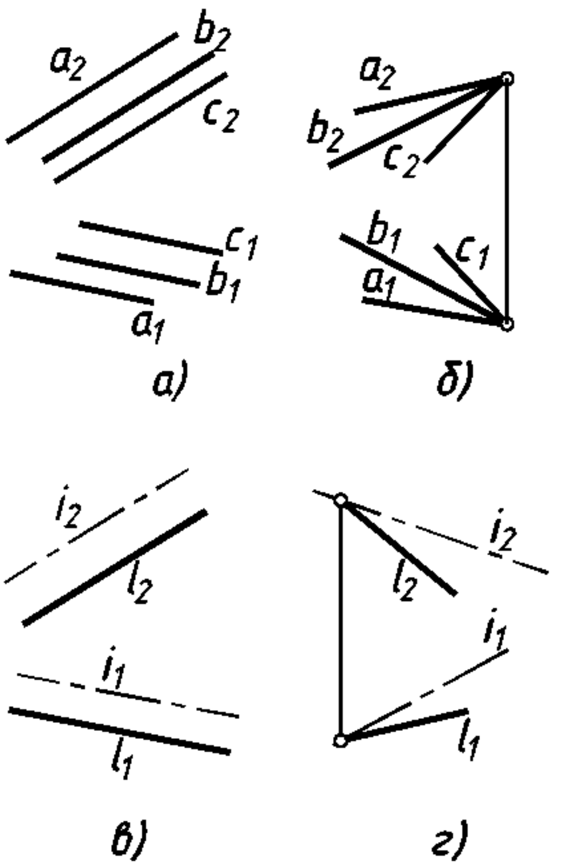


Рисунок 9.1 – Задание поверхностей определителем

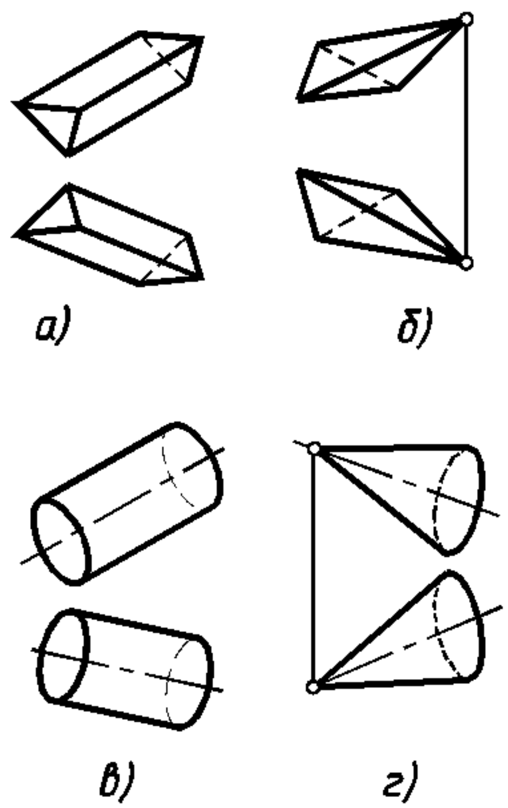


Рисунок 9.2 – Задание проекций поверхностей рисунка 9.1

Задание поверхности на комплексном чертеже осуществляется просто, если ввести понятие **определителя поверхности**, то есть совокупности условий, необходимых и достаточных для задания поверхности. Определитель поверхности состоит из геометрической и алгоритмической (закона образования) части. Для простейших поверхностей, например, плоскости, иногда достаточно геометрической части определителя – трех точек, прямой и точки и так далее. Призматическая и пирамидальная поверхности могут быть заданы своими ребрами (рисунок 9.1 а, б). Геометрическая часть определителя конуса и цилиндра – ось вращения *i* и образующая *l* (для конуса – пересекающая ось *i* в действительной точке, для цилиндра – в несобственной точке). Алгоритмическая часть – указание о том, что это поверхность вращения (рисунок 9.1 в, г).

Задание поверхности определителем имеет недостаток – отсутствие наглядности. Наглядность существенно улучшается, если на поверхности будут показаны некоторые характерные для нее линии. К ним относятся линии контура поверхности на проекциях (очерк поверхности) и линии обреза (обрыва) поверхности. Таким образом, **проекция поверхности** – это совокупность проекций определителя, линий контура и линий обреза. На рисунке 9.2 показаны проекции тех поверхностей, которые на рисунке 9.1 показаны только определителем.

9.1 Многогранники

Широкое применение в технике имеют простые многогранники. **Многогранник** называется **простым**, если:

а) все его грани являются простыми многоугольниками, то есть такими, в которых никакая пара смежных сторон не имеет общих точек;

б) никакие две несмежные грани не имеют общих точек, за исключением вершины;

в) две смежные грани имеют лишь одно общее ребро и не имеют других общих точек.

По теореме Эйлера, для всякого выпуклого многогранника существует зависимость:

$$Г + В = Р, \tag{1}$$

где $Г$ – количество граней многогранника;

$В$ – количество вершин;

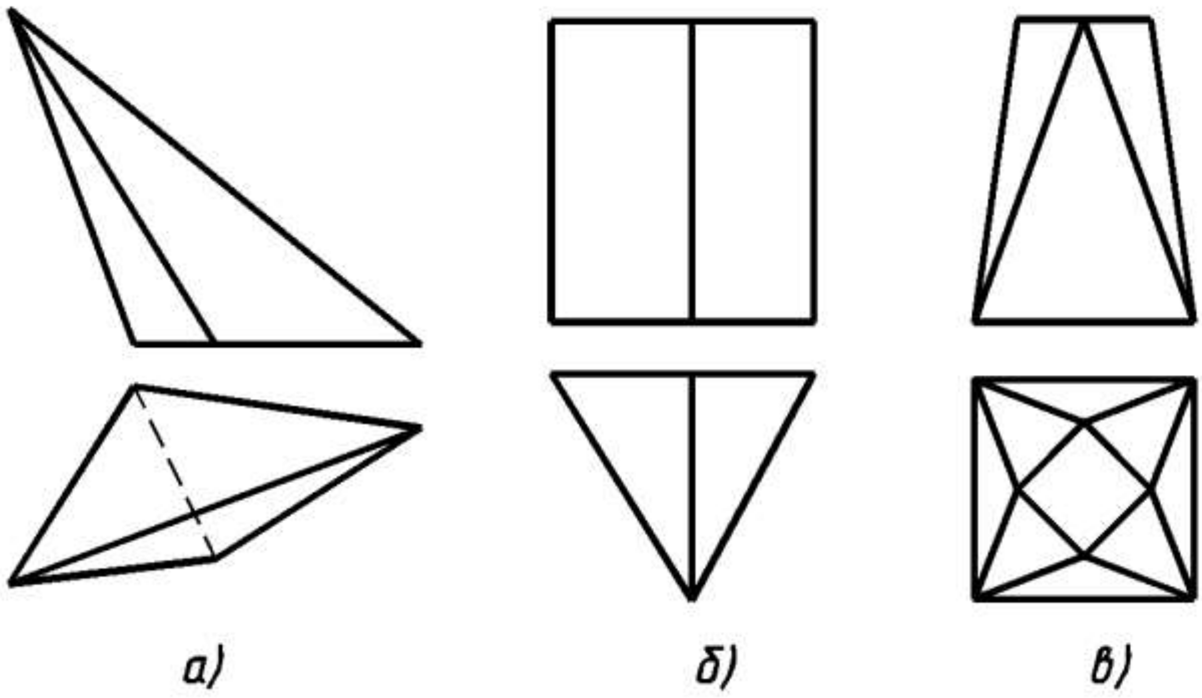
$Р$ – количество ребер.

Из всех простых многогранников интерес в технике представляют пирамиды, призмы и призматоиды.

Пирамидой называют многогранник, все грани которого, кроме одной, имеют общую точку, называемую **вершиной** пирамиды. Пирамиду можно получить, если рассечь многогранный угол плоскостью, пересекающей все ребра этого угла. Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а ее вершина находится на перпендикуляре к основанию, проведенному из точки пересечения биссектрис углов этого многоугольника, то такая пирамида называется **правильной**.

Призмой называют многогранник, ограниченный призматической поверхностью и двумя плоскостями, параллельными между собой, но не параллельными ребрам призмы. Эти две плоскости называются **основаниями** призмы, грани призматической поверхности – **боковыми гранями**, а ее ребра – **ребрами** призмы. Если основания призмы не параллельны между собой, призма называется **усеченной**. Если ребра призмы перпендикулярны основанию, призма называется **прямой**, если в основании лежит правильный многоугольник – **правильной**.

Призматоидом называется многогранник, ограниченный двумя параллельными основаниями и боковой поверхностью, состоящей из треугольников или трапеций.



а) наклонная пирамида; б) правильная прямая призма; в) призматоид

Рисунок 9.3 – Примеры многогранников

На рисунке 9.3 а, б, в соответственно приведены наклонная пирамида, правильная прямая призма и призматоид.

9.2 Поверхности

Мир поверхностей разнообразен и безграничен. Он простирается от элементарной, отличающейся простотой и математической строгостью плоскости, до сложнейших, причудливых форм криволинейных поверхностей, не поддающихся точному математическому описанию. По той роли, которую они играют в науке, технике, архитектуре, изобразительном искусстве, поверхности не имеют себе равных среди других геометрических фигур. Для специалистов радиотехники знание законов образования и изображения поверхностей нужны при решении таких практических задач, как распространение волн передающих устройств, выбор оптимального варианта поверхности антенн, поверхности излучения и так далее.

В математике под **поверхностью** понимают непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая в декартовой системе координат уравнением вида $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – многочлен n-й степени или трансцендентная функция. В первом случае поверхности называются **алгебраическими**, во втором – **трансцендентными**.

Если алгебраическая поверхность описывается уравнением n-й степени, то поверхность считается n-го порядка. Любая произвольно расположенная секущая плоскость пересекает поверхность по кривой того же порядка (иногда распадающейся или мнимой), какой имеет сама поверхность. Порядок поверхности может быть также определен числом точек ее пересечения с произвольной прямой, не принадлежащей целиком поверхности, считая все точки, действительные и мнимые.

Признаки классификации поверхностей:

1) закон образования: закономерные и незакономерные (графически);

2) характер образующей: линейчатые (образующая – прямая линия) и кривые (образующая – кривая);

3) характер изменения образующей: с постоянной образующей и с образующей, изменяющейся в процессе движения;

4) характер движения образующей: поступательный, вращательный, винтовой;

5) характер развертывания: развертываемые и неразвертываемые.

9.2.1 Образование поверхности и ее задание на чертеже

Ранее отмечалось, что поверхность можно задать как совокупность последовательных положений некоторой линии (**образующей** поверхности), перемещающейся в пространстве по определенному закону. Для получения наглядности изображения поверхности на чертеже целесообразно закон перемещения образующей задавать в виде линии. Такая линия называется **направляющей**. У конуса и у цилиндра направляющей может быть окружность.

Другим способом образования поверхности и ее изображения на чертеже является задание поверхности множеством принадлежащих ей точек или линий, при этом точки или линии выбираются так, чтобы они давали возможность с достаточной степенью точности определять форму поверхности и решать на ней различные задачи.

Упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности, называется ее **каркасом**.

В качестве линий, образующих каркас, обычно берут семейство плоских кривых, полученных в результате сечения поверхности пучком плоскостей. В основе теории каркаса лежит положение о том, что непрерывное однопараметрическое множество линий в пространстве задает поверхность, и, наоборот, всякая поверхность может быть представлена однопараметрическим множеством линий, свойства которых и закон их распределения в пространстве определяют свойства поверхностей.

Поверхность с позиции кинематического способа ее образования рассматривают как множество всех положений движущейся линии. При таком подходе к образованию поверхности можно утверждать, что поверхность будет задана (определена), если в любой момент движения образующей будут известны ее положение и форма, а это позволит однозначно ответить на вопрос: принадлежит ли точка пространства поверхности или нет.

Кинематический способ образования поверхности подводит к понятию **определителя**: необходимая и достаточная совокупность геометрических элементов и связей между ними, которые однозначно определяют поверхность.

Как уже отмечалось, в определитель поверхности входят:

а) геометрические элементы, участвующие в образовании поверхности;

б) алгоритмическая часть, указывающая на взаимосвязь между этими элементами:

$$\Phi = (\Gamma);\ [A], \tag{2}$$

где Γ – геометрическая часть;

A – алгоритмическая часть.

Чтобы найти определитель поверхности, следует исходить из кинематического способа ее образования. Но так как одна и та же поверхность иногда может быть образована различными способами, то она может иметь и различные определители. Например, прямой круговой цилиндр можно представить:

а) как движение прямой *l* вокруг оси *i* (рисунок 9.4 а);

б) как движение кривой *l*, принадлежащей поверхности цилиндра, вокруг оси *i* (рисунок 9.4 б);

в) как результат поступательного перемещения окружности *r*, при этом центр окружности перемещается вдоль оси *i*, а ее плоскость все время остается перпендикулярной этой оси (рисунок 9.4 в).

Чтобы задать поверхность на чертеже, достаточно указать проекции некоторых точек или линий, принадлежащих поверхности, с помощью которых может быть установлено взаимно-однозначное соответствие между образом (проекцией) и прообразом (объектом проецирования). Такими точками или линиями могут быть точки или линии, входящие в состав определителя поверхности либо в ее каркас. В первом случае поверхность задается определителем, во втором – каркасом.

Как указывалось, задание поверхности определителем не всегда обеспечивает наглядность, а это, в свою очередь, затрудняет чтение чертежа. Поэтому для получения наглядного изображения поверхности на комплексном чертеже следует указывать контур (очерк) поверхности.

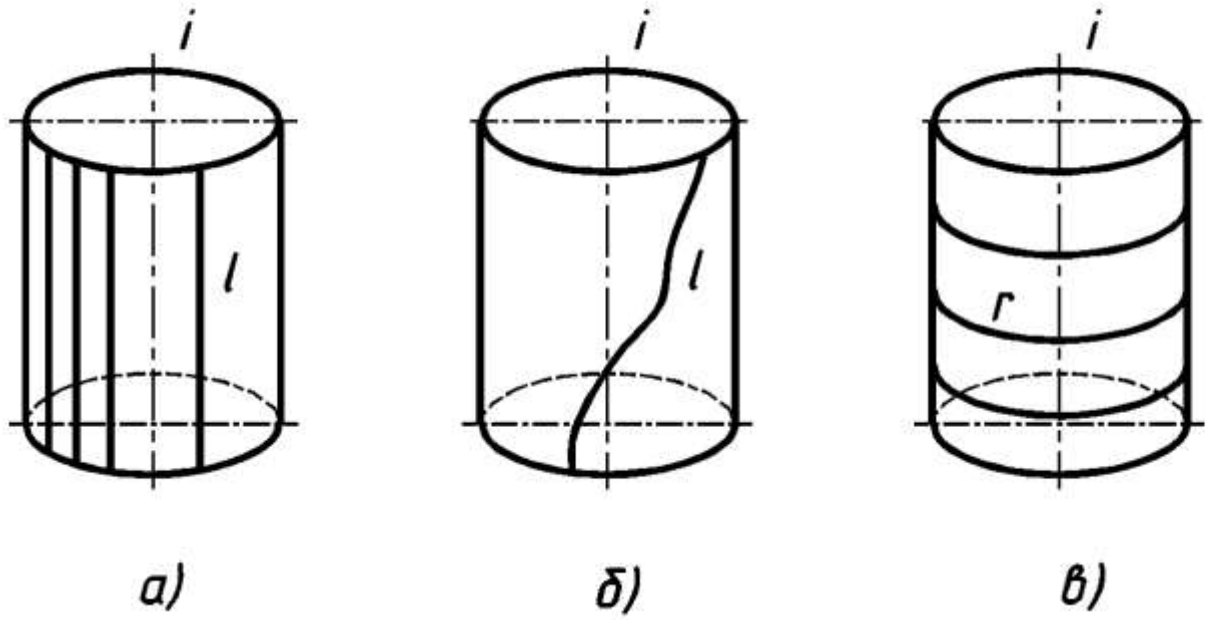


Рисунок 9.4 – Задание прямого кругового цилиндра разными способами

9.3 Поверхности вращения

Поверхностью вращения общего вида называют поверхность, которая образуется произвольной кривой при ее вращении вокруг неподвижной оси.

В состав определителя поверхности вращения входят образующая l, ось вращения i и условие о том, что эта образующая вращается вокруг оси i:

$$\Phi(l,\ i);\ [l_i=R_i(l)] \qquad (3)$$

Каждая точка образующей (*A, B, C, D, E, F*) при вращении вокруг оси *i* описывает окружность с центром на оси вращения (рисунок 9.5 а). Эти окружности называются **параллелями**. Наибольшую и наименьшую параллели называют соответственно **экватором** и **горлом**.

Плоскости Σ, проходящие через ось поверхности вращения, называют **меридиональными**, а линии, по которым они пересекают поверхность, − **меридианами**. Меридиональную плоскость Σ', параллельную плоскости проекции, принято называть **главной меридиональной плоскостью**, а линию ее пересечения с поверхностью вращения − **главным меридианом**.

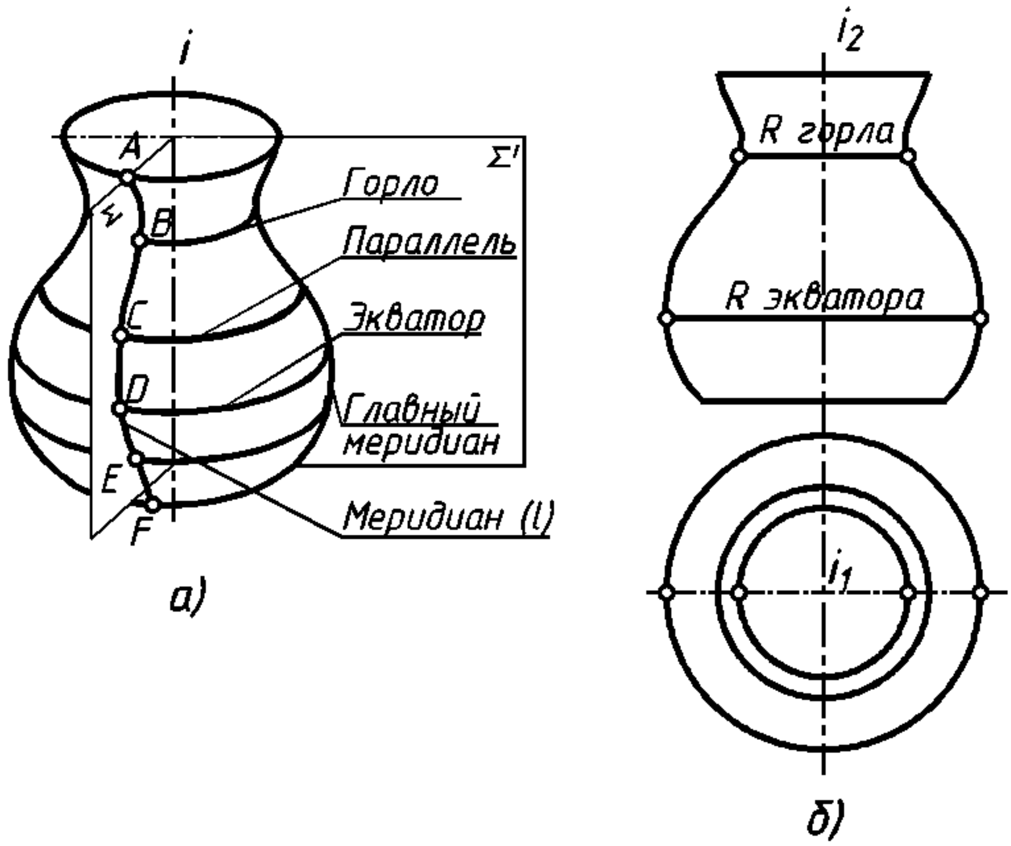


Рисунок 9.5 – Задание поверхности вращения на чертеже

Обычно при задании поверхности вращения на чертеже (рисунок 9.5 б) указывают проекции ее оси, главного меридиана и экватора, а также верхнее и нижнее основания поверхности (плоскость обреза).

9.4 Вопросы для самоконтроля

1. В чем суть образования поверхностей кинематическим способом?

2. Что называется каркасом поверхности?

3. Что такое определитель поверхности?

4. Что является содержанием геометрической и алгоритмической частей определителя?

5. Каков недостаток задания поверхности определителем?

6. Как задается поверхность на комплексном чертеже?

7. Что такое очерк поверхности?

8. Дайте общую схему классификации поверхностей.

9. При каких условиях геометрический образ поверхности считается заданным?

10. Приведите схему классификации многогранников.

11. В чем заключается теорема Эйлера?

12. Что понимают под поверхностью в математике?

13. Что такое алгебраическая (трансцендентная) поверхность?

14. Каковы признаки классификации поверхностей?

15. Как образуются поверхности вращения общего вида?

16. Укажите основные свойства поверхности вращения.

10 Задание точек на поверхности

Построение точек и линий, принадлежащих поверхности, часто является задачей при выполнении чертежа предмета или детали.

При составлении алгоритма решения этой группы задач следует базироваться на свойстве проецирования: если две точки A и B, принадлежащие прямой a, принадлежат плоскости Σ, то прямая a принадлежит плоскости Σ:

$$(\forall A, B)(A \neq B)(A, B \in a) \wedge (A, B \in \Sigma) \Rightarrow (a \in \Sigma) \quad (4)$$

Таким образом, для того чтобы на чертеже поверхности указать проекции принадлежащей ей точки, необходимо вначале построить проекции какой-либо линии, принадлежащей поверхности, а затем на этой линии отметить точку.

На рисунке 10.1 показана прямая треугольная призма с вертикальными боковыми гранями. На одной из граней задана точка A своими проекциями A_1 и A_2. Для построения профильной проекции A_3 точки A через ее фронтальную проекцию A_2 проведена горизонтальная линия связи и на ней с помощью постоянной чертежа k найдена проекция точки A_3.

Для определения положения точек, принадлежащих не проецирующим поверхностям, целесообразно воспользоваться вспомогательной линией, принадлежащей поверхности и проходящей через эту точку. В качестве линии, как правило, выбирается образующая поверхности. Желательно при этом, чтобы вспомогательные линии были **простейшими – прямыми** или **окружностями**. На рисунке 10.2 показано построение точек, принадлежащих боковой поверхности треугольной пирамиды. Пусть точка A принадлежит левой видимой грани, для определения ее горизонтальной проекции целесообразно воспользоваться прямой линией, проходящей через вершину пирамиды. Строится горизонтальная проекция этой вспомогательной прямой и на ней по вертикальному соответствию определяется горизонтальная проекция точки A. Для определения профильной проекции точки A вначале строится профильная проекция вспомогательной прямой и на ней по горизонтальному соответствию с фронтальной проекцией определяется проекция A_3. На рисунке 10.3 показано определение горизонтальной проекции точки A, принадлежащей поверхности конуса. Для этого, как и в предыдущем примере, через проекцию A_2 проводится образующая конуса m, которая затем определяется на горизонтальной проекции, и на ней по вертикальному соответствию находится проекция A_1.

На рисунке 10.4 показаны три проекции сферы. Для определения горизонтальной и фронтальной проекций точки A проведена горизонтальная секущая плоскость уровня Φ, которая пересекает сферическую поверхность по окружности m. По вертикальному соответствию на этой окружности определится горизонтальная проекция A_1, а с ее помощью и профильная проекция A_3.

