

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра управления и информатики в технических системах

Т. А. Пищухина

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Учебно-методическое пособие

Часть 1

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 27.03.04 Управление в технических системах, 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Оренбург  
2016

УДК 681.51 (075.8)

ББК 32.965я73

ПЗ6

Рецензент – кандидат технических наук, доцент М.А. Корнипаев

**Пищухина, Т. А.**

**ПЗ6**

Теория автоматического управления: учебно-методическое пособие .  
Часть 1 / Т. А. Пищухина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ,  
2016. – 93 с.

**ISBN 978-5-7410-1727-2**

Учебно-методическое пособие "Теория автоматического управления" разработано к практическим занятиям по дисциплинам "Управление в технических системах", "Автоматика", "Теория автоматического управления", "Основы теории управления" и предназначено для учебно-методического обеспечения подготовки бакалавров по направлениям подготовки 27.03.04 Управление в технических системах и 09.03.01 Информатика и вычислительная техника.

В пособии изложен краткий теоретический материал по теории автоматического управления, даны примеры решения задач из области автоматического управления и задания на практические занятия.

УДК 681.51(075.8)

ББК 32.965я73

ISBN 978-5-7410-1727-2

© Пищухина Т.А., 2016

© ОГУ, 2016

## Содержание

Введение.....	5
1 Практическое занятие на тему: получение структурных и функциональных схем в теории автоматического управления .....	7
1.1 Структурные и функциональные схемы систем автоматического управления .....	7
1.2 Примеры получения структурных и функциональных схем.....	12
реальных систем.....	12
1.3 Задание на практическое занятие .....	19
1.3.1 Увлажнитель воздуха.....	20
1.3.2 Морозильная камера .....	20
1.3.3 Регулятор уровня воды в паровом котле .....	21
1.3.4 Электрический утюг .....	21
1.3.5 Электрический чайник.....	22
1.4 Алгоритмы управления автоматических систем .....	23
2.1 Теоретические сведения о линеаризации .....	25
2.2 Пример линеаризации реальной системы.....	31
2.3 Задание на практическое занятие .....	34
3 Практическое занятие на тему: решение дифференциальных уравнений систем автоматического управления.....	36
3.1 Дифференциальное уравнение системы автоматического управления. Переходной процесс.....	36
3.1.1 Классический метод получения решения дифференциальных уравнений в теории автоматического управления.....	38
3.1.2 Операторный метод решения дифференциальных уравнений систем автоматического управления .....	45
3.1.3 Применение интеграла Дюамеля к решению дифференциальных уравнений систем автоматического управления .....	70

3.1.4 Метод переменных состояния получения решения дифференциальных уравнений систем автоматического управления .....	78
3.1.4 Итерационные методы решения дифференциальных уравнений систем автоматического управления .....	81
3.2 Задание на практическое занятие .....	88
Список использованных источников .....	92

## Введение

Предметы "Управление в технических системах", "Автоматика" и "Теория автоматического управления" являются основными дисциплинами специальностей 27.03.04 Управление в технических системах, а «Основы теории управления» – дисциплиной по выбору инженерного профиля для специальности 09.03.01 Информатика и вычислительная техника. Они базируются на следующих дисциплинах: математика, математический анализ, дискретная математика, вычислительная математика, теория вероятностей и математическая статистика, специальные главы высшей математики по теории управления, физика, электротехника и электроника.

Курс рассчитан на 30 часов по плану специальности 27.03.04 – Управление в технических системах. Формой итогового контроля является экзамен у всех специальностей.

В данном издании содержится 4 практических занятия по предметам "Управление в технических системах", "Автоматика", "Теория автоматического управления" и "Основы теории управления". В начале каждого практического занятия даны краткие теоретические сведения, необходимые для решения всех последующих примеров и задач, а в конце представлено задание для самостоятельного или аудиторного решения.

Несмотря на большое количество теоретических учебников, написанных для данных дисциплин, уровень практической подготовки в них достаточно мал, а расчеты или приводятся на достаточно простых примерах или не дают адекватного представления о применении математики на практике. Обилие материала лишь создает путаницу, обусловленную также различием в аспектах чтения дисциплины по управлению для разных специальностей. На лабораторных работах уже необходима реализация и четкое видение участия математического аппарата в процессе моделирования, поэтому требуется предварительная подготовка студента, которая и осуществляется с помощью практических занятий.

Приведенные методические материалы помогут студенту лучше разобраться в теоретических сведениях и быть подготовленным к использованию своих знаний на лабораторных занятиях.

# **1 Практическое занятие на тему: получение структурных и функциональных схем в теории автоматического управления**

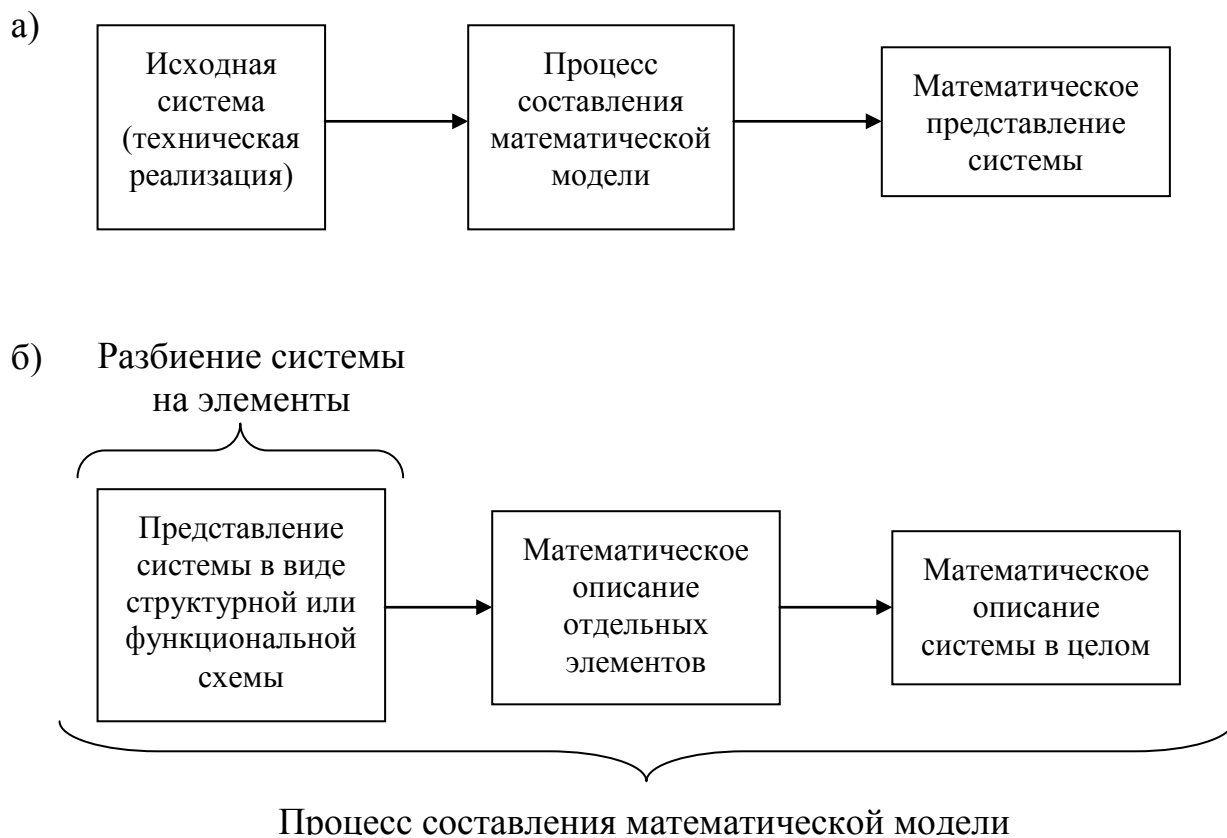
## **1.1 Структурные и функциональные схемы систем автоматического управления**

Системы в теории автоматического управления (далее ТАУ) для использования единого подхода к их исследованию представляются в виде математических выражений – математических моделей. Получить такое описание легче, если система разбита на части - элементы, математические модели для которых составить проще, чем для системы в целом (рисунок 1).

В теории автоматического управления элементы системы выделяют самым различным образом, например, разбиением системы по структурному признаку на отдельные обособленные блоки, выделением функций различных частей системы, а также представлением алгоритмов, с помощью которых сигнал преобразуется отдельными фрагментами системы. В зависимости от способа подобного рассмотрения системы выделяют следующие виды схем: структурную, функциональную и алгоритмическую. Для более глубокого изучения функционирования могут применяться принципиальные, кинематические и другие схемы, но чаще всех используют именно структурную или функциональную, так как они проще, нагляднее, абстрагируют лишние факторы и четко демонстрируют прохождение процесса управления по системе, а также позволяют легче понять назначение и работу самой системы.

**Структурная схема** – графическое изображение системы, разбитой на элементарные в смысле математического описания блоки, с отображением направлений передачи воздействий, как из внешней среды в систему, так и между самими блоками [1].

Структурная схема может составляться с большей или меньшей степенью детализации в зависимости от уровня исследования и задач изучения системы автоматического управления.



а) процесс преобразования системы в "язык" ТАУ; б) детализация представление процесса получения математической модели системы.

Рисунок 1 – Начальный этап рассмотрения системы в ТАУ

Схемы, на которых показаны лишь главные или укрупненные части системы управления, называются **обобщенными**.

Можно и усложнять схему, показывая вложенные элементы системы более подробно, но только если это необходимо для исследования, поскольку, чем проще исходное описание, тем легче и остальная работа.

Например, можно выделить в автомобиле только то, что им управляет (водителя) и сам автомобиль или учесть, что в автомобиль входит множество устройств: тормозная система, двигатель внутреннего сгорания, трансмиссия и так далее, и показать их все.



Отметим, что начинать следует именно с простой схемы, а потом пытаться детализировать ее.

Самая «простая» структурная схема в ТАУ – это схема в виде соединения объекта управления и устройства управления (рисунок 2).

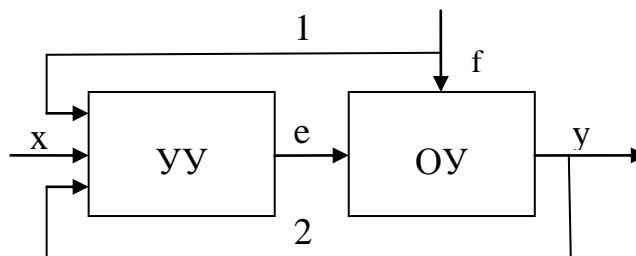


Рисунок 2 – Обобщенная структурная схема системы управления

Устройство (система), осуществляющее динамический процесс, поведением которого можно и нужно управлять для реализации поставленных перед технической системой целей, называется **объектом управления**.

**Устройство управления (УУ)** – устройство, осуществляющее в соответствии с алгоритмом управления воздействие на объект управления. Устройство управления имеет и другие наименования: **регулятор**, если обеспечивает поддержание управляемой величины на постоянном уровне или в постоянном диапазоне; а также **субъект управления**, как правило, если в качестве устройства управления выступает человек, группа людей или организация.

На рисунке 2 показаны также сигналы системы:  $x$  – задающее воздействие (входное);  $e$  – управляющее воздействие;  $y$  – управляемая (регулируемая) величина (выходное воздействие);  $f$  – возмущающее воздействие. Цепочки 1 и 2 могут присутствовать или отсутствовать в зависимости от рассматриваемой системы. Если мы каким-либо образом получаем информацию о результатах процесса управления, то присутствует цепочка 1, например, водитель напрямую видит, куда и с какой скоростью едет автомобиль, а в системе регулирования температуры в помещении наличествует датчик температуры для осведомления о том, как необходимо управлять температурой: повышать или снижать и т.д.

Цепочка 2 проводится, если система заранее имеет представление о возмущениях – препятствующих управлению воздействиях, присутствующих в ней. Например, погодные компенсаторы, где заданная температура для отопительных систем заранее меняется датчиком наружной температуры воздуха (происходит компенсация по погодным условиям): чем холоднее, тем выше ставится температура теплоносителя и наоборот.

**Функциональная структура (схема)** – структура (схема), отражающая функции (целевые назначения) отдельных частей системы управления и их взаимодействие.

Таковыми функциями могут быть [2]:

- управление;
- преобразование сигналов;
- сравнение сигналов и т.п.

Наименования устройств на функциональной схеме указывают на выполнение определенной функции:

- датчик (измерительный преобразователь);
- усилитель;
- блок сравнения (или сумматор);
- управляющее устройство;
- исполнительный элемент и т.п.

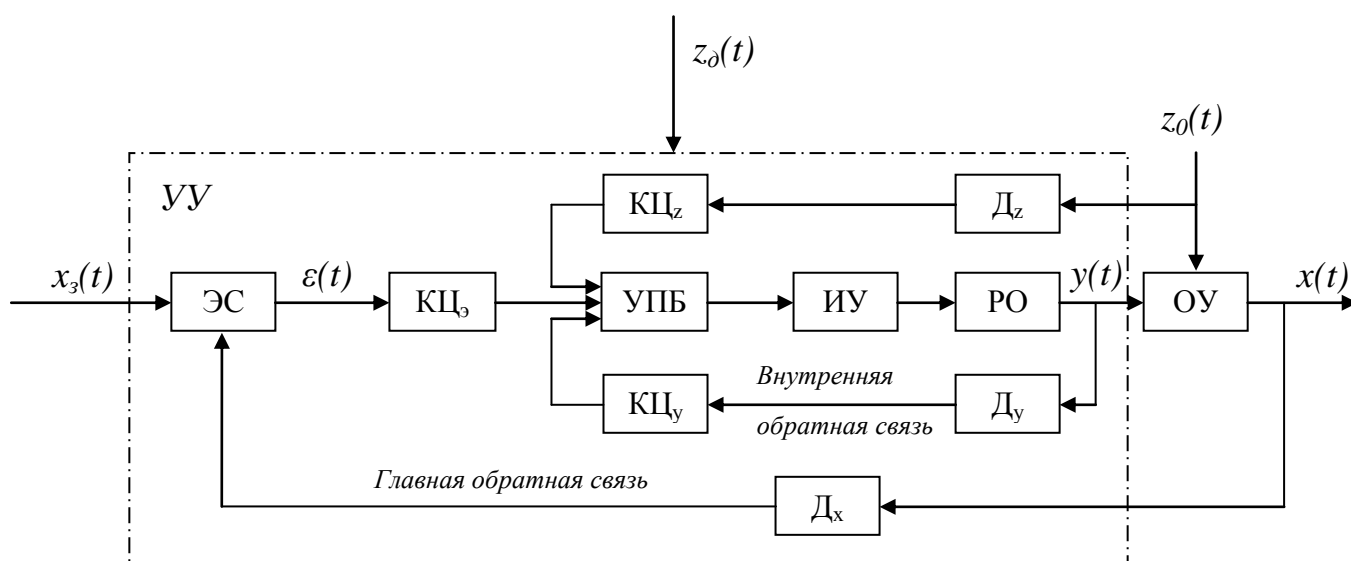


Рисунок 3 – Функциональная схема САУ [2]

На рисунке 3 изображены следующие функциональные устройства:

**Д – датчик** – формирует сигнал, пропорциональный определенному воздействию;

**ЭС – элемент сравнения** – служит для сравнения управляемой величины  $x(t)$  с задающим воздействием  $x_3(t)$  путем формирования сигнала, пропорционального их отклонению друг от друга;

**КЦ – корректирующая цепочка** – предназначена для изменения структуры системы с целью улучшения параметров качества управления;

**УПБ – усилительно-преобразующий блок** – служит для усиления сигнала и преобразования его в необходимую форму;

**РО – регулирующий орган** – служит для непосредственного воздействия на регулируемую среду (примеры РО: клапан, задвижка, тиристор и т.п.);

**ИУ – исполнительное устройство** – предназначено для приведения в действие регулирующего органа (примеры ИУ: электродвигатель, электромагнит, привод).

На этой схеме пунктиром помечены устройство и объект управления.

Для построения схемы реальной САУ предпочтительнее начинать с самой простой **структурной схемы**, на которой выделены объект управления и устройство управления в форме «черного ящика», а также воздействия на систему (рисунок 2).

Приблизительный алгоритм получения подобной схемы выглядит следующим образом:

1 Определить управляемую величину путем четкой конкретизации цели системы, устанавливаемой через ответ на вопрос: зачем нужна эта система и каковы результаты ее работы?

2 По управляемой величине выделить объект управления, отвечающий на вопрос: чем мы управляем в системе, что реализует управляемую величину или в каком объекте присутствует управляемая величина. Объект управления может сам по себе являться сложной системой элементов. Примеры: самолет, автомобиль, паровой котел, компьютер.

3 Выделить устройство управления путем ответа на вопрос: что или кто воспринимает задающее воздействие (а также, возможно, возмущающее и контролирующее) и влияет на другие элементы, действующие на объект управления.

4 Управляющее воздействие (сигнал любой природы) исходит от устройства управления и отвечает на вопрос: с помощью чего устройство управления непосредственно влияет на объект управления или управляемую величину?

5 И, наконец, возмущающее воздействие определяется ответом на вопрос: какие еще факторы, кроме управляющего воздействия, влияют на управляемую величину, препятствуя осуществлению цели управления (поддержанию выходного воздействия на заданном уровне)?

## **1.2 Примеры получения структурных и функциональных схем реальных систем**

**Пример 1:** Рассмотрим систему вентилирования воздуха в теплице. Если в теплице становится слишком жарко, то контроллер теплицы, получив соответствующий сигнал от датчика температуры, включает электродвигатель, который открывает форточку для проветривания помещения. Соответственно при понижении температуры форточка тем же образом закрывается. Составим структурную схему, выделив перечисленные пункты:

1 Система предназначена для поддержания постоянной температуры воздуха в помещении, следовательно, управляемой величиной является температура.

2 Управляемый параметр находится в пределах помещения, откуда объект управления представляет собой теплицу. Это же наблюдение можно вывести напрямую из формулировки назначения системы «поддержание температуры воздуха в **помещении**».

3 Задающее воздействие воспринимает контроллер, он же включает двигатель, влияющий на положение форточки, и отслеживает датчик температуры.

