Министерство образования и науки Российской Федерации

Орский гуманитарно-технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Оренбургский государственный университет»

А. А. Уткин
Т. И. Уткина

ГЕОМЕТРИЯ:
Топология. Гладкие линии и поверхности. Основания геометрии

Учебное пособие

Орск 2016

УДК 515.1
ББК 22.17
У 84

Печатается по решению редакционно-издательского совета Орского гуманитарно-технологического института (филиала) ОГУ

Рецензенты:

Шелехов А. М.*, доктор физико-математических наук,*
профессор Тверского государственного университета;

Чурсин В. Б.*, кандидат физико-математических наук,*
доцент кафедры общих и профессиональных дисциплин филиала
Самарского государственного университета путей сообщения
в г. Орске

У 84 Уткин, А. А. Геометрия: Топология. Гладкие линии и поверхности. Основания геометрии : учебное пособие / А. А. Уткин, Т. И. Уткина. – Орск : Издательство Орского гуманитарно-технологического института (филиала) ОГУ, 2016. – 126 с. – ISBN 978-5-8424-0817-7.

Учебное пособие предназначено для преподавания дисциплин «Геометрия» для бакалавров и «Теоретические основы и технологии профессионального математического образования», «Реализация дополнительных профессиональных программ по математике в организациях высшего образования» для магистров по направлению «Педагогическое образование.

ISBN 978-5-8424-0817-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В Концепции [1] одной из задач является повышение качества математической подготовки студентов и популяризация математических знаний и математического образования, а в области профессионального образования – привлечение студентов к научной работе. В этой связи студентам рекомендуется «уделять больше времени решению творческих учебных и исследовательских задач».

Данное учебное пособие является методическим обеспечением дисциплин «Геометрия» и «Математические модели, методы и теории: векторный анализ и аксиоматические теории», а также учебно-исследовательской деятельности бакалавров по направлению «Педагогическое образование (профиль Математика)».

В первой главе дается обзор основных понятий топологии и вводится главное понятие дифференциальной геометрии – понятие многообразия.

Во второй главе рассматриваются понятие векторной функции скалярного аргумента, ее свойства и описывается класс задач, решаемых с помощью векторов.

В третьей главе даются понятия гладкой параметризированной кривой, геометрических образов, связанных с точкой на линии и параметрами, задающими кривую линию.

В четвертой главе описываются гладкие параметризованные поверхности, квадратичные формы, связанные с поверхностью, изгибание поверхностей, внутренняя геометрия поверхности.

В пятой главе рассматриваются вопросы аксиоматического построения геометрических теорий, в том числе аксиоматики в школьных учебниках геометрии.

1 ТОПОЛОГИЯ

1.1 Понятие топологического пространства

Математика (и геометрия в том числе) как наука занимается изучением различных математических структур. Математическая структура понимается как набор множеств и отношений, связывающих между собой элементы этих множеств. При этом отношения должны подчиняться определенным аксиомам.

Простейшей (по устройству) геометрической структурой является топологическая структура. Такая структура является неотъемлемой частью более сложных геометрических структур, например, структуры евклидова пространства. Покажем, как задается топологическая структура.

Возьмем не пустое множество элементов E и образуем новое множество τ, в которое включим в качестве элементов пустое множество, само множество E и некоторые его подмножества O_{α}., то есть $\tau = \{\varnothing, E, O_{\alpha} \subset E\}$.

Пусть, например, дано числовое множество $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Для этого множества можно в качестве множества τ составить следующие множества:

$\tau_1 = \{\varnothing, E\}$, $\tau_2=\{\varnothing, E$, всевозможные подмножества из $E\}$, $\tau_3=\{\varnothing, E, (1, 2), (2, 3)\}$.

Определение 1.1.1. Пару множеств $\{E, \tau\}$ называют топологическим пространством, если выполняются следующие аксиомы:

1) множество τ замкнуто относительно операции объединения произвольного числа его элементов;

2) множество τ замкнуто относительно операции пересечения конечного числа его элементов.

Множество E называют *базисным* множеством, а множество τ – *топологией*. Элементы топологии τ называют *открытыми* множествами.

Выясним, например, образуют ли топологии множества τ_1, τ_2, τ_3 в указанном выше примере.

1) $\tau_1=\{\varnothing, E\}$. Проверим выполнимость условий определения:

$$\varnothing \cup E = E \in \tau_1, \quad \varnothing \cap E = \varnothing \in \tau_1.$$

Отсюда: $\{E, \tau_1\}$ – топологическое пространство с топологией τ_1.

2) $\tau_2 = \{\varnothing, E,$ всевозможные подмножества из $E\}$. В данном случае объединение подмножеств из τ_2 либо само множество E, либо подмножество из τ_2. Пересечение подмножеств из τ_2 есть пустое множество либо подмножество из τ_2. Значит, $\{E, \tau_2\}$ – топологическое пространство с топологией τ_2 .

3) $\tau_3 = \{\varnothing, E, (1, 2), (2, 3)\}$. Для этого набора элементов будем иметь $(1, 2) \cup (2, 3) = (1, 2, 3)$ и $(1, 2) \cap (2, 3) = 2$. Подмножества 2 и (1, 2, 3) множеству τ_3 не принадлежат. Значит, τ_3 – не топология.

Если дополнить множество τ_3 подмножествами (1, 2, 3) и 2, то получим топологию $\tau_4 = \{\varnothing, E, 2, (1, 2), (2, 3), (1, 2, 3)\}$ и топологическое пространство (E, τ_4).

Из рассмотренных примеров видно, что на одном и том же множестве можно задавать различные топологии. Причем на любом непустом множестве E существуют топологии вида τ_1 и τ_2. Топологию $\tau_1 = \{\varnothing, E\}$ называют *антидискретной*, а топологию $\tau_2 = \{\varnothing, E,$ всевозможные подмножества из $E\}$ – *дискретной*.

Определение 1.1.2. Дополнение *открытого* множества топологического пространства до *базисного* называется *замкнутым* множеством.

Таким образом, если O_α – открытое множество, то есть $O_\alpha \in \tau$, то $F_\alpha = E \,/\, O_\alpha$ – замкнутое множество.

Очевидно, что пустое и базисное множества замкнутые и в топологическом пространстве множеств замкнутых столько, сколько открытых.

В качестве примера найдем для топологии $\tau_4 = \{\varnothing, E, 2, (1, 2), (2, 3), (1, 2, 3)\}$ замкнутые множества. Для пустого множества замкнутым будет само множество E, для X замкнутым будет пустое множество, для 2 соответственно (1, 3, 4), для (2, 3) – (1, 4), для (1, 2) – (3, 4), для (1, 2, 3) – 4. Таким образом, искомая система будет иметь вид:

$$\tau_4^* = \{E, \varnothing, (1, 3, 4), (3, 4), (1, 4), 4\}.$$

Рассмотрим свойства замкнутых множеств. Пусть, например, O_1 и O_2 – открытые множества в топологическом пространстве $\{E, \tau\}$ и F_1 и F_2 – замкнутые множества для O_1 и O_2 соответственно. Тогда, по определению операций объединения и пересечения множеств, будем иметь:

$$F_1 \cap F_2 = (E / O_1) \cap (E / O_2) = E / (O_1 \cup O_2)$$ – замкнутое множество;

$$F_1 \cup F_2 = (E / O_1) \cup (E / O_2) = E / (O_1 \cap O_2)$$ – замкнутое множество.

Очевидно, что:

1) пересечение любого числа замкнутых множеств есть множество замкнутое;

2) объединение конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.

Из этих свойств вытекает второй способ задания топологического пространства – при помощи системы замкнутых множеств.

В топологическом пространстве могут присутствовать четыре вида подмножеств: открытые, замкнутые, открытые и замкнутые одновременно (например, в топологиях τ_1 и τ_2), неоткрытые и незамкнутые (например, 4 относительно топологии τ_4).

Существует способ получения многочисленных примеров топологических пространств на базе данного.

Рассмотрим топологическое пространство $\{E, \tau\}$. Пусть A – подмножество из множества E. Обозначим через A_α пересечение множества A с открытыми множествами из топологии τ. Докажите самостоятельно, что множество $\tau' = \{\varnothing, A, A_\alpha\}$ – является топологией на множестве A. Множество τ' порождается топологией исходного пространства, поэтому τ' называют индуцированной топологией.

1.2 Естественные топологии

Пусть на множестве задана какая-либо математическая структура. Топология, заданная с помощью элементов этой структуры, называется *естественной*.

В геометрических теориях важную роль играют метрические пространства. Напомним, что метрическое пространство – это пространство, в котором определено расстояние между точками. Структура метрического пространства выглядит следующим образом: $\{E, R_+, \rho\}$, где R_+ – множество неотрицательных чисел, ρ – отображение $E \times E \to R_+$, обладающее свойствами:

1. $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,
2. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$,
3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$,

где A, B и C – произвольные точки из множества X.

Построим естественную топологию в метрическом пространстве.

Определение 1.2.1. Открытым шаром с центром в точке O и радиусом $\varepsilon > 0$ называется множество точек M таких, что расстояние от точки M до точки O меньше ε.

Открытый шар с центром в точке O и радиусом $\varepsilon > 0$ будем обозначать $\omega(O, \varepsilon)$. Например, на числовой прямой открытым шаром $\omega(2, 1)$ будет интервал (1, 3).

Определение 1.2.2. Точка M, принадлежащая подмножеству A метрического пространства (E, ρ), называется внутренней точкой множества A, если существует открытый шар с центром в точке M и радиусом ε, содержащийся во множестве A, то есть $\omega\ (M, \varepsilon) \subseteq A$.

Определение 1.2.3. Множество A называется «открытым», если каждая точка множества A является внутренней.

Теорема 1.2.1. Совокупность «открытых» множеств метрического пространства $\{E, \rho\}$ образуют топологию.

Доказательство.

1) Пустое множество «открыто», так как в нем нет точек.

2) Базисное множество метрического пространства $\{E, \rho\}$ «открыто», так как все шары с центром в любой точке из E принадлежат этому множеству.

3) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha \ldots$ – «открытые» подмножества в метрическом пространстве и $A = \cup A_\alpha$ – объединение этих множеств. Возьмем точку M, принадлежащую множеству A. Тогда, по определению объединения, в A существует множество A_i такое, что точка M будет принадлежать ему. Так как A_i «открытое», то точка M для него внутренняя. Следовательно, существует открытый шар с центром в точке M и радиусом ε, принадлежащий множеству A_i, а значит, и множеству A. Тогда, по определению 1.2.2, точка M внутренняя для множества A. Так как точка M – произвольная точка множества A, то любая точка в этом множестве внутренняя и, следовательно, множество A «открытое».

4) Рассмотрим теперь множество $A = \cap_{\alpha=1}^{k} A_\alpha$. Если A – пустое множество, то оно «открыто». Пусть множество A не пустое и M – произвольная его точка. Тогда, по определению пересечения, точка M принадлежит любому подмножеству A_α ($\alpha = 1,\ldots,\kappa$). Так как A_α – «открытые» множества, то M – внутренняя точка для любого множества A_α. Следовательно, в каждом множестве A_α существует открытый шар $\omega_\alpha(M, \varepsilon_\alpha)$, принадлежащий этому множеству. Радиусы этих шаров ε_1,

ε_2, ε_3, …, ε_k образуют конечную последовательность. Пусть ε – минимум в этой последовательности. Рассмотрим открытый шар с центром в точке M и радиусом ε. Так как ε – минимальный радиус и все открытые шары имеют общий центр M, то шар ω (M, ε) содержится в каждом открытом шаре ω_1, ω_2, …,ω_k и, следовательно, в каждом множестве A_α (α= 1, ,$к$). По определению пересечения, открытый шар ω содержится во множестве A и, следовательно, M – внутренняя точка множества A. Отсюда, множество A «открытое». Теорема доказана.

Таким образом, кавычки в термине «открытое» можно снять, а построенная топология является естественной в метрическом пространстве.

Примеры

1. На евклидовой плоскости открытый шар – это открытый круг. Тогда открытое множество – это такое множество, в котором каждая точка является центром открытого круга, целиком содержащегося в этом множестве. Совокупность таких открытых множеств образует естественную топологию плоскости.

2. Возьмем на евклидовой плоскости параболу и рассмотрим пересечение параболы с открытыми кругами плоскости. В результате получим естественную индуцированную топологию на множестве точек параболы, в которой открытые множества – это всевозможные открытые дуги параболы.

3. Индуцированная естественная топология на гиперболе состоит из пустого множества, самой гиперболы, ветвей гиперболы и различных открытых дуг гиперболы.

1.3 Окрестность точки в топологическом пространстве

Топология, заданная на некотором множестве, позволяет ввести понятие окрестности точки в этом множестве. Рассмотрим топологическое пространство $\{E,\ \tau\}$, где $\tau = \{\varnothing,\ E,\ O_\alpha\}$. Пусть M – точка из множества E. Возьмем в E некоторое подмножество O.

Определение 1.3.1. Подмножество O из E называют окрестностью точки M в топологическом пространстве $\{E, \tau\}$, если существует открытое множество O_α такое, что выполняется условие

$$M \in O_\alpha \subseteq O \qquad (1.3.1)$$

Если множество O является окрестностью точки M, то в этом случае записывают $O(M)$.