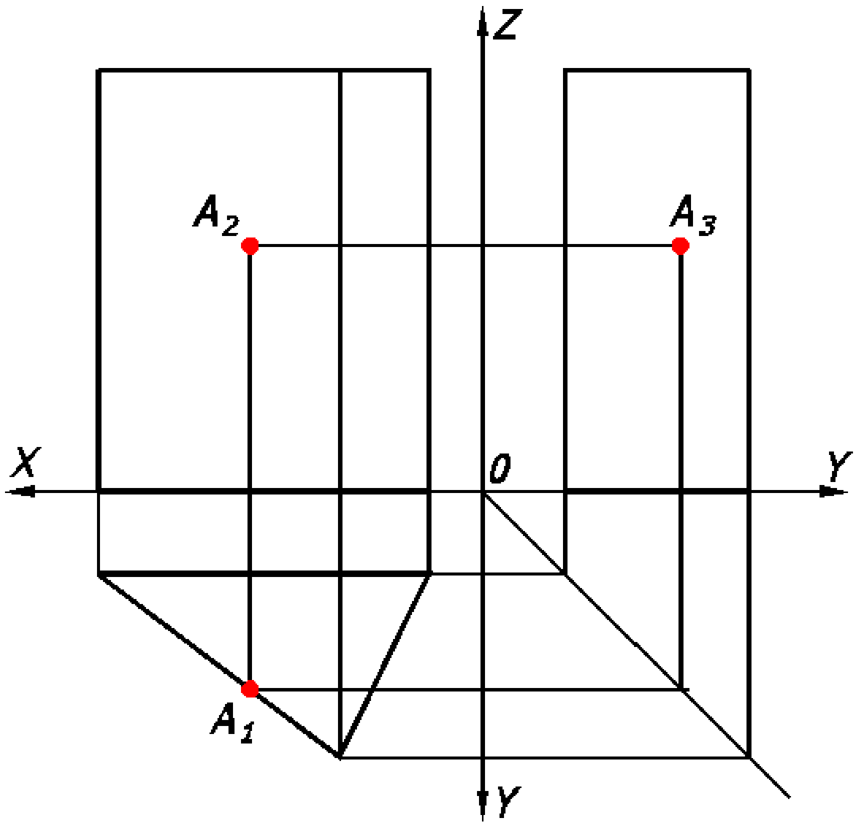


Рисунок 10.1 – Точки, принадлежащие поверхности призмы

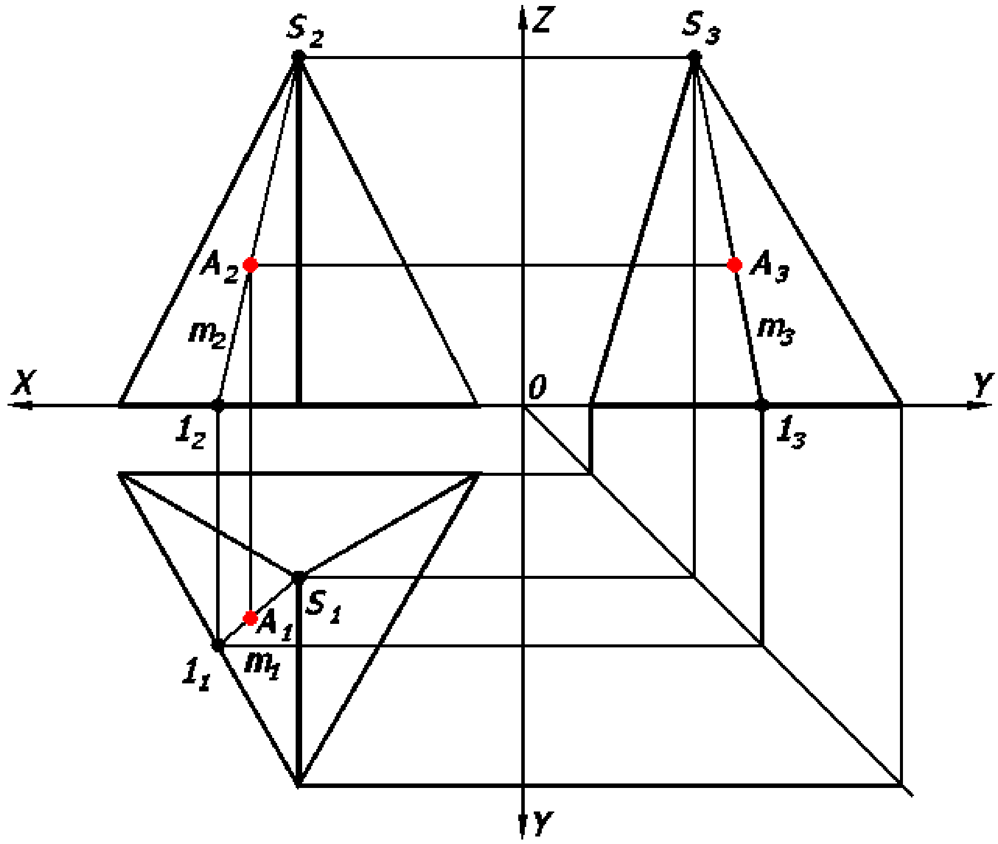


Рисунок 10.2 – Точки, принадлежащие поверхности пирамиды

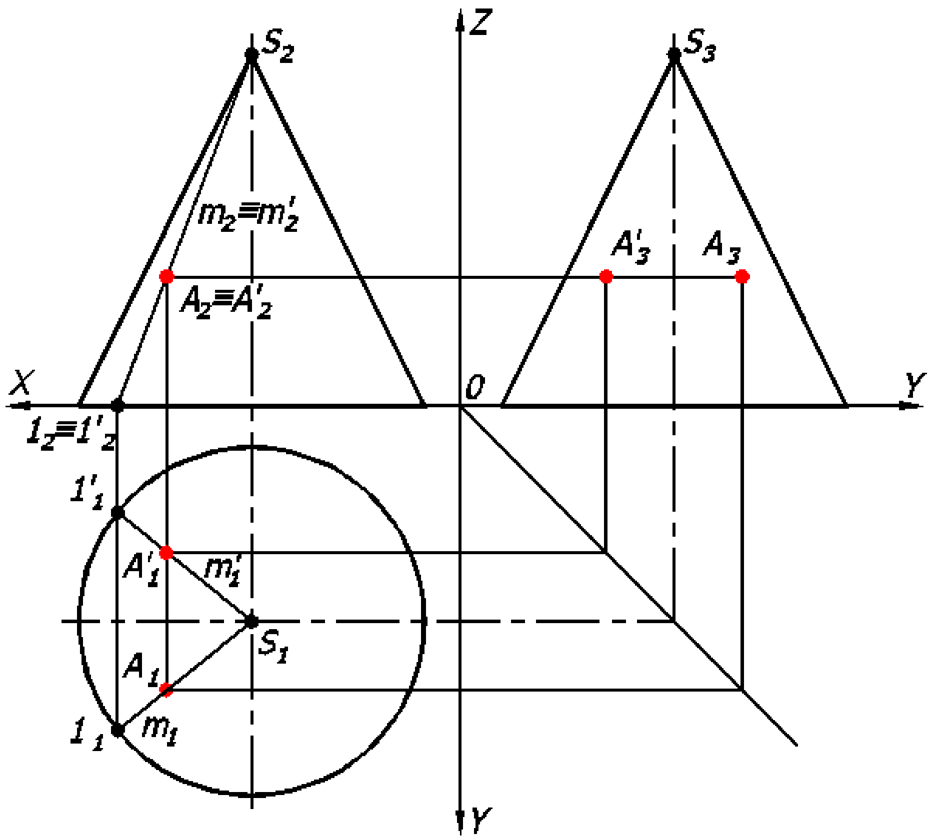


Рисунок 10.3 – Точки, принадлежащие поверхности конуса

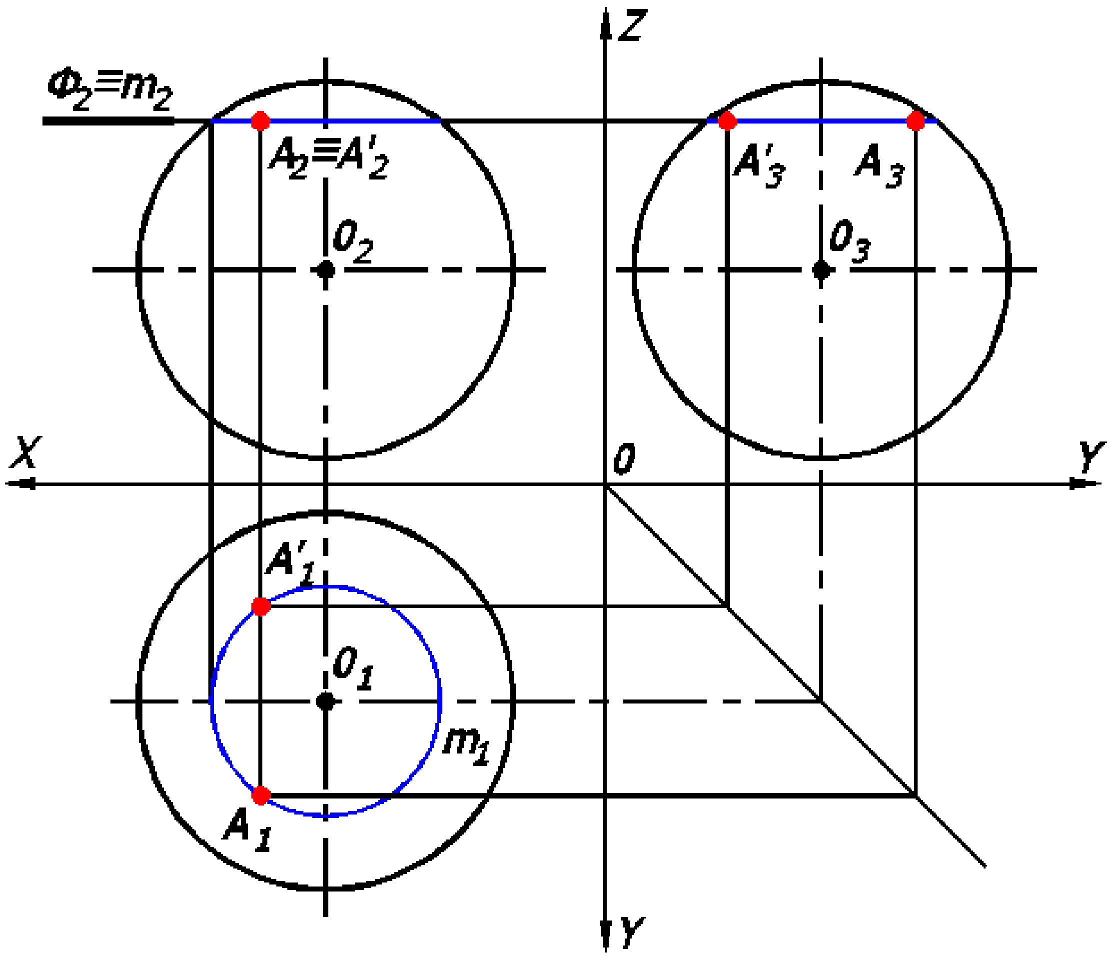


Рисунок 10.4 – Точки, принадлежащие поверхности сферы

10.1 Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение точки, принадлежащей поверхности.

2. На каком свойстве проецирования базируется алгоритм решения задачи, связанной с нахождением точки, принадлежащей поверхности?

3. Какой вспомогательной линией необходимо воспользоваться для определения положения точки, принадлежащей не проецирующей поверхности?

11 Пересечение поверхностей

Две поверхности пересекаются по линии, точки которой принадлежат каждой из пересекающихся поверхностей. Поэтому построение линии пересечения двух поверхностей Φ и T сводится к нахождению общих точек, принадлежащих как множеству точек, составляющих поверхность Φ, так и другому множеству точек, входящих в состав поверхности T.

Метод построения линии пересечения двух поверхностей состоит в том, что заданные поверхности пересекаются третьей, вспомогательной поверхностью (вид и расположение вспомогательной секущей поверхности выбираются с таким расчетом, чтобы можно было легко определить линии пересечения этой поверхности с заданными поверхностями). Затем находятся линии, по которым эта вспомогательная секущая поверхность пересекает каждую из данных поверхностей. Далее отмечается точка (точки), в которой пересекаются полученные линии пересечения, как показано на рисунке 11.1. Построив описанные операции n раз, получим множество точек. Линия l, соединяющая эти точки, является искомой линией пересечения поверхностей. Повторяя многократно последовательность операций, описанных выше (каждый раз, естественно, меняя положение вспомогательной секущей поверхности Γ), можно получить любое число точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей.

Алгоритм нахождения точек, общих для двух заданных поверхностей Φ и T, можно записать в следующем виде:

$$l=(L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots \cup L^n);[L^i=(\Phi \cap \Gamma^i) \cap (T \cap \Gamma^i)] \qquad (5)$$

Используя геометрический закон, ход решения задачи можно представить в виде формализованного алгоритма по этапам решения, приведенного в таблице 11.1.

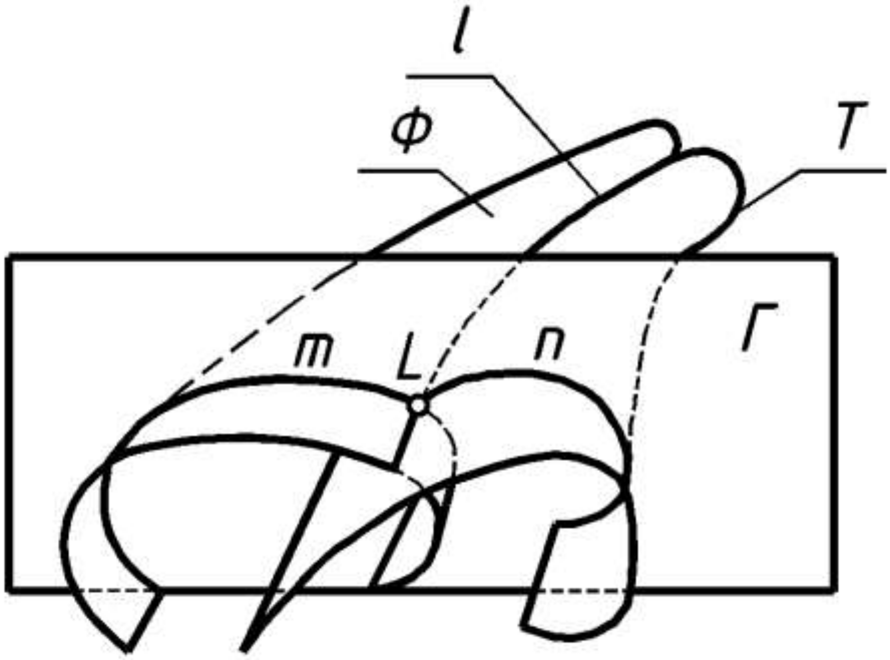


Рисунок 11.1 – Изображение линии пересечения поверхностей

Таблица 11.1 – Формализованный алгоритм по этапам решения задачи, связанной с построением линии пересечения поверхностей

№ этапа	Словесное описание на традиционном языке начертательной геометрии	Символическая запись на геометрическом языке
1.	Выбрать вид и количество вспомогательных поверхностей	–
2.	Ввести вспомогательные секущие поверхности	Ввести Γ^i
3.	Определить линии пересечения каждой вспомогательной поверхности с каждой из заданных поверхностей	Определить: $m^i=\Phi\cap\Gamma^i$ $n^i=T\cap\Gamma^i$
4.	Найти точки, в которых пересекаются полученные линии пересечения	Найти: $L^i=m^i\cap n^i$
5.	Соединить полученные точки плавной линией	$l=(L^1\cup L^2\cup L^3\cup\ldots\cup L^n)$

Рассматриваемый алгоритм определения точек, принадлежащих линии пересечения двух поверхностей, является универсальным, так как под *Ф* и *Т* могут подразумеваться любые поверхности, в том числе и плоскости. На выбор вида и расположения вспомогательных секущих поверхностей *Г* в приведенном алгоритме также не накладывается никаких ограничений, они тоже могут быть плоскостями.

11.1 Пересечение двух плоскостей

Использование универсального алгоритма для решения задач по определению линии пересечения поверхностей рассмотрим на примере с простейшими поверхностями – плоскостями.

Две плоскости пересекаются по прямой линии, для определения которой достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно каждой из заданных плоскостей. Чтобы найти эти точки, достаточно ввести две вспомогательные секущие плоскости $Г^1$ и $Г^2$, то есть дважды выполнить последовательность операций описанного выше алгоритма.

В дальнейшем часто придется сталкиваться со случаем, когда одна из заданных плоскостей занимает частное положение. Поэтому подробнее остановимся на примерах, приведенных на рисунке 11.2. На рисунке 11.2, а заданы плоскости: общего положения *Ф* и фронтально проецирующая *Т*. Особенность этой задачи в том, что фронтальная проекция линии пересечения ($1_2 2_2$) совпадает с фронтальным следом плоскости *Т*, и это естественно, так как все, что лежит во фронтально проецирующей плоскости *Т*, на фронтальную плоскость будет проецироваться в прямую линию, совпадающую с фронтальным следом плоскости *Т*. Алгоритм решения этой задачи следующий:

1. $1=Ф(A,B,C)\cap T;\ 1_2=(A_2C_2)\cap T_2.$
2. $2=Ф(A,B,C)\cap T;\ 2_2=(A_2B_2)\cap T_2.$
3. $l=(12);\ l_2=(1_2 2_2);\ l_1=(1_1 2_1).$

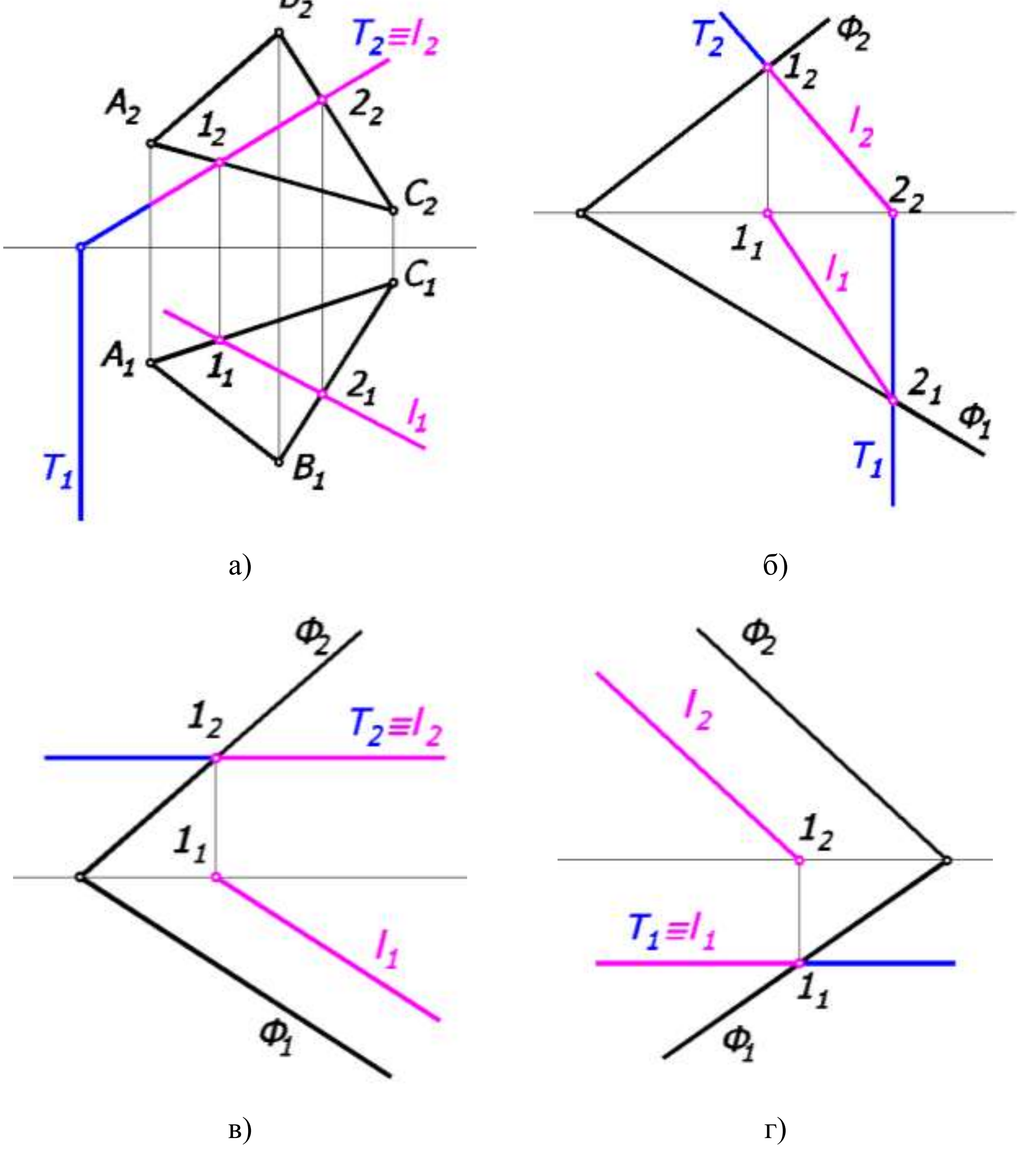


Рисунок 11.2 – Частные случаи пересечения двух плоскостей

На рисунке 11.2, б приведена задача, которая отличается от предыдущей тем, что плоскость общего положения *Ф* задана тоже следами. Алгоритм ее решения следующий:

1. $1=Ф\cap T$; $1_2=Ф_2\cap T_2$.

2. $2=\Phi\cap T$; $2_1=\Phi_1\cap T_1$.

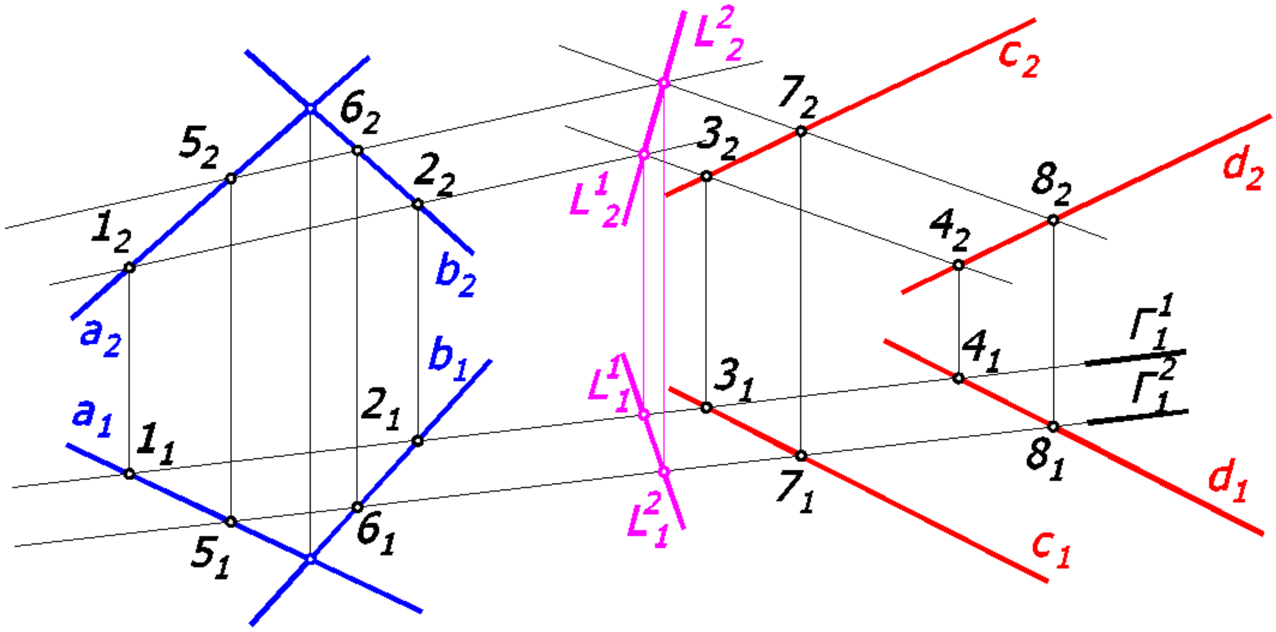
3. $l=(12)$.

На рисунке 11.2, в плоскость T – горизонтальная плоскость уровня. Поэтому линия пересечения плоскостей Φ и T будет горизонталь. Для ее нахождения достаточно одной точки 1 $(1_1 1_2)$. Фронтальная проекция прямой совпадает с фронтальным следом плоскости T_2, горизонтальная – параллельна горизонтальному следу плоскости Φ_1.

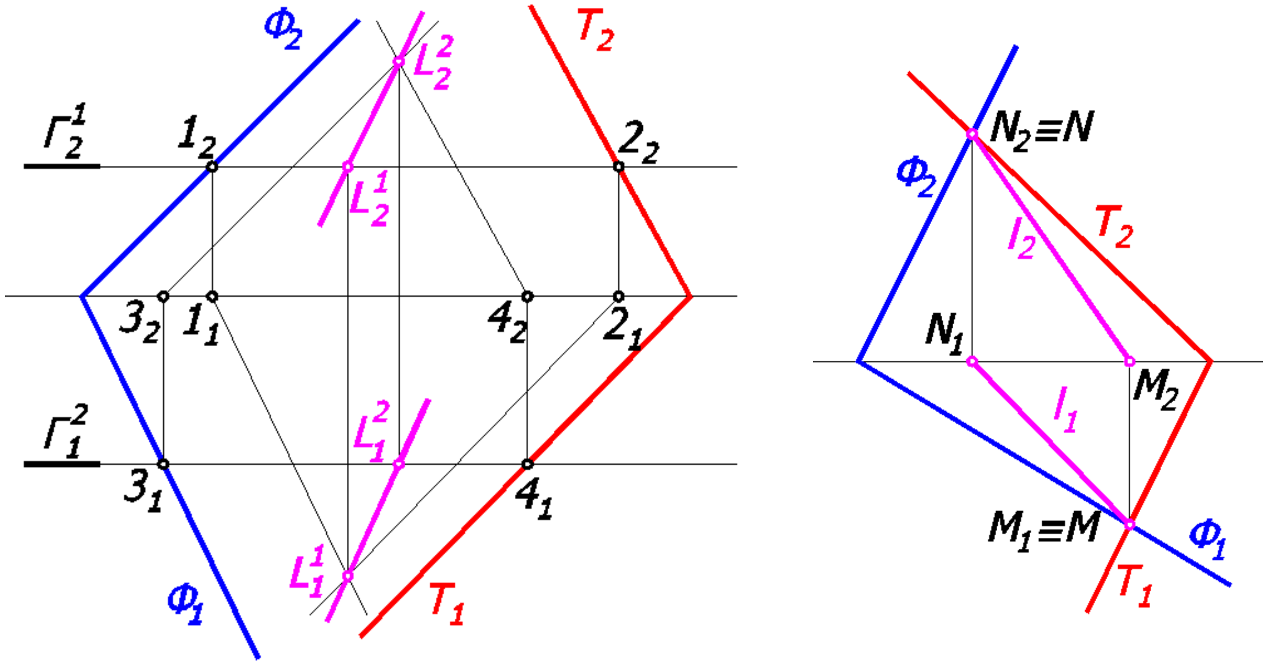
Аналогично решается задача, приведенная на рисунке 11.2, г, где T – фронтальная плоскость уровня. Линией пересечения плоскостей Φ и T является фронталь. Горизонтальная ее проекция совпадает с T_1, фронтальная – параллельна фронтальному следу Φ_2.