Самим контроллером **никто не управляет**, хотя в более сложных системах это могут быть контроллеры, а также операторы более высоких уровней. Это служит главным отличием устройства управления от исполнительных механизмов и регулирующих органов, с которыми его часто путают. Контроллер в данном случае именуется регулятором, осуществляя воздействия для поддержания температуры на постоянном уровне.

4 Управляющим воздействием служит поток воздуха из открытой форточки или его отсутствие, так как именно он напрямую влияет на управляемую величину – температуру в теплице.

5 Другим фактором, действующим на управляемую величину в негативном по отношению к цели управления смысле, можно назвать температуру воздуха за стенами теплицы. Иными возмущениями здесь могут быть люди в теплице или другие тепловые (охлаждающие) объекты, но температура внешней среды влияет сильнее остальных.

**Пример 2:** Рассмотрим передвижение на автомобиле, как управляемый процесс.

1 Цель системы – достичь с определенной скоростью до пункта назначения. Следовательно, у нас имеется две управляемых величины - направление передвижения и скорость. Чаще всего рассматривают именно скорость, поэтому за управляемую величину берем ее.

2 Объект, который реализует управляемый параметр, это автомобиль. Очевидно, что машина – объект управления.

3 Задающее воздействие – необходимая скорость – определяется человеком, исходя из многих факторов. Глубокого пояснения в данном случае не требуется для вывода, что водитель является субъектом управления, поскольку он напрямую **ведет** машину.

4 Автомобиль движется за счет вращения колес, на которые влияет крутящий момент, передаваемый им трансмиссией от двигателя. Поэтому крутящий момент – это управляющее воздействие.

5 Что же препятствует поддержанию постоянной скорости автомобиля? Можно выделить два крупных фактора - это ветер и качество дороги, которые и будут возмущающими воздействиями.

**Пример 3:** Первым промышленным регулятором являлся паровой двигатель Уатта, который работал следующим образом: на валу были посажены металлические шарики, которые крутились и поднимались по нему на пружине в зависимости от скорости машины. Эти же шарики через рычаг управляли клапаном, закрывающим трубу, куда в полость цилиндра, напрямую связанного, например, с колесом поезда, поступал пар. Шток цилиндра начинал быстрее перемещать колесо и увеличивать скорость, что приводило к поднятию шариков по валу, за следом к перемещению клапана, прекращению поступления пара в полость цилиндра и, соответственно, снижению скорости.

1 Цель системы – регулирование скорости передвижения, поэтому управляемая величина – скорость.

2 Объект, в котором расположен управляемый параметр, это паровая машина.

3 Задающее воздействие в данном случае реализуется шариками. Они же воздействуют на остальные элементы системы, которые влияют на скорость, поэтому шарики являются регулятором или устройством управления.

4 Управляющее воздействие в данном случае схоже с предыдущим примером – это крутящий момент, передаваемый паровым двигателем колесам.

5 Возмущающие воздействия аналогичны предыдущему случаю.

**Пример 4:** Работа ядерного реактора состоит в поддержании управляемой ядерной реакции. Реакция сопровождается выделением нейтронов, которые регистрируются ионизационной камерой. Мощность реактора регулируется перемещаемыми графитовыми стержнями, которые поглощают нейтроны. Составим структурную схему реактора.

1Цель системы – выработать необходимую мощность, например, для электростанции. Следовательно, управляемая величина – это мощность, но она не контролируется напрямую. Мощность ядерного реактора пропорциональна

количеству выделяемых нейтронов, регистрируемых ионизационной камерой, поэтому в данном случае управляемая величина измеряется не непосредственно сама, а косвенно.

2 Объект, в котором расположен управляемый параметр – это ядерный реактор, таким образом, он и является объектом управления.

3 Задающее воздействие в рассматриваемой системе может воспринимать оператор за пультом управления реактором, поэтому он и является субъектом управления.

4 На количество выделенных нейтронов напрямую влияет перемещение графитовых стержней: чем глубже они погружены, тем больше поглощают нейтронов, уменьшая их количество, а, следовательно, ниже мощность, поэтому положение графитовых стержней есть управляющее воздействие.

5 Возмущающими воздействиями в ядерном реакторе могут быть: температура и давление, отрицательно влияющие на скорость реакции, неравномерность перемещения стержней, приводящая к так называемым возмущениям реактивности и так далее.

На **функциональной схеме** присутствуют такие элементы, как исполнительный механизм, датчик, регулирующий орган, элемент сравнения. Единственная функция усилительно-преобразовательного блока – увеличение мощности входного сигнала и его преобразование в другую форму (например, из аналогового сигнала в цифровой); корректирующие устройства пока опустим ввиду того, что они вводятся только при неудовлетворительной работе системы.

Перечисленные элементы могут быть объединены в одном устройстве управления или объекте управления, некоторые элементы в системах могут и отсутствовать, как, например, регулирующий орган – все зависит от особенностей структуры и управления рассматриваемой системы. Но иметь представление необходимо о любой системе управления, поэтому они наличествуют на обобщенной схеме. Выделим следующие признаки функциональных блоков системы управления:

1 Регулирующий орган определяется вопросом – "чем именно осуществляется управляющее воздействие напрямую на объект?" или "что именно "разрешает" подобное воздействие?"

2 Исполнительный механизм (или устройство) можно определить, если задать вопрос: "чем устройство управления влияет на регулирующий орган?".

3 Датчик – выше дано определение данного устройства, и, по сути, он является "измерителем" величин в системе. Поэтому для определения датчика достаточно ответить на вопрос: "чем измеряется управляемая или любая другая величина в системе?" Датчики также можно назвать преобразователями, поскольку они преобразуют регистрируемый сигнал в удобную для ввода в управляющее устройство форму электрического напряжения.

4 Элемент сравнения нетрудно определить по его названию. Это устройство, которое должно вычислять разницу между сигналами или сравнивать их каким-либо другим образом, например, по превышению допустимого уровня. Чтобы определить это устройство в системе, достаточно спросить: "чем сравниваются сигналы?" или "что суммирует сигналы?"

Выделим эти элементы в уже рассмотренных примерах.

**Пример 5:** Вентилирование воздуха в теплице:

1 Напрямую на объект (теплицу) здесь "воздействует" воздух с улицы, а "разрешает" подобное воздействие форточка, которая и является регулирующим органом.

2 На форточку влияет электродвигатель, который закрывает или открывает ее, поэтому он служит исполнительным механизмом.

3 Управляемую величину измеряет датчик температуры в теплице.

4 Заданный уровень сигнала температуры и фактический уровень температуры в теплице сравниваются по напряжению между проводами, поэтому вольтметр, измеряющий эту разницу, в данном случае трактуется как элемент сравнения.

Вид функциональной схемы показан на рисунке 4.



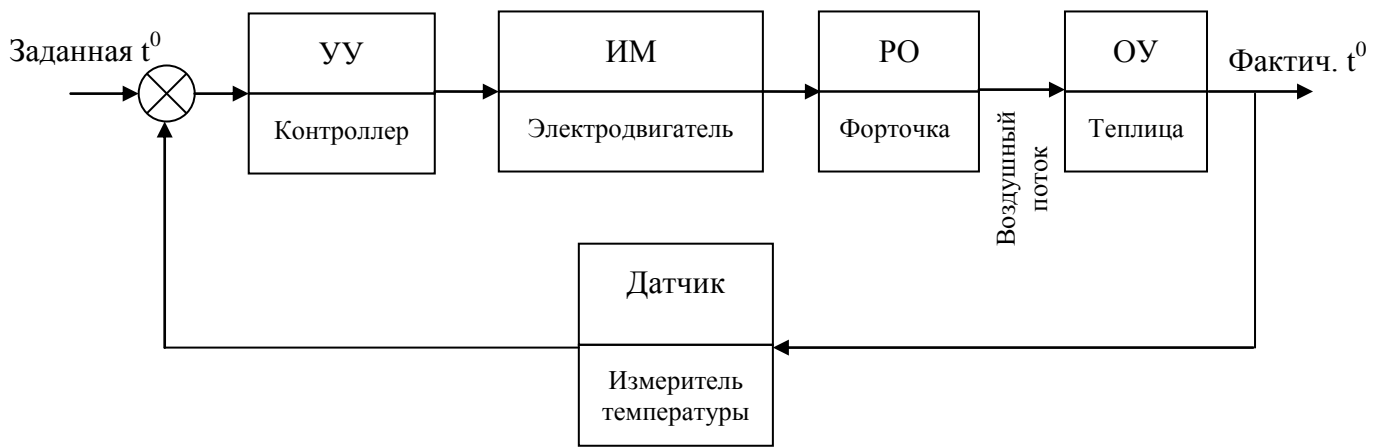


Рисунок 4 – Функциональная схема САР теплицы

**Пример 6: Автомобиль:**

1 В технической системе управления автомобилем воздействие непосредственно осуществляет ведущий мост, который передает крутящий момент колесам, являясь регулирующим органом.

2 Водитель влияет на ведущий мост путем нажатия педали газа или тормоза, которые и служат исполнительными механизмами. Остальная сложная кинематика может быть названа усилительно-преобразовательным блоком, передающим воздействие ведущему мосту.

3 Скорость – главный показатель, который мы выбрали управляемой величиной в автомобиле, регистрируется спидометром, представляющим собой датчик.

4 В автомобиле скорость сравнивается напрямую глазами водителя. Он самостоятельно наблюдает фактическую скорость на спидометре и знает о том, соответствует ли она той, которую он предпочитает. Поэтому водитель играет роль сравнивающего устройства.

Окончательный вариант функциональной схемы управления скоростью автомобиля показан на рисунке 5.

**Пример 7: Паровая машина:**

1 В системе управления паровой машиной непосредственное воздействие на объект осуществляется с помощью подачи пара, которую "разрешает" за-

слонка, связанная с шариками. Поэтому заслонка (или клапан) играет роль регулирующего органа.

2 Исполнительный механизм паровой машины - это рычаг, который связывает заслонку и шариками.

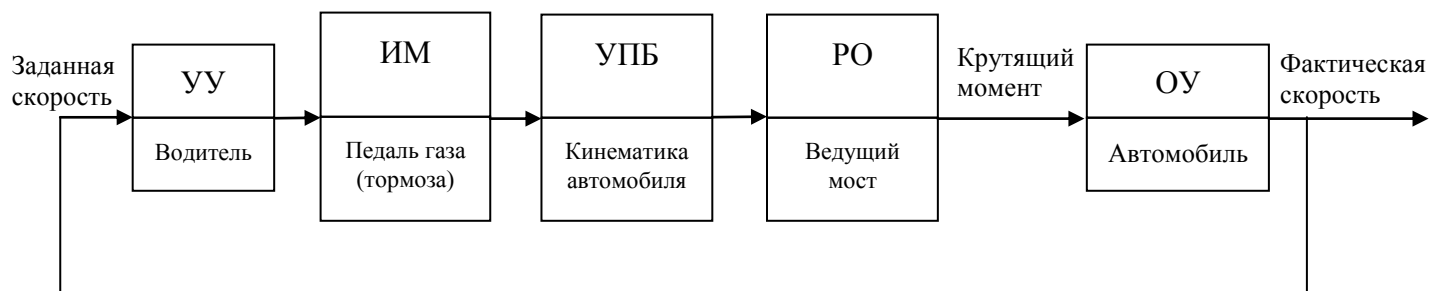


Рисунок 5 – Функциональная схема системы управления скоростью автомобиля

3 Как уже отмечено выше, шарика также демонстрируют скорость вращения колес, поэтому они и являются датчиками.

4 Центробежные шарика в этом случае служат и элементом сравнения, потому что их исполнение предусматривает реакцию на несоответствие заданной скорости, косвенно измеряемой скоростью их вращения.

Функциональная схема системы управления скоростью паровой машины показана на рисунке 6.

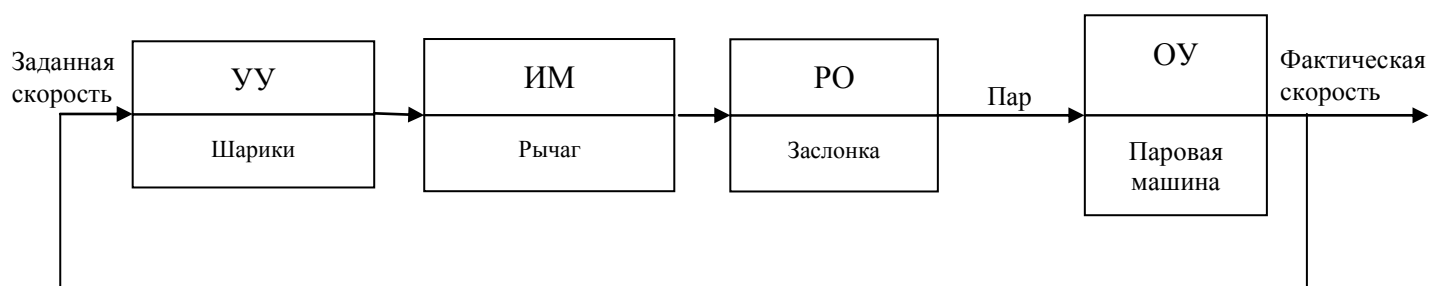


Рисунок 6 – Функциональная схема системы управления скоростью паровой машины

### Пример 8: Ядерный реактор:

1 Непосредственное воздействие на реакцию осуществляется управляющими стержнями, поэтому они являются регулируемыми органами.

2 Исполнительный механизм в ядерном реакторе – это система электродвигателей для перемещения стержней, поскольку именно они влияют на регулирующий орган – стержни.

3 Датчиком в той схеме ядерного реактора, которую мы рассмотрели, является ионизационная камера, которая напрямую регистрирует количество нейтронов, а, значит, мощность реактора.

4 Сравнивающим устройством в случае с реактором можно назвать оператора, который напрямую видит показания ионизационной камеры и ориентируется на необходимую мощность, или специальную систему контроля (СК) за мощностью реактора.

Функциональная схема ядерного реактора показана на рисунке 7.

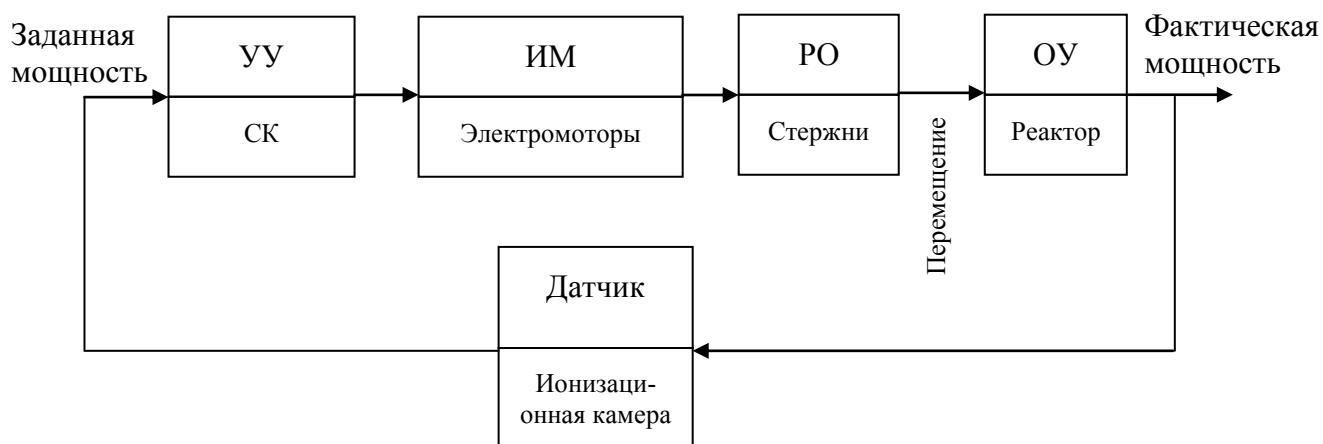


Рисунок 7 – Функциональная схема системы управления скоростью автомобиля

### 1.3 Задание на практическое занятие

Составить функциональные и структурные схемы устройств, для которых заданы принципиальные схемы и алгоритмы управления.