Пример. Пусть $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $\tau=\{\varnothing, E, (1, 2), (3, 4)\}$. Возьмем, например, точку 2 и два подмножества (1, 2, 3) и (2, 3, 4). Для первого подмножества имеем $2 \in (1, 2) \subset (1, 2, 3)$. Следовательно, множество (1, 2, 3) – окрестность точки 2. Для второго подмножества $2 \in (1, 2) \not\subset (2, 3, 4)$ и $2 \in E \not\subset (1, 2, 3)$. Следовательно, множество (2, 3, 4) не является окрестностью точки 2.

При отыскании окрестностей точки необходимо учитывать следующие свойства окрестности:

а) Для того чтобы множество O служило окрестностью некоторой точки, то оно прежде всего обязано эту точку содержать.

б) Базисное множество в топологическом пространстве является открытым и для любой его точки M условие (1.3.1) формально записывается в виде $M \in E = E$. Следовательно, базисное множество выступает окрестностью для любой своей точки. Таким образом, у всякой точки в топологическом пространстве существует хотя бы одна окрестность – само базисное множество. Существование окрестностей, отличных от базисного множества зависит от топологии.

в) Любое открытое множество, содержащее данную точку, служит окрестностью этой точки (следует из (1.3.1)).

г) Окрестность точки не всегда открытое множество.

д) В дискретном топологическом пространстве каждая точка является сама для себя окрестностью.

е) В антидискретном топологическом пространстве у всех точек существует только одна окрестность – базисное множество.

Из сказанного выше следует, что свойство некоторого подмножества O из множества E быть окрестностью некоторой точки M зависит только от топологии, заданной на множестве E, то есть в одной топологии подмножество O будет окрестностью точки M, в другой – нет.

Отметим еще одно важное свойство окрестности.

Теорема 1.3.1. Подмножество O из множества E является окрестностью для любой своей точки тогда и только тогда, когда подмножество O открыто.

Доказательство. а) Пусть O открыто и некоторая точка M принадлежит подмножеству O. Тогда O – окрестность точки M. Так как точка М выбрана произвольно, то подмножество O является окрестностью для любой своей точки.

б) Пусть теперь подмножество O является окрестностью для любой своей точки M. Тогда, на основании определения 1.3.1, для каждой точки M существует открытое множество $O_{\alpha M}$, такое, что $M \in O_{\alpha M} \subseteq O$. Отсюда будем иметь

$$O = \cup_{\forall M \in O} M \subseteq \cup_{\forall M \in O} O_{\alpha M} \subseteq 0.$$

Следовательно, $O = \cup_{\forall M \in O} O_{\alpha M}$, то есть $O \in \tau$. Теорема доказана.

Для отыскания всех окрестностей заданной точки в топологическом пространстве рекомендуется следующее:

а) В топологии нужно найти самое « маленькое» открытое множество, содержащее данную точку. Это множество будет открытой окрестностью точки.

б) Добавляя к найденной окрестности другие элементы из базисного множества, получим все окрестности данной точки.

Пример. Дано базисное множество $E = \{1, 2, 3, 4\}$ и топология $\tau = \{\varnothing, E, 1, (2, 3), (1, 2, 3)\}$. Найдем все окрестности каждой точки базисного множества. Так как число 1 – открытое множество, то его окрестностью служит любое подмножество из E, содержащее единицу. Для чисел 2 и 3 подмножество (2, 3) является самой маленькой открытой окрестностью. Следовательно, окрестностями чисел 2 и 3 служат все подмножества из E, содержащие пару (2, 3). Таким образом, у этих чисел четыре общих окрестности: (2, 3), (1, 2, 3), (2, 3, 4), E. У числа 4 есть только одна окрестность, это базисное множество.

1.4 База топологии

Топология, как мы видели, замкнута относительно операций объединения и пересечения конечного числа ее элементов. Следовательно, в любой топологии существует набор открытых множеств, позволяющих получить все другие открытые множества при помощи только одной операции – объединения.

Пусть B – некоторое подмножество из топологии $\tau =\{\varnothing, E, O_\alpha\}$, содержащее в обязательном порядке пустое множество. Обозначим через u_β открытые множества, входящие в подмножество B. Таким образом, B = $\{\varnothing, u_\beta\}$, где $u_\beta \in \tau$. Случай совпадения множества B с топологией τ не исключается.

Определение 1.4.1. Множество B называют базой топологии τ, если для всякого открытого множества O_α существуют элементы u_γ, принадлежащие множеству B, такие что $O_\alpha = \cup\, u_\gamma$.

Из определения следует, что база – это такой минимальный набор открытых множеств, которые позволяют получить любое другое открытое множество только при помощи операции объединения элементов из базы.

Заметим, что базисное множество не всегда входит в базу топологии.

Если в топологии присутствуют одноэлементные открытые множества, то они обязаны входить в базу. Открытые множества из двух элементов в базу входят не всегда.

Примеры

1. База антидискретной топологии $\tau=\{\varnothing, E\}$ совпадает с топологией.

2. Для дискретной топологии базой служит множество В = {$\varnothing$, все точки из базисного множества}.

3. Пусть на множестве $E = \{1, 2, 3, 4\}$ задана топология $\tau = \{\varnothing, E, 1, 4, (2, 3), (1, 4), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$. Для данной топологии базой служит множество В = {$\varnothing$, 1, 4, (2, 3)}.

4. База метрического пространства с естественной топологией состоит из пустого множества, всевозможных открытых кругов и базисного множества.

Теорема 1.4.1. Подмножество В из топологии τ является базой этой топологии тогда и только тогда, когда для любой точки M топологического пространства и для любой окрестности этой точки существует открытое множество u_δ из подмножества В такое, что $M \in u_\delta \subseteq O(M)$.

Доказательство. а) Пусть В – база топологии τ и пусть $O(M)$ – произвольная окрестность точки M. По определению окрестности, найдется открытое множество O_α такое, что $M \in O_\alpha \subseteq O(M)$. По определению базы, существуют элементы u_γ, принадлежащие базе В такие, что $O_\alpha = \cup\, u_\gamma$. Следовательно, среди этих открытых множеств u_γ найдется, по крайней мере, одно, которому будет принадлежать данная точка M. Пусть это будет множество u_δ. Тогда будем иметь $M \in u_\delta \subseteq O(M)$, что и требовалось доказать.

б) Пусть теперь В – некоторое подмножество из топологии τ, обладающее тем свойством, что для любой точки M топологического пространства и для любой окрестности этой точки существует открытое множество u_δ из подмножества В такое, что $M \in u_\delta \subseteq O(M)$. Возьмем в топологии произвольное не пустое открытое множество O_α, и пусть M – его произвольная точка. Тогда множество O_α является окрестностью точки M. По условию теоремы, существует открытое множество u_M из подмножества B такое, что $M \in u_M \subseteq O_\alpha$. Тогда будем иметь

$$O_\alpha = \bigcup_{M \in O\alpha} M \subseteq \bigcup_{M \in O\alpha} u_M \subseteq O_\alpha.$$

Отсюда, $O_\alpha = \bigcup_{M \in O\alpha} u_M$. Следовательно, согласно определению 1.4.1, множество B – база топологии.

1.5 Непрерывные отображения в топологических пространствах

Рассмотрим два топологических пространства – $\{X, \tau\}$, где $\tau = \{\emptyset, X, O_\alpha\}$, и пространство $\{Y, \tilde{\tau}\}$, где $\tilde{\tau} = \{\emptyset, Y, U_\beta\}$. Случай совпадения множеств X и Y не исключается. Зададим отображение f множества X на множество Y.

Определение 1.5.1. Отображение f топологического пространства $\{X, \tau\}$ на топологическое пространство $\{Y, \tilde{\tau}\}$ называется непрерывным в точке $M \in X$, если для любой окрестности образа точки M существует окрестность точки M такая, что образ этой окрестности содержится в окрестности образа точки M.

Пусть $f(M)$ – образ точки M, $O(M)$ – окрестность точки M, $O(f(M))$ – окрестность точки $f(M)$. Тогда определение 1.5.1 может быть кратко записано так:

$$f \text{ – непрерывно в точке } M \Rightarrow \forall\, O(f(M))\ \exists\, O(M) \mid f(O(M)) \subseteq O(f(M)).$$

Определение 1.5.2. Отображение f топологического пространства $\{X, \tau\}$ на топологическое пространство $\{Y, \tilde{\tau}\}$ называется непрерывным в точке $M \in X$, если для любой окрестности образа точки M существует окрестность точки M такая, что окрестность точки M содержится в прообразе окрестности образа точки M.

В краткой записи:

$$f \text{ – непрерывно в точке } M \Rightarrow \forall\, O(f(M))\ \exists\, O(M) \mid O(M) \subseteq f^{-1}\,(O(f(M))).$$

Определения 1.5.1 и 1.5.2 равносильны.

Определение 1.5.3. Если отображение f непрерывно в каждой точке множества X, то его называют непрерывным на множестве X.

Из приведенных выше определений вытекает, что понятие непрерывности отображения зависит от топологий, задаваемых на исходных множествах. То есть одно и то же отображение для одной топологии будет непрерывным, а для другой не обязательно.

Пример. Пусть даны множества $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\tau=\{\emptyset, X, 1, 4, (1, 4), (2, 3), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $\tilde{\tau} = \{\emptyset, Y, b, (a, b), (b, c)\}$. Отображение f множества X на множество Y задано следующим образом: $1 \to a$, $2 \to c$, $3 \to b$, $4 \to c$. Выясним, является ли отображение f непрерывным.

Проверим непрерывность отображения f в единице. Вначале нужно выбрать окрестность точки a. Нетрудно понять, что это должна быть самая маленькая окрестность из всех окрестностей точки a. Такой окрестностью служит пара (a, b). Далее нужно найти самую маленькую окрестность точки 1. Так как элемент 1 входит в топологию, то этот элемент служит окрестностью самого себя. Далее имеем: $f(1) = a \in (a, b)$ и, следовательно, в силу определения 1.5.1, отображение f в точке 1 является непрерывным.

Проверим непрерывность отображения f в точке 2. Так как $f(2) = c$, то пара (b, c) – самая маленькая окрестность точки c. Пара $(2, 3)$ – самая маленькая окрестность точки 2. Так как $f(2, 3) = (b, c)$, то отображение f непрерывно в точке 2.

Проверим непрерывность отображения f в точке 3. Имеем $f(3) = b$, самая маленькая окрестность точки b – сама точка b, самая маленькая окрестность точки 3 есть пара $(2, 3)$. Так как $f(2, 3)$ не может содержаться в b, то отображение f не является непрерывным в точке 3.

Для точки 4 имеем соответственно: $f(4) = c$, пара (b, c) есть окрестность точки c, точка 4 служит окрестностью точки 4 и $f(4) \in (b, c)$. Отображение в точке 4 непрерывно.

Таким образом, отображение f непрерывно только в точках 1, 2, 4 и, следовательно, непрерывным на множестве X не является.

Для установления непрерывности отображения совсем необязательно выяснять непрерывность в каждой точке. Существует другой способ, который вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.5.1. Отображение f топологического пространства $\{X, \tau\}$ на топологическое пространство $\{Y, \tilde{\tau}\}$ непрерывно на множестве X тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества в Y открыт в X.

Доказательство. а) Пусть отображение f непрерывно, множество V принадлежит топологии $\tilde{\tau}$ и f^{-1} (V) – его прообраз. Пусть точка M принадлежит множеству $f^{-1}(V)$, тогда образ точки M принадлежит множеству V и, следовательно, V есть окрестность точки f (M). Так как отображение непрерывно, то, согласно определению 1.5.2, существует окрестность $O(M)$ содержащаяся в $f^{-1}(V)$. Окрестность $O(M)$ содержит открытое множество содержащее точку M. Обозначим его через O_M. Тогда будем иметь:

$$f^{-1}(V) = \cup_{M \in f^{-1}(\mathrm{V})} M \subseteq \cup_{M \in f^{-1}(\mathrm{V})} O(M) \subseteq f^{-1}(V).$$

Отсюда, f^{-1} $(V) = \cup_{M \in f^{-1}(\mathrm{V})} O(M)$ и, следовательно, f^{-1} $(V) \in \tau$.

Докажем обратное утверждение. Пусть отображение f удовлетворяет условию – прообраз всякого открытого множества в Y открыт в X. Пусть M – произвольная точка из множества X и G – произвольная окрестность точки $f(M)$. По определению окрестности, существует такое открытое множество U_β в топологии $\tilde{\tau}$, что точка $f(M)$ принадлежит множеству U_β, а U_β содержится во множестве G. Согласно условию множество $f^{-1}(U_\beta)$ является открытым в X и $M \in f^{-1}(U_\beta)$. Следовательно, множество $f^{-1}(U_\beta)$ является окрестностью точки M. Отсюда $f \circ f^{-1}(U_\beta) \subseteq G$. Согласно определению 1.5.1, отображение непрерывно в точке M, а в силу произвольности выбора этой точки оно непрерывно на всем множестве X. Теорема доказана.

Теорема 1.5.1 дает второй способ выяснения непрерывности заданного отображения.

Пример. Даны множества: X ={1, 2, 3, 4, 5}, τ={$\varnothing$, X, 3, (2, 3), (3, 5), (2, 3, 5)}, Y = {a, b, c, d}, $\tilde{\tau}$ = {$\varnothing$, Y, a, (a, c), (a, d), (a, c, d)}. Определим непрерывность отображения f, если оно задано следующим образом:

$$1 \rightarrow b, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow a, 4 \rightarrow d, 5 \rightarrow c.$$

Так как для открытого множества (a, d) множество f^{-1} (a, d) = (3, 4) не открыто в X, то, по теореме 1.5.1, отображение f не является непрерывным.