На рисунке 11.3 показан общий случай пересечения плоскостей, когда обе плоскости – общего положения.

На рисунке 11.3, а одна из плоскостей задана двумя пересекающимися прямыми a и b, вторая плоскость – двумя параллельными прямыми c и d. Вспомогательные плоскости $Г^1$ и $Г^2$ – горизонтально проецирующие.



а)



в) г)

Рисунок 11.3 – Общий случай пересечения двух плоскостей

Решение задачи может быть записано в следующей символической форме:

1. Вводим $Г^1$, $Г^2$.
2. $(12)=Ф(a \cap b) \cap Г^1$; $(1_1 2_1)=Г^1{}_1$.
3. $(34)=T(c//d) \cap Г^1$; $(3_1 4_1)=Г^1{}_1$.
4. $(56)=Ф(a \cap b) \cap Г^2$; $(5_1 6_1)=Г^2{}_1$.
5. $(78)=T(c//d) \cap Г^2$; $(7_1 8_1)=Г^2{}_1$.
6. $L^1=(12) \cap (34)$; $L^1{}_2=(1_2 2_2) \cap (3_2 4_2)$.
7. $L^2=(56) \cap (78)$; $L^2{}_2=(5_2 6_2) \cap (7_2 8_2)$.
8. $l=(L^1 L^2)$.

На рисунке 11.3,б плоскости общего положения *Ф* и *Т* заданы следами. Для решения этой задачи введены вспомогательные плоскости: горизонтальная плоскость уровня $Г^1$ и фронтальная плоскость уровня $Г^2$.

Запись решения задачи в символической форме следующая:

1. Вводим Γ^1, Γ^2.

2. $m^1=\Phi\cap\Gamma^1$; $m^1{}_2=\Gamma^1{}_2$; $m^1{}_1=\Phi_1$.

$n^1=T\cap\Gamma^1$; $n^1{}_2=\Gamma^1{}_2$; $n^1{}_1=T_1$.

3. $m^2=\Phi\cap\Gamma^2$; $m^2{}_1=\Gamma^2{}_1$; $m^2{}_2=\Phi_2$.

$n^2=T\cap\Gamma^2$; $n^2{}_1=\Gamma^2{}_1$; $n^2{}_2=T_2$.

4. $L^1=m^1\cap n^1$; $L^2=m^2\cap n^2$.

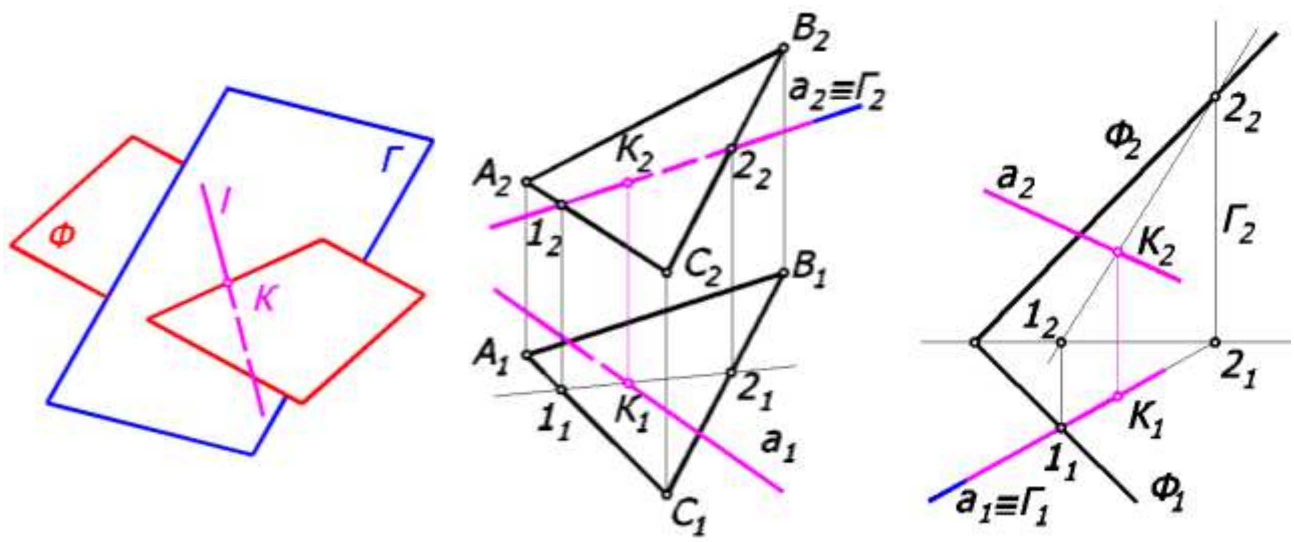
5. $l=(L^1L^2)$.

На рисунке 11.3, в показано частное решение этой задачи, где роль вспомогательных плоскостей выполняют плоскости проекции. На них лежат уже искомые точки – точки пересечения горизонтальных и фронтальных следов. Для решения этой задачи достаточно найти горизонтальную проекцию точки *N* и фронтальную проекцию точки *M*. Одноименные проекции соединить.

11.2 Пересечение прямой с плоскостью

Определение точки пересечения прямой с плоскостью – элементарная задача, но значимая для решения других, более сложных задач. Она является частью алгоритма решения большого количества и позиционных, и метрических задач.

Решение этой задачи даже в самом общем случае, когда и плоскость, и прямая занимают произвольное положение в пространстве, легко сводится к простейшей задаче определения линии пересечения *l* двух плоскостей, из которых одна проецирующая и содержащая в себе вспомогательную прямую, как показано на рисунке 11.4. Точка пересечения *K* будет расположена на этой линии пересечения *l*. Таким образом, для решения задачи нахождения линии пересечения прямой с плоскостью достаточно эту прямую заключить в проецирующую плоскость, найти линию пересечения *l* двух плоскостей, а затем на этой линии *l* найти искомую точку.



а) б) в)

Рисунок 11.4 – Пересечение прямой с плоскостью

На рисунке 11.4, б плоскость общего положения задана треугольником *ΔАВС*. Для того, чтобы найти точку пересечения этой плоскости с прямой *a*, вводится фронтально проецирующая вспомогательная плоскость $\Gamma_2: a \subset \Gamma$. Находится линия пересечения *l(1,2)* плоскости треугольника и плоскости *Г*. На горизонтальной проекции определяется точка *К* пересечения прямых *а* и *l*: $K_1=a_1\cap l_1$; $K_2=a_2\cap l_2$.

На рисунке 11.4, в плоскость общего положения задана следами. Для решения этой задачи через прямую *а* проводится горизонтально проецирующая плоскость *Г*. Прямая *l(1,2)* пересечения плоскостей *Ф* и *Г* покажет на фронтальной проекции точку пересечения *К* прямой *а* с плоскостью *Ф*.

11.3 Построение сечения поверхности плоскостью

Результатом пересечения поверхности плоскостью является плоская фигура – **сечение**. Сечение поверхности плоскостью в общем случае представляет собой кривую или ломаную линию, принадлежащую секущей плоскости.

Определение проекций линии сечения начинают с построения **опорных** точек – точек, расположенных на очерковых образующих поверхности (точек, определяющих границы видимости проекций кривой); точек, удаленных на **экстремальные** (максимальное и минимальное) расстояния от плоскостей проекций. Затем следует определение **произвольных** точек линии сечения. Если произвольные точки определяются одним и тем же приемом, то для нахождения опорных точек, как правило, необходимо применять различные способы. Дальше при построении сечения поверхности плоскостью показано нахождение и опорных и произвольных точек сечения.

11.3.1 Построение сечения гранной поверхности плоскостью

Проекциями сечения многогранников, в общем случае, являются многоугольники, их вершины принадлежат ребрам, а стороны – граням многогранника. В связи с этим задача определения сечения многогранника сводится к многократному решению задачи определения точки пересечения прямых (ребер многогранника) с плоскостью (первая главная позиционная задача – 1ГПЗ) или к задаче нахождения линии пересечения двух плоскостей (грани многогранника и секущей плоскости) (вторая главная позиционная задача – 2ГПЗ). Первый путь решения называют **методом ребер**, второй – **методом граней**. Какому из методов следует отдать предпочтение – надо решать в каждом конкретном случае.

На рисунке 11.5 приведен пример решения задачи построения сечения гранной поверхности плоскостью общего положения методом граней, на рисунке 11.6 – методом ребер. И в том, и в другом случае наблюдаются некоторые особенности при решении этих задач по общему алгоритму, а именно, находится только одна линия пересечения – линия пересечения вспомогательной плоскости с заданной секущей плоскостью. Линия пересечения вспомогательной плоскости с гранью или ребром многогранника находиться не может, так как вспомогательные плоскости в этих задачах включали в себя или грань многогранника, или ребро.

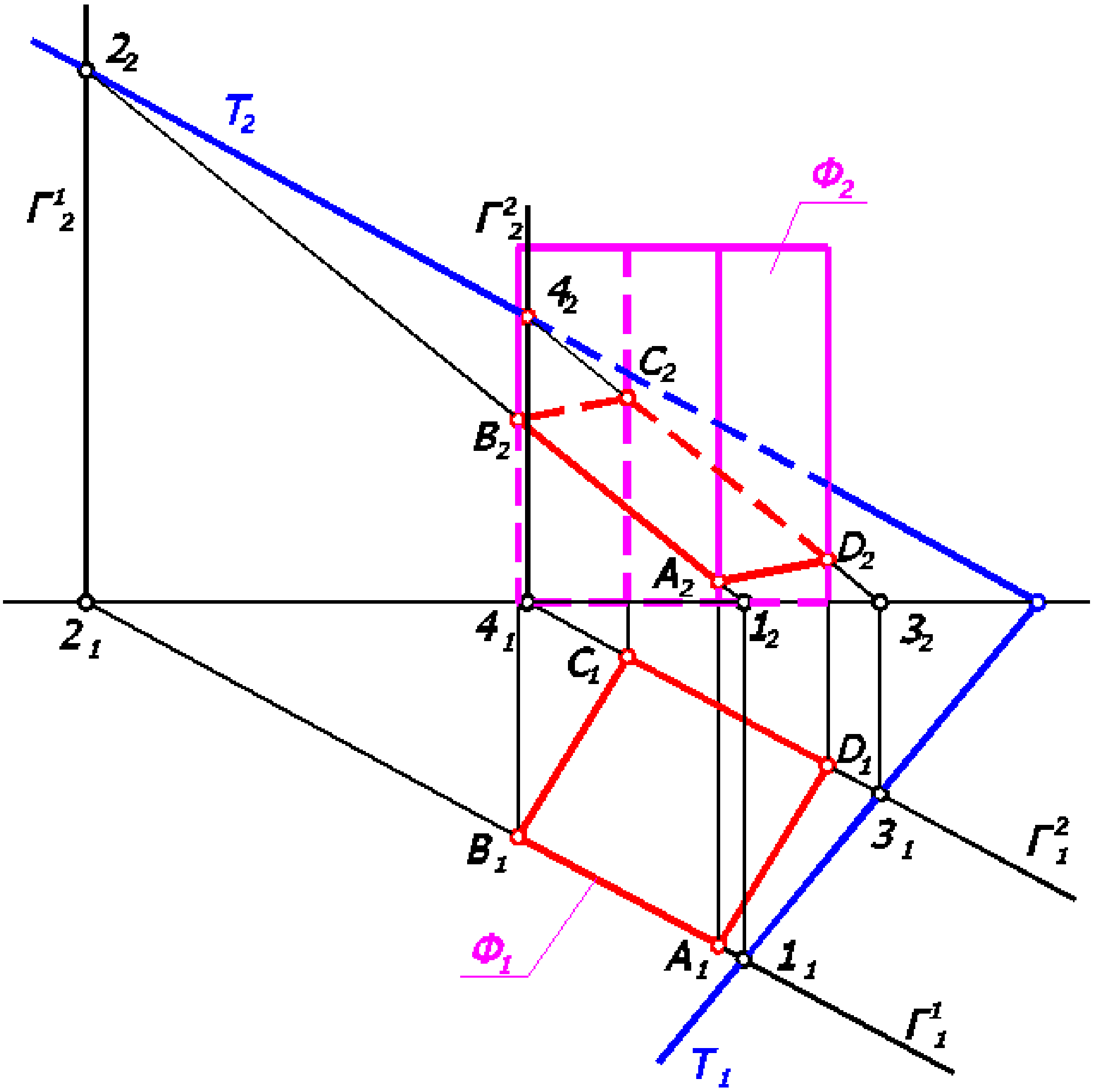


Рисунок 11.5 – Пример построения сечения призмы плоскостью общего положения методом граней

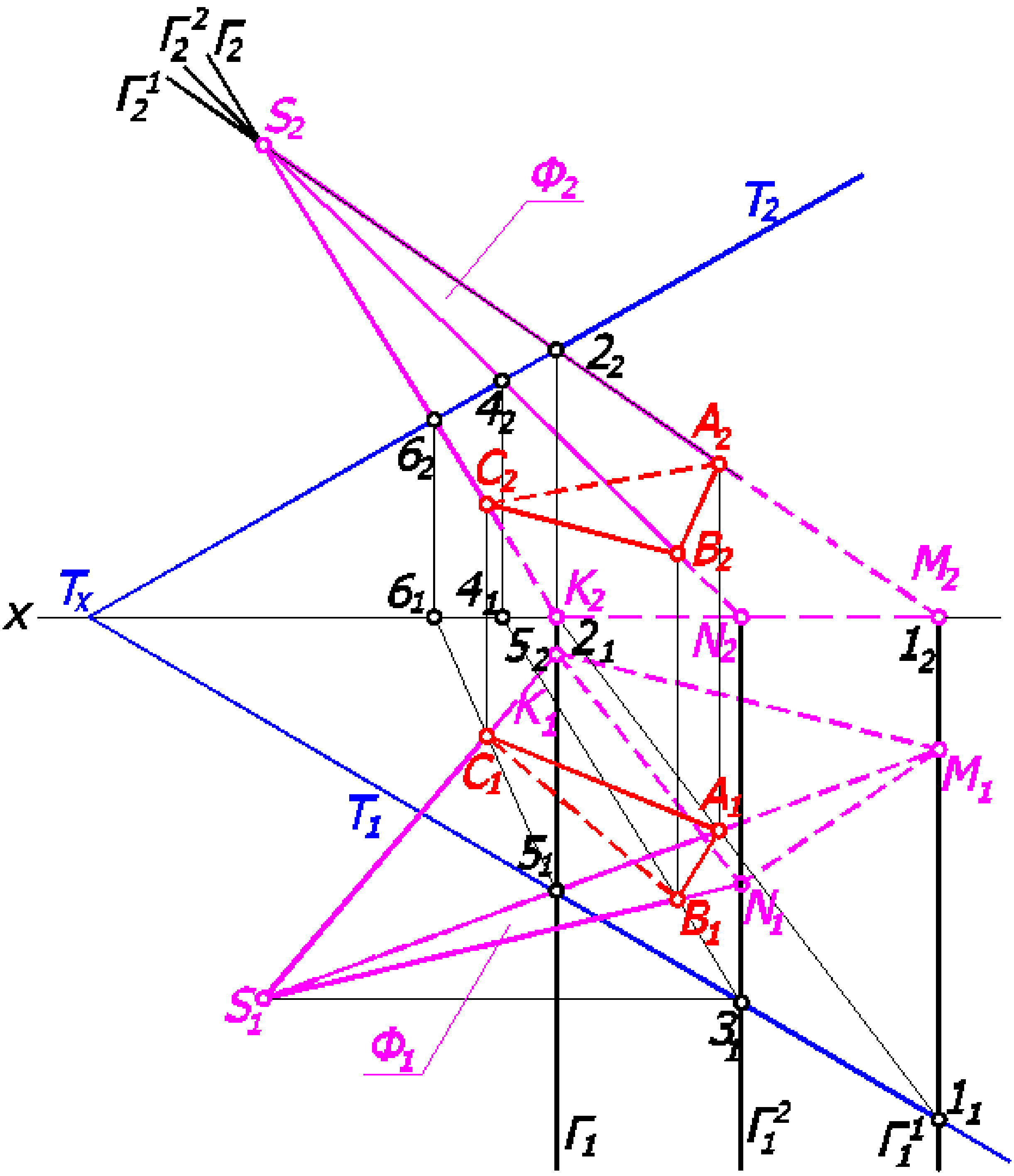


Рисунок 11.6 – Пример построения сечения наклонной пирамиды плоскостью общего положения методом ребер

Задача на рисунке 11.5 решается **методом граней**. Вспомогательные плоскости $Г^1$ и $Г^2$ включают в себя грани призмы. Плоскости $Г^1$ и $Г^2$ – горизонтально проецирующие. Прямые *(12)* и *(34)* – линии пересечения плоскостей $Г^1$ и $Г^2$ с секущей плоскостью *T*. С помощью этих прямых находятся точки *A, B, C* и

D – точки пересечения ребер призмы с секущей плоскостью *T*. Ломаная линия *ABCD* – это сечение призмы плоскостью *T*.

На рисунке 11.6 приведен пример построения сечения наклонной пирамиды плоскостью *T*. Эта задача решена **методом ребер**. Вспомогательные плоскости *Г*, $Г^1$ и $Г^2$ – фронтально проецирующие и содержащие в себе ребра пирамиды. Прямые *(12), (34), (56)* – линии пересечения вспомогательных плоскостей с секущей плоскостью *T*. Эти прямые позволят определить точки пересечения ребер пирамиды с секущей плоскостью *T*, то есть точки искомого сечения пирамиды с плоскостью *T*.

11.3.2 Частные случаи сечения гранной поверхности плоскостью

Частными случаями сечения гранной поверхности плоскостью являются сечения многогранника плоскостями частного положения (проецирующими или уровня).

Сечение многогранника проецирующей плоскостью. Результатом пересечения гранной поверхности плоскостью является ломаная линия, для построения которой необходимо определить точки пересечения ребер многогранника и секущей плоскости и соединить полученные точки с учетом их видимости, как показано на рисунке 11.7. Фронтально проецирующая секущая плоскость $\beta(\beta_2)$ расположена перпендикулярно фронтальной плоскости проекций π_2, поэтому точки пересечения ребер определяются как точки пересечения прямой общего положения и плоскости частного положения:

$$AS \cap \beta = 1(1_2, 1_1);$$

$$BS \cap \beta = 2(2_2, 2_1);$$

$$CS \cap \beta = 3(3_2, 3_1).$$

Видимость линий определяют с помощью метода конкурирующих точек скрещивающихся линий. Грань ACS относительно горизонтальной плоскости проекций π_1 невидима, следовательно, и линия (1_1–3_1) также невидима. Видимость на плоскость проекций π_2 в приведенном примере не определяется.

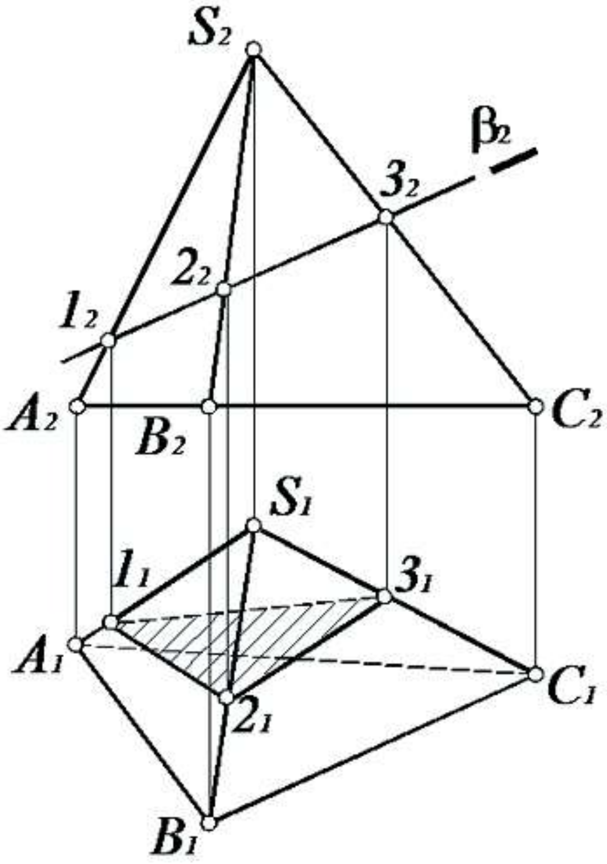


Рисунок 11.7 – Пример построения сечения многогранника проецирующей плоскостью

Сечение многогранника плоскостью уровня. На рисунке 11.8 показано построение сечения пирамиды плоскостью, параллельной плоскости проекций π_1, горизонтальной плоскостью уровня P_2. Точки пересечения ребер пирамиды определяются как точки пересечения прямой общего положения и плоскости частного положения. Плоскость уровня, параллельная основанию пирамиды, рассекает поверхность, в сечении получается линия *1-2-3-4-5*, стороны которой параллельны сторонам (ребрам) многогранника основания.

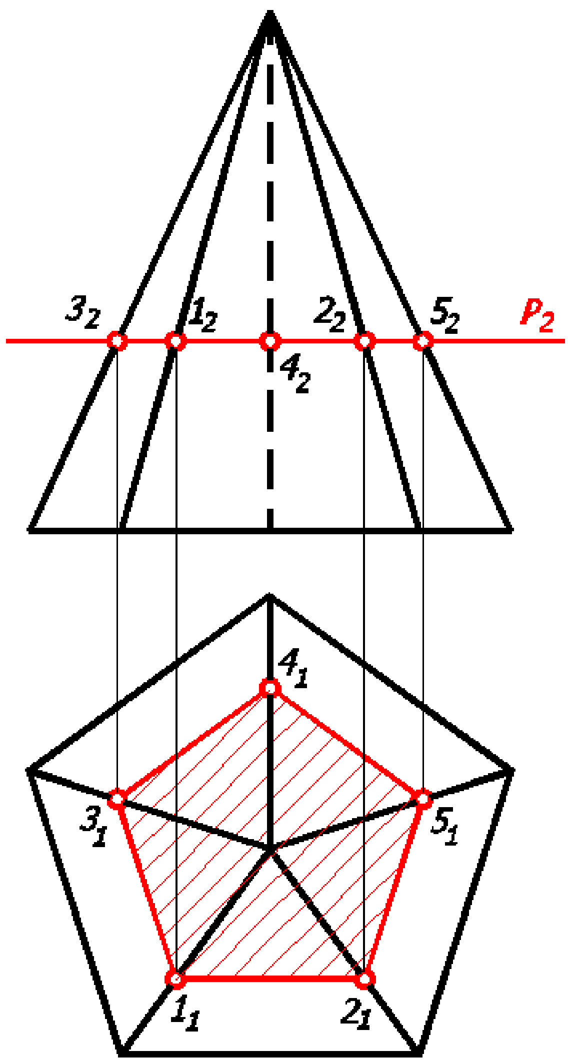


Рисунок 11.8 – Пример построения сечения многогранника плоскостью уровня

11.3.3 Построение развертки гранных поверхностей

При изучении построения развертки поверхности, последняя представлена как гибкая, нерастяжимая пленка. Если отсек какой-либо поверхности возможно изгибанием совместить с плоскостью без разрывов и склеивания, то такая поверхность называется **развертывающейся**, а полученная плоская фигура – ее **разверткой**. Поверхности, которые нельзя совместить с плоскостью, являются **неразвертываемыми**.

Развертывающиеся поверхности – это только линейчатые поверхности и те из них, которые имеют пересекающиеся смежные образующие. Точка пересечения может быть собственной (поверхности с ребром возврата и конические) и несобственной (цилиндрической поверхности).

Развертка гранной поверхности (многогранника) – это плоская фигура, составленная из граней этой поверхности, совмещенных с одной плоскостью.

Известны три метода построения развертки многогранных поверхностей:

1) метод нормального сечения;

2) метод раскатки;

3) метод триангуляции (треугольников).

Первые два метода применяются для построения развертки призматических поверхностей, третий – для пирамидальных поверхностей.

11.3.3.1 Метод нормального сечения

Алгоритм построения развертки призмы методом нормального сечения в общем случае заключается в следующем.

1. Для построения нормального сечения проводят плоскость, расположенную перпендикулярно боковым ребрам призмы.

2. Находят натуральную величину нормального сечения, стороны которого определяют расстояние между боковыми ребрами – ширину граней.

3. Нормальное сечение разворачивают в прямую и через концы отрезков проводят ребра призмы, перпендикулярные построенной прямой, а, следовательно, и периметру *1, 2, 3* сечения.

4. На проведенных ребрах откладывают длины отрезков боковых ребер, заключенных между линией сечения и основаниями. Полученные точки соединяют последовательно между собой.

Пример построения полной развертки наклонной треугольной призмы приведен на рисунке 11.9.

Призма расположена относительно плоскостей проекций так, что ее боковые ребра параллельны фронтальной плоскости проекций и проецируются на фронтальную плоскость проекций π_2 в натуральную величину. Стороны основания проецируется без искажения на горизонтальную плоскость проекций плоскость π_1. Необходимо пересечь призму в произвольном месте плоскостью $Г$, перпендикулярной боковым ребрам.

В примере, приведенном на рисунке 11.9, эта плоскость является фронтально-проецирующей и пересекает призму по треугольнику $\Delta 123$ ($1_2 2_2 3_2$, $1_1 2_1 3_1$). Стороны треугольника определяют расстояние между боковыми ребрами. Находят натуральную величину сечения (треугольник $\Delta A_4 B_4 C_4$), используя, например, способ замены плоскостей проекций. Стороны нормального сечения последовательно отложены на прямой a: $1\text{-}2=14\text{-}24$, $2\text{-}3=24\text{-}34$, $3\text{-}1=34\text{-}14$. Полученный отрезок $1\text{-}1$ равен периметру нормального сечения.