### 1.3.1 Увлажнитель воздуха

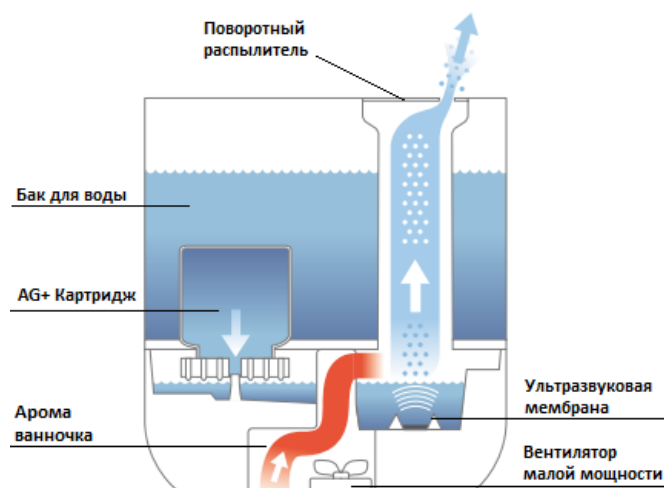


Рисунок 8 – Принципиальная схема ультразвукового мембранного увлажнителя воздуха

### 1.3.2 Морозильная камера

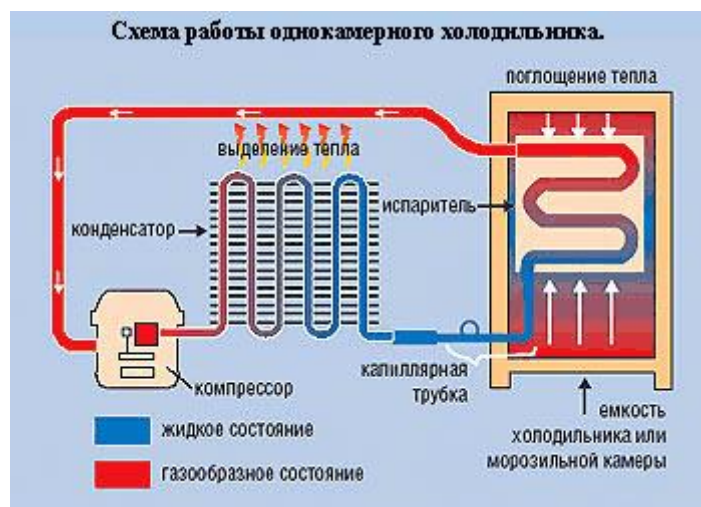


Рисунок 9 – Принципиальная схема работы однокамерного холодильника

### 1.3.3 Регулятор уровня воды в паровом котле

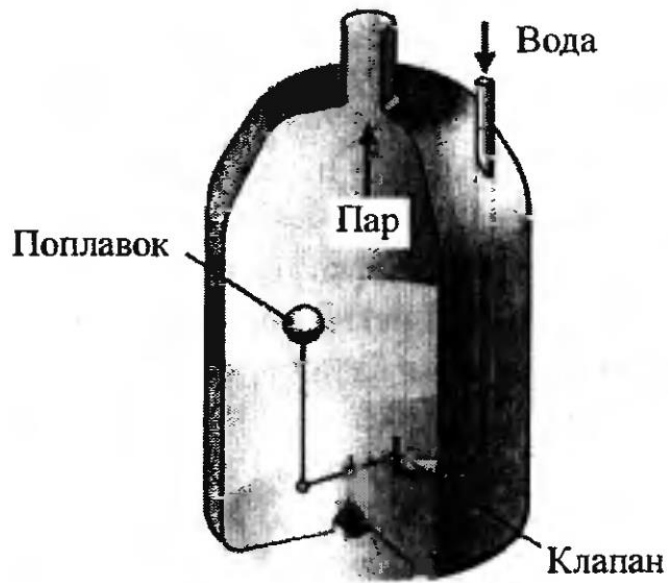
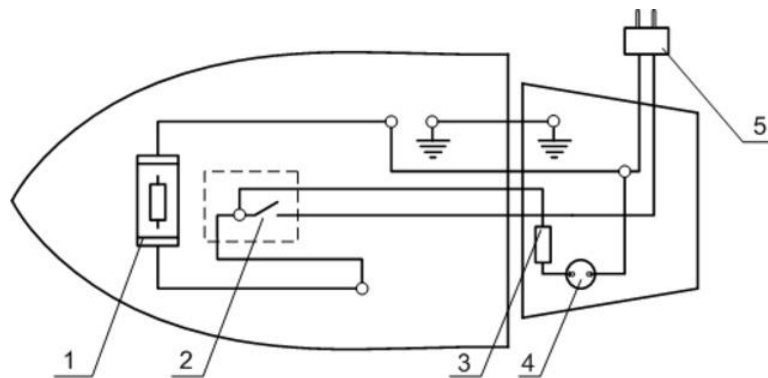


Рисунок 10 – Принципиальная схема регулирования уровня воды в котле

### 1.3.4 Электрический утюг



1 – нагревательный элемент (ТЭН); 2 – терморегулятор; 3 – резистор; 4 – лампа-индикатор; 5 – сетевая вилка

Рисунок 11 – Принципиальная схема работы электрического утюга

### 1.3.5 Электрический чайник

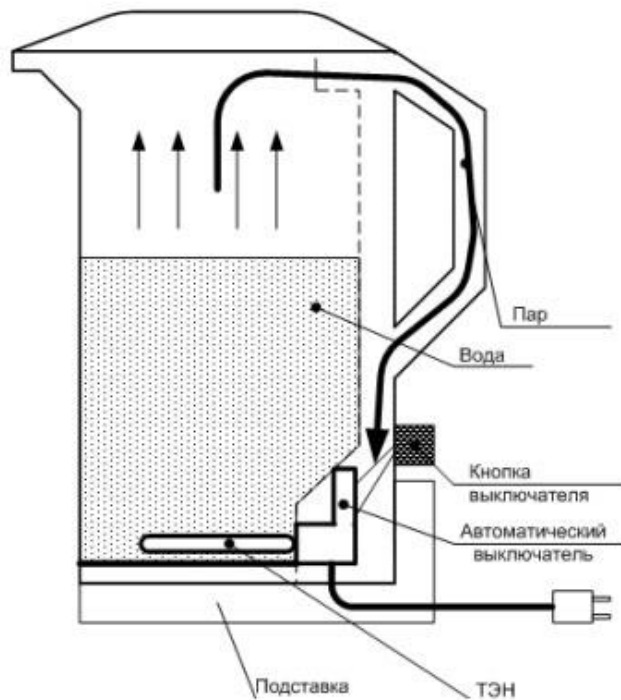


Рисунок 12 – Принципиальная схема работы электрического чайника

### 1.3.6 Регулятор частоты оборотов электродвигателя

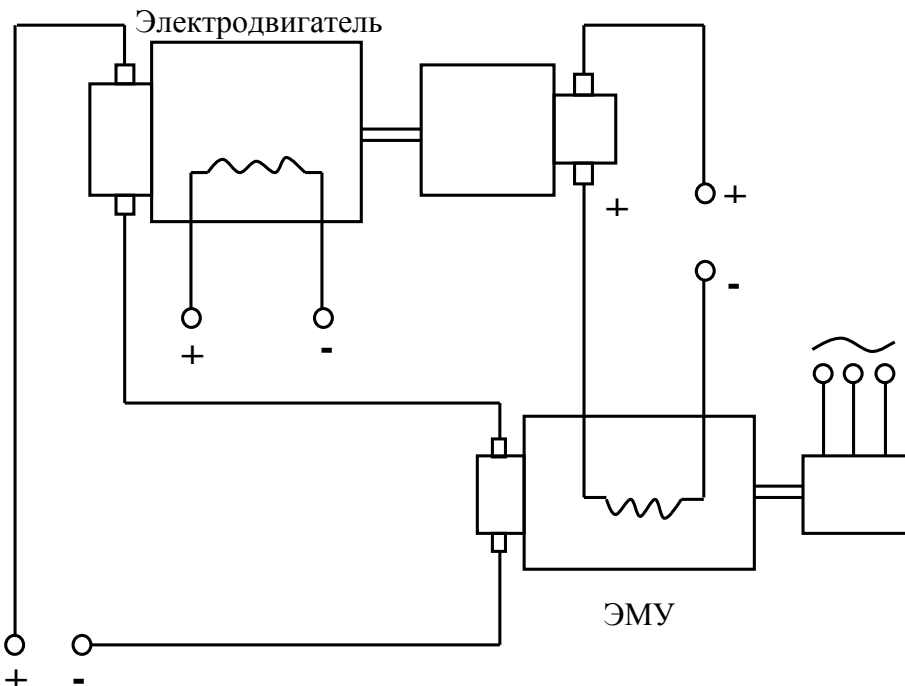


Рисунок 13 – Принципиальная схема регулирования частоты оборотов двигателя

## 1.4 Алгоритмы управления автоматических систем

1. При уменьшении влажности воздуха датчик влажности (на схеме не показан) подает сигнал, включающий вентилятор и электроды мембраны. Мембрана начинает колебаться, превращая поступившую и предварительно очищенную фильтром (картриджем) воду в пар, который поток воздуха от вентилятора подает в поворотный распылитель. По достижении необходимого процента влажности система отключается.

2. При включении холодильника в сеть компрессор начинает откачивать газообразный фреон из испарителя и подает его в конденсатор. В конденсаторе фреон из газообразного состояния преобразуется в жидкое, что сопровождается выделением тепла, вследствие чего конденсатор устанавливается за пределами морозильных камер. Далее жидкий фреон проходит через капиллярную трубку. Данная трубка создает разницу давлений в конденсаторе и испарителе, за счет чего фреон и переходит из жидкого состояния в газообразное. При испарении фреон забирает тепло из морозильной камеры. Далее процесс повторяется, пока по датчику температуры внутри холодильника не отключится компрессор.

3. При понижении уровня воды в котле, опускается поплавков и посредством системы рычагов поднимает заслонку трубы, по которой поступает вода. Как только уровень воды восстановится, поплавков всплывает и закрывает заслонку.

4. В качестве нагревательного элемента в утюге часто используется ТЭН (трубчатый электронагреватель). ТЭН – это спираль, которая помещена в специальный корпус, часто исполняемый в виде трубы. Трубку изготавливают из несгораемого материала – керамики или металла. При подаче напряжения на спираль, ТЭН раскаляется – тепловая энергия подается к основному металлическому корпусу утюга.

Любой утюг имеет систему индикации (лампу), которая предупреждает, что ТЭН находится в режиме нагрева. Еще одна важная часть любого утюга – термодатчик, срабатывающий, когда температура ТЭН становится максимальной.

ной. Термодатчик активирует (размыкает или замыкает) реле, а реле в свою очередь отключает напряжение питания спирали. При снижении температуры до минимального уровня термодатчик опять срабатывает, включая питание ТЭН.

5. ТЭН в нижней части чайника при подаче электричества разогревает воду. ТЭН подключен к терморегулятору (биметаллические пластины), и как только температура достигает заданного значения, происходит отключение чайника от сети.

6. При увеличении нагрузки на генератор (двигатель) его напряжение уменьшается по отношению к базовому напряжению, подаваемому по второй обмотке, идущей к электромашинному усилителю (ЭМУ), и эта разница подается на ЭМУ, воздействуя на его якорь. Усиленное напряжение с ЭМУ подается на обмотку возбуждения генератора, в которой увеличивается магнитный поток, и напряжение генератора восстанавливается.



## 2 Практическое занятие на тему: линеаризация уравнений систем автоматического управления

### 2.1 Теоретические сведения о линеаризации

В теории управления системы с одной входной величиной и одной выходной описываются дифференциальными уравнениями, связывающими эти два параметра.

Все реальные системы нелинейны, поскольку имеют нелинейную зависимость между входной и выходной координатами, выражаемую нелинейным дифференциальным уравнением. Но, если отклонения входных и выходных величин от заданных требуемым режимом значений достаточно малы, что означает несущественную нелинейность, почти совпадающую с линейным режимом, то в этом случае после составления исходных дифференциальных уравнений САУ выполняют процедуру **линеаризации**.

**Линеаризацией** называется замена реальных нелинейных уравнений статических характеристик систем (или элементов) близкими к ним линейными уравнениями.

С линейными уравнениями расчеты значительно упрощаются, нелинейные же уравнения в некоторых случаях могут вообще не иметь решения или процесс его получения слишком обременителен.

Необходимо уточнить, что в данном случае подразумевается под **линейным** уравнением.

**Линейным дифференциальным уравнением** называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производных.

Например,  $y' - x^2y = \sin(x)$  – линейное уравнение первого порядка, потому что  $y$  и его производная  $y'$  стоят в первых степенях и не входят в трансцендентные (логарифмические, тригонометрические и т.д.) или другие функции, а их множители включают функции (или константы), не зависящие от  $y$ .

Для сравнения уравнение  $y' + 3xy^2 = 2x$  - нелинейно из-за второго члена, в

котором у стоит в квадрате.

Простейшими методами линеаризации являются: метод **касательной**, метод **секущей (метод малых приращений)**, **кусочно-линейная** линеаризация.

При линеаризации по **методу касательной** полагают, что в процессе работы объекта рабочая точка статической характеристики будет совершать лишь незначительные колебания вокруг номинального режима и, следовательно, нелинейную характеристику можно заменить касательной к ней в точке А (системы стабилизации).

Из рисунка 14 видно, что возле точки А нелинейная функция практически совпадает с отрезком касательной, проведенной к ней, что и служит основанием для замены нелинейного дифференциального уравнения зависимости между входной и выходной величиной системы линейным уравнением касательной. При условии малых отклонений фактического нелинейного режима от статического линейного, которые упомянуты выше, такая замена будет осуществляться с малой погрешностью. В противном случае, нелинейная функция будет не совпадать с касательной, и их взаимозамена внесет существенную погрешность.

Аналитически метод касательных осуществляется разложением дифференциального уравнения вход-выход (или просто функции) в ряд Тейлора с отбрасыванием членов ряда высоких порядков, которые нелинейны. Следует заметить, что далеко не все характеристики могут быть разложены в ряд Тейлора.

Для осуществимости подобного разложения, необходимы следующие условия:

- характеристика системы должна иметь непрерывные частные производные в окрестности точки, относительно которой проводится линеаризация;
- отклонения выходной величины  $\Delta u_{\text{вых}}$  при данном входном воздействии  $\Delta x_{\text{вх}}$  достаточно малы;
- погрешность линеаризации (отклонение действительной характеристики от прямолинейной) должна находиться в допустимых для расчета пределах.

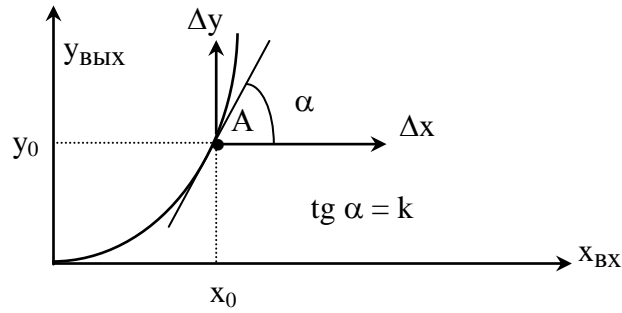


Рисунок 14 – Графическая интерпретация линейризации системы вблизи точки A по методу касательной

– не должны нарушаться качественные особенности системы. Например, такой вид нелинейности как релейный элемент подобным образом линейризовать нельзя. Это требование является основным.

Напомним, что **ряд Тейлора** состоит из: а) значения функции в выбранной точке (в которой будет проводиться линейризация) б) разностей между значениями аргументов линейной и нелинейной функций в этой же точке, умноженных на соответствующие частные производные функции по каждому из ее аргументов. Форма записи ряда Тейлора:

$$y_m(x) \approx \sum_{i=0}^m \frac{(x - x_0)^i}{i!} y^{(i)}(x_0), \quad x_0 \leq x \leq X,$$

$$\text{где } y^{(0)}(x_0) = y(x_0) = y_0, \quad y^{(1)}(x_0) = y'(x_0) = f(x_0, y_0),$$

а значения производных  $y^{(i)}(x_0)$ ,  $i = 2, 3, \dots, m$  находят по формулам, полученным последовательным дифференцированием исходного уравнения в форме Коши (в нашем случае это уравнение системы с выраженной из него старшей производной выходной величины):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$y(a) = y_1, y(b) = y_2,$$

где  $a$  и  $b$  - начальная и конечная точка границы области решения дифференциального уравнения. Производные этого уравнения находятся следующим образом:

$$y^{(2)}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

$$y^{(3)}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + f^2(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \text{ и т.п.}$$

Как упомянуто выше, при линеаризации оставляют только первые *линейные* члены ряда Тейлора, и получают уравнение, эквивалентное уравнению касательной. Если посмотреть на выражения выше, то остается только  $y^{(2)}(x_0)$ , умноженное на соответствующую разность между  $x$  и  $x_0$  из выражения для  $y_m$ . При этом частные производные по сути константы, стоящие коэффициентами при разностях между  $x$  и  $x_0$ , обозначаемые за  $a_0$ ,  $a_1$  и так далее. В результате в общем виде линеаризованное дифференциальное уравнение любой одномерной системы (без учета возмущения в правой части) сводится к виду:

$$a_0 \frac{d^n y_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y_{\text{ВЫХ}} = b_0 \frac{d^n x_{\text{ВХ}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{\text{ВХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + b_n x_{\text{ВХ}}.$$

Разложив функцию  $y_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}})$  в ряд Тейлора, получим:

$$y_{\text{вых}} = y_0 + \frac{dy}{dx} \Delta x_{\text{вх}} + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Delta x_{\text{вх}}^2 + \dots$$

где  $y_0$  – значение выхода, соответствующее входу  $x_0$ ;

$d^k y / dx^k$  - значения производных, взятых в точке  $A(x_0, y_0)$ .

Тогда для малых отклонений  $x$ :

$$y_{\text{вых}} \approx y_0 + \frac{dy_{\text{вых}}}{dx_{\text{вх}}} \Delta x_{\text{вх}} \text{ или } \Delta y_{\text{вых}} = y_{\text{вых}} - y_0 = \frac{dy_{\text{вых}}}{dx_{\text{вх}}} \Delta x_{\text{вх}} = k \Delta x_{\text{вх}},$$

$$\text{где } k = \frac{dy_{\text{вых}}}{dx_{\text{вх}}} = \frac{\Delta y_{\text{вых}}}{\Delta x_{\text{вх}}} = \text{tg} \alpha.$$

Это и есть уравнение касательной, которым заменяется исходное. Здесь только одна величина в функции  $y_{\text{вых}}$  – это  $x_{\text{вх}}$ , поэтому частные производные отсутствуют, а есть только прямая производная. Мы можем в последнем выражении обозначить  $k$  за  $a_0$ , опустить знаки  $\Delta$  и тогда получим выражение, близкое к общей записи, которая приведена выше:

$$\Delta y_{\text{вых}} = a_0 \Delta x_{\text{вх}} \text{ или } y_{\text{вых}} = a_0 x_{\text{вх}}.$$

Величина  $k = \Delta y / \Delta x$  - отношение выходной и входной величины – **статический коэффициент передачи**. Для нелинейных звеньев “ $k$ ” – величина не постоянная и зависит от положения рабочей точки А.

Если выходная величина элемента зависит от нескольких входных воздействий, то при линеаризации по методу малых приращений следует определять частные производные по всем воздействиям, а приращение выхода является суммой частных приращений:

$$\Delta y_{\text{вых}} = \frac{\partial y_{\text{вых}}}{\partial x_{\text{вх1}}} \Delta x_{\text{вх1}} + \frac{\partial y_{\text{вых}}}{\partial x_{\text{вх2}}} \Delta x_{\text{вх2}} + \dots + \frac{\partial y_{\text{вых}}}{\partial x_{\text{вхn}}} \Delta x_{\text{вхn}},$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – приращения входных воздействий;

$\frac{\partial y_{\text{вых}}}{\partial x_{\text{вхi}}}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) - частные производные.

**Метод секущей** применим к объектам, имеющим нелинейную статическую характеристику, кососимметричную относительно начала координат.