1.6. Топологические отображения

Определение 1.6.1. Отображение f топологического пространства $\{X,\tau\}$ на топологическое пространство $\{Y,\tilde{\tau}\}$ называют топологическим, или гомеоморфным, если выполняются условия:

1) отображение f – биекция;

2) отображения f, f^{-1} – непрерывные.

Два топологических пространства, для которых существует топологическое отображение одного пространства на другое, называют гомеоморфными и записывают так:

$$\{X,\tau\}\overset{h}{-}\{Y,\tilde{\tau}\}. \tag{1.6.1}$$

Таким образом, топологические отображения порождают на множестве всех топологических пространств отношение, называемое *гомеоморфизмом.*

Свойства отношения гомеоморфизма:

Свойство 1.6.1. Если топологическое пространство $\{X,\tau\}$ гомеоморфно топологическому пространству $\{Y,\tilde{\tau}\}$, то пространство $\{Y,\tilde{\tau}\}$ гомеоморфно пространству $\{X,\tau\}$.

Утверждение вытекает непосредственно из определения.

Свойство 1.6.2. Топологическое пространство $\{X, \tau\}$ гомеоморфно самому себе.

Справедливость утверждения вытекает из того, что тождественное отображение является гомеоморфизмом.

Свойство 1.6.3. Если топологическое пространство $\{X, \tau\}$ гомеоморфно топологическому пространству $\{Y, \tilde{\tau}\}$, а топологическое пространство $\{Y, \tilde{\tau}\}$ гомеоморфно топологическому пространству $\{Z,\ \hat{\tau}\}$, то топологическое пространство $\{X, \tau\}$ гомеоморфно топологическому пространству $\{Z,\ \hat{\tau}\}$.

Доказательство. Согласно условию теоремы и определению гомеоморфизма, существуют два топологических отображения f_1 и f_2, переводящих пространство $\{X, \tau\}$ в пространство $\{Y, \tilde{\tau}\}$ и пространство $\{Y, \tilde{\tau}\}$ в пространство $\{Z,\ \hat{\tau}\}$. Рассмотрим отображение f, являющееся композицией отображений f_1 и f_2. Отображение f переводит топологическое пространство $\{X, \tau\}$ в топологическое пространство $\{Z,\ \hat{\tau}\}$. Прежде всего отметим, что отображение f является биекцией. Покажем, что оно непрерывно. Пусть открытое множество V принадлежит топологии $\hat{\tau}$. Тогда, по теореме 1.5.1 (пункт а), множество $\overset{-1}{f_2}(V)$ открыто в Y, а множество $\overset{-1}{f_1}(\overset{-1}{f_2}(V))$ открыто в X. Тогда, по теореме 1.5.1 (пункт б), отображение f непрерывно.

Аналогично доказывается, что отображение f^{-1} также непрерывное. Следовательно, отображение f является топологическим и пространство $\{X, \tau\}$ гомеоморфно пространству $\{Z,\ \hat{\tau}\}$.

Вывод. Отношение гомеоморфизма есть отношение эквивалентности на множестве всех топологических пространств, и оно разбивает это множество на непересекающиеся классы, при этом каждое топологическое пространство входит в один и только один класс. Каждый класс состоит из гомеоморфных пространств.

Определение 1.6.2. Свойства (понятия) топологического пространства, сохраняющиеся при топологических отображениях, называются топологическими свойствами (понятиями).

Топологические свойства иначе называют *топологическими инвариантами.*

Пространства, гомеоморфные между собой, обладают одними и теми же топологическими инвариантами. Пространства, негомеоморфные между собой, обладают различными топологическими инвариантами.

Приведем примеры простейших топологических инвариантов.

1. Топологические отображения, как было установлено в п. 1.5, переводят открытые множества в открытые. Следовательно, открытость (замкнутость) множества является топологическим инвариантом.

2. База топологического пространства при топологических отображениях переходит в базу. Следовательно, понятие базы относится к топологическим понятиям.

3. Так как окрестность точки обязана содержать открытое множество, то при гомеоморфизмах окрестность преобразуется в окрестность и, следовательно, понятие окрестности относится к топологическим понятиям.

1.7 Основные топологические инварианты

К основным топологическим инвариантам мы относим три инварианта: *связность*, *отделимость*, *компактность*.

Связность

Определение 1.7.1. Топологическое пространство $\{X, \tau\}$ называют несвязным, если существуют открытые, не пустые, непересекающиеся множества, отличные от базисного, объединение которых есть базисное множество.

То есть существуют $O_\alpha \in \tau$ такие, что

$$X = \cup O_\alpha, \text{ где } O_\alpha \neq \emptyset, O_\alpha \neq X, \cap O_\alpha \neq \emptyset. \qquad (1.7.1)$$

Если топологическое пространство $\{X, \tau\}$ несвязное, то и топологию τ называют несвязной.

Если в топологии нет открытых множеств, удовлетворяющих определению 1.7.1. то топологию называют *связной*.

Примеры

1) Антидискретная топология является связной.

2) Дискретная топология является несвязной.

3) Естественная топология в метрическом пространстве является связной.

4) Окружность с индуцированной естественной топологией является связным топологическим пространством.

5) Естественная топология на параболе – связная топология.

6) Естественная топология на гиперболе – несвязная топология.

Теорема 1.7.1. Связность топологического пространства сохраняется при топологических отображениях.

Доказательство. Пусть задано топологическое отображение f: $\{X, \tau\} \to \{Y, \tilde{\tau}\}$ и пусть пространство $\{X, \tau\}$ несвязное:

$$X = \cup O_\alpha, \text{ где } O_\alpha \neq \emptyset, O_\alpha \neq X, \cap O_\alpha \neq \emptyset.$$

Тогда, на основании свойств биекции и теоремы 1.5.1, будем иметь:

$$f(O_\alpha) \in \tilde{\tau}, f(O_\alpha) \neq \emptyset, f(O_\alpha) \neq X, \cap O_\alpha = \emptyset, \cup O_\alpha = Y.$$

Следовательно, по определению 1.7.1, пространство $\{Y, \tilde{\tau}\}$ – несвязное.

Замечания

1. Если два пространства обладают разной связностью, то они не гомеоморфные.

2. Наличие одинаковой связности у двух топологических пространств не говорит о том, что они гомеоморфные.

3. Если из связного топологического пространства удалить какую-либо точку, то связность пространства может нарушиться, так как изменится базисное множество, а следовательно, и топологическое пространство.

Пусть точка *A* принадлежит связному пространству $\{X, \tau\}$. Удалим точку *A*. Возможны два случая. Первый – пространство $\{X/A, \tau\}$ осталось связным. Второй – пространство $\{X/A, \tau\}$ перестало быть связным, то есть найдутся открытые множества O_1, O_2, ..., удовлетворяющие определению 1.7.1, то есть $X/A = \cup\ O_\propto$. Число полученных открытых множеств O_α называют *индексом точки A*. В первом случае индекс любой точки пространства равен 1. Очевидно, что индекс точки есть топологический инвариант.

Пример. На окружности индекс любой точки равен 1, а на прямой линии он равен 2 (здесь рассматриваются естественные топологии).

Из сказанного выше следует: если в топологическом пространстве $\{X, \tau\}$ есть точка, например, с индексом 5, а в пространстве $\{Y, \tilde{\tau}\}$ точки с таким индексом нет, то эти пространства негомеоморфные.

Отделимость

Определение 1.7.2. Топологическое пространство $\{X, \tau\}$ и топология $\boldsymbol{\tau}$ называются отделимыми, если у любых двух различных точек пространства существуют не пересекающиеся окрестности.

В отделимом пространстве у любых двух точек наряду с пересекающимися окрестностями существуют и не пересекающиеся.

Теорема 1.7.2. Отделимость топологического пространства сохраняется при топологических отображениях.

Справедливость теоремы следует из того, что при топологических отображениях не пересекающиеся окрестности переходят в непересекающиеся окрестности.

Примеры

1) Антидискретная топология не является отделимой, так как все точки обладают единственной окрестностью – само базисное множество.

2) Дискретная топология является отделимой, так как каждая точка служит окрестностью самой себя.

3) Числовая прямая с естественной топологией является отделимым пространством (окрестностью точки в этом пространстве служит интервал и достаточно взять два интервала с центрами в данных точках и радиусами меньше половины расстояния между точками).

4) Окружность, парабола, гипербола с естественными топологиями – отделимые топологические пространства.

Замечания

1. Если два пространства обладают разной отделимостью, то они не гомеоморфные.

2. Наличие одинаковой отделимости у двух пространств не говорит о том, что они гомеоморфные.

Компактность

Обозначим через Ω некоторую совокупность подмножеств u_α ($\alpha \in N$) из базисного множества X.

Определение 1.7.3. Ω называют покрытием множества X, если объединение его элементов u_α есть базисное множество X.

Покрытие, состоящее из открытых множеств, называется *открытым покрытием*. Если индекс α принимает значения от 1 до некоторого фиксированного числа $к$, то покрытие называется *конечным*. В частности, покрытие, состоящее из одного элемента, есть само базисное множество.

Определение 1.7.4. Топологическое пространство называется *компактным*, если существует конечное открытое покрытие, отличное от базисного множества.

Компактное топологическое пространство называют также *замкнутым.*

Теорема 1.7.3. Компактность топологического пространства сохраняется при топологических отображениях.

Справедливость теоремы следует из того, что при гомеоморфизмах конечное открытое покрытие переходит в конечное открытое покрытие образа.

Замечания

1. Если два пространства обладают разной компактностью, то они топологически не эквивалентны.

2. Наличие одинаковой компактности двух пространств не означает, что топологические пространства эквивалентны.

Примеры

1) Антидискретная топология не является компактной.

2) Дискретная топология является компактной, если базисное множество содержит конечное число элементов.

3) Окружность с естественной топологией является компактным топологическим пространством. Действительно, всякую окружность ω можно представить в виде объединения следующих открытых множеств

$$\omega = \omega/A \cup \omega/B, \text{ где } A \in \omega, B \in \omega.$$

4) Рассмотрим прямую l с естественной топологией. Пусть окружность ω касается прямой l в некоторой точке A и пусть точка B диаметрально противоположна точке A. Спроектируем произвольную точку M окружности из центра B на прямую l и получим точку M'. Поставим в соответствие точке M точку M'. Очевидно, что построенное соответствие будет взаимно-однозначным, если из окружности ω исключить точку B. Следовательно, окружность ω и прямая l негомеоморфны. Отсюда и примера 3 вытекает не компактность прямой линии.

5) Парабола с естественной топологией не является компактной, так как она гомеоморфна прямой с естественной топологией.

1.8 Понятие многообразия

В топологическом пространстве на подмножестве базисного множества координатные системы задаются как биективные отображения этого подмножества на арифметическое пространство определенной размерности. В этом случае размерность арифметического пространства называют размерностью координатной системы, а само подмножество называют координатной окрестностью данной координатной системы. Окрестность координатной системы в некоторых случаях может совпадает с базисным множеством.

Пусть дано топологическое пространство $\{E,\ \tau\}$ и пусть $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ – координатные окрестности координатных систем f_1, f_2, … на множестве E. В общем случае размерность этих координатных систем может быть разная. Если объединение координатных окрестностей дает базисное множество, то говорят о покрытии базисного множества координатными окрестностями.

Определение 1.8.1. Топологическое пространство $\{E,\ \tau\}$ называют *n-мерным многообразием*, если выполняются условия:

1) топология связная;

2) топология отделимая;

3) топология обладает счетной базой;

4) существует покрытие множества E координатными окрестностями n-мерных координатных систем.

Замечания

1. Не исключается случай, когда координатная окрестность совпадает с базисным множеством. В этом случае покрытие состоит из одного элемента.

2. Если множество E допускает несколько координатных систем f_1, f_2, …, то их размерность должна быть одинаковой и покрытие множества E состоит из координатных окрестностей $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ этих систем, то есть $E = \cup\, \Omega_\alpha$. Таким образом, размерность многообразия определяется размерностью координатных систем.

Многообразия бывают одномерными, двумерными и т.д.

Примеры

1) Рассмотрим прямую l с естественной топологией. На ней координатная система задается репером $R = \{O, \vec{\imath}\}$ по следующему правилу: всякой точке M ставится в соответствие число m такое, что $\overrightarrow{OM} = m\,\vec{\imath}$. Как видно эта координатная система одномерная, а ее координатная окрестность совпадает с прямой l. Учитывая, что естественная топология прямой связная, отделимая и обладает счетной

базой, приходим к выводу: прямая l с естественной топологией есть одномерное многообразие.

2) Аналогично доказывается, что плоскость с естественной топологией есть двумерное многообразие.

3) Рассмотрим окружность с естественной топологией. Эта топология, как было отмечено ранее, является связной, отделимой, обладает счетной базой. Мы также отмечали, что окружность не допускает гомоморфного отображения на прямую линию. (см. п. 1.7). Следовательно, окружность не покрывается координатной окрестностью одномерной координатной системы. С другой стороны, всякую окружность ω можно представить в виде $\omega = \omega/A \cup \omega/B$, где A и B – диаметрально противоположные точки окружности ω. Тогда центральные проекции из точек A и B на соответствующие касательные в этих точках представляют собой две координатные системы с координатными окрестностями ω/A и ω/B. Эти координатные системы одномерные и их окрестности образуют покрытие окружности, то есть $\omega = \omega/A \cup \omega/B$. Следовательно, окружность есть одномерное многообразие.