Через точки 1, 2, 3 проведены прямые, перпендикулярные развертке периметра сечения, и на них отложены натуральные величины боковых ребер $1A=1_2A_2$ и $1A'=1_2A_2'$, $2B=2_2B_2$ и $2B'=2_2B_2'$, $3C=3_2C_2$ и $3C'=3_2C_2'$ и так далее. Соединив концы отложенных отрезков, можно получить развертку боковой поверхности призмы. Для построения полной развертки необходимо к развертке боковой поверхности пристроить натуральные величины оснований, используя натуральные величины их сторон.

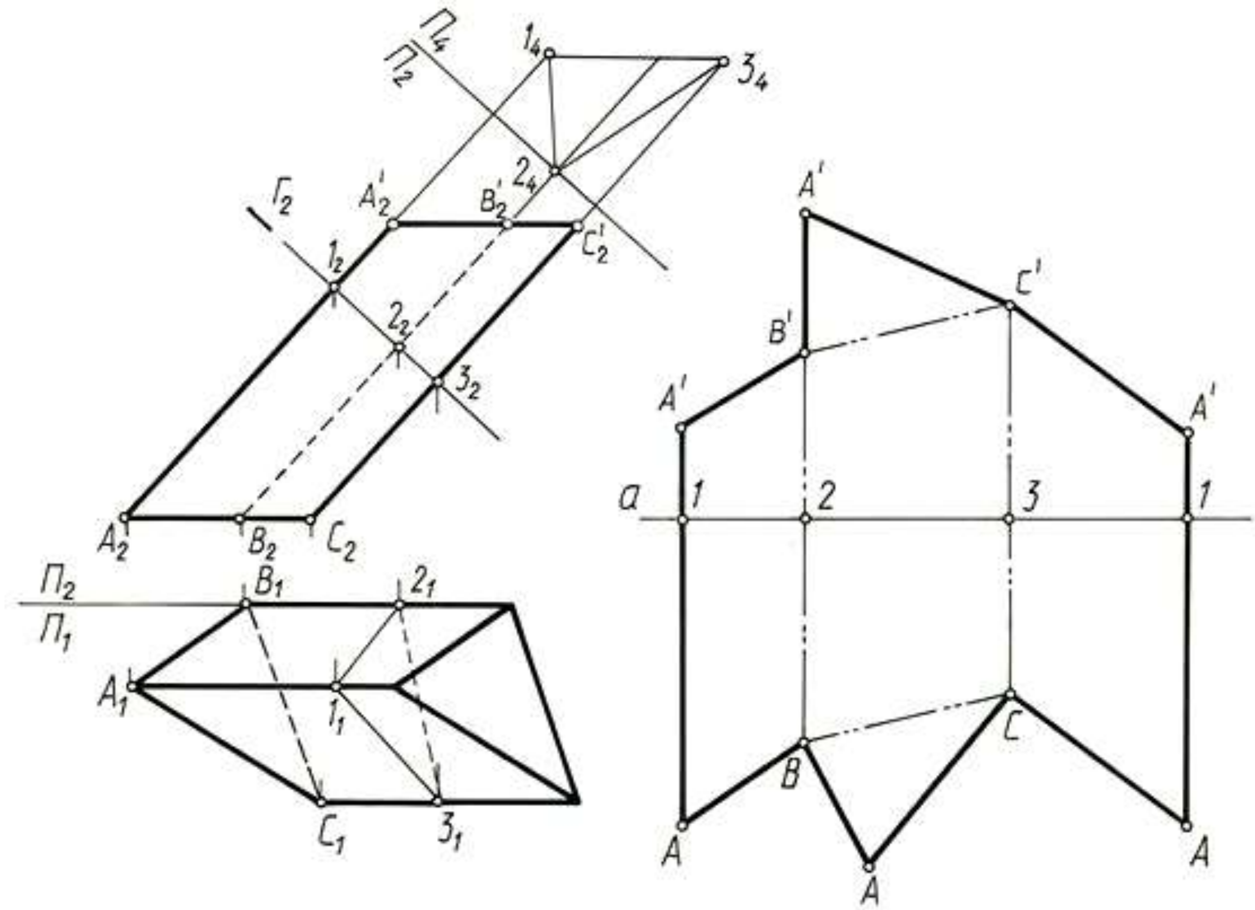


Рисунок 11.9 – Пример построения развертки наклонной треугольной призмы методом нормального сечения

11.3.3.2 Метод раскатки

Данный метод применяется для построения разверток призматических и цилиндрических поверхностей при условии параллельности боковых ребер призм и образующих цилиндра какой-либо плоскости проекций, на которую они проецируются в натуральную величину, а стороны основания расположены параллельно другой плоскости проекций.

Алгоритм построения развертки поверхности методом раскатки следующий:

1. Происходит мысленное разрезание боковой поверхности по одному из ребер.

2. Методом последовательного вращения вокруг боковых ребер, являющихся линиями уровня, все боковые грани совмещают с плоскостью уровня, которая проходит через ребро, по которому разрезана приведенная призма.

Развертка боковой поверхности призмы строится методом раскатки при условии расположения ее боковых ребер параллельно фронтальной плоскости проекций π_2, сторон основания – параллельно горизонтальной плоскости проекций π_1, на которую они проецируются в натуральную величину, как показано на рисунке 11.10.

Так как боковые ребра расположены параллельно фронтальной плоскости проекций π_2, то каждую грань необходимо повернуть вокруг соответствующего ребра до положения, в котором она станет параллельной фронтальной плоскости проекций π_2, и спроецируется на эту плоскость без искажения. Поворачивая таким образом каждую грань, возможно получить развертку боковой поверхности призмы.

Принимают за плоскость развертки плоскость Σ (Σ_1), которая проходит через ребро AA', и параллельна фронтальной плоскости проекций π_2. Совмещают грань $AA'B'B$ с плоскостью Σ. Для этого мысленно разрезают поверхность призмы по ребру AA' и поворачивают грань $AA'B'B$ вокруг ребра как вокруг фронтальной линии уровня до совмещения с фронтальной плоскостью Σ, проходящей через это ребро.

Для того чтобы определить совмещенное положение ребра BB' с плоскостью Σ из точки B_2' проводят вырожденную проекцию плоскости $\Gamma(\Gamma_2)$, в которой вращается методом вращения вокруг линии уровня точка B', перпендикулярную AA', на которой из точки A'_2 строят засечку дугой окружности радиуса $A_2'B'=A_1B_1$. Через точку B' проводят прямую $B'B$, параллельную $A'A$. Принимают совмещенное положение ребра $B'B$ за новую ось и вращают вокруг нее грань $B'BCC'$ до совмещения с плоскостью Σ. Для этого из точки C_2' проводят вырожденную проекцию плоскости $\Delta(\Delta_2)$, перпендикулярную ребру BB', а из точки B' – дугу окружности радиусом, равным B_1C_1. Пересечение дуги с Δ_2 определит положение точки C'. Аналогично определяют положение ребра $A'A$. Соединив соответствующие точки прямыми линиями, строят развертку боковой поверхности призмы. Достроив основание призмы, получают полную развертку поверхности.

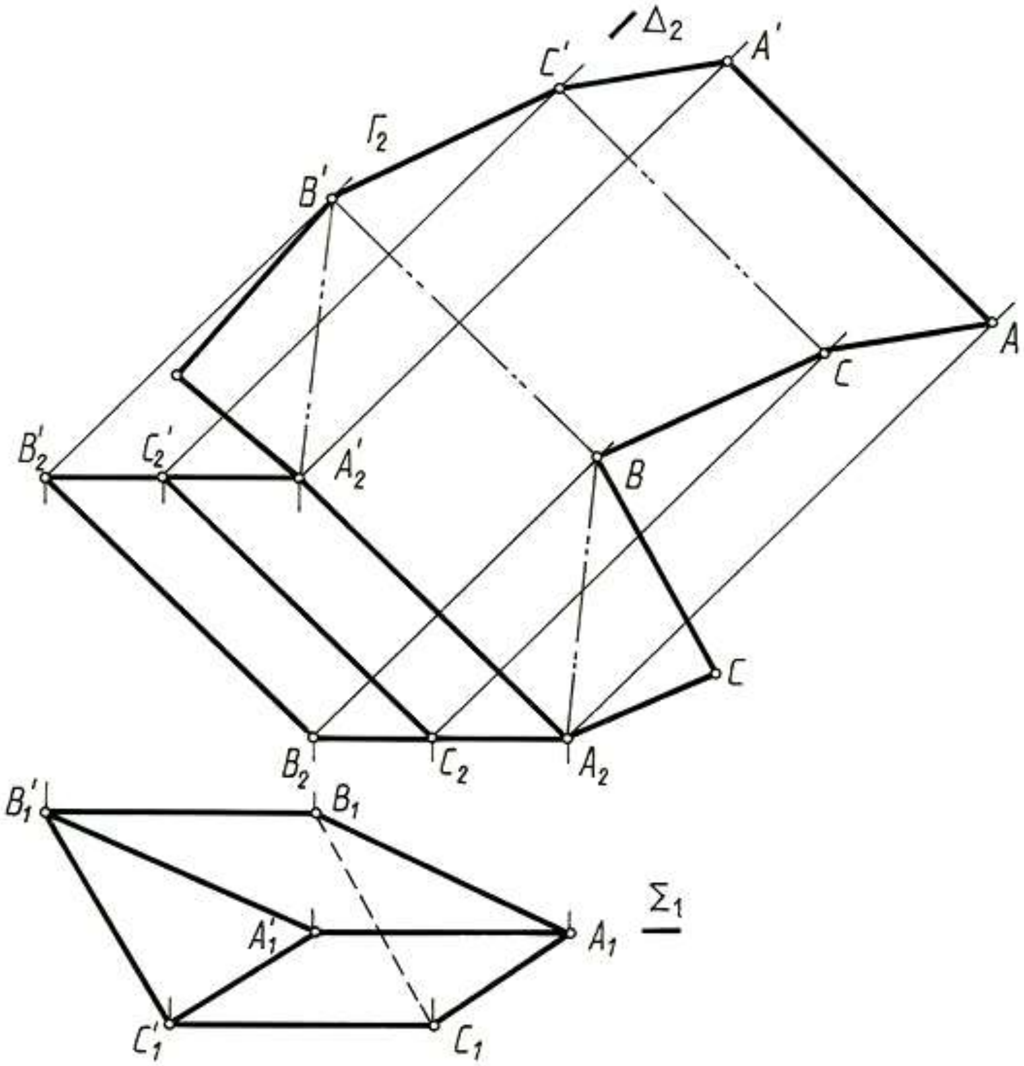


Рисунок 11.10 – Пример построения полной развертки поверхности наклонной треугольной призмы методом раскатки

11.3.3.3 Метод триангуляции (треугольников)

На рисунке 11.11, б показана развертка усеченной части пирамиды методом триангуляции (треугольников). Развертка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников – граней пирамиды.

Для ее построения необходимо найти натуральную величину ребер пирамиды, являющихся прямыми общего положения, расположенными произвольно относительно плоскостей проекций, **методом прямоугольного треугольника**. Суть метода заключается в нахождении гипотенузы прямоугольного треугольника, у которого один катет равен горизонтальной (или фронтальной) проекции отрезка, а величина другого катета представляет собой разность удаления концов отрезка от горизонтальной (или, соответственно, фронтальной) плоскости проекции.

Для того чтобы найти натуральную величину отрезка SM, необходимо построить прямоугольный треугольник $M_0S_2M_2$. Его первый катет S_2M_2 – это фронтальная проекция SM. Второй катет M_2M_0 равен величине $\Delta Y=Y_S–Y_M$, то есть разности удаления точек S и M от фронтальной плоскости π_2.

Откладывают $M_2M_0=\Delta Y=Y_S–Y_M$ перпендикулярно S_2M_2. Затем проводят гипотенузу S_2M_0 треугольника $\Delta M_0S_2M_2$, величина которой соответствует настоящей длине $/SM/$. Так же определяют натуральные величины ребер $/SN/$ и $/SK/$.

На натуральной величине ребер находятся точки A, B и C сечения. Для определения натуральной величины отрезка SA проводят из точки A_2 прямую, параллельную отрезку M_2M_0, пересечение этой прямой с S_2M_0 даст точку A_0. Величина гипотенузы S_2A_0 треугольника $\Delta A_0S_2A_2$ соответствует настоящей длине $/SA/$. Аналогично определяют натуральные величины отрезков $/SB/$ и $/SC/$.

После того как определены длины ребер $/SM/$, $/SN/$, $/SK/$ приступают к построению развертки. Для этого через произвольную точку S_0 необходимо провести прямую, отложить на ней от точки S_0 $/SN/$. Из точки N_0 построить дугу радиусом, равным $/NM/$, а из точки S_0 – дугу радиусом, равным $/SM/$. Пересечение дуг указывает положение вершины M_0 (ΔSNM – грань пирамиды). Аналогично определяют точки K_0 и N_0. Соединив точки $N_0M_0K_0N_0$, можно построить развертку боковой поверхности пирамиды $SNMK$. Основание пирамиды ΔKMN

проецируется в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекции π_1, так как является горизонтальной плоскостью уровня, параллельной горизонтальной плоскости проекции π_1.

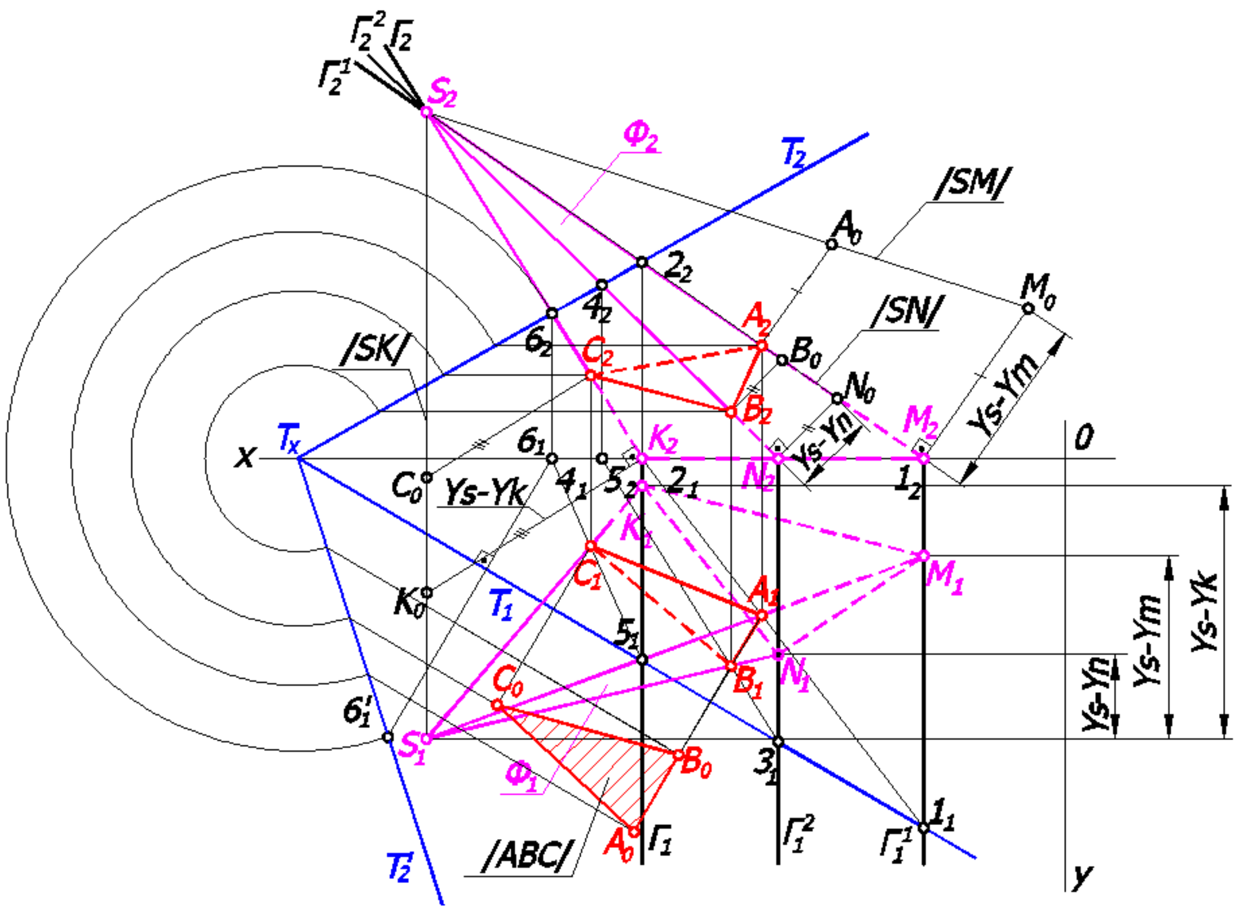
Натуральная величина сечения ΔABC определяется **методом вращения вокруг оси, принадлежащей плоскости проекции (совмещения)** – частного случая вращения плоскости вокруг прямой уровня. При совмещении за ось вращения принимается не произвольная горизонталь или фронталь плоскости, а ее горизонтальный или фронтальный след (нулевые горизонталь или фронталь). В этом случае в результате поворота плоскости она совпадает (совмещается) с горизонтальной плоскостью проекции π_1, если вращение осуществляется вокруг горизонтального следа плоскости, либо с фронтальной плоскостью проекции π_2 при вращении вокруг ее фронтального следа.

Суть метода заключается в том, что плоскость общего положения T, как показано на рисунке 11.11 а, вращается вокруг следа T_1 до совпадения ее с горизонтальной плоскостью проекции π_1. При этом преобразовании след T_1, как ось вращения, останется на месте. Поэтому для нахождения совмещенного положения плоскости достаточно найти совмещенное положение только одной принадлежащей ей точки (не лежащей на следе T_1).

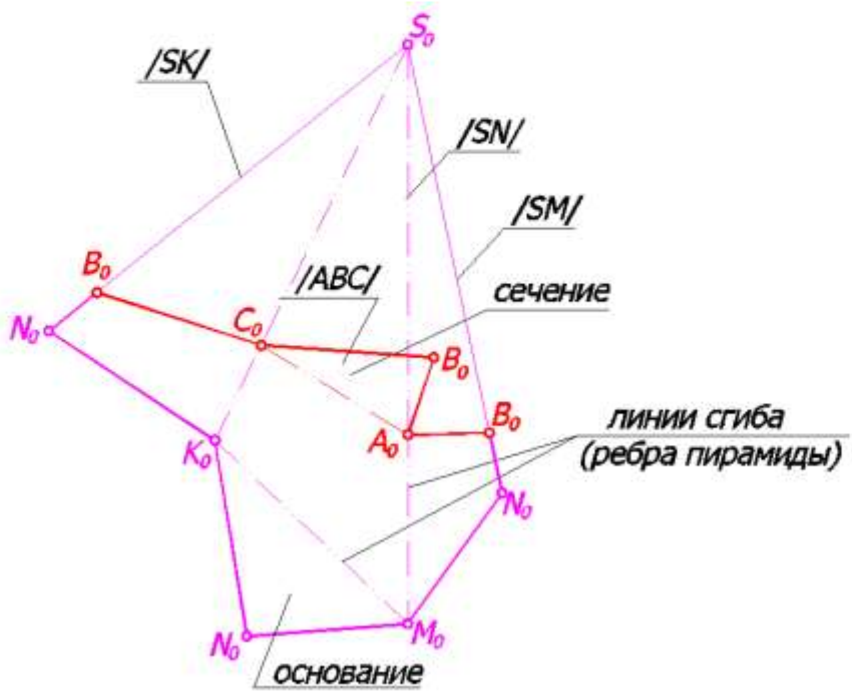
В качестве такой точки целесообразно (для упрощения графических построений) взять, например, точку *6*, принадлежащую фронтальному следу T_2.

Точка *6* $(6_1,6_2)$ при вращении вокруг оси T_1 будет перемещаться по дуге окружности, принадлежащей плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

Совмещенное с плоскостью проекции положение фронтального следа T'_2 определяется точками T_x и $6'_2$. Положение точки $6'_2$, а следовательно, и следа T'_2 можно определить, не пользуясь центром и радиусом вращения. Для этого достаточно из точки T_x описать дугу радиусом, равным расстоянию $/T_x6_2/$, до пересечения с прямой (горизонтальным следом T_1 плоскости, в которой будет перемещаться точка *6*), проведенной через 6_1 перпендикулярно в T_1. Через полученную точку пройдет фронтальный след плоскости T'_2 при совмещении его с плоскостью π_1.



а)



б)

Рисунок 11.11 – Пример построения сечения наклонной пирамиды плоскостью общего положения методом триангуляции (треугольников)

11.3.4 Построение сечения поверхности вращения плоскостью

Так как для рассматриваемого круга задач в алгоритме:

$$l=(L^1\cup L^2\cup L^3\cup\ldots\cup L^n);[L^i=(\Phi\cap\Gamma^i)\cap(T\cap\Gamma^i)],$$

если Φ – поверхность вращения, T – секущая плоскость, то для нахождения общих точек L^1, L^2, L^3, …, L^n, принадлежащих как поверхности Φ, так и поверхности T, целесообразно в качестве вспомогательных плоскостей Γ^i принять плоскости, перпендикулярные оси вращения. В этом случае плоскости Γ^1, Γ^2, Γ^3, …, Γ^n, будут пересекать поверхность Φ по окружностям, а плоскость T – по линиям уровня. Определение точек L^1, L^2, L^3, …, L^n сводится к нахождению точек пересечения прямой с окружностью.

Построения надо начинать с нахождения опорных точек. Для нахождения экстремальных точек нужно воспользоваться вспомогательной проецирующей плоскостью, проходящей через ось вращения поверхности Φ и перпендикулярной соответствующему следу (прямой уровня) плоскости T. Точки сечения находятся по общему алгоритму. Для определения точек, лежащих на очерке и определяющих видимость кривой сечения, необходимо провести плоскость, тоже проходящую через ось вращения, но параллельную другой плоскости проекции. Далее задача решается по общему алгоритму.

Такое решение для нахождения опорных точек приемлемо только для поверхностей вращения, у которых ось вращения перпендикулярна одной из плоскостей проекций.

На рисунке 11.12 приведено построение сечения прямого кругового конуса плоскостью общего положения T. Для нахождения опорных точек вводятся горизонтально проецирующие плоскости Γ^1 и Γ^2. Плоскость Γ^1 перпендикулярна секущей плоскости T $(\Gamma^1{}_1 \perp T_1)$. Плоскость Γ^2 параллельна плоскости Π_2 $(\Gamma^2{}_1 \parallel OX)$. Далее находятся линии пересечения этих плоскостей с секущей плоскостью T. Это будут прямые *(12)* и *(34)*. Затем находятся линии пересечения плоскостей Γ^1 и Γ^2 с поверхностью конуса Φ. В первом случае это будет треугольник *5S6*, во втором – треугольник по очерку конуса. Для нахождения искомых точек необходимо найти точки пересечения этих треугольников с соответствующей линией *(12)* или *(34)*.

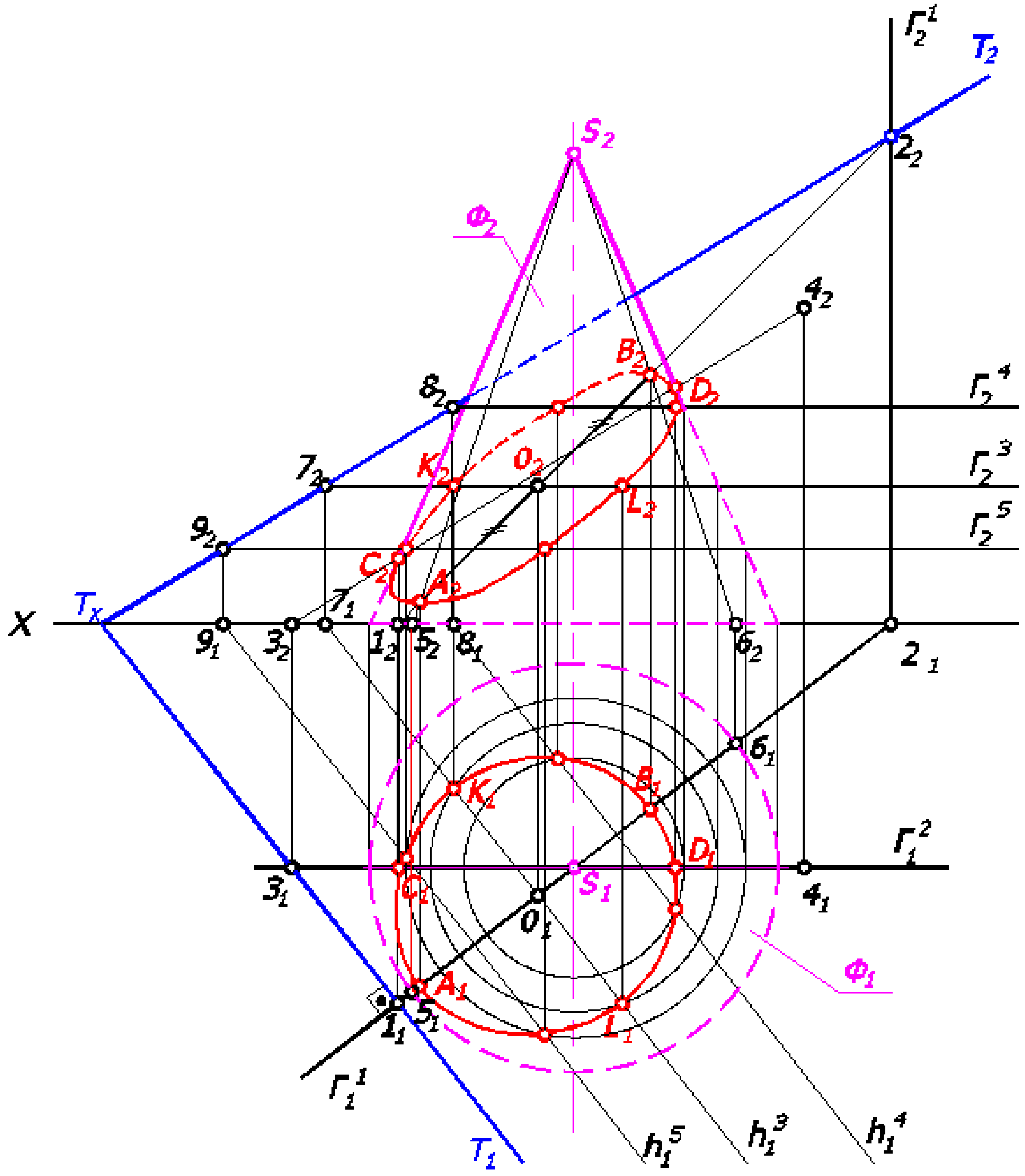


Рисунок 11.12 – Пример построения сечения прямого кругового конуса плоскостью общего положения

Сечением конуса плоскостью общего положения в данном случае является эллипс. Большая ось эллипса *[AB]* лежит на линии наибольшего уклона плоскости T. Малая ось перпендикулярна большой оси и делит ее пополам. Поэтому центр эллипса O будет находиться на середине отрезка *[AB]*. Для нахождения точек малой оси необходимо вспомогательную плоскость проводить через точку O.