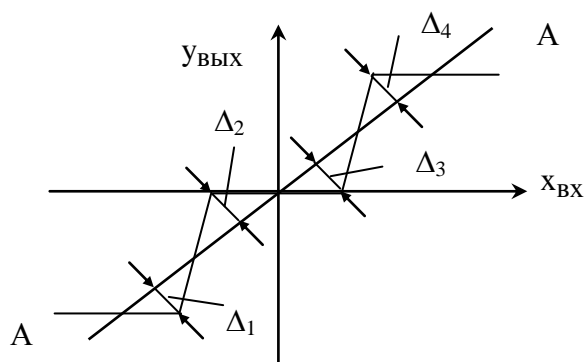


Рисунок 15 – Кососимметричная статическая характеристика

Характеристику такого типа можно заменить линейной секущей  $AA$ , причём провести её нужно так, чтобы ошибки  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  были минимальными (Рисунок 15).

**Метод кусочно-линейной линеаризации** применим для нелинейных объектов, статические характеристики которых могут быть представлены в виде суммы отрезков линейных характеристик (1, 2, 3, 4, 5) на рисунке 16.

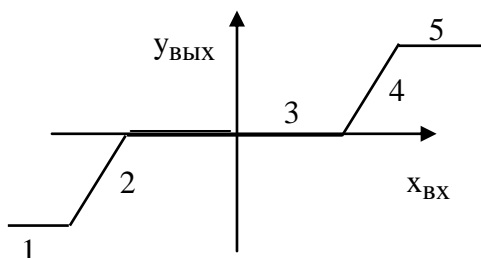


Рисунок 16 – Нелинейная статическая характеристика, представляемая линейными отрезками

Для каждого отрезка характеристики справедливо линейное дифференциальное уравнение. Переход от одного участка к другому осуществляется «припасовыванием» отдельных решений. При этом решение для конца одного участка является начальным условием для следующего и так далее.

В статике все звенья можно разделить на два больших класса: статические и астатические. Статические звенья – звенья, поведение которых в статике описывается статической характеристикой типа  $y_{вых} = kx_{вх}$ .

Существует большой класс звеньев, для которых статическую характеристику не удастся получить, и поэтому в зависимость  $y_{вых} = f(x_{вх})$  входит время. Такие объекты называются **астатическими**. Условно в качестве статической характеристики для астатических звеньев считают зависимость:

$\frac{dy_{вых}}{dt} = f(x_{вх})$ , подразумевающую, что в астатических объектах каждому значению входного сигнала соответствует определенная скорость входного сигнала.

## 2.2 Пример линеаризации реальной системы

Рассмотрим в качестве примера нелинейную модель системы управления поддержанием уровня жидкости в емкости. Обозначим  $h$  – уровень жидкости в баке и  $Q$  – уровень расхода жидкости из бака (рисунок 17).

Возьмем достаточно малый промежуток времени  $\Delta t$ , чтобы расход  $Q$  и количество вытекающей из бака воды  $q$  были практически постоянными.

Объем воды, поступивший в бак за это время, равен  $Q^* \Delta t$ , а объем вытекающей воды –  $q^* \Delta t$ . Изменение уровня  $\Delta h = \frac{(Q - q)}{S} \cdot \Delta t$ .

При переходе к пределу:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} [Q(t) - q(t)].$$

Расход  $q$  связан с уровнем  $h$  следующей зависимостью:

$$q(t) = \alpha \cdot \sqrt{h(t)},$$

где  $\alpha$  рассчитывается по формуле:

$$q = S_0 \cdot v,$$

здесь  $v$  – скорость вытекания жидкости, найденная из закона Бернулли:

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости (в кг/м<sup>3</sup>),  $g \approx 9,81$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения.

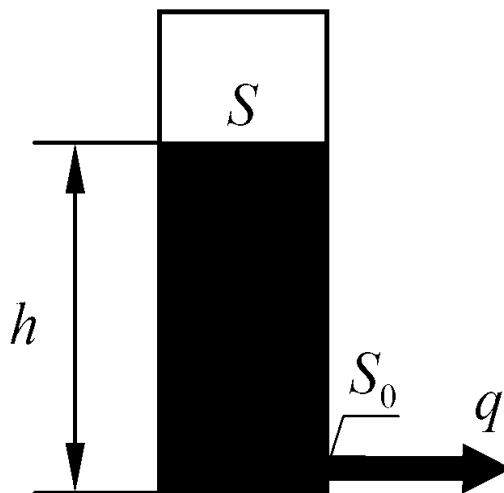


Рисунок 17 - Система поддержания уровня воды в емкости

Отсюда:

$$v = \sqrt{2gh},$$

Подставим это значение в уравнение для  $q$  и найдем из него  $\alpha$ .

$$q = S_0 \sqrt{2gh} \rightarrow \alpha = S_0 \sqrt{2g}.$$



С учетом  $\alpha$  математическая модель системы переписется в следующем виде:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}Q(t) - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h(t)}. \quad (1)$$

Статическому режиму соответствует:  $0 = Q - \alpha \cdot \sqrt{h} \rightarrow h = \frac{Q^2}{\alpha^2}$ .

Пусть задана рабочая точка  $Q = Q_0$  и  $h = h_0$ , вблизи которой отклонения значений входа и выхода составляют  $Q = Q_0 + \Delta Q$  и  $h = h_0 + \Delta h$ . Разложим модель (1) в ряд Тэйлора вблизи этой точки.

Коэффициенты ряда (частные производные):

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left[ \frac{1}{S}Q - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h} \right] = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial}{\partial h} \left[ \frac{1}{S}Q - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h} \right] = -\frac{\alpha}{2S\sqrt{h}}.$$

Подставим их в правую часть уравнения (1) вместе с начальными значениями  $h$  и  $Q$ :

$$\frac{1}{S}Q(t) - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h(t)} \approx \frac{1}{S}Q_0 - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h_0} + \frac{1}{S} \cdot \Delta Q - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}} \cdot \Delta h.$$

Подставим это выражение в уравнение (1), а в его левую часть подставим значение  $h = h_0 + \Delta h$  и учтем:  $\frac{d(h_0 + \Delta h)}{dt} = \frac{d\Delta h}{dt}$

$$\frac{d\Delta h}{dt} \approx \frac{1}{S}Q_0 - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h_0} + \frac{1}{S} \cdot \Delta Q - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}} \cdot \Delta h.$$

В статике левая часть уравнения (1) равна нулю, поэтому в начальной точке  $(Q_0, h_0)$ :

$$\frac{1}{S}Q_0 - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h_0} = 0$$

И линеаризованное уравнение:

$$\frac{d\Delta h}{dt} + k_h \cdot \Delta h \approx k_Q \cdot \Delta Q,$$

Здесь  $k_h = \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}}$  и  $k_Q = \frac{1}{S}$ . Знак  $\Delta$  обычно опускают, поэтому оконча-

тельный вид линеаризованного уравнения:

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h \cdot h(t) = k_Q \cdot Q(t).$$

### 2.3 Задание на практическое занятие

Постройте линеаризованную модель для звена, которое описывается нелинейным дифференциальным уравнением (значения определяются из таблицы 2 по номеру варианта):

$$T \frac{dy}{dt} + a_2 y^2 + a_1 y = kx$$

В номинальном режиме установившееся значение  $y = y^0 = 0,1$ .

Таблица 2.1 – Значения параметров для практического задания

Вариант	$T$	$a_2$	$a_1$	$k$
1	0.1	0.5	1.0	0.5
2	0.2	0.4	0.9	0.6
3	0.3	0.3	0.8	0.7
4	0.3	0.2	0.7	0.8
5	0.4	0.1	0.6	0.7
6	0.5	0.2	0.5	0.6
7	0.6	0.3	0.6	0.5
8	0.7	0.4	0.7	0.6
9	0.8	0.5	0.8	0.7
10	0.9	0.4	0.9	0.8
11	1.0	0.3	1.0	0.7
12	1.1	0.2	1.1	0.6
13	1.1	0.1	1.2	0.5
14	1.3	0.2	1.3	0.6
15	1.4	0.3	1.4	0.7
16	1.5	0.4	1.5	0.8
17	1.6	0.5	1.4	0.7
18	1.7	0.4	1.3	0.6
19	1.8	0.3	1.2	0.5
20	1.9	0.2	1.1	0.4

### 3 Практическое занятие на тему: решение дифференциальных уравнений систем автоматического управления

#### 3.1 Дифференциальное уравнение системы автоматического управления. Переходной процесс

**Переходной процесс** – это математическая характеристика, описывающая выходную реакцию (сигнал) системы при подаче на ее вход в качестве воздействия функции Хевисайда (ступенчатой функции) при нулевых начальных условиях (рисунок 18).

Другими словами, **переходной процесс** – это "переход" системы с одного режима на другой, отличающийся от предыдущего изменениями каких-либо характеристик (например, амплитуды или фазы).

Переходной процесс также может возникать при влиянии возмущающих воздействий на систему.

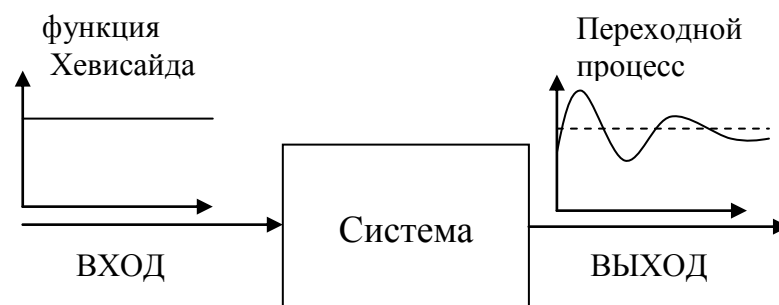


Рисунок 18 – Модель, иллюстрирующая подачу ступенчатого воздействия на систему

В качестве ситуаций "подачи ступенчатого воздействия" на систему, вызывающих в ней переходной процесс, можно привести включение/выключение

техники; скачки напряжения в сети; порыв ветра, действующий на самолет или машину.

В модели системы в форме дифференциального уравнения "вход-выход" неизвестные представляют собой входной и выходной сигналы с их производными (рисунок 19).

$$a_0 \frac{d^n y_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y_{\text{ВЫХ}} = b_0 \frac{d^n x_{\text{ВХ}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{\text{ВХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + b_n x_{\text{ВХ}}$$

Выходной сигнал и его производные до n-ой включительно
Входной сигнал и его производные до n-ой включительно

Рисунок 19 – Общий вид уравнения-модели системы с одним входом и одним выходом в ТАУ

Переходной процесс из рисунка 18 – это сигнал на выходе системы и одновременно это переменная  $y$  в уравнении выше. Если представить изменение  $y$  в течение переходного процесса на выходе графически, то это будет кривая следующего вида (рисунок 20). Она же иллюстративно показана на рисунке 18 на выходе системы.

Некоторые методы расчета переходного процесса очевидны из факта, что это неизвестная переменная в дифференциальном уравнении: 1) классический метод – интегрирование дифференциального уравнения; 2) операторный метод – с помощью преобразования Лапласа; 3) операторно-классический метод – комбинация предыдущих двух методов; 4) с помощью интеграла Дюамеля; 5) частотный метод расчета переходных процессов; 6) метод переменных состояния; б) итерационные методы.

Существуют и другие методы, но мы рассмотрим только те, которые чаще всего применяются в ТАУ.

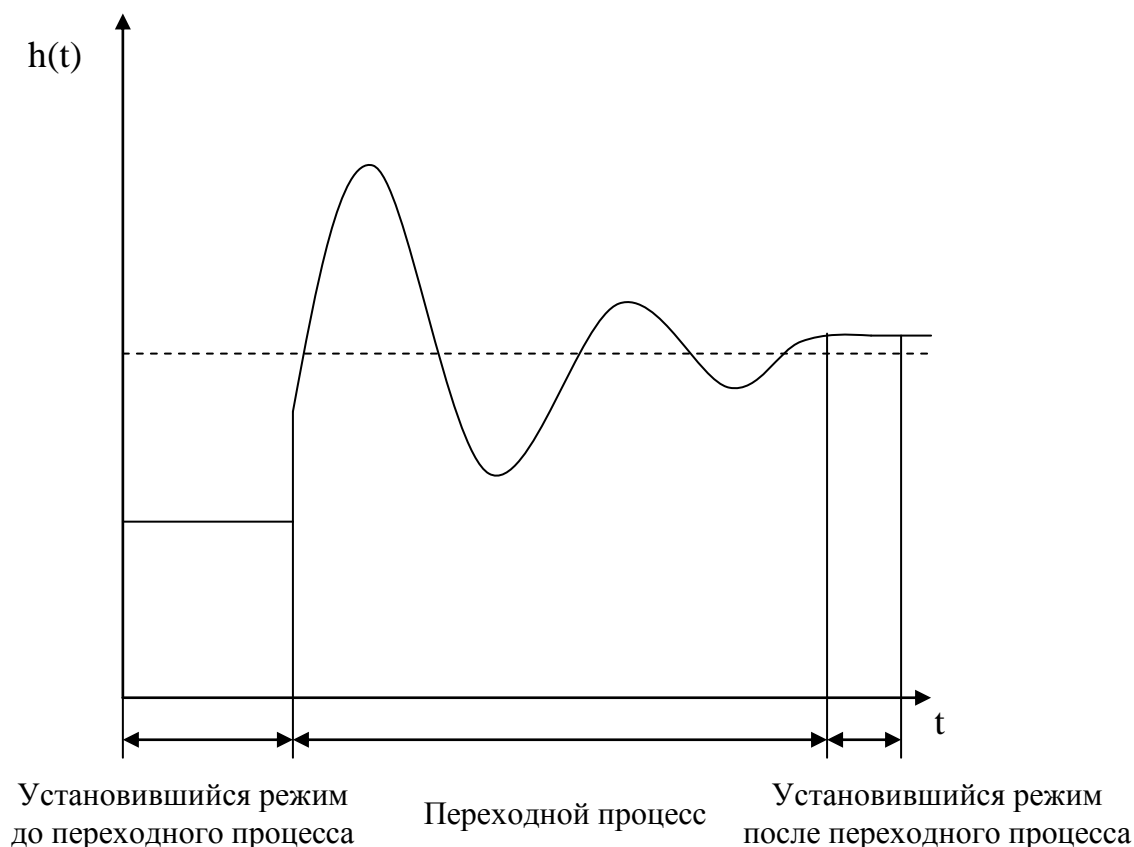


Рисунок 20 – График переходного процесса

### 3.1.1 Классический метод получения решения дифференциальных уравнений в теории автоматического управления

Классический метод расчета используется для систем, выраженных однородными линейными дифференциальными уравнениями.

Запишем уравнение с рисунка 19 в следующем виде:

$$a_0 \frac{d^n y_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y_{\text{ВЫХ}} = F(t). \quad (3)$$

Уравнения подобного вида называются **дифференциальными неоднородными**, так как правая часть не равна 0, в отличие от дифференциальных однородных, где правая часть отсутствует (равна нулю).

Выходной сигнал системы является решением этого уравнения. Решение подобного неоднородного уравнения представляется в виде 2-х составляющих: вынужденной и свободной:

$$y_{\text{вых}} = y_{\text{св}} + y_{\text{вын}} \quad (4)$$

Свободная составляющая представляет собой описание свободного движения системы, определяемого при отсутствии каких-либо воздействий на входе системы только ненулевыми начальными условиями, и является общим решением однородного дифференциального уравнения, полученного из уравнения (3) приравниванием к нулю правой части:

$$a_0 \frac{d^n y_{\text{св}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_{\text{св}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y_{\text{св}} = 0. \quad (5)$$

Вынужденная составляющая – это изменение выходного сигнала системы при наличии входного воздействия (возмущающего и/или управляющего), представленного функцией  $F(t)$ , и она является частным решением уравнения (3). Вынужденная составляющая - это установившееся состояние после переходного процесса при условии постоянства сигналов на входе.

Из вышесказанного следует, что нам необходимо найти сначала свободную составляющую, как решение однородного дифференциального уравнения (3). Поскольку неизвестное стоит под знаком дифференцирования, то выход один – интегрировать, но с  $n$  – количеством производных этот процесс будет долгим и громоздким, поэтому существует способ выяснить вид корней сразу по более простому выражению. Рассмотрим его.

Сделаем следующую подстановку в уравнение (5):

$$\frac{d}{dt} = p; \quad \frac{d^k}{dt^k} = p^k \quad \text{при этом } px \neq xp$$

Уравнение (5) примет вид:

$$a_0 p^n y_{св} + a_1 p^{n-1} y_{св} + \dots + a_n y_{св} = 0.$$

Вынесем  $y_{св}$  за скобки и приравняем к 0 выражение в них.

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y_{св} = 0 \rightarrow a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (6)$$

Такое уравнение называется **характеристическим**. Обозначим его корни:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Вид выражения для  $y_{св}$ , являющегося решением дифференциального уравнения, зависит от корней этого характеристического уравнения следующим образом [3]:

1) Если корни характеристического уравнения (6) вещественные, отрицательные и разные (не равны между собой), то  $y_{св}$  будет представляться следующим выражением:

$$y_{св} = C_0 e^{p_0 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}$$

2) Если корни характеристического уравнения (6) вещественные, отрицательные и равные ( $p_1 = p_2 = p_n = p$ ), то  $y_{св}$  будет выглядеть следующим образом:

$$y_{св} = (C_0 + C_1 t + \dots + C_{n-1} t^{n-1}) e^{p t}$$

3) Если корни характеристического уравнения (6) комплексные и попарно сопряженные, представленные следующим образом:



$$p_{1,2} = -\alpha_2 \pm j\omega_{св2};$$

$$p_{3,4} = -\alpha_4 \pm j\omega_{св4};$$

.....

$$p_{n-1,n} = -\alpha_n \pm j\omega_{свn}$$

то выражение для  $y_{св}$  получится следующее:

$$y_{св} = C_1 e^{-\alpha_1 t} (j \sin \omega_{св1} t + \beta_1) + \dots + C_{n-1} e^{-\alpha_{n-1} t} (j \sin \omega_{св_{n-1}} t + \beta_{n-1}) = \\ = C_2 e^{-\alpha_2 t} \cos(\omega_{св2} t + \beta_2) + \dots + C_n e^{-\alpha_n t} \cos(\omega_{свn} t + \beta_n)$$

где  $C_1, \dots, C_n (C_i)$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_n$  – постоянные интегрирования, которые находятся из начальных условий;

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – коэффициенты затухания свободных колебаний;

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  – угловые частоты свободных колебаний.