4) Парабола допускает взаимно-однозначное отображение на прямую линию, поэтому парабола с естественной топологией есть одномерное многообразие.

5) Гипербола с естественной топологией многообразием не является в силу несвязности этой топологии на гиперболе.

6) Аналогично показывается, что сфера с естественной топологией есть двумерное многообразие.

Если многообразие обладает компактной топологией, то многообразие называют *замкнутым*.

В приведенных выше примерах прямая, парабола, плоскость – незамкнутые многообразия, а окружность, сфера – замкнутые многообразия.

2 ВЕКТОРЫЕ ФУНКЦИИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1 Понятие векторного пространства

После топологической структуры, второй по значимости геометрической структурой является структура векторного пространства. Покажем, как задается такая структура.

Рассмотрим два не пустых множества V, R. Элементы первого множества назовем векторами. Элементы второго множества назовем скалярами и потребуем, чтобы это множество было полем, то есть на множестве R должны быть две операции сложения и умножения, подчиняющиеся коммутативному и ассоциативным законам, распределительному закону и обратимости операций сложения и умножения (уравнения $a + x = b$ и $ax = b$ должны быть разрешимы в R). На множествах V и R зададим операции сложения векторов, умножения вектора на скаляр, скалярного произведения векторов так, чтобы выполнялись следующие аксиомы.

I. *Аксиомы сложения векторов*:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$, $\exists \vec{c} \in V \mid \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Такой вектор $\vec{c}$ единственный и называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

3. $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

4. $(\exists \vec{0} \in V \mid \forall \vec{a} \in V) \Rightarrow \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. Такой вектор $\vec{0}$ называется нулевым.

5. $\forall \vec{a} \in V$, $\exists (-\vec{a}) \in V \mid \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Такой вектор $(-\vec{a})$ называется противоположным вектору $\vec{a}$.

II. *Аксиомы умножения вектора на скаляр*:

1. $\forall \vec{a} \in V$, $\forall k \in R$, $\exists \vec{b} \in V \mid \vec{b} = k\vec{a}$. Вектор $\vec{b}$ – единственный и называется произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр k.

2. $(\forall \vec{a} \in V) \Rightarrow 1\,\vec{a} = \vec{a}$.

3. $(\forall \vec{a} \in V, \forall k, l \in R) \Rightarrow (k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.

4. $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall k \in R) \Rightarrow k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

5. $(\forall \vec{a} \in V, \forall k, l \in R) \Rightarrow k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$.

На основании аксиом этих двух групп введем понятие линейно независимых векторов.

Определение 2.1.1. Система векторов $\vec{a}$, …, $\vec{a}_n$ называется линейно независимой, если условие

$$k_1 \vec{a}_1 + \ldots + k_n \vec{a}_n = \vec{0} \qquad (2.1.1)$$

справедливо только при $k_1^2 + \ldots + k_n^2 = 0$. В противном случае система векторов называется линейно зависимой.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, то их называют также коллинеарными векторами. Нетрудно увидеть, что коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно представить в виде $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, то их называют компланарными. Компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ можно всегда представить в виде $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

III. *Аксиомы размерности*:

1. Существует три линейно независимых вектора.

2. Всякие четыре вектора линейно зависимы.

Множество V с операциями сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющие аксиомам I и II групп, называют *векторным пространством.* Векторное пространство, в котором выполняются аксиомы третьей группы, называют *трехмерным векторным пространством* и обозначают V^3.

IV. *Аксиомы скалярного произведения*:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \exists!\, k \in R \,|\, k = \vec{a} \circ \vec{b}$. Число k называется скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

2. $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V) \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$.

3. $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V) \Rightarrow \vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$.

4. $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall k \in R) \Rightarrow (k\vec{a}) \circ \vec{b} = k(\vec{a} \circ \vec{b})$.

5. $(\forall \vec{a} \in V, \vec{a} \neq \vec{0}) \Rightarrow \vec{a}^2 > 0$.

Трехмерное векторное пространство, в котором выполняются аксиомы скалярного произведения векторов, называется евклидовым трехмерным векторным пространством. В таком пространстве вектора обладают новыми свойствами.

На основании четвертой группы аксиом определяется модуль вектора $\vec{a}$ как арифметический квадратный корень из скалярного квадрата вектора, то есть

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}.$$

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем вектор $\vec{b}$ не нулевой. Найдем скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{\vec{a} - t\vec{b}}$:

$$\left(\vec{a} - t\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} - 2t\vec{a}\vec{b} + t^2\vec{b}^{\,2}.$$

Правая часть этого равенства в зависимости от параметра *t* будет больше или равна нулю. Подставляя в правую часть вместо этого параметра значение $\frac{\square\circ\vec{a}\ \square\circ\vec{b}}{\vec{b}^{\,2}}$, придем к неравенству $\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} \geq (\vec{a}\circ\vec{b})^2$. Отсюда, извлекая квадратный корень, получаем:

$$-1 \leq \frac{\vec{a}\ \square\circ\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} \leq 1.$$

Отношение $\frac{\vec{a}\ \square\circ\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$ называют косинусом угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом, окончательно получаем:

$$\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ называется ортогональным вектору $\vec{b}$, если угол между ними 90°. В этом случае записывают так: $\vec{a} \perp \vec{b}$. Таким образом,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0.$$

Замечание. Если под вектором мы понимаем класс эквиполентных направленных отрезков, а под скалярами действительное число, то скалярное произведение на такой модели векторного пространства определяется так. Скалярным произведением вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Определение 2.1.2. Система $\{\vec{e}_i;\ i = \overline{1, n}\}$ называется базисом векторного пространства V, если:

1) система $\{\vec{e}_i\}$ линейно независимая;

2) для всякого ненулевого вектора $\vec{a}$ пространства V система $\{\vec{e}_i,\ \vec{a}\}$ линейно зависимая.

Если $\{\vec{e}_i\}$ – базис, то всякий вектор $\vec{a}$ можно представить в виде:

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n. \qquad (2.1.2)$$

Числа a_i, входящие в равенство (2.1.2), называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$, а число базисных векторов называется размерностью пространства V. В трехмерном векторном пространстве базис состоит из трех векторов.

Определение 2.1.3. Базис $\{\vec{e}_i\}$ называется ортонормированным, если векторы $\vec{e}_i$ имеют единичные длины и попарно взаимно ортогональны.

Векторы ортонормированного базиса пространства V^3 обозначаются через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

В ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и только в нем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) и $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3) вычисляется по формуле:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \qquad (2.1.3)$$

Пусть даны два базиса $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{e}'_i\}$, причем

$$\vec{e}'_i = c_i^j \ \vec{e}_j, \text{ где } i, j = \overline{1, 3}. \qquad (2.1.4)$$

В равенствах (2.1.4) по индексу j предполагается суммирование. Матрица (c_i^j) называется матрицей перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{e}_i{}'\}$. Говорят, что эти базисы имеют одинаковую ориентацию, если $det(c_i^j) > 0$. Следовательно, множество всех базисов данного пространства можно разбить на два класса.

Определение 2.1.4. Пространство, в котором из двух классов базисов выбран один, называется ориентированным.

Таким образом, ориентацию в пространстве можно выбрать либо « положительную» , либо « отрицательную» . Базисы положительной ориентации называют также правыми, а базисы отрицательной ориентации – левыми.

Типы задач, решаемых с помощью линейной зависимости векторов и скалярного произведения:

1. Нахождение координат точек.
2. Установление коллинеарности и компланарности точек.
3. Составление уравнений прямых линий и плоскостей.
4. Нахождение простого отношения точек.
5. Вычисление расстояния между точками.
6. Вычисление угла между прямыми и плоскостями.
7. Задачи на доказательство свойств фигур.

2.2 Векторное и смешанное произведения векторов

В пространстве V^3 зададим ортонормированный базис и определим внутренний закон композиции:

$$\varphi \colon V^3 \times V^3 \to V^3.$$

Эту бинарную операцию называют векторным произведением.

Определение 2.2.1. Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$, $0 < \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) < \pi$;

3) тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ имеет одинаковую ориентацию с тройкой $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Векторное произведение коллинеарных векторов считается равным нулю. Мы будем пользоваться обозначением Гиббса векторного произведения, то есть $\vec{a} \times \vec{b}$.

Второе свойство определения 1.1.12 может быть « прочитано» так: модуль (или длина) векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

В ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ нетрудно выразить координаты векторного произведения через координаты сомножителей. Пусть $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, и в указанном базисе векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют следующие координаты: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ можно записывать в виде « определителя»:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.2.1)$$

На основании определения векторного произведения и его свойств можно указать типы задач, решаемых с его помощью:

1. Отыскание общего перпендикуляра к двум данным прямым.

2. Установление коллинеарности точек.

3. Выявление параллельности прямых.

4. Вычисление площади параллелограмма, треугольника.

5. Вычисление расстояния от заданной точки до заданной прямой.

6. Нахождение нормального вектора плоскости, заданной точкой и направляющими векторами.

Расстояние от точки A до прямой (MN) определяется по формуле:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}.$$

Рассмотрим положительно ориентированное пространство с ортонормированным базисом $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$.

Определение 2.2.2. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятых в указанном порядке, называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Запишем это так:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}). \tag{2.2.2}$$

На основании формул (2.1.3) и (2.2.1) имеем:

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2.2.3}$$

Отсюда вытекают все свойства смешанного произведения.

Свойство 2.2.1. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Свойство 2.2.2.

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,) = (\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\,) = (\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\,) = -(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}\,) = -(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}\,) = = -(\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}\,).$$

Свойство 2.2.3.

$$(k\vec{a}\,)\circ(\vec{b}\,\times\vec{c}\,) = \vec{a}\circ((k\vec{b}\,)\times\vec{c}\,) = \vec{a}\circ(\vec{b}\,\times(k\vec{c}\,)) = k\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,),$$

где k – скаляр.

Свойство 2.2.4. Смешанное произведение обладает свойством дистрибутивности относительно каждого сомножителя.

Свойство 2.2.5. Если в смешанном произведении два вектора коллинеарны, то оно равно нулю.

Смешанное произведение допускает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарные векторы и *Ф* – параллелепипед, построенный на данных векторах. Тогда абсолютное значение смешанного произведения равно объему параллелепипеда *Ф:*

$$\left|\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\right| = V_{\varPhi}.$$

Укажем основные типы задач, решаемые с использованием смешанного произведения:

1. Вычисление объема параллелепипеда, тетраэдра.
2. Установление компланарности трех данных векторов.
3. Нахождение уравнения плоскости, если она задана точкой и парой направляющих векторов.
4. Отыскание расстояния между скрещивающимися прямыми.

2.3 Общий подход к решению содержательных геометрических задач методом векторов

Под содержательными геометрическими задачами будем понимать те задачи, в тексте которых о векторах ничего не говорится. Содержательные задачи можно разделить на два класса: аффинные и метрические.

Аффинные задачи – это те, которые решаются без использования скалярного произведения векторов. К ним относятся задачи:

– на доказательство параллельности прямых, прямой и плоскости, плоскостей;

– на доказательство принадлежности трёх и более точек одной прямой, на отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или параллельных;

– на доказательство того, является ли данный четырёхугольник параллелограммом и т. д.

Решение аффинных задач с помощью векторов сводится к установлению коллинеарности тех или иных векторов.

Общий подход к решению аффинных задач состоит из следующих этапов:

– обоснование возможности решения задачи методом векторов;

– выбор базиса (для плоской фигуры – два неколлинеарных вектора, для неплоской – три некомпланарных);

– нахождение разложения «нужных» векторов по векторам базиса;

– сравнение найденных разложений «нужных» векторов по векторам базиса и обоснование утверждения задачи.

Метрические задачи – это те задачи, которые решаются с использованием скалярного произведения. К ним можно отнести задачи:

– на нахождение угла между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями;

– на нахождение длин отрезков;

– на нахождение площадей фигур;

– на нахождение объёмов многогранников.

Общий подход к решению метрических задач состоит из следующих этапов:

– обоснование возможности решения задачи методом векторов;

– выбор базиса;

– нахождение разложения «нужных» векторов по векторам базиса;

– нахождение скалярного произведения «нужных» векторов и обоснование утверждения задачи.

2.4 Векторная функция скалярного аргумента

Рассмотрим трехмерное евклидово векторное пространство V^3 и множество скаляров R.

Определение 2.4.1. Отображение φ: $R^n \to V^3$ называется векторной функцией от n скалярных аргументов.

Если $n = 1$, то имеем векторную функцию одного аргумента, при $n = 2$ – векторную функцию двух аргументов и т.д.

Пусть t – некоторый скаляр из R и пусть $\varphi(t) = \vec{r}$. В этом случае векторную функцию φ записывают так $\vec{r}(t)$. Если $(u, v) \in R^2$, то записывают $\vec{r}(u, v)$.

Приведем примеры таких функций:

$\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath}$, $\quad\vec{r}(\alpha) = \sin\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{\jmath}$, $\quad\vec{r}(t) = t^5\vec{\imath} + t^3\vec{\jmath}$, $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + \sin\beta\,\vec{\jmath} + \cos\beta\,\vec{k}$.

Рассмотрим векторную функцию одного аргумента. Ее можно представить в ортонормированном базисе в виде

$$\vec{r}(t) = x(\,t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k},$$

здесь скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - координаты векторной функции. Из этого следует, что векторной функции $\vec{r}(t)$ соответствует единственный упорядоченный набор трех скалярных функций $\{x(t), y(t), z(t)\}$ и обратно.