Для построения промежуточных точек сечения надо провести вспомогательные горизонтальные плоскости уровня $Г^3$, $Г^4$, $Г^5$, …, $Г^n$. Естественно, их надо брать ниже точки B, но выше точки A. Плоскость $Г^4$ проведена через точку O. Линии пересечения плоскостей T и $Г^i$ на горизонтальной проекции будут параллельны T_1. Линиями пересечения $Ф$ и $Г^i$ будут окружности. Точки пересечения этих окружностей с соответствующими линиями пересечения плоскостей и будут искомыми точками. Точки $К$ и L – точки малой оси.

11.3.5 Частные случаи сечения поверхности вращения плоскостью

Задача намного упрощается, если плоскость сечения – проецирующая. Во-первых, нет необходимости строить дополнительные вспомогательные плоскости для нахождения опорных точек. Низшая и высшая точки совпадают на чертеже с точками видимости и лежат на пересечении очерка поверхности $Ф$ со следом плоскости T. Линии пересечения плоскостей T и $Г^i$ будут перпендикулярны оси x (проецирующие прямые), и поэтому их легко построить по линиям соответствия. Пример решения такой задачи приведен для сферы на рисунке 11.13. Вспомогательные плоскости $Г^i$ – горизонтальные плоскости уровня. Точка *1* – низшая, точка *2* – высшая. Прямые *(34), (56), (78), (910)* – линии пересечения плоскостей T и $Г^i$. Линии пересечения сферы $Ф$ и плоскостей $Г^i$ – окружности. Точки *1 ... 10* – искомые точки сечения.

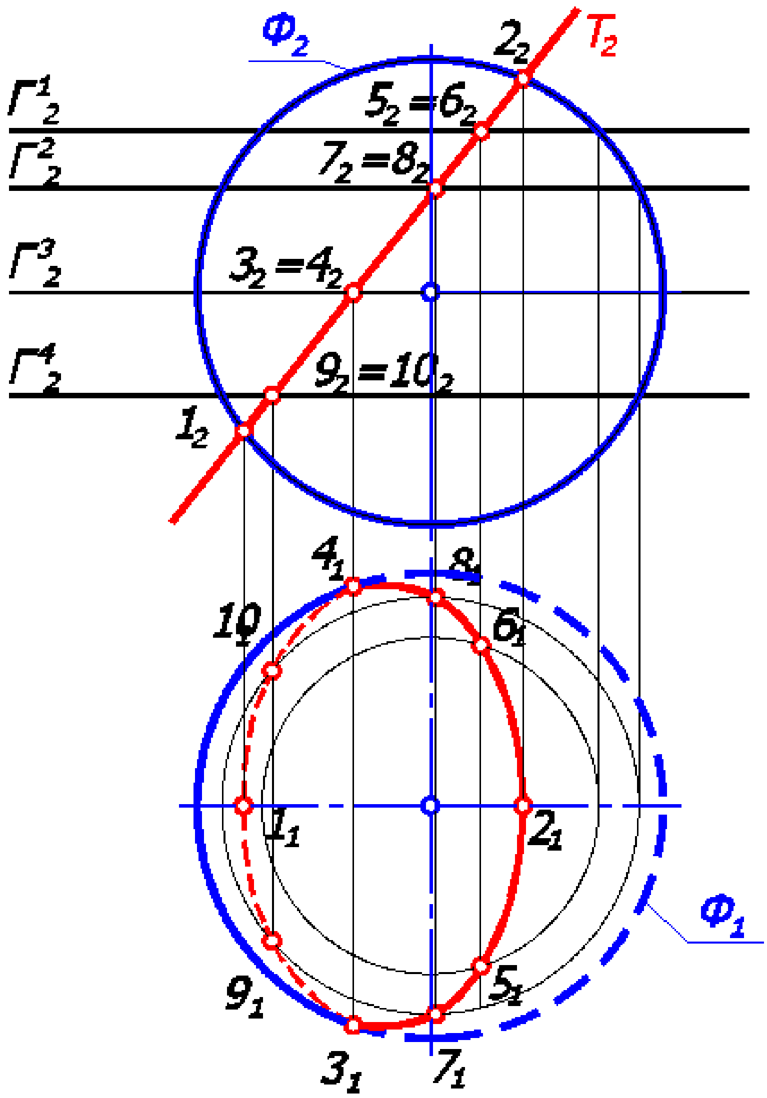


Рисунок 11.13 – Пересечение сферы фронтально проецирующей плоскостью

В случае пересечения цилиндрической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии (рисунок 11.14):

- окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения поверхности (α);

- эллипс, если секущая плоскость не перпендикулярна и не параллельна оси вращения, является плоскостью общего положения (β);

- две образующие прямые, если секущая плоскость параллельная оси поверхности (γ)

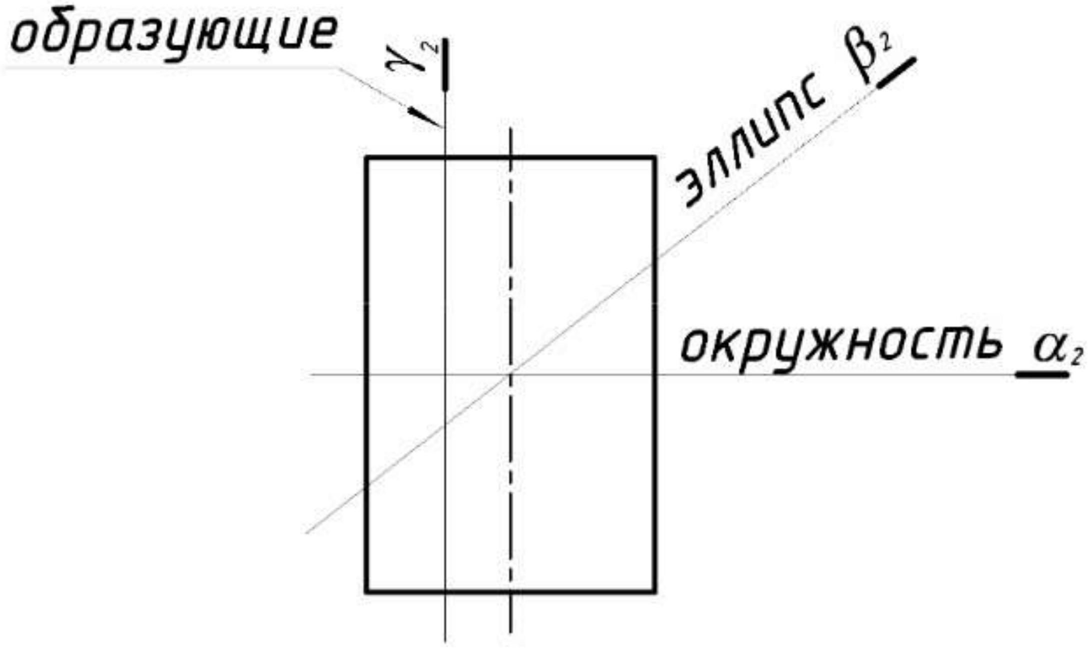


Рисунок 11.14 – Цилиндрические сечения

При сечении поверхностей вращения секущей плоскостью получаются, как правило, кривые 2-го порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола. Все эти кривые могут получиться при сечении прямого конуса определенным образом расположенной секущей плоскостью, как это показано на рисунке 11.15: 1) $\alpha > \varphi$ – эллипс, точка (рисунок 11.15, а); 2) $\alpha = 90°$ – окружность (рисунок 11.15, а); 3) $\alpha = \varphi$ – парабола (рисунок 11.15, б); 4) $\alpha < \varphi$ – гипербола (рисунок 11.15, в). Эти кривые получили название конических сечений (коник).

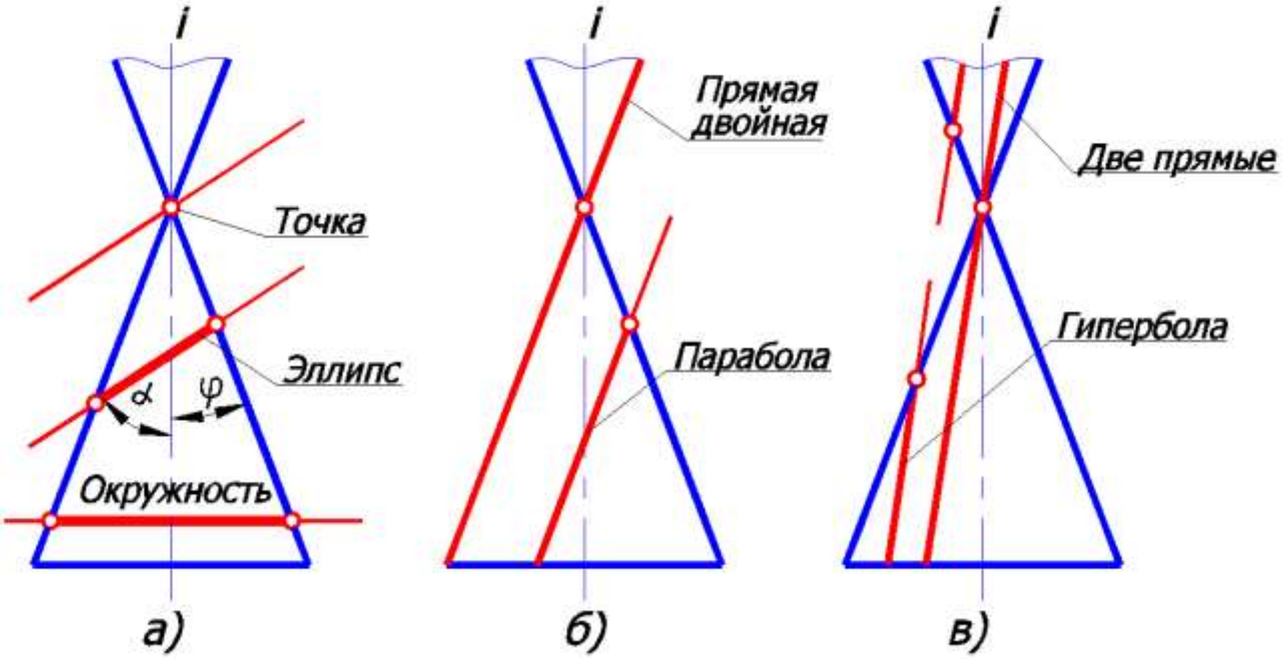


Рисунок 11.15 – Конические сечения (коники)

11.3.6 Построение приближенных разверток развертывающихся поверхностей

К развёртывающимся поверхностям относятся только торсы (поверхности с ребром возврата, коническая и цилиндрическая поверхность).

Развертка любой развертывающейся поверхности (кроме гранных) является приближенной. Это объясняется тем, что при развертке поверхности ее аппроксимируют поверхностями вписанных или описанных многогранников, имеющих грани в форме прямоугольников или треугольников. Поэтому при графическом выполнении развертки поверхности производят разгибание или спрямление кривых линий, принадлежащих поверхности, что приводит к потере точности.

11.3.6.1 Построение развертки цилиндрической поверхности

Построение разверток цилиндрических поверхностей соответствует построению разверток призматических поверхностей, вписанных в цилиндрическую поверхность, методами нормального сечения и раскатки, как описано выше. Построение разверток призматических поверхностей, сводится к построению истинных размеров и формы отдельных граней, что и выполняется на чертеже различными способами.

Алгоритм геометрического построения развертки поверхности прямого кругового цилиндра заключается в следующем:

1. Рассекают цилиндрическую поверхность плоскостью, перпендикулярной к прямолинейной образующей цилиндрической поверхности.

2. Делят окружность c – линию сечения этих двух плоскостей на одинаковое число частей n.

3. Проводят в свободном месте чертежа прямую и отмечают на ней отрезок, равный длине окружности сечения c.

4. Делят этот отрезок на такое же число одинаковых частей n, на которое была разделена окружность c.

5. Через точки деления проводят прямые, перпендикулярные к прямой, и откладывают на них от точек отрезки, равные длине соответствующих образующих нижней и верхней частей цилиндрической поверхности.

6. Соединив концы образующих плавной кривой, получают развертку цилиндрической поверхности.

Пример построения развертки боковой поверхности усеченного прямого кругового цилиндра **методом нормального сечения** приведен на рисунке 11.16.

Развертка боковой поверхности цилиндра строится методом нормального сечения, так как основание цилиндра перпендикулярно оси. Окружность основания развертывается в прямую линию равную длине окружности ($c=\pi D=2\pi r$). Можно ее построить, отложив размер хорд, соединяющих точки основания.

Длина будет тем точнее, чем на большее число частей разбита окружность, на рисунке 11.16 на равных 12 частей. Кривая сечения на развертке изобразится синусоидой. Для построения полной развертки необходимо к развертке боковой поверхности достроить основание и натуральную величину сечения.

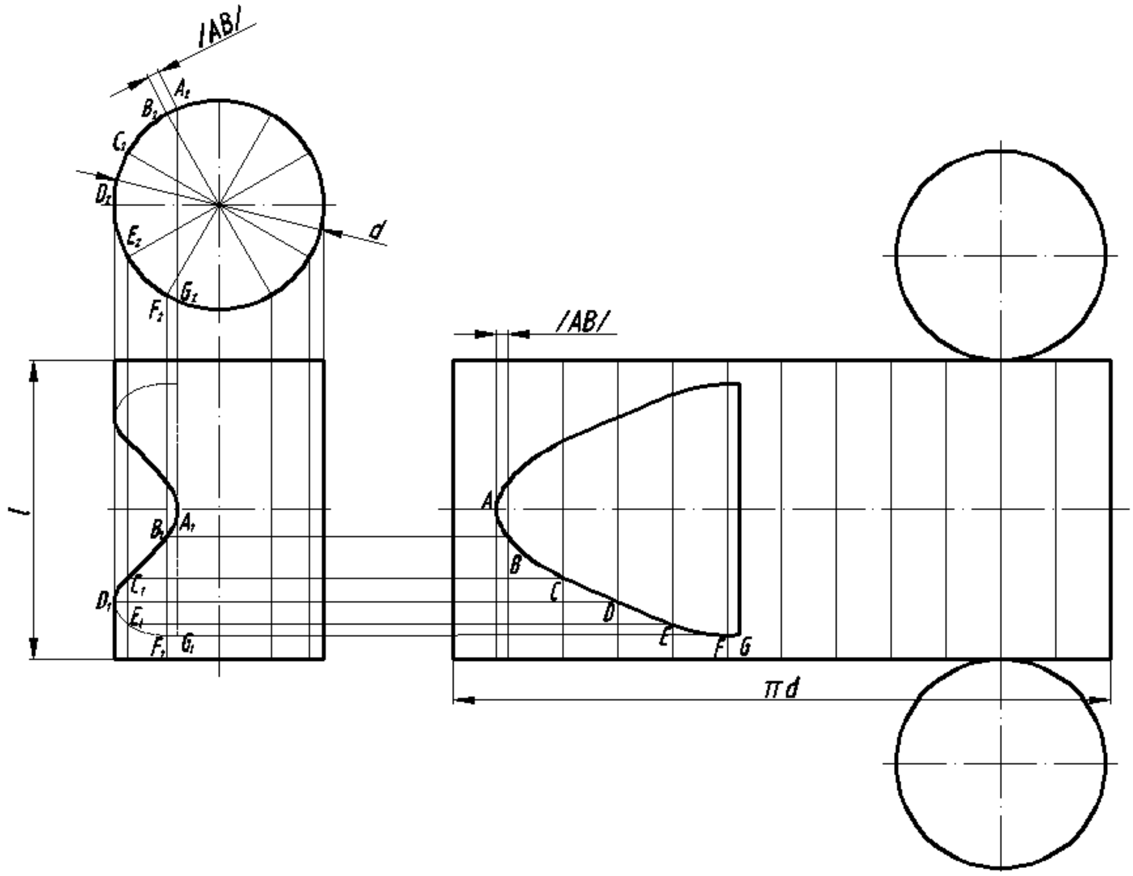


Рисунок 11.16 – Пример построения развертки боковой поверхности усеченного прямого кругового цилиндра способом нормального сечения

Пример построения развертки боковой поверхности эллиптического цилиндра способом раскатки приведен на рисунке 11.17.

Образующие цилиндра параллельны плоскости проекций π_2, то есть изображены на фронтальной плоскости проекций в натуральную величину. Основание цилиндра делят на 12 равных частей и через полученные точки проводят образующие. Развертку боковой поверхности цилиндра строят так же, как и развертку наклонной призмы, приближенным методом.

Из точек 1_2, 2_2, …, 12_2 проводят перпендикуляры к очерковой образующей $1A$ и радиусом, равным хорде 1_12_1, то есть 1/12 части деления окружности основания, последовательно делают засечки на этих перпендикулярах. Например, делая засечку из точки 1_2 на перпендикуляре, проведенном из точки 2_2, получают *2*. Принимая далее точку *2* за центр, тем же раствором циркуля делают засечку на перпендикуляре, проведенном из точки 3_2, и получают точку *3* и так далее. Полученные точки 1_2, *2, 3,…, 1* соединяют плавной лекальной кривой. Развертка верхнего основания симметрична развертке нижнего, так как сохраняется равенство длин всех образующих цилиндра.

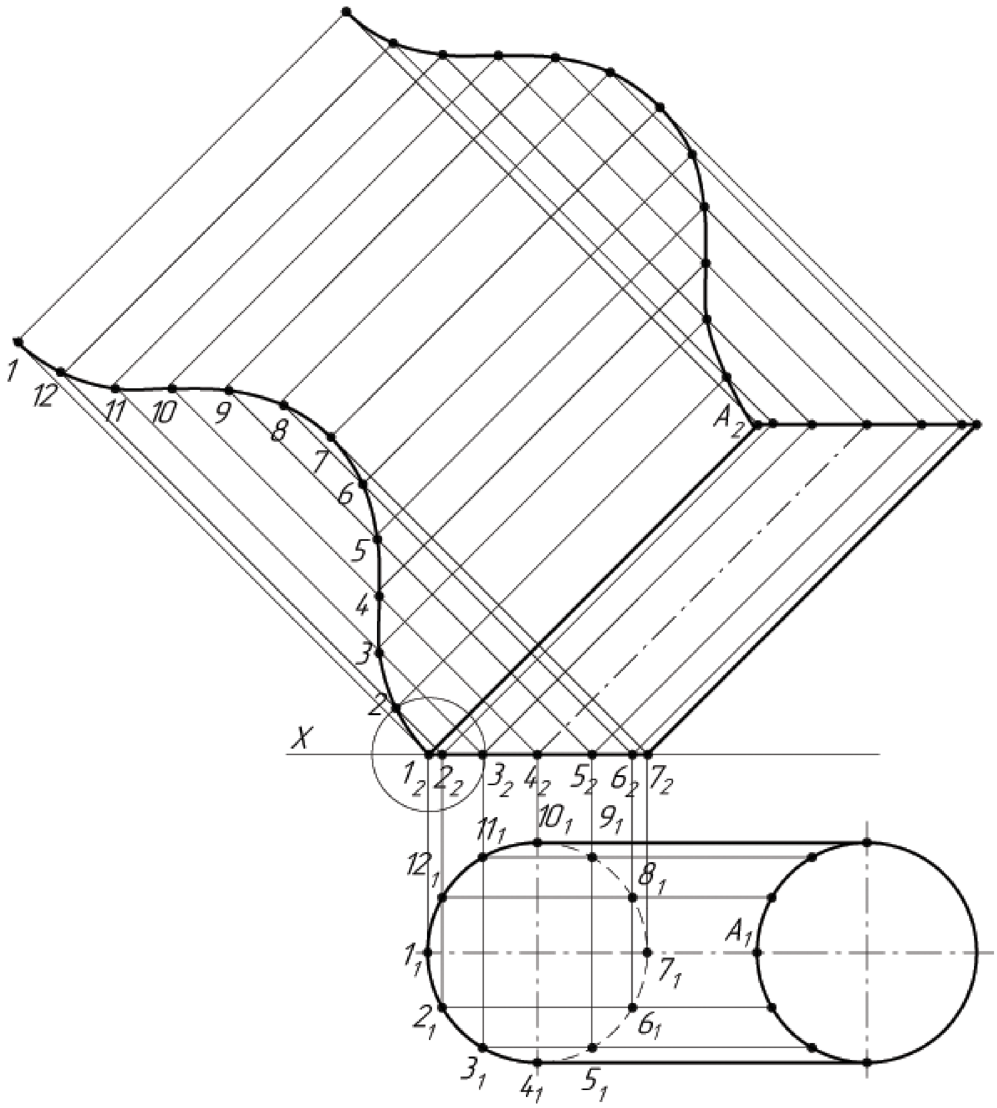


Рисунок 11.17 – Пример построения развертки боковой поверхности эллиптического цилиндра способом раскатки

11.3.6.2 Построение развертки конической поверхности

Развертка боковой поверхности конической поверхности в общем случае строится по алгоритму построения развертки поверхности пирамиды, вписанной в данную коническую поверхность и заменяющую ее, **методом триангуляции (треугольников)**, описанных выше. Построение разверток пирамидальных поверхностей сводится к многократному построению натурального вида граней – треугольников, из которых состоит данная пирамидальная поверхность.

Пример построения развертки боковой поверхности наклонного эллиптического конуса с круговым основанием приведен на рисунке 11.18.

Развертка конической поверхности выполняется по алгоритму построения развертки боковой поверхности пирамиды методом триангуляции (треугольников). Для этого коническая поверхность аппроксимируется (заменяется) вписанной в нее многогранной пирамидальной поверхностью.

В данную коническую поверхность вписывают двенадцатиугольную пирамиду. Так как коническая поверхность имеет плоскость симметрии *Г*, то можно построить развертку только одной половины поверхности. Разделим половину окружности на 6 равных частей, начиная от точки (O_1) пересечения ее с плоскостью симметрии $Г(Г_1)$, которая делит поверхность и, следовательно, ее развертку на 2 симметричные части. Через точки деления $O_1 l_1$, 2_1 ... и вершину S_1 проводят горизонтальные проекции образующих конуса – прямые S_1O_1, S_11_1, S_12_1 ..., которые являются боковыми ребрами вписанной пирамиды. Сторонами основания пирамиды являются хорды, соединяющие точки деления и проецирующиеся на π_1 в натуральную величину. Натуральную величину боковых ребер определяют методом прямоугольного треугольника, описанного выше. Проводят ось симметрии развертки и от точки *S* откладывают отрезок $SO=S_2O_0$. Из точки *S* радиусом S_21_0 проводят дугу окружности, а из точки *O* радиусом O_11_1 делают на ней засечку. Точка *1* – искомая точка развертки. Для построения смежной грани из точки *S* радиусом S_22_0, а из точки *1* радиусом 1_12_1 делают засечки и в пересечении отмечают точку *2* и так далее. Соединив точки *0,1, 2 … 6* плавной кривой, получают развертку ½ боковой поверхности конуса.