Для удобства сведем все вышесказанное в таблицу.

Таблица 2.2 – Зависимость между видом корней дифференциального уравнения и соответствующего характеристического уравнения

Вид корней характеристического уравнения	Вид соответствующего решения дифференциального уравнения
1	2
Вещественные, отрицательные, не равные между собой ( $p_0 \neq p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n = -\alpha_i$ )	$y_{св} = C_0 e^{p_0 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}$
Вещественные, отрицательные, равные друг другу ( $p_0 = p_1 = p_2 = \dots = p_n = -\alpha_i$ )	$y_{св} = (C_0 + C_1 t + \dots + C_{n-1} t^{n-1}) e^{p t}$

Продолжение таблицы 2.2 – Зависимость между видом корней дифференциального уравнения и соответствующего характеристического уравнения

Вид корней характеристического уравнения	Вид соответствующего решения дифференциального уравнения
1	2
Комплексные и попарно сопряженные $\left( \begin{array}{l} p_{1,2} = -\alpha_2 \pm j\omega_{cb2}; \\ p_{3,4} = -\alpha_4 \pm j\omega_{cb4}; \\ \dots\dots\dots \\ p_{n-1,n} = -\alpha_n \pm j\omega_{cbn} \end{array} \right)$	$y_{cb} = C_1 e^{-\alpha_1 t} (j \sin \omega_{cb2} t + \beta_1) + \dots +$ $+ C_{n-1} e^{-\alpha_{n-1} t} (j \sin \omega_{cb_{n-1}} t + \beta_{n-1}) =$ $= C_2 e^{-\alpha_2 t} \cos(\omega_{cb2} t + \beta_2) + \dots +$ $+ C_n e^{-\alpha_n t} \cos(\omega_{cb_n} t + \beta_n)$

Если посмотреть на правый столбец таблицы, то можно увидеть, что решение дифференциального уравнения представляется суммой слагаемых, получаемой в результате отображения комплексных корней характеристического уравнения во временную область. Причем каждому виду комплексных корней (левый столбец таблицы 2.2) соответствует своя сумма слагаемых во временной области (правый столбец). Следовательно, общее решение состоит из суммы, в которую входят слагаемые, получаемые различными видами комплексных корней:

$$y = \underbrace{\sum_{k=1}^m C_m e^{p_m t}}_{\text{Слагаемые вещественного не кратного корня}} + \underbrace{\sum_{v=1}^l e^{-\alpha_v t} (C_v \cos(\beta_v t) + Z_v \sin(\beta_v t))}_{\text{Слагаемые вещественного комплексного корня}} \quad (7)$$

Слагаемые вещественного не кратного корня

Слагаемые вещественного комплексного корня

где  $m$  – число вещественных корней;

$l$  – число пар комплексно-сопряженных корней.

В выражении (7) опущены только кратные составляющие в виду их схожести с первым слагаемым.

Общее число корней  $r = m + 2l$  равно порядку дифференциального (равно как и характеристического) уравнения. Если решать дифференциальное уравнение методом интегрирования, то уравнение выше первого порядка производной придется интегрировать столько раз, сколько составляет порядок его высшей производной, из чего следует, что появляющихся при каждом интегрировании постоянных интегрирования будет точно такое же количество. Количество начальных условий должно совпадать с порядком уравнения и количеством постоянных интегрирования, для нахождения которых они и необходимы.

**Начальные условия** – это значения  $y_{cs}$  и/или его производных в начальной точке отрезка дифференцирования. Для технической системы такими условиями могут быть значения ее параметров в определенный момент времени. Например, напряжение в момент включения системы  $U(t = 0) = 0$  В.

Начальные условия могут быть **зависимыми** или **независимыми**, отличаясь фактом наличия или отсутствия "предыстории" у системы.

Возможны три ситуации при зависимых или независимых начальных условиях в момент времени  $t = 0$ :

– в момент времени  $t = 0$  система находится в полном покое, все дифференцирующие составляющие управляемой величины (производные в уравнении (5)) равны 0. Начальные условия нулевые. Движение (состояние) системы полностью определяется входными сигналами (управляющим и возмущающим воздействием). Это *независимые* условия;

– до момента  $t = 0$  система находилась в движении, некоторые производные по управляемой величине не равны нулю, поэтому начальные условия не нулевые. Они определяются состоянием системы при  $t < 0$ . Такие начальные условия еще называют: **начальные условия слева (до нуля)** ( $t = -0$ ). Если на систему не действует никаких входных воздействий, то эти начальные условия "переходят нулевую границу" и становятся начальными условиями справа (справа от нуля) ( $t = +0$ ). Расчет состояния системы проводится при  $t \geq 0$  или другими словами, по начальным условиям справа, а обычно задаются началь-

ные условия слева, до значения  $t = 0$ . Это *зависимые* начальные условия;

– начальные условия слева от нуля не нулевые (при  $t = -0$ ). На систему в момент  $t = 0$  приложено возмущение в виде управляющего воздействия или изменение нагрузки. В результате система в момент  $t \geq 0$  оказалась в новом состоянии. Её начальные условия слева ( $t = -0$ ) не будут равны начальным условиям справа ( $t = +0$ ). Следовательно, коэффициенты (постоянные интегрирования)  $C_i$  и  $\beta_i$ , которые определяются по начальным условиям слева, будут зависеть от приложенного воздействия справа. Они должны определяться по разности:

$$\Delta C_i = C_i(+0) - C_i(-0),$$

где  $C_i(+0)$  - начальные условия после воздействия (начальные условия справа);

$C_i(-0)$  - начальные условия до воздействия (начальные условия слева). Здесь имеют место также *зависимые* начальные условия.

Обозначим шаги решения дифференциального уравнения классическим методом:

1 сделать подстановку:  $\frac{dy}{dt} = p$ ;

2 определить корни характеристического уравнения;

3 определить вид корней дифференциального уравнения согласно корням характеристического полинома;

4 найти постоянные интегрирования из начальных условий;

5 записать полученное решение в виде суммы составляющих с вычисленными на шаге 4 постоянными интегрирования.

### 3.1.2 Операторный метод решения дифференциальных уравнений систем автоматического управления

Операторный метод расчета переходного процесса осуществляется с применением преобразования Лапласа. Основная идея заключается в замене процесса решения *дифференциального* уравнения решением *простого алгебраического*, в котором присутствуют только операции сложения, вычитания, умножения и деления, но при этом получить решение исходного дифференциального уравнения. Последовательность расчета дифференциального уравнения операторным методом показана на рисунке 21.

Подобное преобразование уже было использовано выше при подстановке вместо операции дифференцирования оператора  $p$  (уравнение 6).

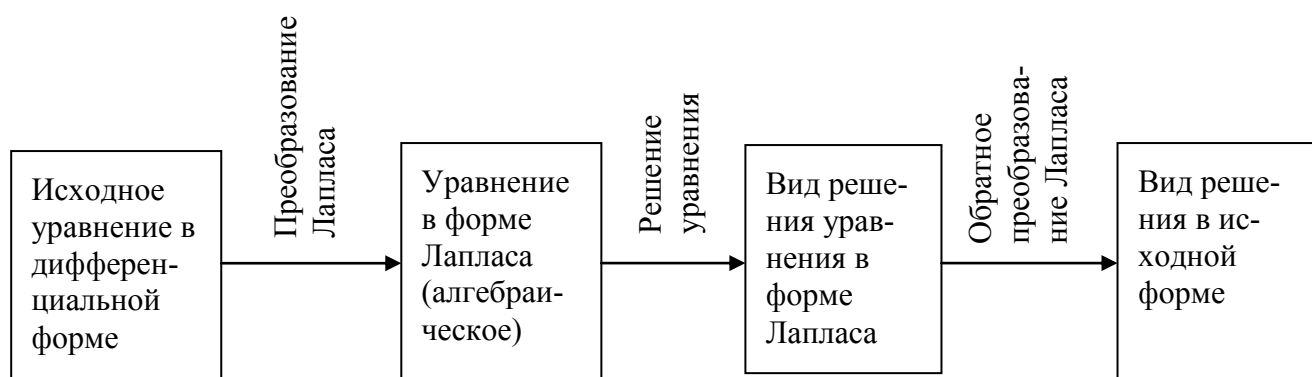


Рисунок 21 – Последовательность получения решения дифференциального уравнения с помощью преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа – это отображение вида:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt,$$

где  $F(s)$  – изображение по Лапласу или просто изображение;

$f(t)$  – функция-оригинал(или изображаемая по Лапласу функция),

которое ставит в соответствие функции  $f(t)$  вещественного переменного  $t$  функцию  $F(s)$  комплексного переменного  $s$  ( $s = \alpha + j\omega$ ). Символ преобразования выглядит следующим образом:

$$f(t) \xrightarrow{L} F(s) \text{ или } F(s) = L\{f(t)\}.$$

здесь  $L$  – оператор Лапласа.

Функция-оригинал должна отвечать определенным требованиям, чтобы преобразование Лапласа существовало [4]:

1) удовлетворять условиям Дирихле:

а) быть определенной (имеющей конкретные значения от всех аргументов);

б) быть кусочно-дифференцируемой на всей положительной полуоси  $[0, \infty]$  (существование производной функции, хотя бы на отдельных интервалах); по-другому это требование формулируется, как непрерывность функции или наличие у нее конечных точек разрыва I рода;

в) быть ограниченной (все множество значений функции должно быть не больше и не меньше конкретных постоянных);

г) иметь конечное число экстремумов (максимальных или минимальных значений);

2)  $f(t) = 0$  при  $t < 0$  (все сигналы реальных систем отвечают этому требованию);

3) должны существовать такие положительные числа  $M$  и  $c$ , что  $|f(t)| \leq Me^{ct}$  при  $0 \leq t \leq \infty$ . Число  $c$  называют *показателем роста функции*, а само условие означает, что функция не должна возрастать по значениям выше какой-то показательной функции  $Me^{ct}$ .

*Пример:*

Определить, можно ли применить преобразование Лапласа к следующим

функциям:

$$f_1(t) = \begin{cases} 2e^{3t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-3}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 4^{4t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

Для решения поставленной задачи необходимо проверить, являются ли эти функции функциями-оригиналами по указанным выше трем условиям.

$f_1(t)$  – удовлетворяет условиям Дирихле, при  $t < 0$  эта функция обращается в ноль и скорость ее возрастания не превышает  $M \cdot e^{ct}$ , из чего следует, что эта функция является функцией-оригиналом;

$f_2(t)$  – имеет разрыв второго рода, а значит, функция не удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому эта функция не является функцией-оригиналом;

$f_3(t)$  – не является оригиналом, потому что показатель роста этой функции выше назначенного в третьем пункте требований к функции-оригиналу условия.

После нахождения решения уравнения его необходимо перевести обратно во временную область из изображения по Лапласу. Для этого существует обратное преобразование Лапласа (формула Римана-Меллина) [5], [6]:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_0 - j\omega}^{\alpha_0 + j\omega} X(s) e^{st} ds.$$

В этой формуле интеграл берется вдоль прямой  $\text{Res} = \alpha_0 > c$ , что означает сходимость интеграла в вещественной плоскости по значениям выше  $c$  (изображение  $X(s)$  заведомо определено при  $\text{Res} = \alpha_0 > c$ , где  $c$  – показатель роста функции изображения).

Символически обратное преобразование можно записать следующим образом:

$$x(t) \xrightarrow{L^{-1}} X(s) \text{ или } X(s) = L^{-1}\{x(t)\}.$$

Для многих функций преобразование Лапласа уже вычислено и сведено в таблицу Лапласа.

Таблица 3.1 – Таблица оригиналов и изображений Лапласа [7]

№	Функция-оригинал $f(t)$	Функция-изображение по Лапласу $F(s) = L\{f(t)\}$
1	2	3
1	<b>1</b>	$\frac{1}{s}$
2	$f'(t)$ $f^{(n)}(t)$	$sF(s) - f(0)$ $s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$ $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$
3	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
8	$ch \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
9	$\sin(t - \alpha), \alpha > 0$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s^2 + 1} = \frac{\cos(\alpha) - s \cdot \sin(\alpha)}{s^2 + 1}$



Продолжение таблицы 3.1 – Таблица оригиналов и изображений Лапласа

№	Функция-оригинал $f(t)$	Функция-изображение по Лапласу $F(s) = L\{f(t)\}$
1	2	3
10	$\cos(t - \alpha), \alpha > 0$	$\frac{s \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha)}{s^2 + 1}$
11	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$
12	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{\beta}{(s - \alpha)^{n+1}}$
13	$t \cos \beta t$	$\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$
14	$t \sin \beta t$	$\frac{2s\beta}{(s^2 + \beta^2)^2}$
15	$t^n \sin \omega t$	$\frac{n! \operatorname{Im}(s + j\omega)^{n+1}}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}}$
16	$t^n \cos \omega t$	$\frac{n! \operatorname{Re}(s + j\omega)^{n+1}}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}}$
17	$t^n e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{n!}{2j} \left[ \frac{1}{(s - \alpha - j\omega)^{n+1}} - \frac{1}{(s - \alpha + j\omega)^{n+1}} \right]$
18	$t^n e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{n!}{2} \left[ \frac{1}{(s - \alpha - j\omega)^{n+1}} + \frac{1}{(s - \alpha + j\omega)^{n+1}} \right]$

При нахождении решения дифференциального уравнения (выходного воздействия) существенную роль в дальнейшем рассмотрении играют свойства преобразования Лапласа.

### 1) Свойство линейности

Для любых констант  $a$  и  $b$  выполняется равенство:

$$L\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aL\{f_1(t)\} + bL\{f_2(t)\}.$$

Это свойство означает, что постоянные (здесь это  $a$  и  $b$ ) можно выносить за знак преобразования, и преобразование от суммы двух функций (в данном случае  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ) может заменяться суммой преобразований от каждой функции в отдельности.

*Пример:*

$$L\{2x + 3y\} = L\{2x\} + L\{3y\} = 2L\{x\} + 3L\{y\} = 2 \cdot \frac{1}{x^2} + 3 \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{y^2},$$

здесь  $L\{x\} = 1/x^2$ ,  $L\{y\} = 1/y^2$  как следует из таблицы преобразований Лапласа.

### 2) Дифференцирование оригинала

Если преобразование Лапласа берется от первой производной функции, то оно равно:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

здесь  $X(s)$  - преобразование Лапласа от функции  $x(t)$ ;

$f(0) = \lim_{f \rightarrow +0} f(t)$  – начальные условия (значение функции  $x(t)$  в

заранее заданных точках).

При равенстве нулю начальных условий ( $f(0) = 0$ ) преобразование Лапласа от производной функции равно  $L\{f'(t)\} = sF(s)$ , то есть изображению самой функции, умноженному на  $s$  - оператор Лапласа, заменяющий дифференцирование и воспринимаемый как **обычный множитель** в уравнении.

Если преобразование Лапласа берется от производной функции выше первого порядка, то оно равно:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

где  $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  – начальные условия (значение функции и ее производных в заранее заданных точках).

При равенстве нулю начальных условий  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ , выражение для преобразования Лапласа от производной функции выше первого порядка принимает вид:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s).$$

Из последней записи следует, что преобразование Лапласа от производной функции выше первого порядка сводится к умножению на  $s$  в соответствующей степени изображения функции по Лапласу.

*Пример:*

Сначала примем нулевые начальные условия.

$$4y''' - 2y'' + 3y' + 5y = 4s^3 - 2s^2Y(s) + 3sY(s) + 5Y(s).$$

Если заданы начальные условия к выражению выше, например,  $y''(1) = 3$ ;  $y'(1) = 0$ ;  $y(1) = 2$ , то выражение преобразуется следующим образом:

$$4y''' - 2y'' + 3y' + 5y = 4s^3 - 2s^2Y(s) + 3sY(s) + 5Y(s) - s^2y''(1) - sy'(1) - y(1) = s^3 - 2s^2Y(s) + 3sY(s) + 5Y(s) - 3s^2 - 2.$$

### 3) Интегрирование оригинала

Изображение по Лапласу от интеграла функции получается делением изображения по Лапласу от функции на  $s$ :

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Изображение от двойного интегрирования функции:

$$L\left\{\int_0^t \int_0^\tau f(\lambda)d\lambda d\tau\right\} = \frac{1}{s^2}F(s).$$

Соответственно большее количество интегралов перед функцией-оригиналом будет увеличивать степень  $s$  в знаменателе.

*Пример:*

$$L\left\{\int_0^t \cos 2tdt\right\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{s}{s(s^2 + 4)},$$

где изображение по Лапласу от подынтегральной функции:  $L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2 + 4}$ .

#### 4) Теорема запаздывания

Для любого положительного числа  $\tau$

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} L\{f(t)\} = e^{-s\tau} F(s),$$

$$L\{f(t - \tau)u(t - b)\} = e^{-s\tau} L\{f(t)\}L\{u(t)\} = e^{-s\tau} F(s)U(s).$$

*Пример:*

Возьмем импульс, образуемый двумя сдвинутыми по времени относительно друг друга переходными реакциями, и вычислим его изображение с помощью теоремы запаздывания:

$$\delta(t) = h(t) - h(t-1);$$

$$L\{\delta(t)\} = L\{h(t)\} - L\{h(t-1)\} = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{1 - e^{-p}}{p},$$

где преобразование Лапласа  $L\{h(t)\}$  от переходной функции равно  $1/p$ .