Определение 2.4.2. Постоянный вектор $\vec{a}$ называют пределом векторной функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если $|\vec{r}(t) - \vec{a}| \to 0$. В этом случае записывают так:

$$lim_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{a}\,.$$

Докажите следующие свойства предела векторной функции скалярного аргумента.

Свойство 2.4.1. Предел суммы (разности) двух векторных функций от одного аргумента равен сумме (разности) пределов этих функций.

Свойство 2.4.2. Предел произведения векторной функции на скалярную функцию от того же аргумента равен произведению пределов этих функций.

Свойство 2.4.3. Предел скалярного произведения двух векторных функций от одного аргумента равен скалярному произведению пределов этих функций.

Свойство 2.4.4. Предел векторного произведения двух векторных функций от одного аргумента равен векторному произведению пределов этих функций.

Свойство 2.4.5. Предел смешанного произведения трех векторных функций от одного аргумента равен смешанному произведению пределов этих функций

Определение 2.4.3. Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется непрерывной при $t \to t_0$, если $lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Функция называется непрерывной на интервале (a, b), если она непрерывна для всякого $t \in (a, b)$.

Докажите следующие свойства непрерывных векторных функций.

Свойство 2.4.5. Сумма (разность) двух непрерывных векторных функций от одного аргумента есть непрерывная векторная функция.

Свойство 2.4.6. Произведение непрерывной векторной функции на непрерывную скалярную функцию от того же аргумента есть непрерывная векторная функция.

Свойство 2.4.7. Скалярное произведение двух непрерывных векторных функций от одного и того же аргумента есть непрерывная скалярная функция.

Свойство 2.4.8. Векторное произведение двух непрерывных векторных функций от одного и того же аргумента есть непрерывная векторная функция.

Свойство 2.4.9. Смешанное произведение трех непрерывных векторных функций от одного и того же аргумента есть непрерывная скалярная функция.

Пусть векторная функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на интервале (a, b) и пусть t и t_0 взяты из интервала (a, b). Составим две разности $t - t_0$ и $\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$. Первую разность назовем приращением аргумента, а вторую – приращением векторной функции. Составим новую векторную функцию:

$$\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}. \qquad (2.4.1)$$

Определение 2.4.4. Если существует конечный предел векторной функции (2.4.1) при $t \to t_0$, то его называют производной векторной функции $\vec{r}(t)$ для значения t_0.

Если производная векторной функции существует, то ее обозначают $\vec{r}'(t)$ или $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Итак,

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}. \qquad (2.4.2)$$

Из определения 2.4.4. вытекает, что производная от векторной функции есть векторная функция.

Пусть $\lambda(t)$, $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)$ – одна скалярная и три векторных функции от одного и того же аргумента, причем все дифференцируемые. Докажите следующие свойства производной векторной функции.

Свойство 2.4.10. Производная от суммы (разности) двух векторных функций равна сумме (разности) производных от этих функций.

Свойство 2.4.11. $(\lambda(t)\vec{r}\,(t))' = \lambda\,(t)'\vec{r}\,(t) + \lambda(t)\vec{r}'(t)$.

Свойство 2.4.12.

$(\vec{r}_1(t)\circ\vec{r}_2\,(t))' = \vec{r}_1\,(t)'\circ\vec{r}_2\,(t) + \vec{r}_1(t)\circ\vec{r}_2{}'(t)$.

Свойство 2.4.13.

$(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2\,(t))' = \vec{r}_1\,(t)'\times\vec{r}_2\,(t) + \vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2{}'(t)$.

Свойство 2.4.14.

$$\left(\vec{r}_1(t)\,\vec{r}_2(t)\,\vec{r}_3(t)\right)' = \left(\vec{r}_1{}'(t)\,\vec{r}_2(t)\,\vec{r}_3(t)\right) =$$

$$\left(\,\vec{r}_1(t)\,\vec{r}_2{}'(t)\,\vec{r}_3(t)\right) = \left(\vec{r}_1(t)\,\vec{r}_2(t)\,\vec{r}_3{}'(t)\right).$$

Свойство 2.4.15. Производная от постоянного вектора есть нулевой вектор.

Свойство 2.4.16. $\vec{r}'(t) = x'(\,t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} + z'(t)\vec{k}$.

Таким образом, взятие производной от векторной функции сводится к взятию производных от ее координат.

Свойство 2.4.17.

$$\vec{r}''(t) = x''(\,t)\vec{\imath} + y''(t)\vec{\jmath} + z''(t)\vec{k},$$

$$\vec{r}^n(t) = x^n(\,t)\vec{\imath} + y^n(t)\vec{\jmath} + z^n(t)\vec{k}.$$

Известно, что для скалярной функции имеет место формула Тейлора, которая дает оценку функции с заданной точностью. Аналогично, для векторных функций есть своя формула Тейлора. Покажем это.

Пусть имеем разложение векторной функции $\vec{r}(t)$ по ортонормированному базису:

$$\vec{r}(t) = x(\,t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t). \qquad (2.4.3)$$

Разложим каждую из функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ по формуле Тейлора для значения t_0:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)\Delta(t) + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n(t_0)\Delta^n(t) + \vec{\varepsilon}\,(t_0),$$

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\Delta(t) + \cdots + \frac{1}{n!}\,y^n(t_0)\Delta^n(t) + \vec{\tau}\,(t_0),$$

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)\Delta(t) + \cdots + \frac{1}{n!}\,z^n(t_0)\Delta^n(t) + \vec{\epsilon}\,(t_0).$$

Умножим первое равенство на вектор $\vec{\imath}$, второе на вектор $\vec{\jmath}$, третье – на вектор $\vec{k}$ и сложим. Тогда на основании свойств 2.4.16 и 2.4.17, получим:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)\Delta(t) + \cdots + \frac{1}{n!}\vec{r}^n(t_0)\Delta^n(t) + \vec{\theta}\,(t_0). \quad (2.4.4)$$

Полученное выражение называется формулой Тейлора для векторной функции скалярного аргумента.

Определение 2.4.5. Дифференциалом векторной функции $\vec{r}(t)$ называется векторная функция $d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt$.

Определение дифференциала векторной функции скалярного аргумента формально совпадает с определением дифференциала скалярной функции скалярного аргумента. Однако первый дифференциал по своим свойствам отличается от второго дифференциала. Так, дифференциал векторной функции всегда коллинеарен первой производной. Дифференциал скалярной функции такого свойства не имеет.

Из определения дифференциала векторной функции вытекает, что он обладает теми же свойствами, что и производная от векторной функции. В частности, дифференциал постоянного вектора есть нулевой вектор.

Среди векторных функций различают функции постоянного модуля, то есть $\lfloor\vec{r}\,(t)\,\rfloor$ = *const*, и функции постоянного направления, то есть такие функции для которых выполняется условие $\vec{r}(t) \parallel \vec{r}'(t)$, для всякого значения аргумента *t* из области определения функции.

Функция $\overrightarrow{e}(\varphi) = \cos\varphi\ \vec{\imath} + \sin\varphi\ \vec{\jmath}$ имеет модуль, равный единице, то есть является функцией постоянного модуля. Ее называют круговой векторной функцией. Такое название связано со следующей геометрической моделью этой функции. Пусть выбрана произвольная точка *O* и от нее отложены векторы $\vec{r}(t)$ для всякого значения аргумента *t* из области определения. В результате получаем множество точек, называемое годографом векторной функции $\vec{r}(t)$. Очевидно, что для круговой функции годографом служит плоская кривая, так как вектор $\vec{k}$ в разложении не участвует. Так как модуль равен единице, то годографом служит окружность с центром в точке O и радиус окружности равен единице. Функции, годографы которых лежат в плоскости, при соответствующем выборе координатной системы могут быть представлены в виде:

$$\vec{r}(t) = |\vec{r}(t)|\,\vec{e}(\varphi).$$

Основные свойства круговой векторной функции вытекают из ее задания и свойств производной:

$$\vec{e}\,'(\varphi) = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath};\ \vec{e}(\varphi) \perp \vec{e}\,'(\varphi);\ |\vec{e}(\varphi)| = 1;$$
$$\vec{e}\,''(\varphi) = -\,\vec{e}(\varphi).$$

Рассмотрим теперь векторную функцию от двух аргументов $\vec{r}(u,v)$. Разложим ее по ортонормированному базису:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{\imath} + y(u,v)\vec{\jmath} + z(u,v)\vec{k}. \qquad (2.4.4)$$

Если в (2.4.4) зафиксировать один из аргументов, например v, то есть считать его постоянным, тогда функция $\vec{r}(u,v)$ становится векторной функцией одного аргумента u. От такой функции можно находить предел, производную по этому аргументу. Эту производную называют частной производной от векторной функции $\vec{r}(u,v)$. Таких производных будет две: одна по аргументу u, а вторая по аргументу v. Эти производные обозначают следующим образом:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_u, \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v.$$

Тогда полный дифференциал функции $\vec{r}(u,v)$ запишется в виде:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u\,du + \vec{r}_v dv.$$

Повторное дифференцирование по этим же правилам дает вторые частные производные, которых будет три:

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2} = \vec{r}_{uu}, \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v^2} = \vec{r}_{vv}, \quad \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v} = \vec{r}_{uv}.$$

и, соответственно, второй дифференциал:

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}\,du^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}dv^2.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите производные от следующих векторных функций, зависящих от аргумента *t*:

$$\vec{r}^2(t),\ \vec{r}'(t)\times\vec{r}(t), (\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\times\vec{r}'''(t).$$

2. Опишите годографы следующих векторных функций:

– $\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b} + t^2\vec{c}$,

- $\vec{r}(t) = \vec{a} + \cos t\,\vec{b} + \sin t\,\vec{c},$

- $\vec{r}(t) = \vec{a} + ch(t)\vec{b} + sh(t)\vec{c},$

- $\vec{r}(t,v) = \vec{a} + t\vec{b} + t^2\vec{c} + v\vec{d},$

где векторы $\vec{a}, \overrightarrow{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – постоянные векторы, ch и sh – гиперболические косинус и синус соответственно.

3. Опишите годограф векторной функции, заданной своими координатами:

– $x = t^2 - t + 1,\ y = t^2 + t + 1;$

– $x = t^2 - 2\,t + 3,\ y = t^2 - 2\,t + 1;$

– $x = a\,sin^2t,\ y = bcos^2\,t.$

3 ЛИНИИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

3.1 Понятие гладкой параметризованной кривой

Пусть V^3 – трехмерное евклидово векторное пространство. Добавим к этой структуре новое не пустое множество *E*, элементы которого будем называть точками. Точки и векторы свяжем между собой новым отношением, которое назовем отношением связи точек с векторами. Свойства этого отношения пропишем в следующей группе аксиом.

V. *Аксиомы связи точек с векторами*:

1. Каждой упорядоченной паре точек (A, B) ставится в соответствие единственный вектор $\vec{a}$, обозначаемый $\vec{a} = \vec{AB}$.

2. $\forall \vec{a} \in V$, $\forall A \in E$, $\exists\ B \in E \mid \vec{AB} = \vec{a}$, причем точка *B* – единственная.

3. $(\forall A, B, C \in E) \Rightarrow \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Новую геометрическую структуру назовем евклидовым трехмерным векторным пространством. Существование такой структуры, как и структуры векторного пространства, мы обсудим позже. В таком пространстве прежде всего появляется понятие расстояния между точками. Расстоянием между точками *A* и *B* называют модуль вектора $\overrightarrow{AB}$. Прямую линию мы определяем как множество точек, задаваемое некоторой точкой X_0 и не нулевым вектором $\vec{a}$, для произвольной точки *X* которого выполняется условие $\overrightarrow{X_0X} \parallel \vec{a}$. Отрезок с концами в точках *A* и *B* определяется как множество точек *X*, для которых $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB},$ где $0 \leq \lambda \leq 1$. Луч с началом в точке *A* и проходящий через заданную точку *B* определяется аналогичным векторным равенством с условием $0 \leq \lambda$.

Одним из основных понятий в геометрии является понятие линии. Линия – геометрическое понятие, точное и в то же время достаточно общее, определение которого представляет значительные трудности и трактуется в разных разделах геометрии различно.

В элементарной геометрии понятие линии не получает отчетливой формулировки. По существу, изучение линии здесь сводится к рассмотрению примеров (прямая, отрезок, ломаная, окружность и т. д.). При этом в каждом случае применяются специальные приемы для их изучения. Линии второго порядка впервые рассматривались Менехмом (IV в. до н. э.), который определил их как сечения прямого кругового конуса плоскостью. Аполлоний в « Конических сечениях» показал, что все три типа конических сечений могут быть получены при пересечении одного и того же прямого кругового конуса плоскостями, пересекающими его под разными углами. Он же ввел современные названия конических сечений.

В аналитической геометрии линия на плоскости определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $F(x, y) = 0$. При этом на функцию наложены ограничения так, чтобы это уравнение имело бесконечное множество решений и чтобы в то же время эти решения не заполняли целиком «куска плоскости». Среди этих линий важный класс составляют те, для которых функция $F(x, y)$ есть многочлен от двух переменных – алгебраические линии. Алгебраические линии, задаваемые уравнением 1-й степени, суть прямые. Уравнение 2-й степени, имеющее бесконечное множество решений, определяет эллипс, гиперболу, параболу или пару прямых.