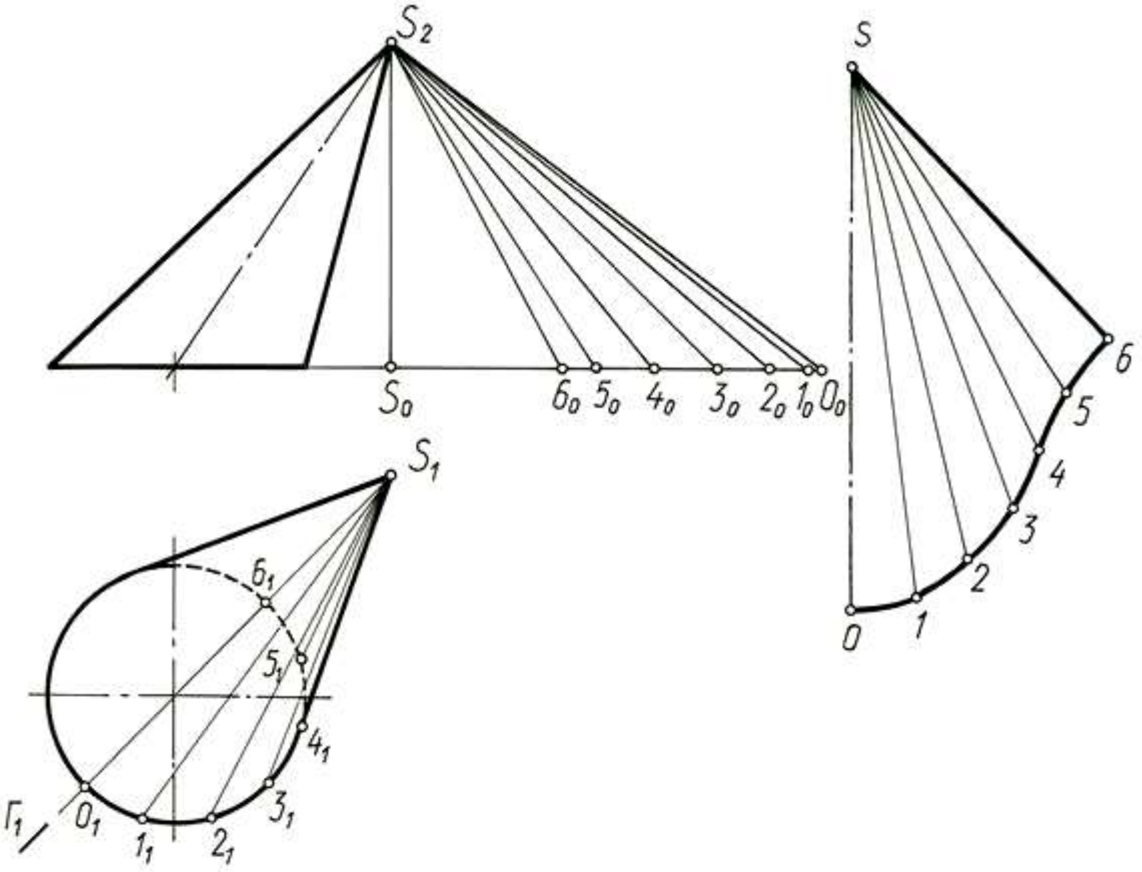


Рисунок 11.18 – Пример построения развертки боковой поверхности наклонного эллиптического конуса

Пример построения развертки боковой поверхности прямого кругового конуса с круговым основанием приведен на рисунке 11.19.

Если задана поверхность прямого кругового конуса, то развертка его боковой поверхности представляет круговой сектор, радиус которого равен длине образующей конической поверхности l, а центральный угол $\varphi° = 2\pi r/l$, где r – радиус окружности основания конуса. Величина угла φ получается в радианах. На практике бывает целесообразно иметь его градусную величину: $\varphi° = 360° r/l$.

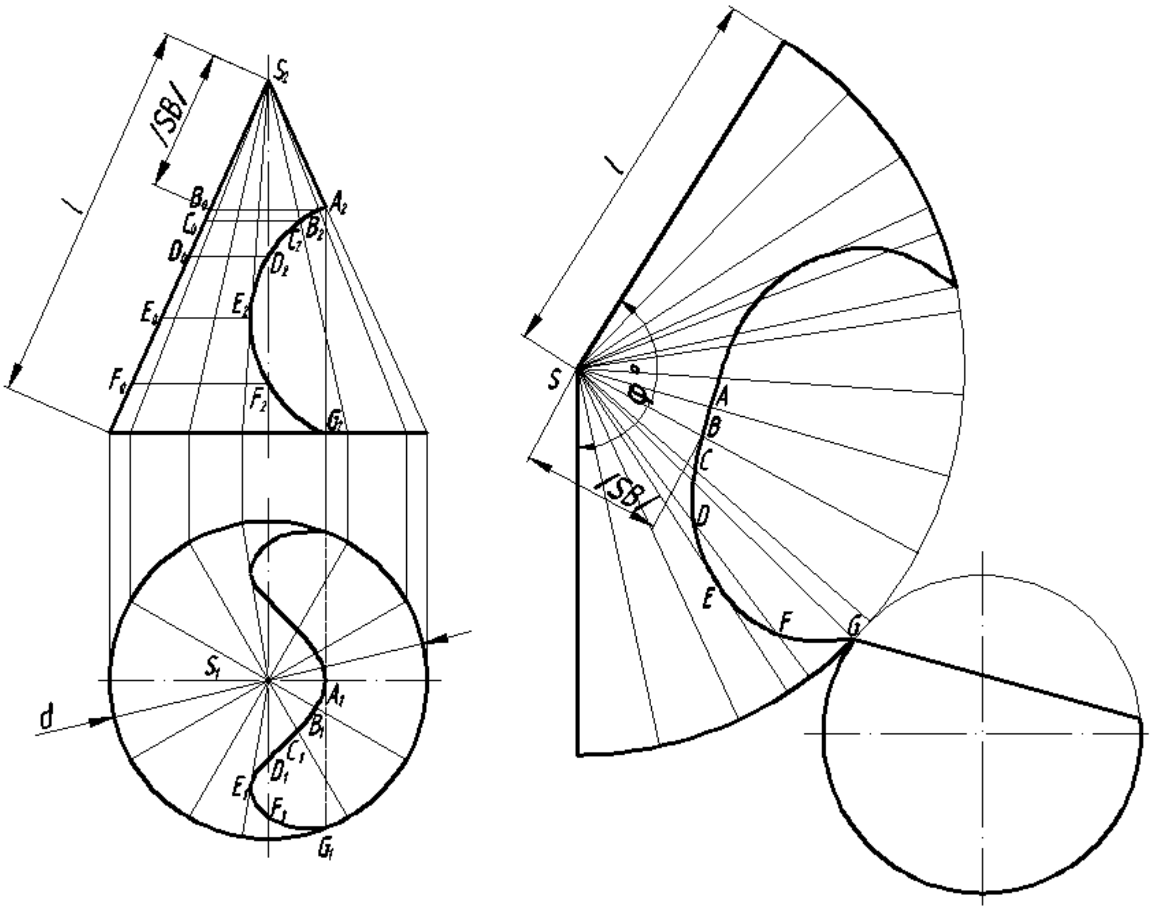


Рисунок 11.19 – Пример построения развертки боковой поверхности прямого кругового конуса

11.4 Построение линии пересечения двух поверхностей

В алгоритме для решения задач на построение линии пересечения двух поверхностей:

$$l=(L^1\cup L^2\cup L^3\cup\ldots\cup L^n);[L^i=(\Phi\cap\Gamma^i)\cap(T\cap\Gamma^i)]$$

в качестве вспомогательных поверхностей (посредников) Γ^i следует выбирать поверхности, которые пересекали бы заданные поверхности Φ и T по наиболее простым линиям – прямым или окружностям. В качестве вспомогательных поверхностей-посредников наиболее часто используются плоскости и сферы; при решении некоторых задач целесообразно обращаться за помощью к цилиндрическим и коническим поверхностям.

Прежде чем решить вопрос, какую вспомогательную секущую поверхность выбрать для построения линии пересечения поверхностей, следует выяснить, не занимает ли одна из них проецирующее положение, так как в данном случае решение поставленной задачи значительно упрощается. Это происходит из-за того, что одна из проекций линии пересечения будет совпадать с очерком проецирующей поверхности, которая входит в условие поставленной задачи. Поэтому решение сводится к определению недостающей проекции линии, принадлежащей поверхности, если известна одна ее проекция, то есть поиску множества точек, принадлежащих поверхности.

Рисунок 11.20 иллюстрирует решение задачи по определению $l=\Phi\cap T$, где поверхность цилиндра – проецирующая. На горизонтальной проекции все точки, принадлежащие и цилиндру, и сфере, спроецируются на очерк цилиндра. Произвольно взятые на нем точки 1_1, 2_1, 3_1,… можно представить и как точки, принадлежащие сфере. Осталось найти фронтальную проекцию этих точек. Это можно сделать, используя общий алгоритм: взять за вспомогательные плоскости горизонтально проецирующие плоскости Γ^i. Высшей точкой будет точка 3, крайней точкой перехода видимости кривой – точка 5.

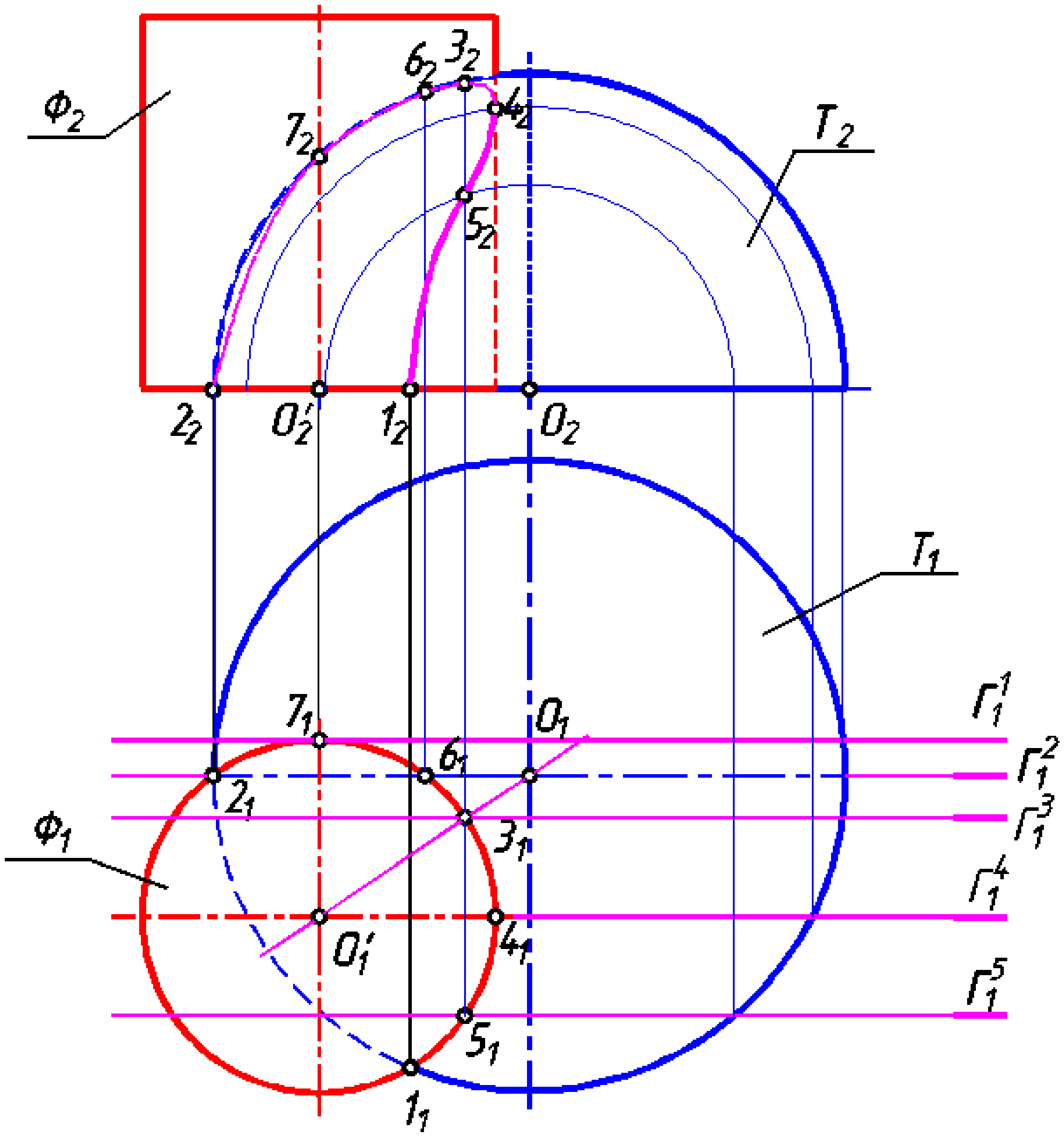


Рисунок 11.20 – Пример построения линии пересечения цилиндра и полусферы

11.4.1 Построение линии пересечения двух поверхностей с помощью вспомогательных секущих плоскостей

При определении линии пересечения двух поверхностей пользуются не отдельными плоскостями, а пучком плоскостей, причем ось пучка может быть как собственной, так и несобственной прямой (когда плоскости параллельны между собой).

На рисунке 11.21 приведен пример построения линии пересечения прямого конуса и цилиндра. Задача решается по общему алгоритму:

1. Выбирается вид дополнительных поверхностей, удобных для решения этой задачи. Целесообразны здесь горизонтальные плоскости уровня, так как на горизонтальной проекции линии пересечения с заданными поверхностями будут: у цилиндра – прямоугольник, у конуса – окружность. Количество плоскостей выбирается следующим образом: одна плоскость покажет высшие точки – это будет плоскость, прошедшая через верхнюю образующую цилиндра; вторая плоскость покажет низшую точку – эта плоскость пройдет через нижнюю образующую цилиндра; третья плоскость должна пройти через ось цилиндра, чтобы определить видимость кривой. Остальные промежуточные плоскости задаются произвольно, исходя из требований к точности построения. В данном примере секущих плоскостей взято пять: $\Gamma^1, ..., \Gamma^5$.

2. Вводятся горизонтальные плоскости уровня $\Gamma^1, ..., \Gamma^5$.

3. Находятся линии пересечения плоскостей-посредников с цилиндром Φ и конусом T:

$m^1 = T \cap \Gamma^1$; $n^1 = \Phi \cap \Gamma^1$;

$m^2 = T \cap \Gamma^2$; $n^2 = \Phi \cap \Gamma^2$ и т.д.

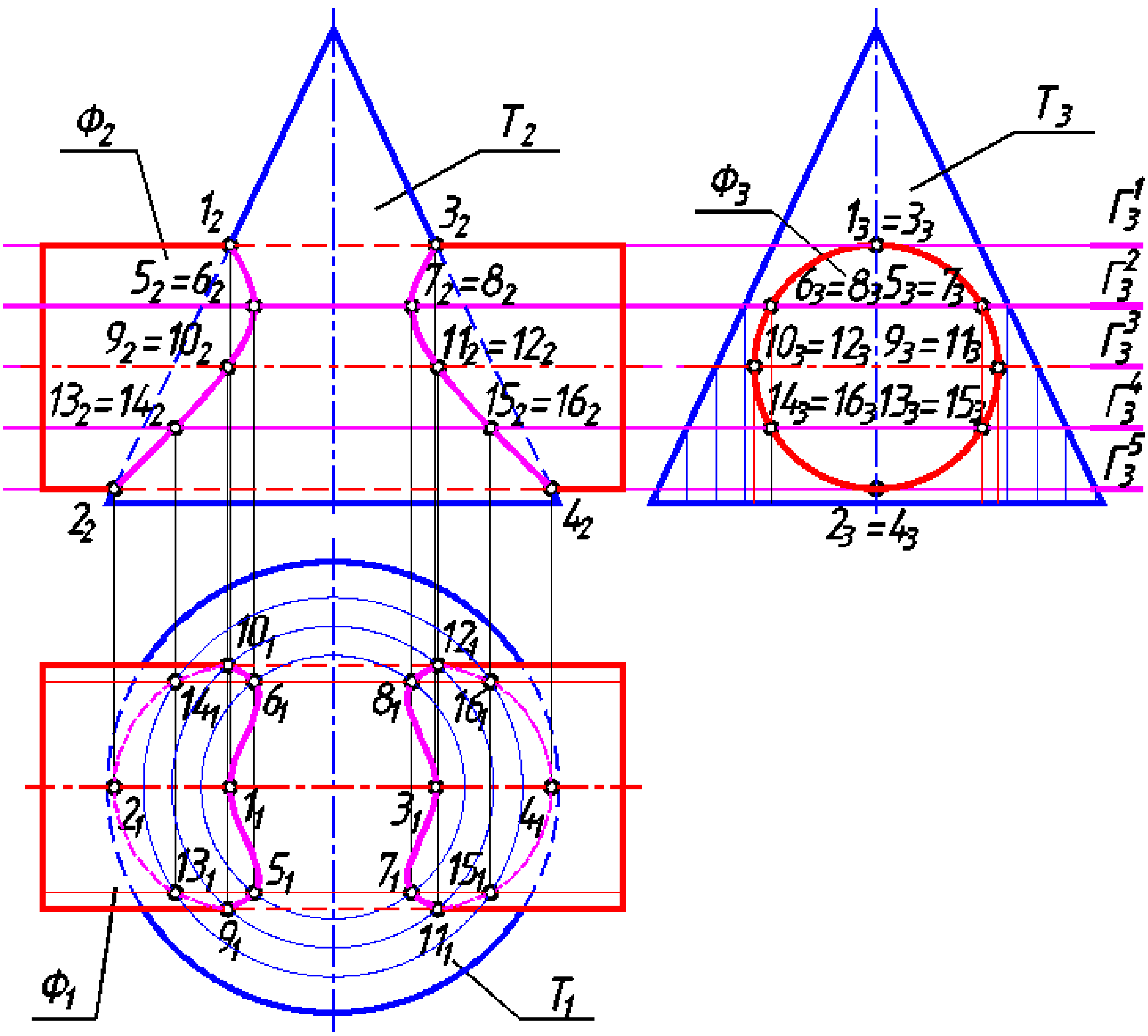


Рисунок 11.21 – Пример построения линии пересечения прямого конуса и цилиндра с помощью вспомогательных секущих плоскостей

Прямые n_1^1 и n_1^5, совпадающие с осью цилиндра, – линии касания цилиндра с плоскостями $Г^1$ и $Г^2$. В сечении цилиндра плоскостями $Г^2$ и $Г^4$ будут прямоугольники, размеры которых берутся с профильной плоскости проекции. Плоскость $Г^3$ рассечет цилиндр по крайнему очерку. Линии сечения конуса плоскостями $Г^1$, …, $Г^5$ будут представлять собой окружности, радиус которых можно замерить на фронтальной или профильной проекциях.

4. Находятся точки пересечения линий m и n:

$$1,3 = m^1 \cap n^1;$$

$$2,4 = m^5 \cap n^5;$$

$$5,6,7,8 = m^2 \cap n^2 \text{ и т.д.}$$

Проекции этих точек определяются сначала на горизонтальной плоскости проекции, а затем по соответствию на фронтальной плоскости проекции. На профильной проекции эти точки будут лежать на очерке цилиндра.

5. На горизонтальной и фронтальной проекции, если соединить точки последовательно плавной кривой, получится линия пересечения поверхности конуса и поверхности цилиндра.

11.4.2 Построение линии пересечения двух поверхностей с помощью вспомогательных поверхностей – сфер

Для определения линии пересечения двух произвольных поверхностей вращения целесообразно воспользоваться одним свойством, присущим поверхностям вращения: две любые соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, проходящим через точки пересечения меридианов поверхностей. В частном случае, если одна из поверхностей – сфера, приведенное предложение может быть сформулировано иначе: если центр секущей сферы находится на оси поверхности вращения, то сфера пересечет данную поверхность по окружностям, число которых равно числу точек пересечения главных меридианов поверхностей, как показано на рисунке 11.22 а. При этом, если ось вращения перпендикулярна плоскости проекции π_1 (или π_2), то окружности проецируются на плоскость π_1 (или π_2) без искажения, а на плоскость π_2 (или π_1) – в отрезки прямых, перпендикулярных оси вращения (рисунок 11.22 б).

Если центр сферы будет находиться в точке пересечения двух осей поверхностей вращения *Ф* и *Т* (рисунок 11.22), то сфера будет пересекать эти поверхности по окружностям. Эти окружности, пересекаясь между собой, дадут точки L^1 и L^2, общие для всех трех поверхностей *Ф, Т* и *Г*.

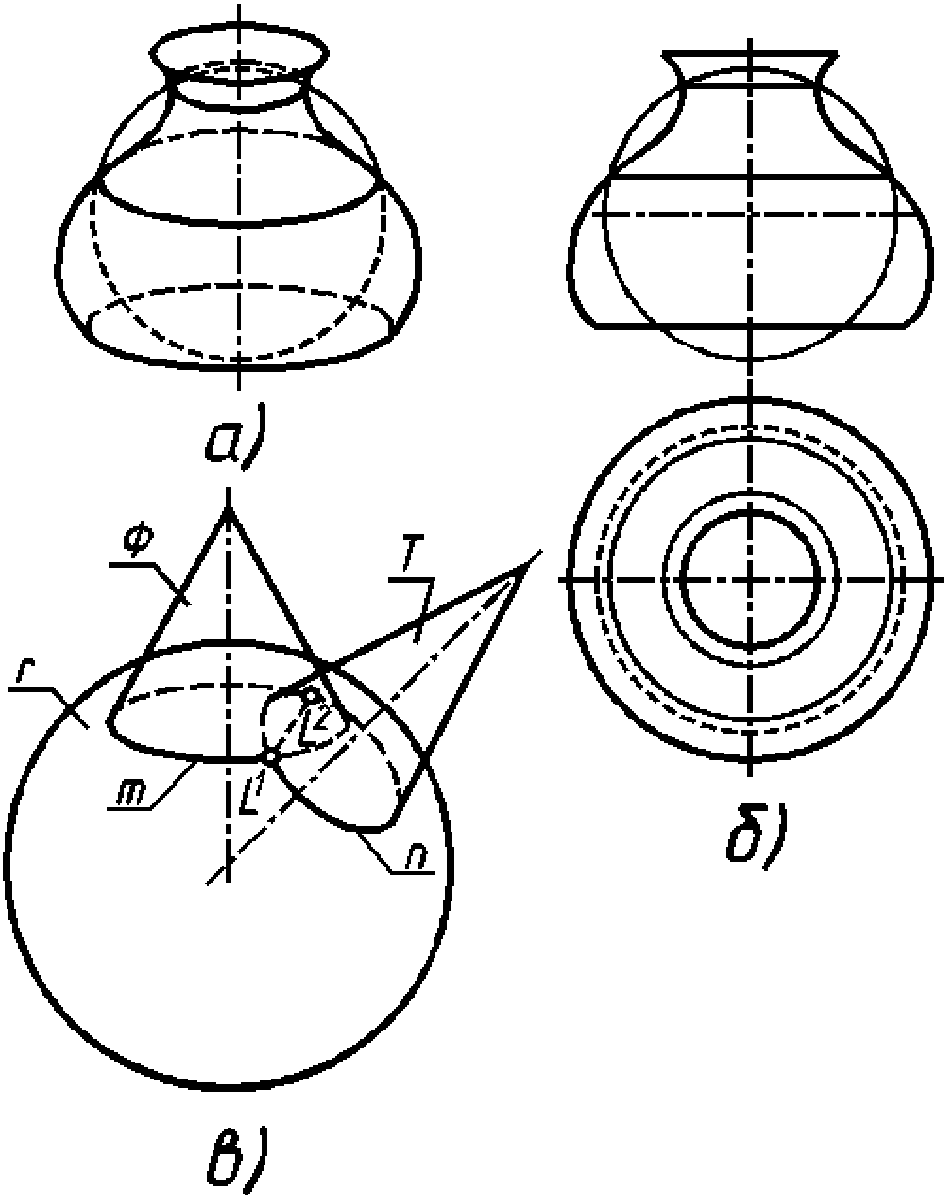


Рисунок 11.22 – Пересечение соосных поверхностей, одна их которых сфера

На рисунке 11.23 рассматривается пример использования метода концентрических сфер при построении линии пересечения двух поверхностей вращения – двух конусов. Построение выполняется по общему алгоритму:

1. Вид поверхностей-посредников – концентрические сферы, проведенные в точке пересечения осей конусов. **Самая меньшая сфера** должна быть касательной к одному из конусов и пересекать другой. **Самая большая сфера** должна пересекать самую удаленную от центра сферы точку пересечения очерков конусов (очерковую точку). Дополнительные сферы должны быть взяты в промежутке между меньшей и большей сферами. Их количество зависит от степени точности чертежа.

2. Вводятся вспомогательные поверхности – сферы $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^4$.

3. Находятся линии пересечения поверхностей $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^4$ с заданными поверхностями Φ и T:

$m^1 = \Phi \cap \Gamma^1$; $\quad n^1 = T \cap \Gamma^1$;

$m^2 = \Phi \cap \Gamma^2$; $\quad n^2 = T \cap \Gamma^2$ и т.д.

Линиями пересечения конусов и сферы будут окружности. Но ввиду того, что эти окружности лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости π_2, на плоскость π_2 они спроецируются в отрезки прямых. На данном чертеже эти окружности будут определяться отрезками прямых $[1_2 2_2]$, $[3_2 4_2]$, $[5_2 6_2]$ и так далее.

4. Точки пересечения окружностей, принадлежащих одной и той же сфере, и будут точками пересечения поверхностей Φ и T. Таких точек должно быть шесть (включая точки пересечения очерков) с одной стороны конуса и столько же (или меньше) с другой стороны.

5. Плавная кривая, соединяющая полученные точки пересечения, определит линию пересечения двух поверхностей. При построении линии пересечения конусов на горизонтальной плоскости проекции используется свойство принадлежности. Если учесть, что все точки линии пересечения лежат на поверхности конуса Φ, ось вращения которого перпендикулярна плоскости π_1, то их можно будет представить лежащими на окружностях, изображенных на плоскости π_2 отрезками $[1_2 2_2]$, $[5_2 6_2]$, ... Эти окружности на плоскость π_1 спроецируются в натуральную величину. Диаметры их будут равны соответствующим отрезкам $[1_2 2_2]$, $[5_2 6_2]$, ... Построенные на горизонтальной плоскости проекции окружностей позволят определить по линиям соответствия искомые точки C_1 и D_1, E_1 и

F$_1$, … Если соединить полученные точки плавной кривой, получится горизонтальная проекция линии пересечения двух конусов.