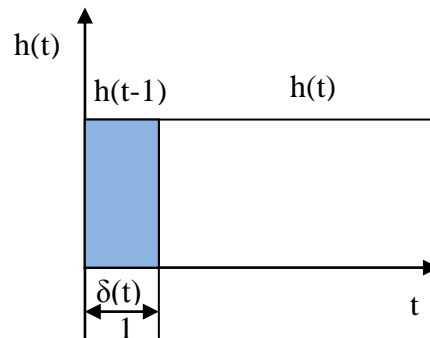


Рисунок 22 – Импульс, образованный двумя сдвинутыми по времени ступенчатыми воздействиями

### 5) Теорема о свертке (теорема умножения изображений)

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau\right\} = F_1(s) \cdot F_2(s),$$

Интеграл в левой части называют **сверткой** функций  $f_1$ ,  $f_2$  и обозначают  $f_1 * f_2$ .

*Пример:*

Пусть  $f_1(t) = t$ , а  $f_2(t) = \sin t$ , тогда свертка этих функций находится следующим образом:

$$t * \sin t = \int_0^t \sin \tau (t - \tau) d\tau = -\int_0^t (t - \tau) d \cos \tau = -(t - \tau) \cos \tau \Big|_0^t - \int_0^t \cos \tau d\tau = t - \sin t,$$

$$L\{t - \sin t\} = F_1(s) \cdot F_2(s) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)},$$

$$L\left\{\int_0^t \sin \tau(t-\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{p^2(p^2+1)},$$

где  $F_1, F_2$  – преобразование по Лапласу (изображения) функций  $t$  и  $\sin t$ .

**б) Теоремы о предельных значениях**

Теорема дает следующее соотношение между "начальными" и "конечными" значениями оригинала и изображения:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s),$$

при условии существования  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s),$$

здесь  $f(t)$  – функция оригинал, а  $F(s)$  – изображение по Лапласу этой функции.

*Пример:*

Найдем начальное и конечное значение оригинала, которому соответствует изображение:  $F(s) = \frac{p+1}{(p+1)^2+5}$

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( s \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+5} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+1)}{(s+1)^2+5} = 1;$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+5} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+1)}{(s+1)^2+5} = 0.$$

**7) Теорема разложения Хевисайда (разложение на простейшие дроби)**

Если изображение – это дробно-рациональная функция:  $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ ,

причем степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, то ее оригиналом является умноженная на  $1(t)$  функция:

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} [F(s)(s - s_k)^{n_k} e^{st}],$$

где  $s_k$  – корни уравнения знаменателя  $B(s) = 0$ , а  $n_k$  – их кратности и  $l$  – число различных корней. Если все корни уравнения простые, то эта формула разложения принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t},$$

где  $n$  – степень полинома  $B(s)$ ,  $B'(s_k) = \left. \frac{dB}{ds} \right|_{s=s_k}$ .

Подводя итог сказанному выше: если изображение функции является дробно-рациональной функцией, то можно упростить процесс нахождения преобразования Лапласа для нее, разложив ее на простейшие дроби и применив преобразование Лапласа для каждой дроби в отдельности. Большинство передаточных функций имеют вид именно такой дроби, что позволяет, пользуясь этим свойством, упростить расчет, например, переходного процесса. Рассмотрим полную формулировку двух теорем разложения.

**Первая теорема разложения:** Если функция  $F(s)$  является аналитической в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и ее разложение в ряд по степеням  $\frac{1}{s}$  имеет вид  $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}}$  (причем ряд

сходится к  $F(s)$  при  $|s| > Q = |s| > Q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq \infty$ ), то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad t \geq 0$$

является оригиналом функции  $F(s)$ .

*Примечания:*

Две формулы в теореме могут быть записаны и в другом виде:

$$F(s) = \frac{p(s)}{(s-a)^q}, \quad - \text{изображение,}$$

где  $p(s)$  – многочлен степени ниже  $q$ ;

$$f(t) = e^{rt} \sum_{n=1}^q \frac{p^{(q-n)}}{(r-n)! n!} t^n, \quad t \geq 0.$$

**Вторая теорема разложения:** Если изображение  $F(s)$  является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , лежащих в конечной части плоскости, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s=s_k} [e^{st} F(s)], \quad (8)$$

где  $\operatorname{res}$  (от лат. Residuum; или  $\operatorname{res} - \operatorname{residu}$  (фр.) – вычитать) – вычет.

В комплексном анализе **вычетом** заданного объекта (функции, формы) называется объект (число, форма или кохомологический класс формы), характеризующий локальные свойства заданного. Поясняя далее, **вычет** – это число, равное значению комплексного интеграла функции в любой кусочно-гладкой замкнутой области  $L$  (контурный интеграл), где функция аналитична (или точ-



нее голоморфна, то есть бесконечно дифференцируема и может быть представлена сходящимся к ней рядом Тейлора) за исключением одной особой точки.

*Примечания:*

1 Формула выше может быть записана и в ином виде:

$$L^{-1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L^{-1} \left[ \frac{1}{s^{n+1}} \right].$$

При выполнении условий теоремы задача нахождения оригинала сводится к нахождению коэффициентов разложения функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Существуют и другие виды записи формулировки теорем разложения Хевисайда.

2 Наиболее простой вид формула (8) принимает в случае, когда изображение имеет вид дробно-рациональной функции, который обсужден выше.

3 Рассмотрим разложение дробно-рациональной функции-изображения с помощью теоремы Хевисайда на простые дроби и нахождение оригинала такой функции. Существует несколько случаев, которые отличаются в зависимости от вида корней характеристического уравнения, получаемого следующим образом. Пусть система описывается общим дифференциальным уравнением при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = \\ = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x + \\ + c_0 \frac{d^k f}{dt^k} + c_1 \frac{d^{k-1} f}{dt^{k-1}} + \dots + c_{k-1} \frac{df}{dt} + d_k f. \end{aligned}$$

здесь  $y$ ,  $x$  и  $f$  соответственно выходное, входное и возмущающее воздействие.

Применим преобразование Лапласа к этому уравнению.

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)Y(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m)X(s) + (c_0s^k + c_1s^{k-1} + \dots + c_{k-1}s + c_k)F(s).$$

Введем обозначения полиномов:

$A(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$  - собственный оператор системы (характеристический полином);

$B(s) = b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m$  - оператор воздействия (полином управляющего воздействия);

$D(s) = c_0s^k + c_1s^{k-1} + \dots + c_{k-1}s + c_k$  - оператор возмущения (полином возмущающего воздействия).

Значение выходной величины в преобразовании по Лапласу рассчитывается следующим образом:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot X(s) + \frac{C(s)}{A(s)} \cdot F(s), \quad (9)$$

где  $\frac{B(s)}{A(s)}$  – передаточная функция по управлению;

$\frac{D(s)}{A(s)}$  – передаточная функция по возмущению;

$X(s)$  – управляющее воздействие;

$F(s)$  – возмущающее воздействие.

В уравнении (9) имеются дробно-рациональные функции-изображения, и нужно найти оригинал функции  $y$ . Перейдем к формулам разложения Хевисайда и примем для упрощения, что возмущающее воздействие  $F(s)$  равно нулю. Тогда второй член уравнения (9) равен нулю и далее будем иметь в виду получившееся в результате выражение.

*Первый вариант:*

Уравнение  $A(s)$  имеет только вещественные (не кратные) корни. Предста-

визм дробь  $\frac{B(s)}{A(s)}$  в виде суммы простых дробей:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-r_1) \cdot (s-r_2) \cdot \dots \cdot (s-r_n)} = \frac{C_1}{(s-r_1)} + \frac{C_2}{(s-r_2)} + \dots + \frac{C_n}{(s-r_n)},$$

где  $r_1, r_2, \dots, r_n$  – корни характеристического уравнения;  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – неизвестные коэффициенты.

Для определения коэффициентов  $C_i$  умножим правую и левую часть на  $(s-r_i)$ , где  $r_i$  – любой корень (например,  $r_2$ ):

$$\frac{B(s) \cdot (s-r_2)}{(s-r_1) \cdot (s-r_2) \cdot \dots \cdot (s-r_n)} = \frac{C_1 \cdot (s-r_2)}{(s-r_1)} + \frac{C_2 \cdot (s-r_2)}{(s-r_2)} + \dots + \frac{C_n \cdot (s-r_2)}{(s-r_n)},$$

Положим  $s \rightarrow r_2$ , тогда все слагаемые в правой части, за исключением  $C_2$  стремятся к нулю, а в левой появляется неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , которую разрешим с использованием правила Лопиталья:

$$\lim_{s \rightarrow a_2} \frac{s-a_2}{A(s)} = \lim_{s \rightarrow a_2} \frac{(s-a_2)'}{A'(s)} = \frac{1}{A'(s)}, \quad \text{где } A'(s) = \left. \frac{\partial A(s)}{\partial s} \right|_{s \rightarrow a_2}.$$

Тогда  $C_2(a_2) = \frac{B(a_2) \cdot 1}{A'(a_2)}$  или в общем случае  $C_i(a_i) = \frac{B(a_i)}{A'(a_i)}$ .

Находя тем же образом остальные коэффициенты  $C_i$ , проводим обратное преобразование Лапласа. Для каждой дроби получим следующее выражение:

$$\frac{C_i}{(s-r_i)} \xrightarrow{L^{-1}} C_i \cdot e^{r_i t}.$$

Отсюда функция-оригинал будет представлять собой сумму подобных компонент, полученных от каждой из дробей:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{r_i t}.$$

Таким образом, задача для первого случая решена.

*Второй вариант:*

Уравнение  $A(s)$  имеет комплексно-сопряженные корни. Тогда соответствующие коэффициенты  $C_i$  и  $C_{i+1}$  являются комплексно-сопряженными числами  $C_i = \alpha_i + j\beta_i$ ,  $C_{i+1} = \alpha_i - j\beta_i$ . Применим теперь к этим коэффициентам обратное преобразование Лапласа и воспользуемся следующей формулой Эйлера:

$$x = \alpha + i\beta = |x|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |x|e^{i\varphi},$$

где  $\varphi = \arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ .

Выражение для функции-оригинала будет выглядеть следующим образом:

$$y(t) = 2 \cdot A_i \cdot e^{r_i t} \cdot \cos(\beta_i t + \varphi_i),$$

где  $A_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$ ;  $\varphi_i = \arctg\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)$ .

Задача для второго случая решена.

*Третий вариант:*

Уравнение  $A(s)$  имеет  $m$  кратных корней, что приводит к сумме следующего вида дробей:

$$\sum_{i=1}^m \frac{C_i}{s + r_i}.$$

Переходя к оригиналу по обратному преобразованию, имеем:

$$y(t) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(s_{i-1})!} \cdot \left[ \frac{(s - \lambda_i)^{s_i} \cdot B(s) \cdot e^{st}}{A(s)} \right]^{s_{i-1}} \Big|_{s=\lambda_i},$$

где  $s_i$  – кратность  $i$ -го корня или количество дробей с одинаковыми корнями.

Задача для третьего случая решена.

*Четвертый вариант:*

Уравнение  $A(s)$  имеет один нулевой вещественный корень. Тогда формула из первого варианта видоизменяется следующим образом:

$$C_i(r_i) = \frac{B(r_i)}{A'(r_i)}.$$

Найти функцию-оригинал, то есть. применить обратное преобразование Лапласа, можно аналогично первому варианту.

В целом алгоритм решения дифференциального уравнения операторным методом можно свести к следующим шагам:

1) С помощью прямого преобразования Лапласа перевести дифференциальное уравнение в операторную форму (с  $s$  – оператором Лапласа вместо знака дифференцирования).

2) Решить получившееся алгебраическое уравнение и перейти к шагу 4.

3) Если уравнение имеет вид дробно-рациональной функции или функции запаздывания, то воспользоваться соответствующим свойством преобразования Лапласа.

4) Выполнить обратное преобразование Лапласа, получив искомое реше-

ние (функцию-оригинал).

*Пример 1* [8]:

Найти оригинал функции  $F(s) = \frac{s}{s^2 - 2s + 5}$ .

Разложим эту дробь на сумму дробей, уже имеющих оригиналы по таблице обратного преобразования Лапласа.

$$\frac{s}{s^2 - 2s + 5} = \frac{(s-1)+1}{(s-1)^2 + 4} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 4} + \frac{1}{(s-1)^2 + 4},$$

Оригиналы полученных простых дробей легко находятся по таблице обратного преобразования Лапласа:

$$\frac{s-1}{(s-1)^2 + 4} \xrightarrow{L^{-1}} e^t \cos 2t, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s-1)^2 + 4} \rightarrow \frac{1}{2} e^t \sin 2t.$$

Теперь можно найти искомую функцию-оригинал сложением двух получившихся оригиналов дробей:

$$\frac{s}{s^2 - 2s + 5} \xrightarrow{L^{-1}} e^t \cos 2t + \frac{1}{2} e^t \sin 2t = (\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t) e^t.$$

*Пример 2:*

Найдем оригинал функции  $F(s) = \frac{s+3}{s(s^2 - 4s + 3)}$ , разложив дробь на простейшие, при этом учтем тот факт, что полином  $s^2 - 4s + 3$  имеет корни  $s = 1$  и  $s = 3$ , что позволяет воспользоваться теоремой Виета.

$$\frac{s+3}{s(s^2 - 4s + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-1} = \frac{A(s-3)(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s-3)}{s(s^2 - 4s + 3)}.$$

Раскроем скобки.

$$\begin{aligned} \frac{A(s-3)(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s-3)}{s(s^2-4s+3)} &= \frac{As^2 - 4As + 3A + Bs^2 - Bs + Cs^2 - 3Cs}{s(s^2-4s+3)} = \\ &= \frac{(A+B+C)s^2 + (-4A-B-3C)s + 3A}{s(s^2-4s+3)} = \frac{s+3}{s(s^2-4s+3)}. \end{aligned}$$

Приравниваем выражения при одинаковых степенях  $s$  в числителе предпоследнего и последнего выражений.

$$\left. \begin{array}{l} s^2 : A + B + C = 0 \\ s : -4A - B - 3C = 1 \\ 3A = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -2 \end{array} \right\}$$

Теперь подставим найденные коэффициенты в разложение:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-3} - \frac{2}{s-1}.$$

По таблице Лапласа найдем оригиналы полученных дробей и сложим их, получив исходную функцию.

$$f(t) = 1 - 2e^t + e^{3t}.$$

*Пример 3:*

Найдем оригинал функции  $F(s) = \frac{1}{p^2 + a^3}$ , используя первую теорему разложения. Сначала вынесем в знаменателе  $p^2$  за скобки, чтобы привести функцию к виду, позволяющему найти разложение по таблице:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + a^2} = \frac{1}{s^2 \left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a^2}{s^2}}.$$

По таблице разложений ближе всего к последнему выражению больше всего подходит:

$$\frac{1}{1 + \alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \dots$$

За  $\alpha$  примем выражение  $\frac{a^2}{s^2}$  и разложим по данной выше формуле:

$$\frac{1}{s^2} \left( 1 - \frac{a^2}{s^2} + \left(\frac{a^2}{s^2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{s^2}\right)^3 + \left(\frac{a^2}{s^2}\right)^4 - \dots \right) = \frac{1}{s^2} - \frac{a^2}{s^4} + \frac{a^4}{s^6} - \frac{a^6}{s^8} + \frac{a^8}{s^{10}} - \dots$$

Этот ряд сходится при  $|p| > 1; |a| > 0$  и  $|p| \geq |a|$ . Теперь найдем оригинал исходной функции:

$$f(t) = \frac{t^2}{2!} - \frac{a^2 t^4}{4!} + \frac{a^4 t^6}{6!} - \dots$$

*Пример 4:*

Найдем оригинал функции  $F(s) = \frac{4 - s + s^2}{s^3 - s^2}$ , используя вторую теорему разложения, при этом будем вычислять вычет функции по формулам, приведенным в самом начале пункта 7.



$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{4 - s + s^2}{s^3 - s^2};$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} \left[ F(s)(s - s_k)^{n_k} e^{st} \right],$$

В этой формуле  $s_k = 0$  (корни уравнения  $B(s) = 0$ );  $n_k = 2$  (так как  $s^2(s - 1) = 0$  имеет 2 нулевых корня перед скобками);  $l = 2$  (имеется корень  $s = 0$  и  $s = 1$ ). Подставим все эти выражения в формулу и найдем оригинал функции сначала для корня  $s = 0$ :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} \left[ \frac{4-s+s^2}{s^3-s^2} \cdot (s-0)^2 e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{4-s+s^2}{s^3-s^2} \cdot s^2 \cdot e^{st} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{4-s+s^2}{s-1} \cdot e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{4-s+s^2}{s-1} \right)' \cdot e^{st} + \frac{4-s+s^2}{s-1} \cdot (e^{st})' \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{(-1+2s) \cdot (s-1) - (4-s+s^2) \cdot 1}{(s-1)^2} \cdot e^{st} + \frac{(4-s+s^2) \cdot t}{s-1} \cdot e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{(-s+1+2s^2-2s) - (4-s+s^2)}{(s-1)^2} \cdot e^{st} + \frac{(4-s+s^2) \cdot t}{s-1} \cdot e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{-s+1+2s^2-2s-4+s-s^2}{(s-1)^2} + \frac{(4-s+s^2) \cdot t}{s-1} \right) \cdot e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{s^2-2s-3}{(s-1)^2} + \frac{(4-s+s^2) \cdot (s-1) \cdot t}{(s-1)^2} \right) \cdot e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{s^2-2s-3+(4s-4-s^2+s+s^3-s^2) \cdot t}{(s-1)^2} \right) \cdot e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{s^2-2s-3+(s^3-2s^2+5s-4) \cdot t}{(s-1)^2} \right) \cdot e^{st} \right] = \\ &= \left( \frac{0^2-2 \cdot 0-3+(0^3-2 \cdot 0^2+5 \cdot 0-4) \cdot t}{(0-1)^2} \right) \cdot e^{0 \cdot t} = -3-4t. \end{aligned}$$

Теперь найдем оригинал для корня  $s = 1$ . Учитывая, что это простой корень и он один (не нужен знак суммы), нахождение оригинала можно упростить ( $B'(1) = (3s^2 - 2s)_{s=1} = 1$ ):

$$f(1) = \sum_{k=1}^n \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} \cdot e^{s_k t} = \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} \cdot e^{s_k t} = \frac{(4 - s + s^2)_{s=1}}{1} \cdot e^{1 \cdot t} = 4 \cdot e^t.$$

Окончательно оригинал исходной функции:

$$f(t) = 4e^t - 4t - 3.$$

*Пример 5:*

Найдем оригинал функции  $\frac{2s + 1}{s(s^2 + 7s + 12)}$  по виду корней характеристического уравнения. Найдем корни характеристического уравнения:

$$s_1 = 0, s_2 = -3, s_3 = -4.$$

Разложим функцию на простейшие дроби:

$$\frac{2s + 1}{s(s^2 + 7s + 12)} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s + 3} + \frac{C_2}{s + 4}.$$

Заметим, что корни вещественные за исключением одного, который является нулевым, поэтому для нахождения неизвестных коэффициентов разложения необходимо использовать совместно формулы для вещественных корней и нулевого корня. Сначала посчитаем коэффициенты для вещественных корней:

$$C_1(a_1) = \frac{B(r_1)}{A'(r_1)} = \frac{2s+1}{(s(s^2+7s+12))'} = \frac{2s+1}{s \cdot (2s+7)} =$$

$$= \frac{2 \cdot (-3) + 1}{(-3) \cdot (2 \cdot (-3) + 7)} = \frac{5}{3},$$

$$C_2(r_2) = \frac{B(r_2)}{A'(r_2)} = \frac{2s+1}{s \cdot (2s+7)} = \frac{2 \cdot (-4) + 1}{(-4) \cdot (2 \cdot (-4) + 7)} = -\frac{7}{4}.$$

Теперь найдем коэффициент нулевого корня:

$$C_0(r_0) = \frac{B(r_0)}{A(r_0)} = \frac{2s+1}{s^2+7s+12} = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0^2 + 7 \cdot 0 + 12} = \frac{1}{12}.$$

**Примечание:** Заметим, что при нулевых начальных условиях (как в нашем случае) алгебраическая сумма полученных коэффициентов должна быть равна нулю. Поэтому можно провести проверку.