Для тех разделов математики, в которых господствуют методы теории функций (анализ, дифференциальная геометрия и др.), естественное определение линии – задание ее параметрическими уравнениями. Но и здесь существуют разные точки зрения. Например, определение Жордана – множество точек плоскости, задаваемое уравнениями:

$$x = f_1(t), \;\; y = f_2(t), \qquad (3.1.1)$$

где f_1, f_2 – непрерывные функции параметра $t \in [a, b]$.

Это определение обобщается на любое топологическое пространство: множество точек топологического пространства, являющееся непрерывным образом отрезка, называется жордановой кривой. Однако построены такие непрерывные функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, что множество точек, определяемых уравнениями (3.1.1), заполняет квадрат (кривая Пеано).

Поскольку линия не может быть определена как непрерывный образ отрезка, то на отображение накладывается дополнительное ограничение.

Определение 3.1.1. Множество $\gamma \subset E_3$ называется элементарной кривой, если оно гомеоморфно некоторому числовому промежутку.

Примерами элементарных кривых служат отрезки прямых, дуги окружностей, эллипсов и т. д.

Пусть (a, b) – числовой промежуток и $f : (a, b) \to E_3$ – гомеоморфизм. Тогда положение любой точки M на кривой γ определяется единственным числом $t \in (a, b)$, образом которого эта точка является. Переменная t называется параметром точки M на кривой γ и записывают $M(t)$. Термин «параметр» («измеряю, сопоставляя с чем-либо») введен Лейбницем в 1860 году. Таким образом, отображение f есть не что иное, как координатная система, параметр t есть координата точки кривой в этой координатной системе. Заметим, что наряду с этой координатой, с точкой на кривой связаны еще три декартовых координаты и поэтому их необходимо различать. Из этого и вытекает необходимость введения термина *параметр.* Отображение f называют параметризацией кривой γ. На данной кривой γ от параметризации f можно перейти к новой параметризации с помощью функции $\tau = \varphi(t)$, где φ – взаимно-однозначная функция и φ, φ^{-1} – непрерывные функции. Кривую, снабженную параметризацией, называют параметризованной.

Из сказанного выше следует, что если в E_3 задан репер $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, то элементарная кривая определяется системой параметрических уравнений.

$$x = f_1(t), \ y = f_2(t), \ z = f_3(t), \ t \in (a, b), \qquad (3.1.2)$$

где f_i – непрерывные функции в интервале (a, b), которые и осуществляют гомеоморфное отображение (a, b) на линию γ.

Так как числовой интервал представляет собой одномерное многообразие и отображение f гомеоморфизм, то элементарная кривая есть одномерное многообразие.

Определение 3.1.2. Множество точек, задаваемое системой (3.1.2), где функции f_1, f_2, f_3 имеют непрерывные производные до порядка k включительно, причем для всякого t из (a, b) выполняется условие:

$$[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2 \neq 0, \qquad (3.1.3)$$

называется гладкой кривой класса C^k.

Если $k = 1$, то кривую γ называют *гладкой*. Можно показать, что гладкая кривая – это элементарная кривая.

Пусть уравнения (3.1.2) определяют гладкую кривую γ. В базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ построим вектор-функцию:

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}.$$

Тогда условие (3.1.3) запишется в виде $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$. Уравнение вида $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где $\vec{r}' \neq \vec{0}$, называется векторно-параметрическим уравнением кривой γ. Таким образом, годограф векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ есть кривая линия, заданная с точностью до движения.

Связное множество точек, в каждой точке которого существует в естественной индуцированной топологии окрестность, в которой точки множества образуют элементарную кривую, называют *простой* *кривой*. Окружность, например, не гомеоморфна интервалу (разная компактность). Следовательно, она не относится к элементарным кривым. Однако всякая ее открытая дуга является элементарной кривой, то есть окружность, как и эллипс, простая кривая. Таким образом, простая кривая как бы «склеена» из элементарных кусков. Если взять, например, «восьмерку», то ее к простым кривым отнести нельзя из-за наличия точки пересечения.

Множество точек, в каждой точке которого существует локальная окрестность, допускающая гомеоморфное отображение на элементарную кривую, называется *общей кривой*. С этой позиции «восьмерка» – это общая кривая, так как может быть локально отображена на окружность.

Дифференциальная геометрия занимается изучением устройства кривых в бесконечно малой окрестности каждой точки, а в этих окрестностях они являются элементарными кривыми. Заметим, что сюда попадают и несвязные множества. Таким образом, задача сводится к изучению элементарных кривых. В дальнейшем мы будем говорить об элементарных кривых, а случаи общих кривых оговаривать особо.

Среди множества параметризаций на элементарной кривой существует особая, обладающая тем свойством, что в любой точке первая производная от векторной функции по такому параметру имеет единичную длину. Действительно, пусть s – такой параметр. Тогда

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2 = 1.$$

Отсюда $d\vec{r}^2 = ds^2$. В силу свойства (2.4.16) имеем:

$$ds^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2, \text{или}\, ds = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.$$

Интегрируя данное равенство в пределах от t_1 до t_2, получим:

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}\, dt.$$

Величина $|s_2 - s_1|$ представляет длину дуги кривой между точками $M_1(s_1)$ и $M_2(s_2)$. Таким образом, искомая параметризация существует и параметром выступает длина дуги кривой линии. Такая параметризация не зависит от выбора исходной системы координат и поэтому называется натуральной. Запись $\vec{r}(s)$ означает, что на кривой линии введена натуральная параметризация. Заметим, если кривая допускает натуральную параметризацию, то она гладкая линия. Условимся производную по натуральному параметру s обозначать точкой над векторной функцией $\dot{\vec{r}}$. Тогда

$$\dot{\vec{r}}^2(s) = 1. \qquad (3.1.4)$$

Найдем первую производную от равенства (3.1.4). Учитывая свойства производной и то, что в левой части стоит скалярный квадрат векторной функции, получим:

$$\dot{\vec{r}} \circ \ddot{\vec{r}} = 0. \qquad (3.1.5)$$

Из полученного равенства вытекает утверждение – в случае натуральной параметризации кривой первая производная от векторной функции и ее вторая производная всегда ортогональны для любого значения параметра s.

3.2 Касательная к кривой

Выясним геометрический смысл вектора $\vec{r}\,'$ (здесь штрих вверху означает, что параметризация не натуральная, но все дальнейшие выводы распространяются и на натуральную параметризацию). Зададим на кривой γ две точки $M_0(t_0)$ и $M(t)$. Тогда прямая линия (M_0M) является для γ секущей, а вектор $\overrightarrow{M_0M}$ – ее направляющий вектор, который коллинеарен вектору $\frac{\vec r(t)-\vec r(t_0)}{t-t_0}$ (рис. 3.1). При $t \to t_0$ секущая (M_0M) стремится занять положение касательной. Так как

$$\vec r(\mathrm{t}_0)' = \lim_{t\to t_0}\frac{\vec r(t)-\vec r(t_0)}{t-t_0},$$

то $\vec r\,'(t_0)$ направляющий вектор этой касательной.

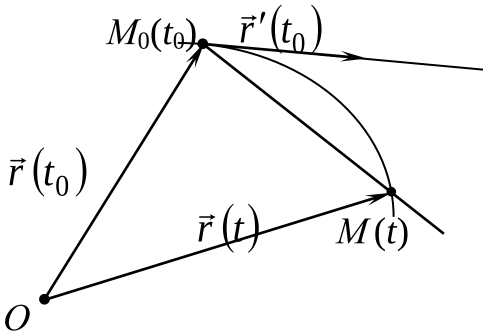

Рис. 3.2.1

Таким образом, требование $\vec r\,' \neq \vec 0$ означает существование касательной в каждой точке гладкой кривой. В случае, когда кривая не является гладкой, то на ней существуют точки, в которых касательная не определена или не существует. В этом и состоит отличие гладкой кривой от общей кривой.

Рассмотрим ситуацию на *примерах*. Пусть кривая задается векторной функцией $\vec r = t\vec\imath + t^3\vec\jmath$. Ее первая производная в произвольной точке имеет вид: $\vec r\,' = \vec\imath + 3t^2\vec\jmath$. Видно, что для любого значения параметра t первая производная отлична от нулевого вектора. Следовательно, кривая в каждой точке имеет единственную касательную, то есть она является гладкой. Годографом этой векторной функции является кубическая кривая.

Кривая линия, задаваемая уравнением $\vec r = t^2\vec\imath + t^3\vec\jmath$, гладкой линией не является, так как $\vec r\,' = 2t\vec\imath + 3t^2\vec\jmath$ и при $t = 0$ $\vec r\,' = \vec 0$. Так как направляющий вектор прямой не может быть нулевым, то касательная в точке с координатами (0, 0) не определена. Кривая, задаваемая данной векторной функцией, есть полукубическая парабола. Однако следует заметить, что вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$. Тогда, при условии $\vec{r}' = \vec{0}$ и $\vec{r}'' \neq \vec{0}$, из формулы Тейлора последует, что в дифференциальной окрестности второго порядка (члены третьего порядка малости и выше мы можем отбросить в силу их малости) $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{r}''$. То есть касательная к кривой в окрестности второго порядка будет задаваться точкой касания M_0 и второй производной $\vec{r}''$. В нашем примере $\vec{r}'' = 2\vec{\imath} + 6t\vec{\jmath}$ и в точке с параметром $t = 0$ этот вектор не нулевой. Следовательно, в точке (0,0) касательная будет.

Пусть точка N – текущая точка касательной.

Тогда касательная в точке $M_0(t_0)$ к кривой γ будет задаваться векторно-параметрическим уравнением:

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda\,\vec{r}'(t_0) \tag{3.2.1}$$

Здесь вектор $\vec{r}(t_0)$ есть радиус-вектор точки $M_0(t_0)$, то есть $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{OM}$.

Уравнение (3.2.1) называется векторно-параметрическим уравнением касательной к кривой γ в точке с параметром t_0.

Уравнение касательной можно записать в координатной форме. Пусть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты вектора $\vec{r}$. Координаты вектора $\vec{R}$ обозначим через X, $У$, Z. Из равенства (3.2.1) получаем:

$$X = x(t_0) + \lambda\, x'(t_0),\;\; У = y(t_0) + \lambda\, y'(t_0),\;\; Z = z(t_0) + \lambda\, z'(t_0). \tag{3.2.2}$$

Формулы (3.2.2) называются координатно-параметрическими формулами касательной.

Определение 3.2.1. Точка $M_0(t_0)$ на кривой называется особой, если в этой точке $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$.

Если точка особая, то в дифференциальной окрестности первого порядка этой точки касательная не определена. В этом случае касательная будет задаваться первой не нулевой производной более высокого порядка. Так, если $\vec{r}''(t_0) \neq \vec{0}$, то уравнение касательной будет иметь вид:

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda\,\vec{r}''(t_0). \tag{3.2.3}$$

Остановимся на основном свойстве касательной. Возьмем на кривой γ две точки $M_0(t_0)$ и $M(t)$ и рассмотрим пучок прямых с вершиной в точке $M_0(t_0)$. Пусть вектор $\vec{n}$ – направляющий вектор произвольной прямой пучка *l*. Найдем в пучке такую прямую, чтобы расстояние ρ от точки $M(t)$ до этой прямой было минимальным. Расстояние ρ находится по известной формуле:

$$\rho(M, l) = |\vec{n}|^{-1}\left|\vec{n} \times \overrightarrow{M_0M}\right|. \tag{3.2.4}$$

Согласно формуле Тейлора, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ можно представить в виде:

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}'(t_0)\Delta(t) + \cdots + \frac{1}{n!}\,\vec{r}^n(t_0)\Delta^n(t) + \vec{\theta}\,(t_0).$$

Тогда

$$\rho(M, l) = |\vec{n}|^{-1}\left|\vec{n} \times \vec{r}'(t_0)\Delta(t) + \cdots + \frac{1}{n!}\vec{n} \times \vec{r}^n(t_0)\Delta^n(t) + \vec{\theta}\,(t_0)\right|.$$

Отсюда видно, что расстояние будет минимальным, когда

$$\vec{n} \times \vec{r}'(t_0) = \vec{0},$$

Следовательно, векторы $\vec{n}$ и $\vec{r}'(t_0)$ должны быть коллинеарны, то есть прямая *l* является касательной. Таким образом, касательная – это прямая пучка, имеющая наименьшее отклонение от кривой.