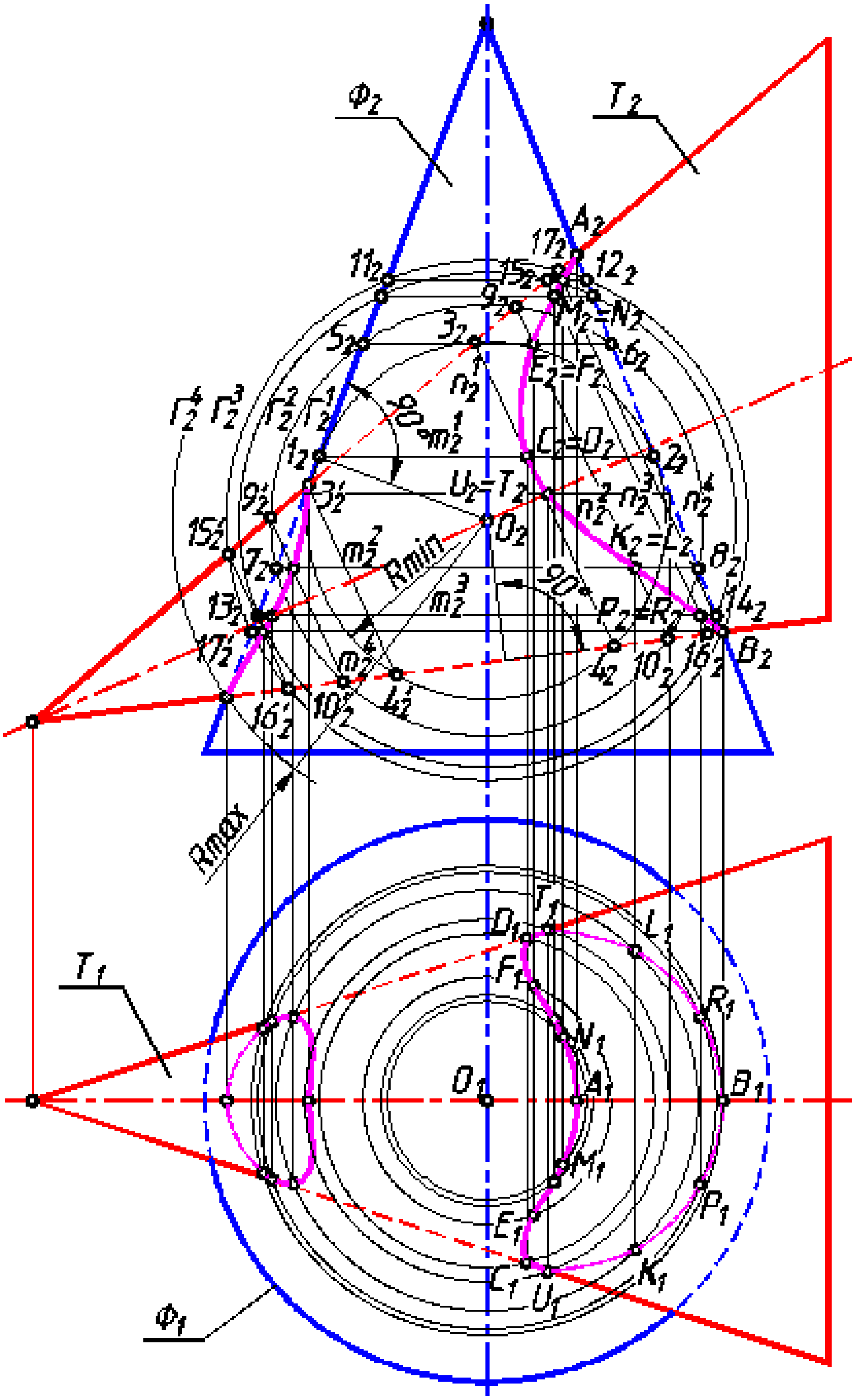


Рисунок 11.23 – Пример построения линии пересечения двух конусов с помощью вспомогательных секущих поверхностей – концентрических сфер

Метод сфер *универсален*: его можно использовать при построении линии пересечения двух поверхностей, имея одну их проекцию. Пример такого случая приведен на рисунке 11.24, где требовалось построить линию пересечения конуса *Ф* и цилиндра *Т*. Алгоритм решения тот же, что и в предыдущей задаче.

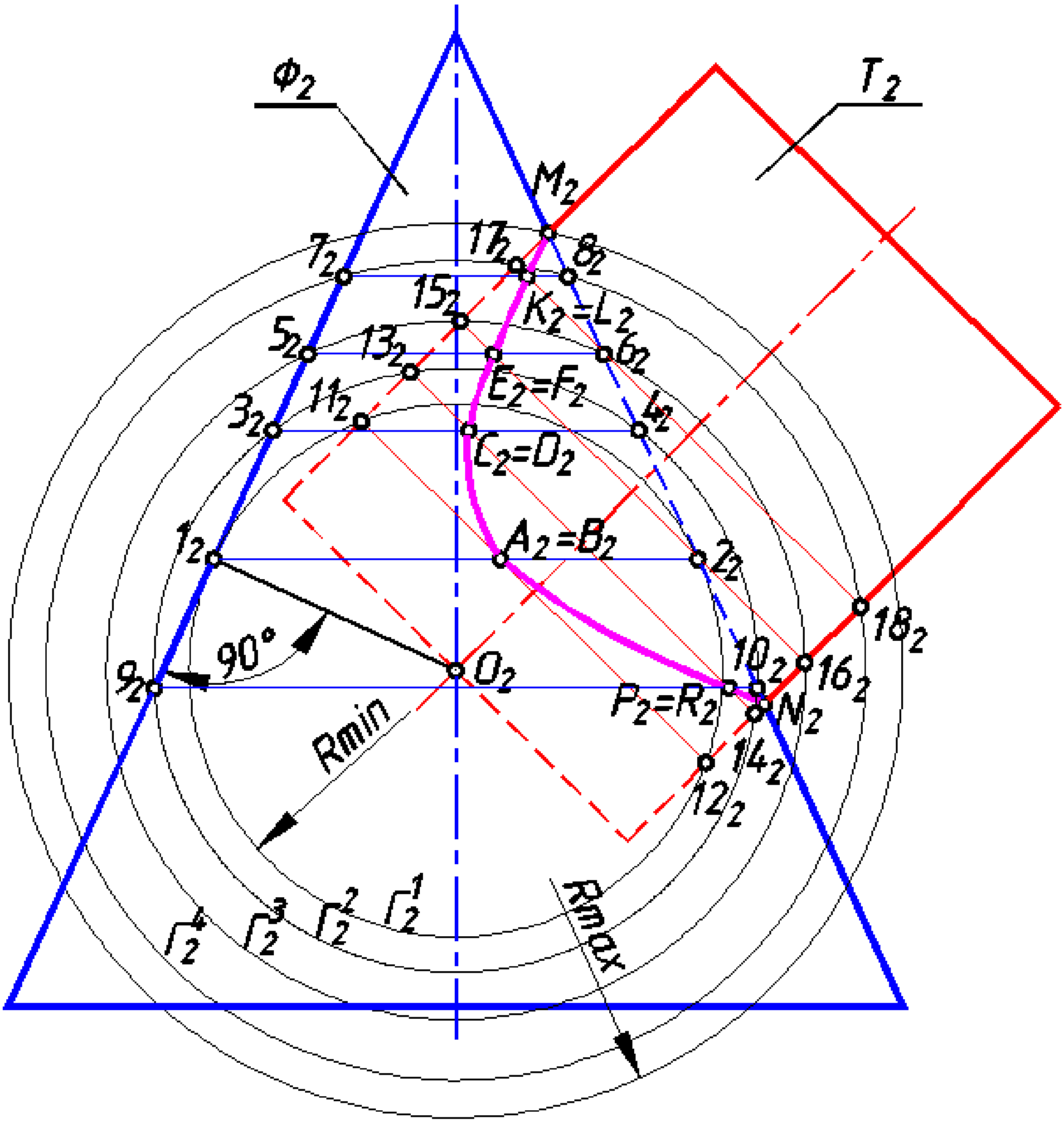


Рисунок 11.24 – Пример построения линии пересечения двух поверхностей, заданных одной их проекцией, с помощью вспомогательных секущих поверхностей – концентрических сфер

11.4.3 Частные случаи линии пересечения поверхностей

Известно, что порядок линии пересечения поверхностей равен произведению порядков поверхностей, поэтому две поверхности второго порядка всегда пересекаются по кривой четвертого порядка. При определенных условиях эта кривая распадается на несколько линий более низкого порядка. При этом сумма порядков линий, на которые распадается алгебраическая кривая, равна порядку самой линии. В частности, кривая четвертого порядка может распадаться на четыре прямые или две кривые второго порядка.

Случаи, когда кривая четвертого порядка распадается на четыре прямые можно проследить на примерах пересечения двух цилиндров с параллельными осями или двух конусов, имеющих общую вершину (рисунок 11.25 а, б).

Если две поверхности второго порядка имеют две точки касания или могут быть вписаны или описаны около третьей поверхности второго порядка, то линии пересечения этих поверхностей распадаются на две плоские кривые второго порядка (рисунок 11.25 в, г, д).

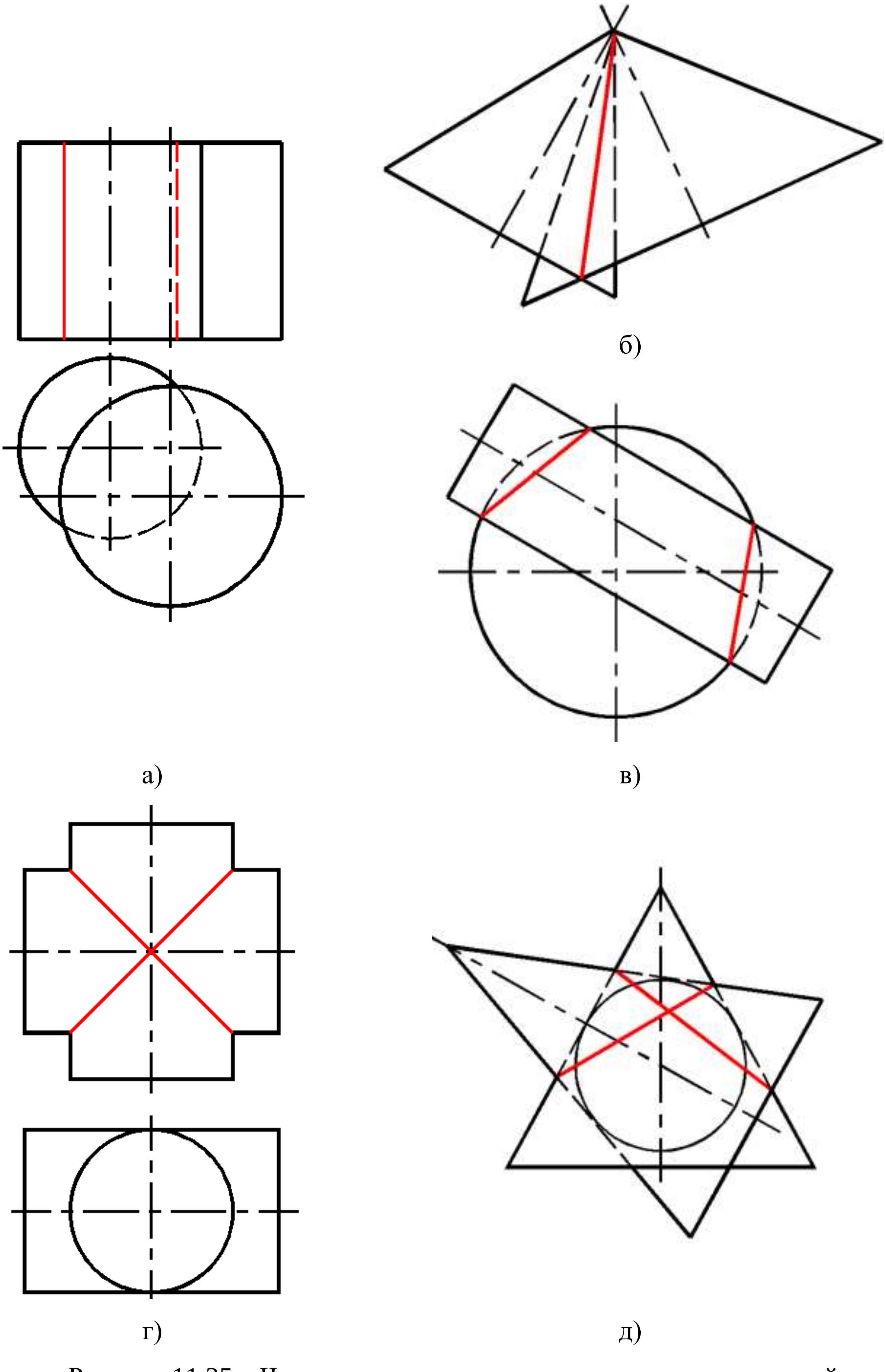


Рисунок 11.25 – Частные случаи линии пересечения поверхностей

11.5 Пересечение прямой с поверхностью

Задача нахождения точек пересечения (точек встреч) прямой с поверхностью решается тем же общим алгоритмом, представленным выше. Вводится одна вспомогательная плоскость, в которой должна лежать заданная прямая. Эта плоскость может быть и общего, и частного положения. Вспомогательную плоскость необходимо вводить так, чтобы решение задачи сводилось к минимуму построений. Часто легкости решения задачи добиваются с помощью замены плоскостей проекций (рисунок 11.26, в).

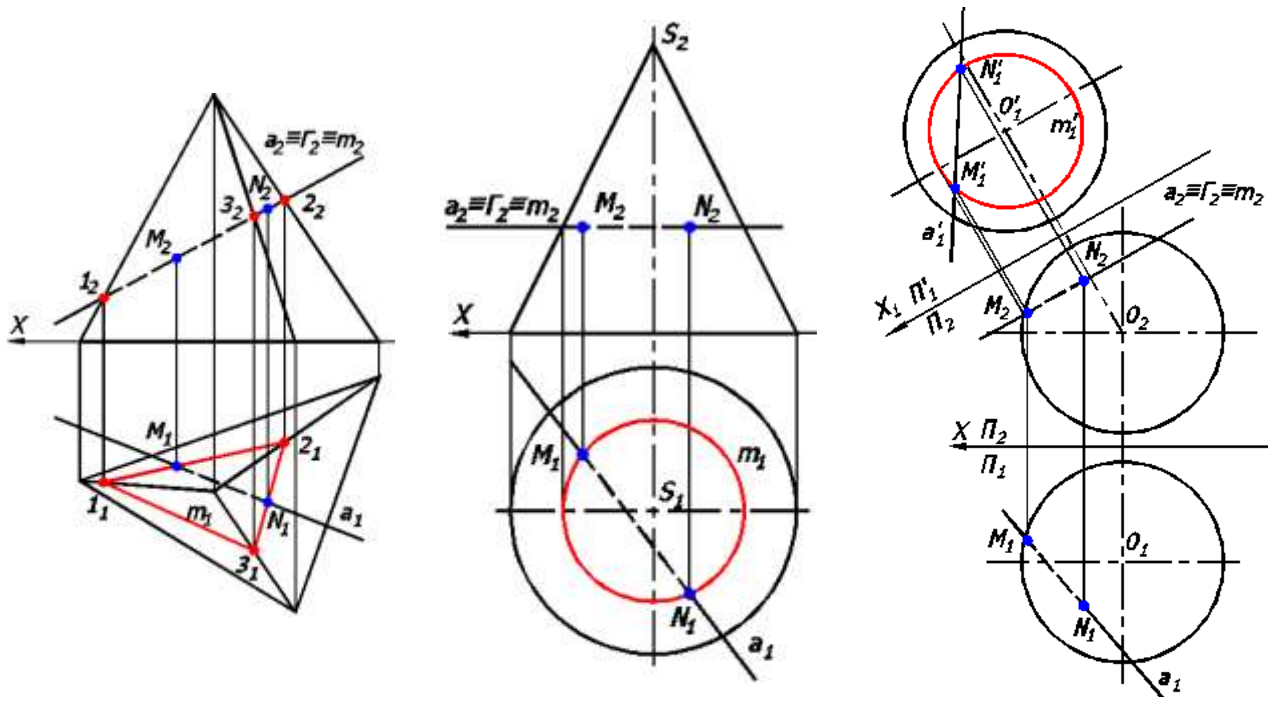
Общий алгоритм решения задачи нахождения точек пересечения (точек встречи) прямой с поверхностью:

1. Ввести вспомогательную плоскость *Г* (удобнее проецирующую).

2. Найти линию пересечения *m* плоскости *Г* с заданной поверхностью.

3. Найти точки пересечения прямой с построенной линией пересечения *m* (прямая будет лежать в сечении, и там, где она пересечет границы этого сечения, будут искомые точки).

4. По линии соответствия найти точки на другой проекции.



а) б) в)

а) пирамиды; б) конуса; в) сферы

Рисунок 11.26 – Пересечение прямой с поверхностью

На рисунке 11.26 приведен ряд примеров решения задачи нахождения точек пересечения прямой с поверхностью: а) пирамиды; б) конуса; в) сферы.

11.6 Вопросы для самоконтроля

1. Опишите общий алгоритм определения линии пересечения двух плоскостей.

2. Приведите примеры построения линии пересечения двух плоскостей, одна из которых занимает частное положение.

3. В чем заключается алгоритм построения пересечения прямой с плоскостью?

4. В чем заключается метод граней построения ломаной линии, получающейся при пересечении гранной поверхности плоскостью общего положения?

5. В чем заключается метод ребер построения ломаной линии, получающейся при пересечении гранной поверхности плоскостью общего положения?

6. Какие линии получаются при пересечении гранной поверхности плоскостями частного положения?

7. В чем состоит метод прямоугольного треугольника для определения натуральной величины отрезка прямой общего положения?

8. Опишите метод совмещения при определении натуральной величины треугольника.

9. При построении развертки каких поверхностей применяются методы нормального сечения и раскатки?

10. В чем заключается метод нормального сечения?

11. В чем заключается метод раскатки?

12. При построении развертки каких поверхностей применяется метод триангуляции (треугольников)?

13. В чем заключается метод триангуляции (треугольников)?

14. Как строится кривая линия при пересечении поверхности вращения плоскостью общего положения?

15. Какие линии получаются при пересечении цилиндра вращения разными плоскостями?

16. Какие линии получаются при пересечении конуса вращения разными плоскостями?

17. Опишите алгоритм построения развертки цилиндрической поверхности методом нормального сечения.

18. В чем заключается алгоритм построения развертки цилиндрической поверхности методом раскатки?

19. Опишите алгоритм построения развертки конической поверхности.

20. Изложите общий принцип построения обобщенного алгоритма для решения задачи по определению линии пересечения поверхностей.

21. В каких случаях для определения линии пересечения двух поверхностей можно применять способ вспомогательных секущих плоскостей, а в каких – вспомогательных секущих поверхностей – концентрических сфер?

22. Какие точки линии пересечения поверхностей называются очерковыми?

23. Приведите примеры, когда кривая – линия пересечения двух цилиндрических поверхностей – распадается на одну, две, три, четыре прямых?

24. Какое свойство поверхностей вращения используется для определения линии пересечения двух произвольных поверхностей вращения?

25. Опишите общий алгоритм определения точек пересечения прямой с поверхностью.

26. Приведите примеры определения точек пересечения прямой с поверхностью пирамиды, конуса и сферы.

12 Аксонометрические проекции

12.1 Термины и определения

Аксонометрические проекции применяют при необходимости получения на чертеже наглядного изображения предмета.

Аксонометрическая проекция – проекция на плоскость с помощью параллельных лучей, идущих из центра проецирования (который удален в бесконечность) через каждую точку объекта до пересечения с плоскостью, на которую проецируется объект (ГОСТ 2.317-2011).

Косоугольная проекция – аксонометрическая проекция, у которой направление проецирования неперпендикулярно к плоскости проецирования.

Коэффициент искажения – отношение длины проекции отрезка оси на плоскость к его истинной длине.

Прямоугольная проекция – аксонометрическая проекция, у которой направление проецирования перпендикулярно к плоскости проецирования.

12.2 Основные положения

В соответствии с требованиями ГОСТ 2.317-2011 ЕСКД в зависимости от направления проецирования по отношению к плоскости проекций аксонометрические проекции делят на прямоугольные и косоугольные.

ГОСТ 2.317-2011 устанавливает правила построения (отображения) на плоскости следующих аксонометрических проекций:

– прямоугольной изометрической проекции;

– прямоугольной диметрической проекции;

– косоугольной фронтальной изометрической проекции;

– косоугольной горизонтальной изометрической проекции;

– косоугольной фронтальной диметрической проекции.

Установленные ГОСТ 2.317-2011 аксонометрические проекции могут быть получены путем проецирования электронной модели изделия на плоскость в соответствии с требованиями этого стандарта.

Линии штриховки сечений в аксонометрических проекциях наносят параллельно одной из диагоналей проекций квадратов, лежащих в соответствующих координатных плоскостях, стороны которых параллельны аксонометрическим осям в соответствии с рисунком 12.1.

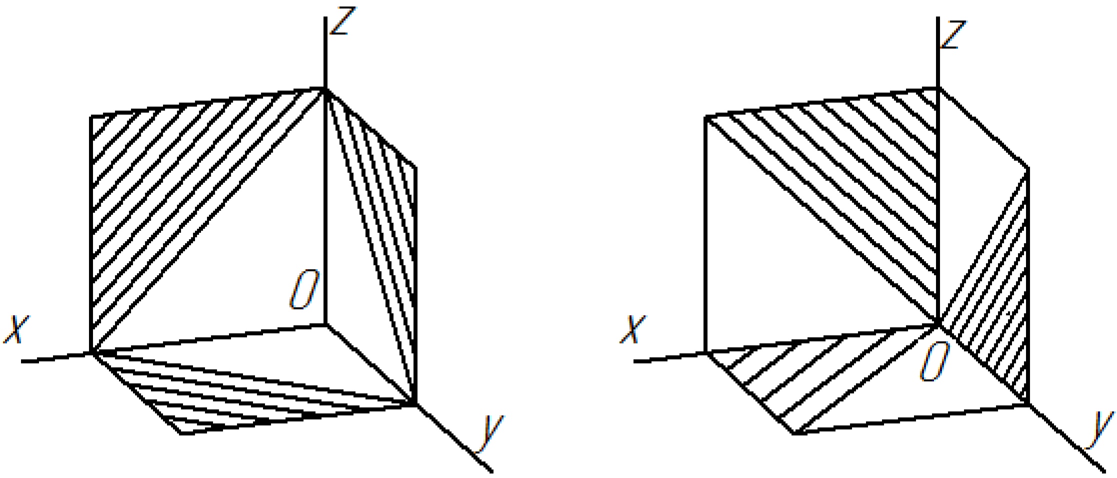


Рисунок 12.1 – Нанесение линий штриховки в сечении

При нанесении размеров выносные линии проводят параллельно аксонометрическим осям, размерные линии – параллельно измеряемому отрезку в соответствии с рисунком 12.2.

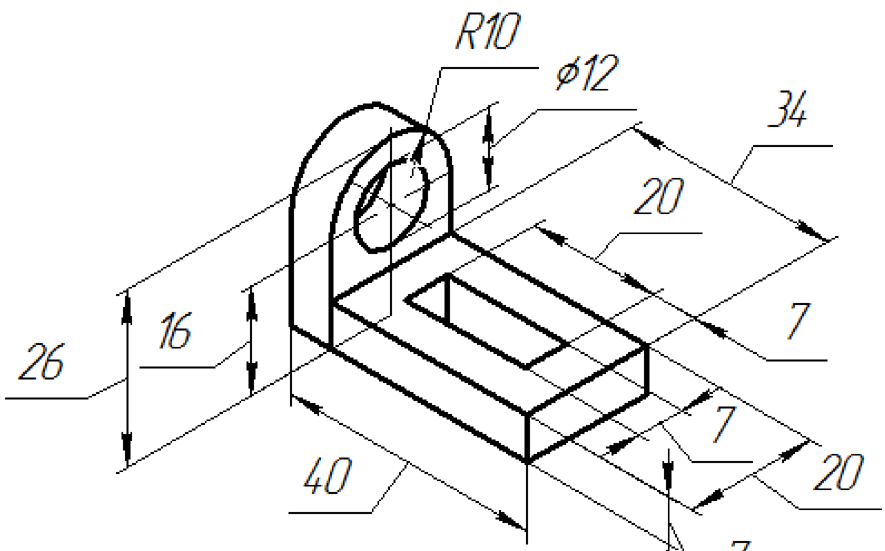


Рисунок 12.2 – Нанесение размеров

В аксонометрических проекциях спицы маховиков и шкивов, ребра жесткости и подобные элементы штрихуют, как приведено на рисунке 12.9.

Допускается изображать профиль резьбы полностью или частично, как показано на рисунке 12.3.

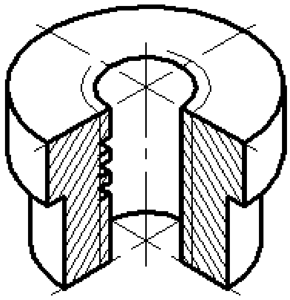


Рисунок 12.3 – Изображение резьбы

В необходимых случаях допускается применять другие теоретически обоснованные аксонометрические проекции.