Просуммируем найденные коэффициенты:

$$C_0 + C_1 + C_2 = \frac{5}{3} - \frac{7}{4} + \frac{1}{12} = \frac{20 - 21 + 1}{12} = 0.$$

Проверка выявила, что найденные коэффициенты верны.

Теперь можно записать изображение найденной величины:

$$F(s) = \frac{1}{12 \cdot s} + \frac{5}{3 \cdot (s+3)} - \frac{7}{4 \cdot (s+4)} = \frac{1}{12s} + \frac{5}{3s+9} - \frac{7}{4s+16}.$$

По таблице обратного преобразования Лапласа теперь можно найти оригинал каждой дроби в отдельности. Подходят оригиналы изображений дробей  $1/s$  и  $1/(s-\alpha)$ . Таким образом, оригинал исходной функции равен:

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{s+4} \right\} = \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{5}{3} \cdot e^{-3t} - \frac{7}{4} \cdot e^{-4t} =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{5}{3} e^{-3t} - \frac{7}{4} e^{-4t}.$$

Все свойства преобразования Лапласа сведем в таблицу для большего удобства.

Таблица 3.2 - Таблица свойств преобразования Лапласа

Действия над функциями-оригиналами	Действия над функциями-изображениями
1	2
$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t), \text{ где } \alpha, \beta = \text{const}$	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$
$\frac{df}{dt}, f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$ где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t), k = 0, 1, \dots, n-1$ - начальные условия (значение функции и ее производных в заранее заданных точках).
$\int_0^t f(t) dt$ $\int_0^t \int_0^\tau f(\lambda) d\lambda d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$ $\frac{1}{s^2} F(s)$
$f(t - \tau)$	$e^{-s\tau} F(s)$
$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
$f(0)$ $f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

Действия над функциями-оригиналами	Действия над функциями-изображениями
1	2
<p> <math display="block">f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} [F(s)(s - s_k)^{n_k} e^{st}],</math> где </p> <p> <math>s_k</math> – корни уравнения знаменателя <math>B(s) = 0</math>, а <math>n_k</math> – их кратности и <math>l</math> – число различных корней; </p> <p> <math display="block">f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t}</math> – при простых корнях </p>	$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$

### 3.1.3 Применение интеграла Дюамеля к решению дифференциальных уравнений систем автоматического управления

Если в интеграл свертки (свойство 5) подставить вместо одной из функций функцию Хевисайда  $h(t - \tau)$  (переходной процесс) с задержкой, а вместо второй взять производную произвольного входного воздействия, то производная от интеграла свертки таких функций будет называться **интегралом Дюамеля** и будет равна реакции системы на это произвольное входное воздействие. В этом и заключается смысл применения интеграла Дюамеля в ТАУ – отыскание реакции системы на произвольное входное воздействие, которое представляется в виде суммы типовых сигналов (например, переходных или весовых функций), реакции на которые заранее известны. Выше уже было показано, что реакция системы есть решение дифференциального уравнения системы. Рассмотрим математическое описание использования интеграла Дюамеля при решении дифференциальных уравнений.

Пусть заданы следующие функции-оригиналы и их изображения:  $f_1(t) \xrightarrow{L} F_1(s)$ ,  $f_2(t) \xrightarrow{L} F_2(s)$ . По теореме свертки (свойство преобразования Лапласа 5) при умножении изображений этих функций получим:

$$F_1(s) * F_2(s) \xrightarrow{L^{-1}} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (10)$$

По свойству преобразования Лапласа о дифференцировании оригинала (свойство 2) получим:

$$sF_1(s) * F_2(s) \xrightarrow{L^{-1}} \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (11)$$

По формуле дифференцирования интеграла по параметру

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(\tau, t) d\tau = \varphi(b(t), t) \frac{db}{dt} - \varphi(a(t), t) \frac{da}{dt} + \int_a^b \varphi(\tau, t) d\tau, \quad (12)$$

Получим:

$$sF_1(s) * F_2(s) \xrightarrow{L^{-1}} f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau. \quad (13)$$

Правая часть получившегося выражения и является **интегралом Дюамеля**. В силу равноправности обеих функций, их можно менять местами в формуле:

$$sF_1(s) * F_2(s) \xrightarrow{L^{-1}} f_2(t) f_1(0) + \int_0^t f_2(\tau) f_1'(t - \tau) d\tau.$$

Рассмотрим процесс решения дифференциальных уравнений систем с помощью интеграла Дюамеля. Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad (14)$$

Начальные условия примем для упрощения задачи нулевыми:

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (15)$$

Иными словами, поставим **задачу Коши**. Наряду с этим выражением будем рассматривать также уравнение с идентичной левой частью и правой, рав-

ной 1 (так как единице равен интеграл от мгновенного импульса или дельта-функции Дирака). Подобный метод называется **методом толчков** (исходя из физического смысла, связанного с импульсами) или методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 1 \quad (16)$$

и найдем его решение при нулевых начальных условиях:

$$z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0 \quad (17)$$

В изображениях по Лапласу уравнения (14) и (16) преобразуются к виду:

$$s^n Z + a_1 s^{n-1} Z + \dots + a_{n-1} s Z + a_n Z = \frac{1}{s} \quad (18)$$

Решения (14) и (16) в операторной форме имеют вид:

$$Y(s) = \frac{A(s)}{Q_n(s)}, \quad Z(s) = \frac{1}{sQ_n(s)},$$

где  $Q_n(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$  – характеристическое уравнение.

Выражая решение уравнения (14) через решение уравнения (16) посредством  $Q_n(s)$ , получим  $Y(s) = sF(s) * Z(s)$ . Теперь используем формулу (13) интеграла Дюамеля:

$$Y(s) = sF(s) * Z(s) \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = f(t)z(0) + \int_0^t f(\tau)z'_i(t-\tau)d\tau. \quad (19)$$



Если известно решение  $z(t)$  уравнения (18), то по формуле (19) можно получить решение  $y(t)$  в квадратурах (через интегралы). Решение дифференциального уравнения, таким образом, найдено.

Подводя итог: можно, получив решение задачи Коши со специальными начальными условиями для однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному уравнению, вместо метода вариации произвольных постоянных применить формулу Дюамеля и найти решение задачи Коши для неоднородного уравнения с однородными начальными условиями. Иначе говоря, мы свели некоторую общую задачу решения дифференциального уравнения к некоторой специальной задаче.

Другое достоинство интеграла Дюамеля заключается в том, что при решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, необходимо находить изображение правой части уравнения, что в некоторых случаях может быть затруднительно или вообще невозможно. Формулы Дюамеля позволяют находить решение, не выписывая в явной форме изображение правой части.

*Пример:*

Пусть материальная точка массы  $m$  движется по оси  $Oy$ . Пусть  $y$  – координата точки на оси  $Oy$  и начало координат совпадает с положением равновесия точки. Примем, что на точку действуют сила сопротивления среды, пропорциональная скорости:

$$-a \frac{dy}{dt}, \quad a > 0,$$

где  $t$  – время, а также сила  $-by$ ,  $b > 0$ , притягивающая ее к началу координат. Такое движение можно представить себе физически как движение материальной точки в сопротивляющейся среде, например, в жидкости или газе, под влиянием

янием упругой силы пружины, действующей по закону Гука. Этот закон состоит в том, что упругая сила действует в сторону положения равновесия точки и пропорциональна отклонению от положения равновесия.

Пусть еще на рассматриваемую материальную точку действует направленная по оси  $Ox$  периодическая сила, равная  $q(t)$ . Тогда дифференциальное уравнение движения точки запишется в виде:

$$my'' + ay' + by = q(t).$$

Это и есть *дифференциальное уравнение данной системы*. Полагая  $m = 1$ , найдем по формуле Дюамеля закон колебания точки  $y = y(t)$ , если  $y(t)$  удовлетворяет этому уравнению при  $a = 5$ ,  $b = 6$ ,  $q(t) = \sin 3t$ . Известно, что в начальный момент времени  $t = 0$  точка находилась в покое ( $y(0) = 0$ ) и ее скорость  $y'(0) = 0$ .

Сначала решим задачу Коши для однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному:

$$\begin{cases} my'' + ay' + by = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

Если произведем преобразование Лапласа первого уравнения этой системы и вынесем  $y$  за скобки, то получим в скобках характеристическое уравнение этой системы, при этом учтем, что  $m = 1$ ,  $a = 5$ ,  $b = 6$ :

$$s^2 y + 5s y + 6y = (s^2 + 5s + 6)y;$$

$$\text{и характеристическое уравнение } s^2 + 5s + 6 = 0.$$

Корни этого уравнения  $r_1 = -2$ ,  $r_2 = -3$  оба вещественные и отрицательные, поэтому общий вид решения этого уравнения выглядит следующим образом:

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находим из нулевых начальных условий  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 1$ , поэтому окончательный вид решения:

$$y(t) = -e^{-3t} + e^{-2t}.$$

Теперь решим неоднородное уравнение с однородными начальными условиями, используя интеграл Дюамеля:

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = \sin 3t, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

Сначала найдем решение уравнения с единичной правой частью и точно такими же начальными условиями и левой частью:

$$\begin{cases} w'' + 5w' + 6w = 1, \\ w(0) = 0, w'(0) = 0. \end{cases}$$

В изображениях по Лапласу это уравнение преобразуется к виду:

$$s^2 W + 5sW + 6W = \frac{1}{s}.$$

Выразим из этого уравнения  $W$ :

$$(s^2 + 5s + 6)W = \frac{1}{s} \Rightarrow W = \frac{1}{s(s^2 + 5s + 6)}.$$

Характеристическое уравнение получившейся  $s(s^2 + 5s + 6) = 0$  дроби имеет один нулевой и два вещественных отрицательных корня ( $s_1 = -2$ ;  $s_2 = -3$ ), поэтому можно воспользоваться примером 5 предыдущего раздела со случаем нулевого корня.

$$W = \frac{1}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{s+3}.$$

Найдем сначала коэффициенты для вещественных корней.

$$C_1 = \frac{B(r_1)}{A'(r_1)} = \frac{1}{(s(s^2 + 5s + 6))'} = \frac{1}{s(2s + 5)} = \frac{1}{(-2)(2 \cdot (-2) + 5)} = -\frac{1}{2}.$$

$$C_2 = \frac{B(r_2)}{A'(r_2)} = \frac{1}{(s(s^2 + 5s + 6))'} = \frac{1}{s(2s + 5)} = \frac{1}{(-3)(2 \cdot (-3) + 5)} = \frac{1}{3}.$$

Осталось посчитать коэффициент для нулевого корня:

$$C_0(r_0) = \frac{B(r_0)}{A(r_0)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{0^2 + 5 \cdot 0 + 6} = \frac{1}{6}.$$

Подставим найденные коэффициенты в выражение для W:

$$W = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{s+3} = \frac{1}{6s} - \frac{1}{2s+4} + \frac{1}{3s+9}.$$

По таблице обратного преобразования Лапласа найдем оригиналы дробей и вычислим  $w(t)$ :

$$w(t) = \frac{1}{6} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{3}.$$

Производная от этой функции:

$$w'(t) = e^{-2t} - e^{-3t}.$$

Теперь применим интеграл Дюамеля (формула (19)), при этом учтем, что  $f(t) = \sin 3t$  (правая часть исходного уравнения):

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t)w(0) + \int_0^t f(\tau)w'_t(t-\tau)d\tau = \int_0^t (e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)})\sin 3\tau d\tau = \\ &= \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\sin 3\tau d\tau - \int_0^t e^{-3(t-\tau)}\sin 3\tau d\tau; \\ f(t)w(0) &= \sin 3t \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-2 \cdot 0}}{2} + \frac{e^{-3 \cdot 0}}{3}\right) = \sin 3t \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

К полученным двум интегралам необходимо применить формулу интегрирования по частям ( $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$ ):

$$\begin{aligned} y(t) &= \boxed{\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\sin 3\tau d\tau} = \left\| \begin{array}{l} u = e^{-2(t-\tau)} \quad dv = \sin 3\tau d\tau \\ du = 2e^{-2(t-\tau)}d\tau \quad v = -\frac{1}{3}\cos 3\tau \end{array} \right\| = \\ &= e^{-2(t-\tau)} \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos 3\tau\right) \Big|_0^t - \int_0^t \left(-\frac{1}{3}\cos 3\tau\right) \cdot 2e^{-2(t-\tau)}d\tau = \\ &= \frac{1}{3}(e^{-2t} - \cos 3t) + \frac{2}{3} \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot \cos 3\tau d\tau = \left\| \begin{array}{l} u = e^{-2(t-\tau)} \quad dv = \cos 3\tau d\tau \\ du = 2e^{-2(t-\tau)}d\tau \quad v = \frac{1}{3}\sin 3\tau \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{3}(e^{-2t} - \cos 3t) + \frac{2}{9}\sin 3t - \frac{4}{9} \boxed{\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\sin 3\tau d\tau}. \end{aligned}$$

Получили идентичные интегралы в левой и правой части уравнения (они выделены прямоугольником), поэтому перенесем интеграл из правой части в левую и выразим искомый интеграл через остальные члены:

$$\int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin \tau d\tau = \frac{3}{13} (e^{-2t} - \cos 3t) + \frac{2}{13} \sin 3t.$$

Аналогично найдем второй интеграл:

$$\int_0^t e^{-3(t-\tau)} \sin \tau d\tau = \frac{1}{6} \sin 3t + \frac{1}{6} e^{-3t} - \frac{1}{6} \cos 3t.$$

Подстановкой интегралов в формулу для  $y(t)$  найдем оригинал нашей исходной функции:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin \tau d\tau - \int_0^t e^{-3(t-\tau)} \sin \tau d\tau = \frac{3}{13} (e^{-2t} - \cos 3t) + \frac{2}{13} \sin 3t - \\ &- \left( \frac{1}{6} \sin 3t + \frac{1}{6} e^{-3t} - \frac{1}{6} \cos 3t \right) = \frac{3}{13} e^{-2t} - \frac{1}{6} e^{-3t} - \frac{5}{78} \cos 3t - \frac{1}{78} \sin 3t. \end{aligned}$$

### **3.1.4 Метод переменных состояния получения решения дифференциальных уравнений систем автоматического управления**

Система может описываться совокупностью дифференциальных уравнений состояния для каждой из переменных состояния, которые в общем виде можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m; \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m; \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m,
\end{aligned}$$

Эту же систему можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Здесь переменные состояния входят в вектор состояния  $x$ :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Напомним описание системы в переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ef \\ y = Cx + Du + Gf \end{cases} \quad (20)$$

Решение такого уравнения сначала получим для системы первого порядка при допущении, что на систему не действуют возмущения (из первого уравнения исчезает компонента  $Ef$ ):

$$\dot{x} = ax + bu.$$

Воспользуемся преобразованием Лапласа:

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s).$$

Найдем из этого уравнения  $X(s)$ :

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s).$$

Теперь можно, применив обратное преобразование Лапласа, найти  $x$ :

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.$$

Аналогичным образом можно получить решение и для многомерного случая (системы порядка выше первого), но введем предварительно в рассмотрение матричную экспоненциальную функцию, представленную в виде ряда:

$$e^{At} = \exp(At) = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots,$$

здесь  $E$  – единичная матрица. Этот ряд сходится для всех конечных  $t$  и любой  $A$ . С учетом этой функции решение системы матричных уравнений состояния будет иметь вид:

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau. \quad (21)$$

Это же решение можно получить из исходного уравнения состояния  $\dot{x} = Ax + Bu$ , если применить к нему преобразование Лапласа и из получившегося алгебраического уравнения выразить  $x$ :



$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s);$$

$$(sE - A)X(s) = x(0) + BU(s) \Rightarrow X(s) = (sE - A)^{-1}x(0) + (sE - A)^{-1}BU(s).$$

Если взять обратное преобразование Лапласа полученного в рамочке уравнения, то мы получим точно такое же выражение, как и (21).

### 3.1.4 Итерационные методы решения дифференциальных уравнений систем автоматического управления

Для получения решения обыкновенных дифференциальных уравнений в компьютерных программах (например, Matlab, Samsim) используются численные (итерационные или вычислительные) методы, поэтому любому изучающему курс ТАУ студенту необходимо иметь о них представление.