3.3 Геометрические образы, связанные с точкой пространственной кривой

Будем считать, что кривая отнесена к натуральной параметризации, то есть

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \tag{3.3.1}$$

Первый геометрический образ, который связан с точкой кривой, это касательная $l_1 = \left(M(s_0),\ \dot{\vec{r}}(s_0)\right)$, здесь $\dot{\vec{r}}(s_0)$ – производная по натуральному параметру. Продифференцируем равенство $\dot{\vec{r}}^2 = 1$ и получим $\dot{\vec{r}} \circ \ddot{\vec{r}} = 0$. Представляя $\ddot{\vec{r}}$ в виде $k\vec{v}$, где $k = \left|\ddot{\vec{r}}\right|$ получим второй единичный вектор $\vec{v}$, ортогональный единичному вектору $\dot{\vec{r}}$. Вектор $\vec{v}(s_0)$ задает в точке $M(s_0)$ второй геометрический образ – прямую $l_2 = \left(M(s_0),\ \vec{v}(s_0)\right)$, которую называют главной нормалью в точке $M(s_0)$. Прямые линии l_1 и l_2 перпендикулярны и задают плоскость. Эта плоскость называется соприкасающейся. Соприкасающаяся плоскость впервые появляется у швейцарского математика Иоганна Бернулли (1698 г.). Она задается точкой и двумя векторами – $\left(M(s_0),\ \dot{\vec{r}}(s_0),\ \vec{v}(s_0)\right)$. Вектор $\vec{\beta}(s_0) = \dot{\vec{r}}(s_0) \times \vec{v}(s_0)$ является единичным нормальным вектором этой плоскости. Соприкасающаяся плоскость наиболее тесно «прижата» к кривой. Действительно, расстояние d от точки $M(s) \in \gamma$ до этой плоскости (см. рис. 3.3.1) будет равно:

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M} \circ \vec{\beta}(s_0)\right|. \tag{3.3.2}$$

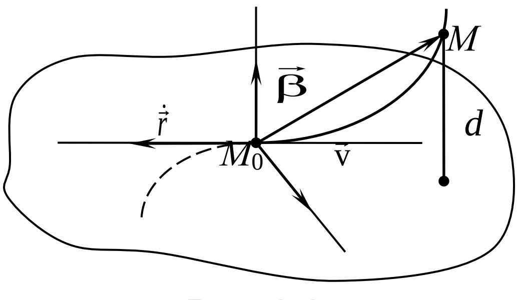

Рис. 3.3.1

Разложим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)$ по формуле Тейлора:

$$\overrightarrow{M_0M} = \dot{\vec{r}}(s_0)\Delta s + \ddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^2}{2!} + \dddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^3}{3!} + \ldots \tag{3.3.3}$$

Подставляя формулу (3.3.3) в формулу (3.3.2), получим в силу соотношений $\vec{r} \circ \vec{\beta} = 0$, $\vec{v} \circ \vec{\beta} = 0$:

$$d = \left| \dddot{\vec{r}}(s_0) \circ \vec{\beta}(s_0) \frac{\Delta s^3}{3!} + \ldots \right|.$$

Таким образом, расстояние d сравнимо с бесконечно малыми третьего порядка, что и доказывает наше утверждение.

С точкой M (s_0) также связаны прямая $(M(s_0), \vec{\beta}(s_0))$ – бинормаль, плоскость $(M(s_0), \vec{v}(s_0), \vec{\beta}(s_0))$ – нормальная плоскость, $(M(s_0), \dot{\vec{r}}(s_0), \vec{\beta}(s_0))$ – спрямляющая плоскость.

3.4 Кривизна и кручение линии

Из предыдущего параграфа следует, что в каждой точке М $\in \gamma$ возникает местная система координат, задаваемая репером $R = \{M, \dot{\vec{r}}, \vec{v}, \vec{\beta}\}$. Этот репер движется в пространстве вместе с точкой M по кривой γ. Поэтому этот репер называется сопровождающим. Впервые сопровождающий репер кривой был введен Эйлером в 1782 году. Его движение описывается формулами Френе, которые представляют собой разложения производных от векторов $\dot{\vec{r}}$, $\vec{v}$, $\vec{\beta}$ по этим же векторам. Они получаются в результате дифференцирования соотношений:

$$\dot{\vec{r}}^2 = 1,\ \vec{v}^2 = 1,\ \vec{\beta}^2 = 1,\ \dot{\vec{r}} \circ \vec{v} = 0,\ \dot{\vec{r}} \circ \vec{\beta} = 0,\ \vec{v} \circ \vec{\beta} = 0$$

и имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = k\vec{v}, \\ \dot{\vec{v}} = -k\dot{\vec{r}} + \chi\vec{\beta}, \\ \dot{\vec{\beta}} = \chi\vec{v}. \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

Из формул (3.4.1) следует, что движение сопровождающего репера, а следовательно, и форма кривой, зависит от функций $k = k(s)$ и $\chi = \chi(s)$, которые называются, соответственно, кривизной и кручением кривой. Причем $k \geq 0$, так как $k = |\ddot{\vec{r}}|$. В силу этого обстоятельства, вектор $\ddot{\vec{r}}(s)$ называют вектором кривизны в точке с параметром s и он задает главную нормаль в этой точке.

Формулы (3.4.1) впервые были найдены французом Фредериком Френе (1847 г.). Термин « кручение» был введен Луи Валле (1819 г.).

Выясним геометрический смысл кривизны. С этой целью рассмотрим три задачи.

1. Найдем кривизну окружности радиуса a. Начало координат пометим в центр окружности и зададим на окружности натуральную параметризацию. Пусть радиус-вектор текущей точки M на окружности образует с вектором $\vec{j}$ угол φ и s – длина дуги окружности. Тогда радиус, величина угла и длина дуги будут связаны между собой, $\varphi\, a = s$. Искомое уравнение будет иметь вид:

$$\vec{r}(s) = a\,(\,\cos\frac{s}{a}\,\vec{\imath} + \,\sin\frac{s}{a}\,\vec{\jmath}\,).$$

Отсюда имеем:

$$\ddot{\vec{r}}\,(s) = -\frac{1}{a}\left(\cos\frac{s}{a}\,\vec{\imath} + \,\sin\frac{s}{a}\,\vec{\jmath}\right),\ \ \left|\ddot{\vec{r}}\,(s)\right| = \frac{1}{a}\,.$$

Из этих формул вытекает: вектор кривизны в точке M направлен в центр окружности, центр окружности на главной нормали в точке M, кривизна окружности постоянна во всех ее точках и есть величина, обратная радиусу.

2. Рассмотрим две кривых $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(s)$ и $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(s)$. Будем считать, что они имеют общую точку O. Пусть $M(s)$ – текущая точка первой кривой, а $N(s)$ – второй. Параметризации на кривых предполагается согласованными, то есть точка O на обеих кривых имеет один и тот же параметр. Оценим порядок малости вектора $\overrightarrow{NM}$. Имеем $\overrightarrow{NM} =$

$\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)$. Разложим каждый из векторов по формуле Тейлора и учтем при этом формулы Френе (представляем читателю проделать это самостоятельно). Если у кривых в точке O нет общей касательной, то кривые пересекаются, если общая касательная есть, то вектор $\overrightarrow{NM}$ будет сравним с бесконечно малыми второго порядка и кривые называются *касающимися.* Если у кривых будет в точке O общая соприкасающаяся плоскость, тогда вектор $\overrightarrow{NM}$ будет сравним с бесконечно малыми второго порядка. В этом случае кривые называются *соприкасающимися*. У таких кривых в общей точке совпадают кривизны, касательные и главные нормали.

3. Найдем соприкасающуюся окружность к произвольной кривой в ее произвольной точке. Согласно второй задаче, у кривой и окружности должны совпадать соприкасающиеся плоскости. Так как окружность – плоская кривая, то она лежит в своей соприкасающейся плоскости. Следовательно, соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости кривой, ее центр лежит на главной нормали кривой, а радиус находится из условия $\kappa r = 1$.

Вывод. Кривизна кривой в данной ее точке M есть величина, обратная радиусу соприкасающейся окружности в этой точке (рис. 3.4.1).

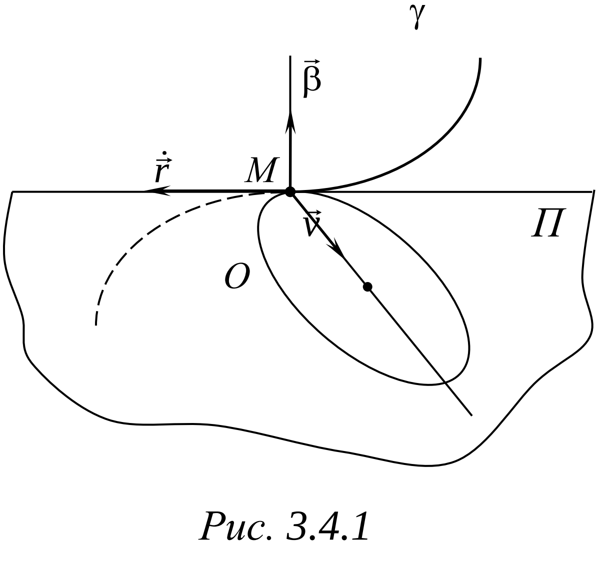

Рис. 3.4.1

С точностью до бесконечно малых второго порядка дуга кривой γ совпадает с дугой соприкасающейся окружности.

Интерес представляет случай равенства нулю кривизны в каждой точке кривой. В этом случае $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$, и все последующие производные тоже будут равны нулю. По Формуле Тейлора получаем:

$$\vec{r}\left(s\right) = \vec{r}\left(s_0\right) + \dot{\vec{r}}\left(s_0\right)\Delta s,$$

а это есть уравнение прямой. Верно и обратное.

Вывод. Равенство кривизны нулю в каждой точке есть характеристический признак прямой.

В случае равенства нулю кручения в каждой точке, из формул Френе будем иметь $\dot{\vec{v}} = -k\vec{r}$. Это означает, что вектор $\vec{r}\left(s\right)$ в соответствии с формулой Тейлора может быть представлен в виде:

$$\vec{r}\left(s\right) = \vec{r}\left(s_0\right) + \lambda\left(s\right)\dot{\vec{r}}\left(s_0\right) + \mu\left(s\right)\vec{v}\left(s_0\right).$$

Следовательно, γ лежит целиком в своей соприкасающейся плоскости. Справедливо и обратное.

Вывод. Равенство кручения нулю в каждой точке кривой есть характеристический признак плоской линии.

Можно показать, что если гладкие кривые γ_1 и γ_2, отнесенные к естественной параметризации, имеют в соответствующих точках одинаковую кривизну и кручение:

$$k_1(s) = k_2(s),\ \ \chi_1(s) = \chi_2(s),$$

то существует наложение, переводящее кривую γ_1 в кривую γ_2. Другими словами, кривизна и кручение определяют кривую с точностью до положения в пространстве.

3.5 Исследование плоских кривых

Плоские кривые можно задавать в разных формах. Если кривая является общей кривой, то она задается векторно-параметрическим уравнением или системой координатно-параметрических уравнений:

$$\vec{r} = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath}, \qquad (3.5.1)$$

$$\begin{cases} \mathrm{x} = f_1(t), \\ \mathrm{y} = f_2(t). \end{cases} \qquad (3.5.2)$$

Эти задания эквивалентны.

Если в системе (3.5.2) можно исключить параметр (заметим, что это не всегда возможно), то кривая линия будет задаваться неявным уравнением:

$$F(x\,, y) = 0. \qquad (3.5.3)$$

Если функция $F(x, y)$ представляет собой многочлен от переменных x и y, то кривая в этом случае называется алгебраической. Таким образом, алгебраическую кривую можно задать тремя способами.

Если уравнение (3.5.3) допускает выражение одной переменной через другую, например:

$$y = f(x), \qquad (3.5.4)$$

то в этом случае говорят, что кривая задана явным уравнением. Кривая, задаваемая уравнением (3.5.4), является элементарной.

Под исследованием плоской кривой мы понимаем нахождение ее характеристик, позволяющих построить график этой кривой. Здесь можно выделить несколько этапов.

1. Нахождение области задания кривой. Для этого устанавливаются области определения функций (3.5.2), (3.5.3) или (3.5.4). На основании области определения устанавливается, является ли данная линия замкнутой или нет; связная она или нет, и если нет, то сколько

ветвей она имеет, сколько из них уходят в бесконечность. Если расстояние от текущей точки $M(t)$ до начала координат стремится к бесконечности при стремлении параметра t к значению t_0, то говорят, что линия уходит в бесконечность при $t \to t_0$.

2. Полезно найти точки пересечения линии с осями координат, если такие имеются.

3. Найти на линии точки, в которых касательные имеют заданное направление. Для этого необходимо воспользоваться уравнением касательной в произвольной точке кривой. Для задания (3.5.2) они имеют вид:

$$X = x(t_0) + \lambda\, x'(t_0),\;\; У = y(t_0) + \lambda\, y'(t_0) \qquad (3.5.5)$$

Эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$(X - x(t_0))\, y'(t_0) - (У -- y(t_0))x'(t_0) = 0. \qquad (3.5.6)$$

Если линия задана неявным уравнением, то ее можно задать координатно-параметрическими уравнениями (3.5.2). Подставляя эти функции в (3.5.3), получим:

$$F(x(f_1(t)), y(f_2(t))) = 0.$$

Находя полную производную от левой части по аргументу t будем иметь:

$$F_x f_1' + F_y f_2' \;= 0,$$

где F_x и F_y – частные производные. Отсюда,

$$F_x : F_y \;= -f_2' : f_1'.$$

Таким образом, частные производные $-F_x$ и F_y – это координаты касательного вектора к кривой линии. Делая замену в уравнении (3.5.6) и обозначая через x_0 и y_0 координаты точки касания, получим уравнение касательной к линии в случае ее неявного задания:

$$(X - x_0))\, F_y(x_0, y_0) + (\text{У}-- y_0))\, F_x(x_0, y_0) = 0. \qquad (3.5.7)$$

Пусть линия задана явным уравнением (3.5.4). Преобразуем его к неявному уравнению $f(x) - y = 0$. Тогда,

$$F_x = f',\ F_y\ = 1.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3.5.7), получим уравнение касательной, отвечающее явному заданию кривой:

$$(X - x_0))\, f'(x_0, y_0) + \text{У} - y_0 = 0. \qquad (3.5.8)$$

Если в точке M_0 кривой существует единственная касательная, то эту точку будем называть обыкновенной.