12.3 Прямоугольные проекции

12.3.1 Изометрическая проекция

Положение аксонометрических осей изометрической прямоугольной проекции показано на рисунке 12.4.

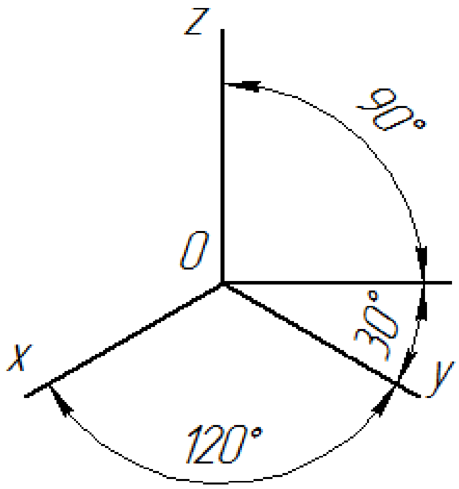
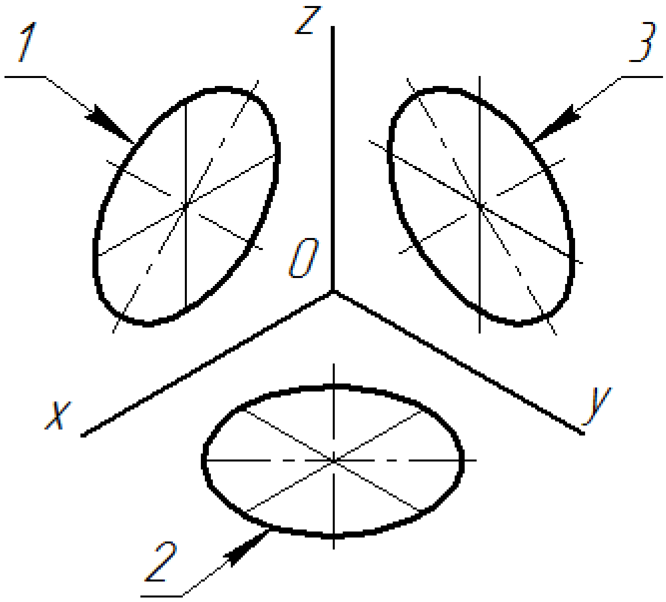


Рисунок 12.4 – Положение аксонометрических осей

Коэффициент искажения по осям *x*, *y*, *z* равен 0,82.

Изометрическую проекцию для упрощения, как правило, выполняют без искажения по осям *x*, *y*, *z*, то есть приняв коэффициент искажения равным 1.

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость проекций в эллипсы, как показано на рисунке 12.5.



1 – эллипс (большая ось расположена под углом 90° к оси *y*);

2 – эллипс (большая ось расположена под углом 90° к оси *z*);

3 – эллипс (большая ось расположена под углом 90° к оси *x*)

Рисунок 12.5 – Проецирование на аксонометрическую плоскость окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных плоскостям проекций

Если изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям *x*, *y*, *z*, то большая ось эллипсов 1, 2, 3 равна 1,22, а малая ось – 0,71 диаметра окружности.

Если изометрическую проекцию выполняют с искажением по осям *x*, *y*, *z*, то большая ось эллипсов 1, 2, 3 равна диаметру окружности, а малая ось – 0,58 диаметра окружности.

Пример изометрической проекции детали приведен на рисунке 12.6.

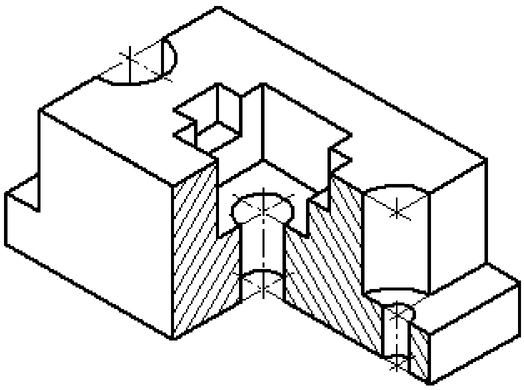


Рисунок 12.6 – Пример изометрической проекции детали

12.3.2 Диметрическая проекция

Положение аксонометрических осей диметрической прямоугольной проекции приведено на рисунке 12.7.

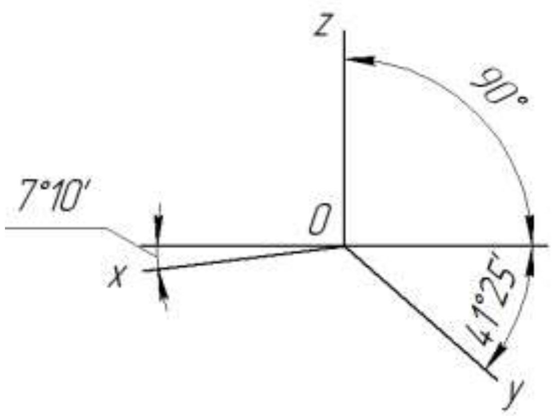
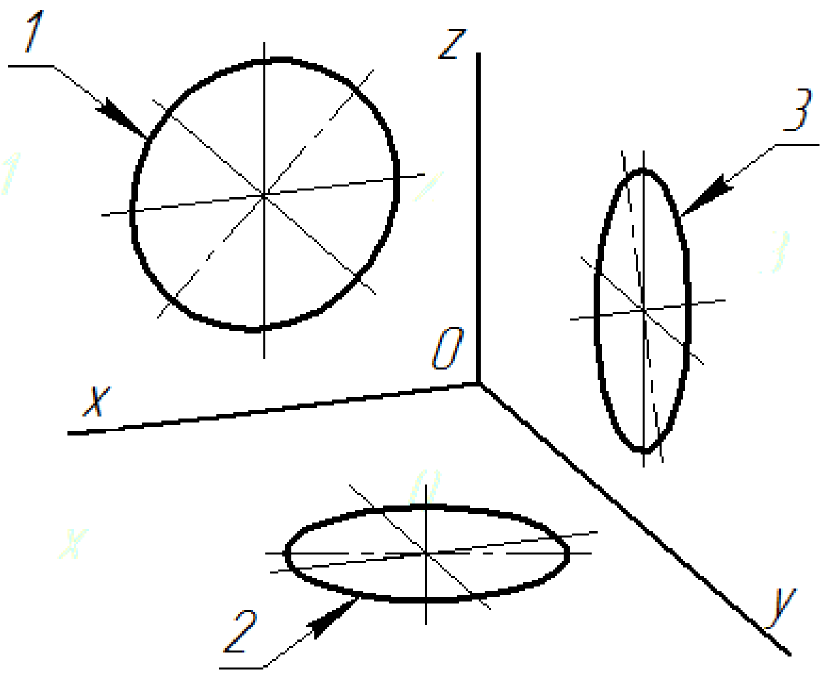


Рисунок 12.7 – Положение аксонометрических осей

Коэффициент искажения по оси *y* равен 0,47, а по осям *x* и *z* – 0,94.

Диметрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения по осям *x* и *z* и с коэффициентом искажения 0,5 по оси *y*.

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость проекций в эллипсы, как показано на рисунке 12.8.



1 – эллипс (большая ось расположена под углом 90° к оси *y*);

2 – эллипс (большая ось расположена под углом 90° к оси *z*);

3 – эллипс (большая ось расположена под углом 90° к оси *x*)

Рисунок 12.8 – Проецирование на аксонометрическую плоскость окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных плоскостям проекций

Если диметрическую проекцию выполняют без искажения по осям *x* и *z*, то большая ось эллипсов 1, 2, 3 равна 1,06 диаметра окружности, а малая ось эллипса 1 – 0,95, эллипсов 2 и 3 – 0,35 диаметра окружности.

Если диметрическую проекцию выполняют с искажением по осям *x* и *z*, то большая ось эллипсов 1, 2, 3 равна диаметру окружности, а малая ось эллипса 1 – 0,9, эллипсов 2 и 3 – 0,33 диаметра окружности.

Пример диметрической проекции детали приведен на рисунке 12.9.

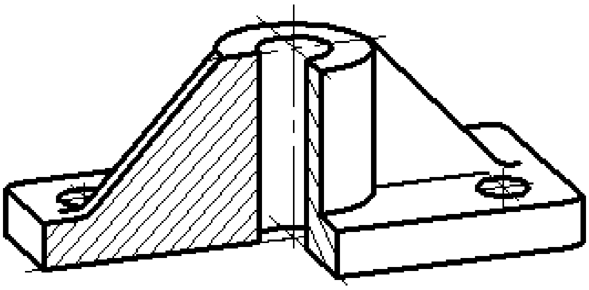


Рисунок 12.9 – Пример диметрической проекции детали

12.4 Косоугольные проекции

12.4.1 Фронтальная изометрическая проекция

Положение аксонометрических осей фронтальной изометрической косоугольной проекции приведено на рисунке 12.10.

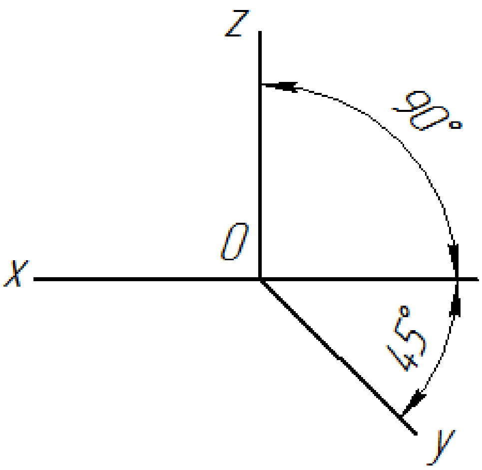
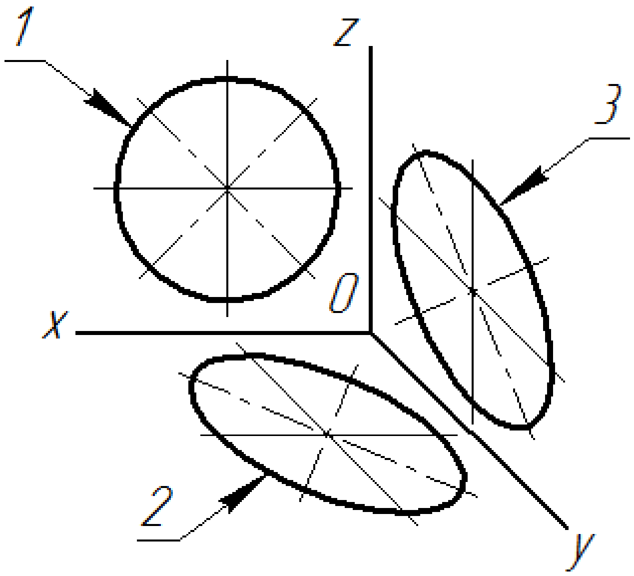


Рисунок 12.10 – Положение аксонометрических осей

Допускается применять фронтальные изометрические проекции с углом наклона оси *y* 30° и 60°.

Фронтальную изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям *x, y, z*.

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость в окружности, а окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной и профильной плоскостям проекций, – в эллипсы, как показано на рисунке 12.11.



1 – окружность; 2 – эллипс (большая ось составляет с осью *x* угол 22°30');
3 – эллипс (большая ось составляет с осью *z* угол 22°30')

Рисунок 12.11 – Проецирование на аксонометрическую плоскость окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных фронтальной, горизонтальной и профильной плоскостям проекций

Большая ось эллипсов 2 и 3 равна 1,3, а малая ось – 0,54 диаметра окружности.

Пример фронтальной изометрической проекции детали приведен на рисунке 12.12.

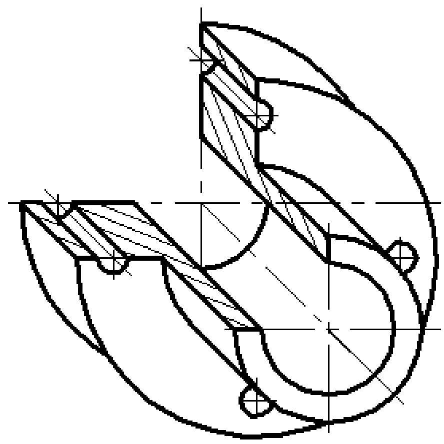


Рисунок 12.12 – Пример фронтальной изометрической проекции детали

12.4.2 Горизонтальная изометрическая проекция

Положение аксонометрических осей горизонтальной изометрической косоугольной проекции приведено на рисунке 12.13.

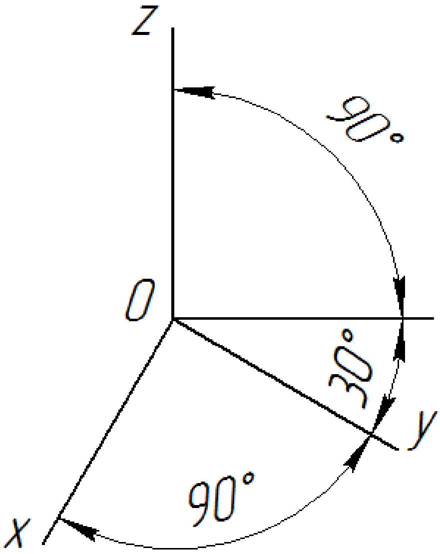
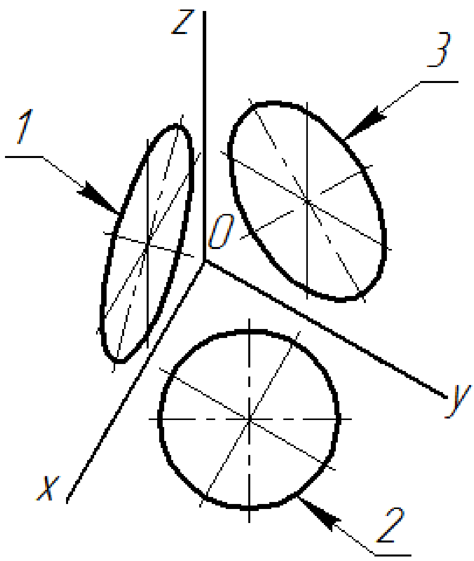


Рисунок 12.13 – Положение аксонометрических осей

Допускается применять горизонтальные изометрические проекции с углом наклона оси *y* 45° и 60°, сохраняя угол между осями *x* и *y* 90°.

Горизонтальную изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям *x*, *y* и *z*.

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной плоскости проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость проекций в окружности, а окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной и профильной плоскостям проекций, – в эллипсы, как показано на рисунке 12.14.



1 – эллипс (большая ось составляет с осью *z* угол 15°); 2 – окружность; 3 – эллипс (большая ось составляет с осью *z* угол 30°)

Рисунок 12.14 – Проецирование на аксонометрическую плоскость окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных фронтальной, горизонтальной и профильной плоскостям проекций

Большая ось эллипса 1 равна 1,37, а малая ось – 0,37 диаметра окружности.

Большая ось эллипса 3 равна 1,22, а малая ось – 0,71 диаметра окружности.

Пример горизонтальной изометрической проекции показан на рисунке 12.15.

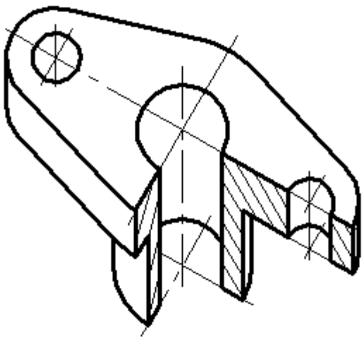


Рисунок 12.15 – Пример горизонтальной изометрической проекции

12.4.3 Фронтальная диметрическая проекция

Положение аксонометрических осей фронтальной диметрической косоугольной проекции приведено на рисунке 12.16.

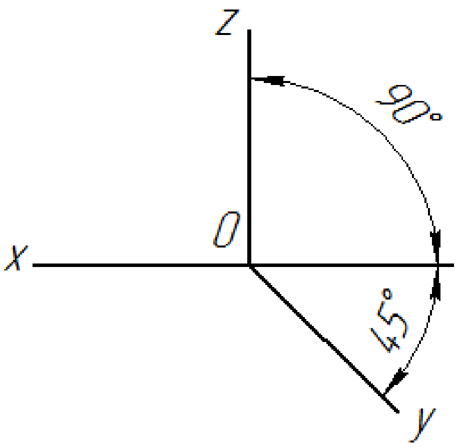


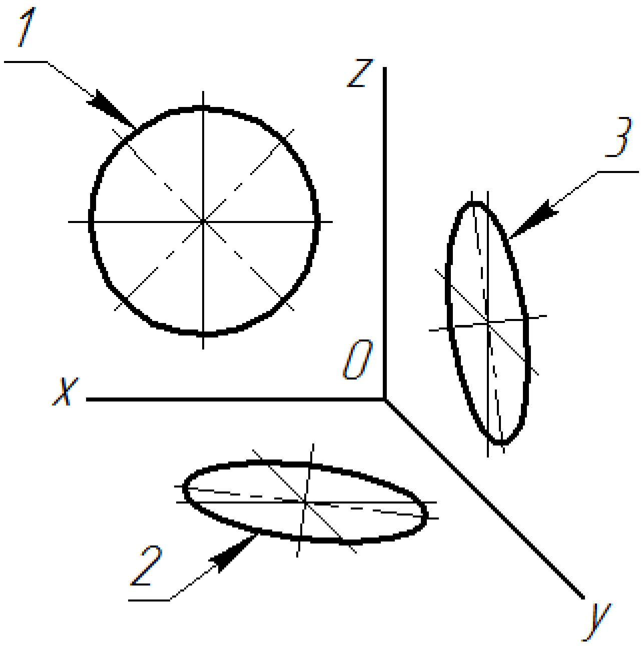
Рисунок 12.16 – Положение аксонометрических осей

Допускается применять фронтальные диметрические проекции с углом наклона оси *y* 30° и 60°.

Коэффициент искажения по оси *y* равен 0,5, а по осям *x* и *z* – 1.

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость проекций в окружности, а окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной и профильной плоскостям проекций, – в эллипсы, как показано на рисунке 12.17

Большая ось эллипсов 2 и 3 равна 1,07, а малая ось – 0,33 диаметра окружности.



1 – окружность; 2 – эллипс (большая ось составляет с осью x угол 7°14');

3 – эллипс (большая ось составляет с осью z угол 7°14')

Рисунок 12.17 – Проецирование на аксонометрическую плоскость окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных фронтальной, горизонтальной и профильной плоскостям проекций

Пример фронтальной диметрической проекции детали приведен на рисунке 12.18.

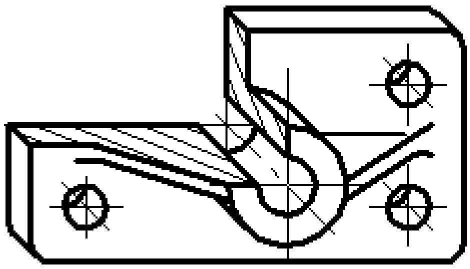


Рисунок 12.18 – Пример фронтальной диметрической проекции детали

12.5 Вопросы для самоконтроля

1. Для чего применяют аксонометрические проекции?
2. Что такое аксонометрическая проекция?

3. Дайте определение коэффициенту искажения.

4. Как наносят линии штриховки сечений в аксонометрических проекциях?

5. Как наносят размеры в аксонометрических проекциях?

6. Штрихуют ли в аксонометрических проекциях спицы маховиков и шкивов, ребра жесткости и подобные элементы?

7. Как допускается изображать профиль резьбы в аксонометрических проекциях?

8. Что такое прямоугольная проекция?

9. Приведите примеры прямоугольных проекций.

10. Опишите положение аксонометрических осей изометрической и диметрической прямоугольных проекций.

11. Каковы коэффициенты искажения по осям в изометрической и диметрической прямоугольных проекциях.

12. Как проецируются на аксонометрическую плоскость окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, в изометрической и диметрической прямоугольных проекциях?

13. Что такое косоугольная проекция?

14. Приведите примеры косоугольных проекций.

15. Опишите положение аксонометрических осей во фронтальной изометрической проекции, горизонтальной изометрической проекции, фронтальной диметрической проекциях.

16. Каковы коэффициенты искажения по осям во фронтальной изометрической проекции, горизонтальной изометрической проекции, фронтальной диметрической проекциях.

17. Как проецируются на аксонометрическую плоскость окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, во фронтальной изометрической проекции, горизонтальной изометрической проекции, фронтальной диметрической проекциях?

Список использованных источников

1. Амирджанова, И. Ю. Современное состояние развития геометро-графической культуры и компетентности будущих специалистов / И. Ю. Амирджанова, В. Г. Виткалов // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. – 2015. – № 2 (32-2). – С. 26-31.

2. Борисенко, И. Г. Инновационные технологии в преподавании начертательной геометрии при формировании профессиональных компетенций / И. Г. Борисенко // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2011. – № 12 (59). – С.355-357.

3. Бураго, Д. Ю. Курс метрической геометрии / Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов; Инст-т компьют. исслед. – М.: ИКИ, 2004 . – 512 с. – (Современная математика) . – ISBN 5-939723-00-4

4. Ваншина, Е. А. Изображения. Виды: учебное пособие / Е.А. Ваншина, Н.В. Ларченко, О.Н. Шевченко. – Оренбург: ОГУ, 2014. – 100 с.

5. Ваншина, Е. А. Об использовании единого дидактического материала при обучении студентов физике и инженерной графике (на примере Оренбургского государственного университета) / Е. А. Ваншина, В. В. Гуньков // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2015. – №2(177). – С.10-16.

6. Ваншина, Е. А. Тело с вырезами: методические указания к расчетно-графической работе «Тело с вырезами» по дисциплине «Инженерная графика» / Е. А. Ваншина, Л. М. Винокурова, М. А. Егорова. – Оренбург: РИК ГОУ ОГУ, 2008. – 69 с.

7. Ваншина, Е.А. Пересечение поверхностей: учебное пособие / Е.А. Ваншина. – Оренбург: ОГУ, 2015. – 98 с. ISBN 978-5-7410-1309-0

8. Ваншина, Е.А. Сечение поверхности плоскостью: учебное пособие / Е.А. Ваншина. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 98 с. ISBN 978-5-7410-1967-2

9. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии: Учеб. пособие / В. О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. Под ред. Ю.Б. Иванова. – 23-е изд., переработ. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат.лит., 1988. – 272 с.

10. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии: учебное пособие для вузов / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. – 27-е изд., стер. – М: Высшая школа, 2006. – 272 с.

11. Горельская, Л. В. Начертательная геометрия: методические указания к контрольным работам по курсу «Инженерная графика». – Часть 1. – 3-е изд., доп. и перераб. / Л. В. Горельская, А. В. Кострюков, С. И. Павлов. – Оренбург: ОГУ, 2003. – 50 с.

12. Горельская, Л.В. Начертательная геометрия: учебное пособие по курсу «Начертательная геометрия». 4-е изд., перераб. и доп. / Л. В. Горельская, А.В. Кострюков, С.И. Павлов. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 122 с.

13. ГОСТ 2.317-2011 Аксонометрические проекции. – М.: Стандартинформ, 2011. – 12 с.

14. Гущин, Л. Я. Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика: учебно-методическое пособие / Л. Я. Гущин, Е. А. Ваншина. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007. – 291 с.

15. Единая система конструкторской документации. Общие правила выполнения чертежей: [сборник]. – М.: Издательство стандартов, 1991. – 236 с.

16. Иванов, Г.С. Начертательная геометрия: учеб. для втузов / Г. С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1995. – 224 с.

17. Карева, С. А. Введение в специальность. Основы проецирования: Учебное пособие / С. А. Карева, Л. Н. Сайгак. – М.: Изд-во МАИ, 1991. – 80 с.

18. Кострюков, А. В. Начертательная геометрия. Практикум (сборник заданий): учебное пособие по курсу «Начертательная геометрия» / А. В. Кострюков, Ю. В. Семагина. – Оренбург: ОГУ, 2010. – 106 с.

19. Матвеева, Л. А. Пересечение поверхностей: методические указания и комплект индивидуальных заданий / Л. А. Матвеева, Л. В. Горельская, Н. П. Першанина. – Оренбург: ИПК ОГУ, 2001. – 60 с.

20. Математический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.

21.Начертательная геометрия и ее приложения. Межвузов. науч. сборник. Вып.3 / Под ред. И.Г. Виницкого. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 1979. – 128 с.

22.Начертательная геометрия, инженерная и машинная графика: Учеб. для вузов / Под ред. К.И. Валькова. – М.: Высш. шк., 1997. – 495 с.

23.Начертательная геометрия: учеб. для вузов / Под ред. Н. Н. Крылова. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 2001. – 224 с.

24.Покидышев, Г. С. Психолого-педагогические особенности преподавания графических дисциплин при заочной форме обучения / Г. С. Покидышев, В. П. Синельникова, Н. А. Данько // Теория и методика обучения фундаментальным дисциплинам в высшей школе. – 2003. – Том 1. – № 1 (1). – С. 144-146.

25.Фролов, С. А. Начертательная геометрия. Способы преобразования ортогональных проекций: учебное пособие для вузов / С. А. Фролов. – 3-е изд., испр. и доп. – М: Высшая школа, 2002. – 160 с.

26.Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия и черчение: учебник для студентов вузов / А. А. Чекмарев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. – 471 с.

27.Якунин, В. И. Перспективы геометро-графических дисциплин в техническом университете / В. И. Якунин, В. Н. Гузненков, П. А. Журбенко // Альманах современной науки и образования. – 2017. – № 2 (116). – Тамбов: Грамота, 2017. – С.108-110.