Численные методы решения уравнений представляют исходные данные и решения в виде набора чисел, что и обуславливает их название. Суть численных методов в последовательном приближении решения задачи до заранее заданной точности по построенной упрощенной по сравнению с исходной задачей формуле.

Преимущества численных методов:

- 1) отсутствие зависимости от формы и поведения функции;
- 2) легкость реализации в вычислительных программах;
- 3) иногда это единственный способ решить уравнение, так как существующие аналитические методы охватывают далеко не все возможные задачи;
- 4) упрощение процесса нахождения решения.

Наиболее часто встречаются два типа задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ): *задача Коши* и *краевая задача* [9]. В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и ее производных при некоторых значениях независимой переменной, т. е. в некоторых точках. Если эти условия задаются в одной точке, то такая задача называется **задачей Коши**. Если же дополнительные условия задаются в более чем

одной точке, то есть при разных значениях независимой переменной, то такая задача называется **краевой**.

Общая форма постановки задачи Коши для ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned}\tag{22}$$

где  $f(x, y)$  – оставшаяся часть уравнения без первой производной по искомой функции  $y$ , а второе выражение – это так называемые **начальные условия**, задаваемые для задачи Коши в одной точке, а для краевой в более чем одной. Для порядков выше первого меняется только порядок выражаемой производной.

Общая форма постановки краевой задачи для ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ y(x_1) &= y_1, \quad y(x_2) = y_2.\end{aligned}\tag{23}$$

Второе выражение – снова начальные условия.

*Примеры:*

Постановка задачи Коши для ОДУ первого порядка:

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{dy}{dt} = y^2 \sin(t)}, \quad t > 0, \quad y(0) = 1; \\ \boxed{\ddot{y} = \frac{2\dot{y}}{x} + x^3}, \quad x > 1, \quad y(1) = 4, \quad \dot{y}(1) = 0.\end{aligned}$$

Постановка краевых задач для ОДУ первого порядка:

$$\boxed{\ddot{y} = 5\dot{y} - y = \cos(x)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0;$$

$$\boxed{\ddot{y} = 2x + 3y\dot{y}}, \quad 1 \leq x \leq 4, \quad y(1) = 0, \quad \dot{y}(1) = 0, \quad \dot{y}(3) = 7.$$

Прямоугольником выше обозначены уравнения, а все остальное относится к начальным условиям и ограничениям.

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является *метод конечных разностей*, заключающийся в следующем: область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , которые называются **узлами**. Эти узлы составляют *разностную сетку*. Расстояние между двумя соседними узлами находится следующим образом:  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , и называется **шагом сетки**. Часто шаг сетки выбирают константным – одинаковым между всеми узлами. В результате искомую функцию непрерывного аргумента можно приближенно заменить функцией дискретного аргумента на заданной таким образом сетке. Назовем эту аппроксимирующую функцию **сеточной**. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным относительно введенной дискретной функции, при этом входящие в уравнение производные заменяют соответствующими им конечно-разностными соотношениями без предела (смотрите определение производной функции). Подобная замена уравнения его разностным вариантом называется разностной аппроксимацией (на сетке). Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки. Значения сеточной функции зависят от шага сетки  $h$ , иными словами мы имеем не одну разностную задачу, а семейство задач, зависящих от параметра шага сетки  $h$ . Это семейство задач называется **разностной схемой**.

Большинство численных методов решения задачи Коши можно привести к виду:

$$y_{i+1} = F(y_{i-k}, y_{i-k+1}, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+s}), \quad (24)$$

где  $F$  – некоторая определяемая выбранным методом и зависящая от вида исходного уравнения функция обозначенных аргументов и выбранной сетки. При  $k = 0, 0 \leq s \leq 1$  вычислительные правила (24) называются **одношаговыми** (шаг производится только по одному аргументу), а при  $k \geq 1$  или  $s > 1$  – **многошаговыми** (по сетке изменяются значения более, чем одного аргумента). Методы вида (24) называются **явными** в случае  $s = 0$  (каждое последующее значение зависит напрямую от предыдущего значения одного или нескольких аргументов, например,  $x_i$  от  $x_{i-1}$ ) и неявными при  $s = 1$  (последующие значения не зависят напрямую от предыдущих). При  $s > 1$  многошаговые методы называют **методами с забеганием вперед** (в этом случае последующие значения могут рассчитываться через будущие, например,  $x_i$  через  $x_{i+2}$  и тому подобное).

Рассмотрим наиболее используемые итерационные методы решения ОДУ, начиная с одношаговых.

#### Метод Эйлера

Метод основан на разложении исходного уравнения по формуле Тейлора в окрестностях узлов сетки [10]. К уравнению в описанной выше форме Коши применяется формула разложения в ряд Тейлора, уже приводившаяся в пункте 2.1. В результате получаем итерационную формулу вида:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера дает наглядное пояснение его сути: расчет каждого последующего значения функции при постепенном приближении к корню производится по уравнению касательной, а не исходному дифференциальному. Отсюда же видна и погрешность метода, ведь касательная не совпадает целиком с интегральной кривой, являющейся решением дифференциального уравнения, поэтому шаги фактически осуществляются по другой интегральной кривой, близкой к той, которая является решением исходной задачи. Это обуславливает наличие расхождения метода Эйлера уже на втором шаге поиска решения по сравнению с более точными методами, прини-

мая во внимание, что погрешность поиска решения по касательным к неточным интегральным кривым нарастает очень быстро.

Другая интерпретация метода Эйлера получается, если описать его как интегрирование исходного уравнения в форме Коши и замену полученного интеграла по методу прямоугольников. Однако в отличие от применения метода прямоугольников для численного интегрирования погрешность не просто суммируется, а растет экспоненциально на каждом шаге, что и приводит к расхождению метода уже на втором шаге.

В результате появилось множество модификаций метода Эйлера, пытающихся устранить погрешность путем уточнения угла наклона касательной через изменение шага сетки и через пересчет значений, а также повышения точности интерполяционной замены выражения под знаком интеграла. Можно вывести формулу модифицированного метода Эйлера через ряд Тейлора, если оставить в нем не только линейные члены, но и элементы, содержащие вторую производную, что повышает порядок точности метода до второго.

Итерационная формула модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h / 2 [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \\ i = 0, 1, \dots$$

#### Метод Рунге-Кутты (метод Эйлера 4-го порядка точности)

Этот метод очень часто используется в инженерных задачах и программах для инженерных расчетов ввиду своей эффективности, надежности и простоты реализации программными средствами, поэтому рассмотрим его подробно.

Неудобство формул с разложением функции в ряд очевидно: приходится вычислять и частные производные функции, и чем выше порядок точности, тем выше порядок искомым частных производных, что приводит к трудоемким расчетам.

Поэтому метод Рунге-Кутты предлагает альтернативу в виде использова-

ния в расчетах не частных производных функции, а ее значений на каждом шаге в нескольких точках. Для 4-го порядка точности функцию приходится вычислять на каждом шаге четырехкратно, но это окупается повышенной точностью. Итерационная формула, по которой проходят вычисления очередной точки, выглядит следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (d_0 + 2d_1 + 2d_2 + d_3), \quad i = 0, 1, \dots$$

$$d_0 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$d_1 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + d_0/2),$$

$$d_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + d_1/2),$$

$$d_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i + d_2).$$

Недостаток метода Рунге-Кутты в отсутствии простых методов оценки погрешности, накапливаемой с несколькими шагами.

*Пример:*

Решить методом Рунге-Кутты дифференциальное уравнение  $y' = y^2 + 2x$  с начальным условием  $y(1) = 4$  на отрезке  $[1; 2]$  ( $x_0 = 1$ ) с шагом  $h = 0,1$ . Не будем приводить все решение целиком, а продемонстрируем одну итерацию по формулам выше. Заметим, что  $f(x_i, y_i) = y^2 + 2x$  в данном случае.

Первым шагом рассчитаем все  $d_i$ :

$$d_0 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot (4^2 + 2 \cdot 1) = 1,8,$$

$$d_1 = h \cdot f(x_0 + h/2, y_0 + d_0/2) = 0,1 \cdot ((4 + 0,9)^2 + 2 \cdot (1 + 0,05)) = 2,611,$$

$$d_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + d_1/2) = 0,1 \cdot ((4 + 1,306)^2 + 2 \cdot (1 + 0,05)) = 3,025,$$

$$d_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i + d_2) = 0,1 \cdot ((4 + 3,025)^2 + 2 \cdot (1 + 0,1)) = 5,155.$$

Теперь подставим все это в формулу для  $y_{i+1}$ , которое, поскольку мы делаем первую итерацию, становится  $y_1$ :

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} \cdot (d_0 + 2d_1 + 2d_2 + d_3) = 4 + \frac{1}{6} \cdot (1,8 + 2 \cdot 2,611 + 2 \cdot 3,025 + 5,155) = 7,038.$$

Далее необходимо продолжить итерации, взяв на следующей в качестве начальной точки уже полученный  $y$  и  $x = x_0 + h$ , то есть точку  $(1,01; 7,038)$ , до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность, например, 0,01.

Одношаговые методы позволяют получить решение в каждой новой расчетной точке только на основании значения в предыдущей, что позволяет незамедлительно начать итерации.

### Многошаговые методы

Многошаговые методы, в отличие от одношаговых, используются несколько значений на предыдущих шагах для вычисления каждой новой точки. Итерационные формулы многошаговых методов строятся следующим образом: интегрируется уравнение (22) общей постановки задачи Коши, затем интеграл правой части заменяется интерполяционным полиномом, точность построения которого и определяет точность получения решения.

### Методы прогноза и коррекции

Группа многошаговых методов использует две формулы – прогноза и коррекции – для определения новой точки, причем вторая формула используется исключительно для повышения точности расчета. Для начала итераций необходимо прежде получить «исходные данные» – используемые для расчета значения в точках – каким-либо одношаговым методом (Эйлера, Рунге-Кутты и т.п.), а также значения производных искомой функции, которые отыскиваются по исходному уравнению, приведенному к форме Коши. Например, при расчете  $y_{i+1}$  могут использоваться значения  $y_{i-2}$ ,  $y_{i+1}$ ,  $y_{i-3}$ , а также другие точки и производные  $y$ , поэтому сначала необходимо найти их.

Итерации производятся следующим образом:

1 первоначально по формуле прогноза и исходным значениям определяют значение сеточной функции;

2 находят производную искомой функции по исходному уравнению в форме Коши с использованием значений, найденных на первом шаге;

3 значение производной, найденное на втором шаге, подставляется в формулу коррекции для уточнения;

4 в свою очередь «уточненное» на 4-ом шаге значение еще раз пересчитывается с помощью исходного уравнения в форме Коши;

5 проверяется достигнутая точность: если найденное значение производной недостаточно близко к предыдущему, то итерации продолжаются путем подстановки найденного значения производной в формулу коррекции и дальше по алгоритму. Если точность удовлетворяет поставленным исследователем условиям, то по производной находят окончательное значение искомой функции, а затем алгоритм повторяется вновь для следующей искомой точки.

К многошаговым методам относятся: метод Милна, использующий на этапе коррекции формулу Симпсона, метод Хемминга, а также метод Адамса-Башфорта, в котором фигурируют следующие формулы соответственно прогноза и коррекции:

$$(\text{прогноз}) y_{i+1} = y_i + \frac{1}{24} h \cdot (55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3});$$

$$(\text{коррекция}) y_{i+1} = y_i + \frac{1}{24} h \cdot (9y'_{i+1} + 19y'_i - 5y'_{i-1} + y'_{i-2}).$$

Формула прогноза получена заменой интеграла интерполяционным полиномом Ньютона.

### 3.2 Задание на практическое занятие

Найти изображения следующих функций:

а)  $f(t) = \cos^2(x)$

б)  $f(t) = 8x^2 - 28x + 24$



$$\text{в) } f(t) = t^4/4 + 2\sin 2t$$

$$\text{г) } f(t) = 4e^{4t} + 7$$

$$\text{д) } f(t) = 6t^3e^{-2t} + 4t^2 - 1$$

$$\text{е) } 4\cos 4t + 2 \sin 2t$$

$$\text{ж) } 2 + \cos (t - 4)$$

$$\text{з) } f(t) = \sin 5t \cdot \cos 4t$$

$$\text{и) } f(t) = 3t^2 e^{-2t} \cos 3t$$

$$\text{к) } f(t) = 3e^{5t} \cdot \sin 2t$$

$$\text{л) } t^3e^{2t} + t \cdot \cos 7t$$

Найти оригинал функции

$$\text{а) } F(s) = \frac{4}{s} + \frac{2s}{s^2 + 16}$$

$$\text{б) } F(s) = \frac{1}{s(s^4 - 5s^2 - 36)}$$

$$\text{в) } F(s) = \frac{1}{(s^2 + 4)^2}$$

$$\text{г) } F(s) = \frac{s + 2}{(s^2 + 4)(s - 2)(s + 1)}$$

$$\text{д) } F(s) = \frac{1}{(s - 4)(s^2 - 9)}$$

$$\text{е) } F(s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

$$\text{ж) } F(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 2s + 2}{s^5 + 2s^4 + 2s^3}$$

$$\text{з) } F(s) = \frac{1}{s^3 - 27}$$

$$\text{и) } F(s) = \frac{s}{s^2 - 8s + 17}$$

$$\text{к) } F(s) = \frac{1}{(s^2 + 4)^2}$$

$$\text{л) } F(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)(s^2+9)}$$

Используя теоремы разложения и другие приемы, найдите оригиналы по представленным изображениям:

$$\text{а) } F(s) = \frac{1}{(s-2)^3(s^2+1)}$$

$$\text{б) } F(s) = \frac{2s}{(s+2)(s+5)(s+4)(s+7)}$$

$$\text{в) } F(s) = \frac{s^2-2s+4}{s^3-s^2}$$

$$\text{г) } F(s) = \frac{s}{s^3+1}$$

$$\text{д) } F(s) = \frac{5s^2}{(s^3-1)^2}$$

$$\text{е) } F(s) = \frac{s+3}{s^2-1}$$

$$\text{ж) } F(s) = \frac{7s^3+7s^2-11s+3}{s^3(s+3)}$$

$$\text{з) } F(s) = \frac{s(6s^2+4)+1}{s^2(s^2+1)}$$

$$\text{и) } F(s) = \frac{5-s}{(s-3)^2}$$

$$\text{к) } F(s) = \frac{s+2}{s(s-2)(s-3)(s-1)}$$

$$\text{л) } F(s) = \cos \frac{1}{s}$$

Решить задачу Коши:

$$\text{а) } 2y' + y = e^{3t}, \quad y(0) = 0$$

$$\text{б) } y''' - 2x = \cos 2t, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

$$\text{в) } y' - 4x = 0, \quad y(0) = 2$$

Г)  $y'' + 2y' + 1 = t \sin t, y(0) = 0, y' = 1$

Д)  $y'' - 2 = yy', y(1) = 0, y'(2) = 2$

Е)  $y' = y^2 \sin(t), t > 0, y(0) = 2$

Ж)  $y''' - 4y'' + 2y' = \cos(x), x \in [0;1], y(0) = 1, y(1) = 0, y'(1) = 0,$

З)  $y + 2y''' + y' = \cos 2t, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 4$

И)  $y' + 2y = t^2, y(0) = 1$

К)  $y' = 4(x^2 + y), y(0) = 1, 0 \leq x \leq 2$

Л)  $y' + 2y = 4e^{2t}$

Решить дифференциальные уравнения с применением интеграла Дюамеля:

а)  $y'' + y = e^t, y(0) = y'(0) = 0$

б)  $y' + 2y = \arctgt, y(0) = 0$

в)  $y'' + 2y = \frac{1}{4 + \sin t}, y(0) = y'(0) = 0$

г)  $y'' + 4y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0$

д)  $y''' + 4y'' - y = t \sin t, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

е)  $y'' - \frac{1}{\cos^2 t} = y, y(0) = y'(0) = 0$

ж)  $2y'' + y = 4t, y(0) = y'(0) = 0$

з)  $y' - \frac{4y}{3t} = t^3 + 2t, y(1) = 2$

и)  $y''' - 4y = t^2 e^{2t}, y(0) = y'(0) = 0$

к)  $2y'' + 4y = t, y(0) = y'(0) = 0$

л)  $y''' + 2y'' - 4y' - y = \cos t, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

## Список использованных источников

1 Теория автоматического управления: в 2-х ч./ Под ред. Воронова А.А. - М.: Высш. школа, 1986. – Ч.1 – 367с.; Ч.2 – 504с.

2 Лукас, В.А. Теория управления техническими системами: компактный учебный курс для вузов / В.А. Лукас – 3-е изд., перераб. и доп. – Екатеринбург: изд-во УГГГА, 2002. – 675 с.

3 Евсюков, В. Н. Методические указания для выполнения практических заданий по теории управления: сост. функциональной схемы системы автомат. регулирования и анализа ее работы / В. Н. Евсюков. – Оренбург: ОГУ, 2000. – 81 с.

4 Евсюков, В. Н. Теория автоматического управления: учебное пособие для студентов вузов / В.Н. Евсюков. 2-е изд. перераб. и доп. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 260 с.

5 Матвеев, Н.М. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / Н.М. Матвеев. – М.: Просвещение, 1988. – 256 с.

6 Справочное пособие по высшей математике. 5 т. / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. – М.: Едиториал УРСС: 2003-2004.

Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. К. Боярчук, Г. П. Головач.– 4-е изд., 2003. – 384 с.

7 Пантелеев, А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: учеб. пособие для ВТУЗов / А. В. Пантелеев, Л. С. Якимова, А. В. Босов. – М.: Высш. шк., 2001. - 376 с.

8 Шелковников, Ф. А. Сборник упражнений по операционному исчислению: учеб. пособие / Ф. А. Шелковников, К. Г. Такайшвили; под ред. П. И. Кузнецова. – М.: Высш. шк., 1961. – 154 с.

9 Вержбицкий, В. М. Основы численных методов: учеб. для вузов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. школа, 2002. - 840 с.

10 Самарский, А. А. Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 287 с.

Учебно-методическое пособие

Татьяна Александровна Пищухина

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Часть 1

ISBN 978-5-7410-1727-2