Если кривая линия проходит через точку M_0 дважды (или несколько раз) при различных значениях параметра и при этом касательные векторы для этих значений параметра не коллинеарные, то точка M_0 называется точкой *самопересечения* и направление ветвей в этой точке задается соответствующими касательными векторами (Рис. 3.5.1). В случае коллинеарности этих векторов точка M_0 называется точкой самоприкосновения (рис. 3.5.2).

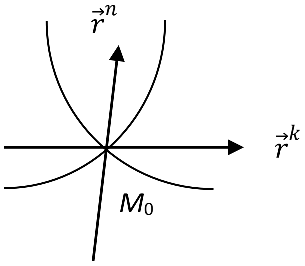

Рис. 3.5.1

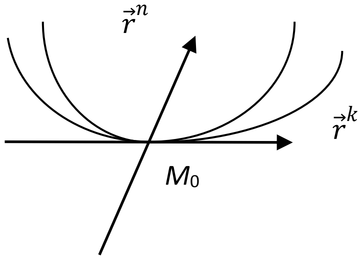

Рис. 3.5.2

Выявляется наличие особых точек и устанавливается их тип. Напомним, мы назвали точку на линии особой, если в этой точке касательный вектор нулевой. Следовательно, при задании кривой формулами (3.5.2) координаты особой точки находятся как решение системы

$$\begin{cases} f_1'(t) = 0 \\ f_2'(t) = 0. \end{cases} \qquad (3.5.9)$$

В случае неявного задания, особая точка находится как решение системы

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ F_x(x, y) = 0, \\ F_y(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (3.5.10)$$

В случае явного задания, особых точек нет.

Если система (3.5.9) не совместна, то особых точек на кривой нет. Аналогично для системы (3.5.10). Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ особая. Тип особой точки устанавливают по строению линии в окрестности этой точки. С этой целью вычисляют в особой точке M_0 производные порядка два и выше. Здесь возможны два варианта.

а) Все производные нулевые. В этом случае формула Тейлора запишется в виде $\vec{r}(t) = \vec{r}(r_0)$. Отсюда следует, что в окрестности точки M_0 других точек кривой нет. Такую точку называют изолированной.

б) В точке M_0 не все производные нулевые. Пусть, например, $\vec{r}^k$ – первая не нулевая производная порядка *к* (*к* = 2,…) и пусть $\vec{r}^n$ – первая ей не коллинеарная производная более высокого порядка, то есть $\vec{r}^k \nparallel \vec{r}^n$. Рассмотрим формулу Тейлора для этого случая:

$$\overrightarrow{M_0M} = \frac{1}{k!}\vec{r}^k(t_0)\Delta^k + \cdots + \frac{1}{n!}\vec{r}^n(t_0)\Delta^n. \qquad (3.5.11)$$

Члены, порядок которых выше n, мы отбросили в силу их малости.

Зададим на кривой локальный (местный) репер $\{M_0, \vec{r}^k, \vec{r}^n\}$ с началом в точке M_0. Оси этой системы координат разбивают плоскость на четыре четверти. Обозначим координаты текущей точки M на кривой через u, v. Тогда точка M будет находиться в первой четверти, если $u > 0$ и $v > 0$; во второй, если $u < 0$ и $v > 0$, в третьей при u

< 0 и $v < 0$; в четвертой, если $u > 0$ и $v < 0$. Согласно формуле (3.5.11), $u = \frac{1}{k!}\Delta^k$; $v = \frac{1}{n!}\Delta^n$. Заметим, что при положительных Δ точка M будет находиться в первой четверти и при стремлении Δ к нулю приближаться к точке M_0 по линии, касающейся оси (M_0, $\vec{r}^k$) в точке M_0. Это будет первая ветвь кривой линии (рис. 3.5.3).

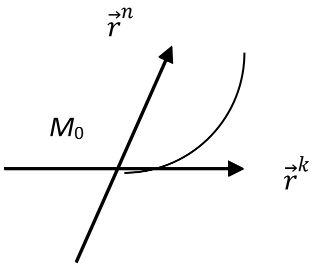

Рис. 3.5.3

При отрицательных значениях приращения Δ положение второй ветви будет зависеть от четности показателей *к и п* .

а) Если *к* – нечетное а *п* – четное вторая ветвь, выходя из точки M_0, уйдет во вторую четверть (рис. 3.5.4). В этом случае точку M_0 называют *обыкновенной в окрестности к-го порядка*.

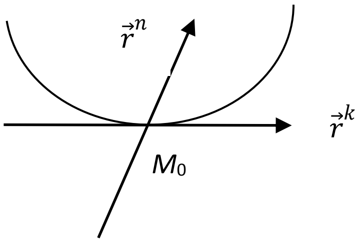

Рис. 3.5.4

б) *к* – нечетное а *п* – нечетное. Вторая ветвь выходя из точки M_0 уйдет в третью четверть (рис. 3.5.5).

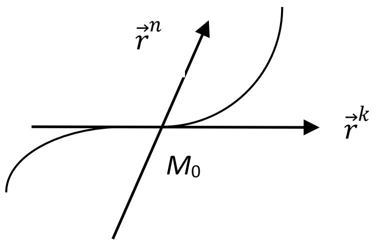

Рис. 3.5.5

В этом случае особая точка называется *точкой перегиба*.

в) $к$ – четное а n – нечетное. Ветвь, выходя из точки M_0, уйдет в четвертую четверть (рис. 3.5.6).

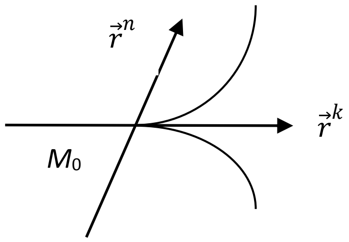

Рис. 3.5.6

Особая точка называется *точкой возврата первого рода.*

г) $к$ – четное а n – четное. Ветвь, выходя из точки M_0, уйдет в четвертую четверть выше первой четверти, так как между четными степенями будет находится нечетная (рис. 3.5.7).

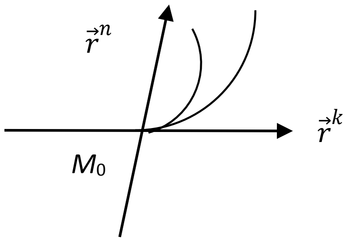

Рис. 3.5.7

Рассмотрим случай неявного задания кривой. Дифференцируя уравнение $F_xf_1' + F_yf_2' = 0$, получим

$$F_{xx}f_1'^2 + 2F_{xy}f_1'f_2' + F_{yy}f_2'^2 + F_xf_1'' + F_yf_2'' = 0. \quad (а)$$

Так как в особой точке $F_x = 0$, $F_y = 0$, то это уравнение принимает вид: $F_{xx}f_1'^2 + 2F_{xy}f_1'f_2' + F_{yy}f_2'^2 = 0$. Решение ($f_1':f_2'$) этого уравнения зависит от его дискриминанта $\Delta = F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}$.

а) $\Delta > 0$. Решений будет два и, следовательно, в точке M_0 имеем две разных касательных. Точка M_0 есть точка самопересечения. Строение кривой в окрестности этой точки такое, как на рисунке 3.5.1.

б) $\Delta = 0$. Касательные в особой точке совпадают. Возможны варианты обыкновенной точки, точки перегиба, точки возврата первого рода или второго рода. В данном случае, для определения типа точки, необходимо проанализировать область задания кривой линии.

В том случае, если в особой точке все частные производные второго порядка равны нулю, необходимо уравнение (*а*) продиффеdo ренцировать еще раз, записать его вид в особой точке и решить его и так далее.,

4. В том случае, когда кривая имеет ветви, уходящие в бесконечность, то имеет смысл выяснить наличие асимптот у такой кривой.

а) Рассмотрим случай параметрического задания кривой. Пусть при $t \to t_0$ ветка линии уходит в бесконечность. Прямая линия l называется асимптотой кривой γ, если расстояние от текущей точки M кривой γ до прямой l стремится к нулю при $t \to t_0$. Пусть асимптота l задается уравнением

$$y = \kappa x + h.$$

Подставляя в это уравнение координаты текущей точки $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$, получим:

$$f_2(t) = \kappa\, f_1(t) + h. \tag{3.5.12}$$

Отсюда находим угловой коэффициент:

$$\kappa = \lim_{t \to t_0} \frac{f_2(t)}{f_1(t_0)}. \tag{3.5.13}$$

Если этот предел не существует, то асимптоты у линии нет. Пусть предел (3.5.13) существует, и он конечный. Обозначим его через κ_0. Тогда из формулы (3.5.12) получаем:

$$h = \lim_{t \to t_0} (f_2(t) - \ k_0 f_1(t)). \tag{3.5.14}$$

В случае существования конечного предела (3.5.14) асимптота существует.

Если функции $f_2(t)$ и $f_1(t)$, задающие кривую, таковы, что $\lim\limits_{t\to t_0} f_2(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} f_1(t) = a$, кривая линия имеет вертикальную асимптоту:

$$y = a.$$

б) Рассмотрим случай неявного задания кривой, а именно когда кривая является алгебраической:

$$F \equiv a_{n0}\, x^n + a_{0n} y^n + a_{ij}\, x^i y^j + a_{10}\, x + a_{01}\, y + \ldots + a_{00} = 0. \quad (3.5.15)$$

Здесь i *и* j принимают значения от 1 до n.

В пункте *а*) мы видели, что способы нахождения наклонных асимптот и вертикальных различаются. Это объясняется тем, что для вертикальной асимптоты угловой коэффициент равен бесконечности. Поэтому вначале выясним алгоритм нахождения вертикальных асимптот. Пусть прямая линия l, задаваемая уравнением $x = a$, является асимптотой. Найдем отклонение текущей точки асимптоты от кривой. Для этого подставим в уравнение (3.5.15) значение $x = a$ и получим:

$$F_1 \equiv a_{n0}\, a^n + a_{0n} y^n + a_{ij}\, a^i y^j + \ldots\, a_{10}\, a + a_{01}\, y + a_{00} = 0. \quad (3.5.16)$$

Здесь F_1 – многочлен от переменной y.

Вынесем из многочлена наивысшую степень переменной y:

$$F_1 = y^n\,(a_{n0}\, a\, y^{-n} + a_{0n} + a_{ij}\, a^i y^{j-n} + \ldots + a_{10}\, a + a_{01}\, y^{1-n} + y^{-n}\, a_{00}).$$

Выражение F_1 есть искомое отклонение. По определению асимптоты, отклонение F_1 должно стремиться к нулю. Так как при этом $y \to \pm\infty$, следовательно, выражение, стоящее в скобках должно стремиться к нулю. При этом все члены, степени которых ниже n, тоже будут стремиться к нулю. В результате приходим к уравнению от неизвестного a:

$$a_{0n} + a_{ij}\, a^{i} = 0. \qquad (3.5.16)$$

Если это уравнение не имеет действительных корней, то асимптот нет. Каждому действительному корню a соответствует асимптота $x = a$.

Найдем наклонные асимптоты кривой, заданной неявным уравнением. В этом случае асимптота l задается уравнением $y = \kappa x + b$. Отклонение F_1 получим, подставляя $y = \kappa x + b$ в многочлен F:

$$a_{n0}\, x^{n} + a_{0n}\,(\kappa x + b)^{n} + a_{ij}\, x^{i}\,(\kappa x + b)^{\,j} + \ldots + a_{00}.$$

Вынося за скобки x^{n} и требуя, чтобы при $x \to \pm\infty$ все выражение стремилось к нулю, получим:

$$a_{n0} + a_{0n}\,\kappa^{\,n} + a_{ij}\,\kappa^{\,j} = 0^{j} \qquad (3.5.17)$$

Если уравнение (3.5.17) действительных корней не имеет, то асимптот нет.

Пусть κ_1 – один из действительных корней уравнения (3.5.17). В этом случае замена $y = \kappa_1\, x + b$ понизит порядок уравнения (3.5.16) и оно будет иметь вид:

$$F_2 \equiv a_{0n}\,\kappa_1\, x^{n-1} + a_{ij}\, x^{i}\,(\kappa_1\, x + b)^{\,j} + \ldots + a_{00} \qquad (3.5.18)$$

Далее поступаем, как и выше, делим на старшую степень переменной x, то есть на x^{n-1}, и приходим к уравнению с неизвестным b:

$$a_{0n}\,\kappa_1 + a_{ij}\,(\kappa_1^{\,j} + \ldots + b^{\,j}) = 0. \qquad (3.5.19)$$

Если уравнение (3.5.19) не имеет действительных корней, то асимптот нет. Если b_1 – вещественный корень уравнения (3.5.19), то прямая $y = \kappa_1 x + b_1$ – асимптота кривой. Таким образом, число асимптот зависит от числа решений уравнений (3.5.17) и (3.5.19).

в) В случае задания кривой явным уравнением $y = f\,(x)$ ее асимптоты ищутся так же, как для параметрического задания. Для этого достаточно перейти к параметрическому заданию кривой:

$$x = t, \quad y = f\,(t).$$

5. При исследовании кривой полезно установить симметрию кривой относительно осей координат, относительно начала координат. Так, если для всякой точки (x, y), принадлежащей кривой, следует, что точка $(-x, y)$ тоже принадлежит кривой, то кривая симметрична относительно оси ординат. Если точка $(x, -y)$ принадлежит кривой, то кривая симметрична относительно оси абсцисс, в случае принадлежности кривой точки $(-x, -y)$, кривая симметрична относительно начала координат.

6. Полезно, в случае наличия точек с горизонтальными касательными, выяснить, являются ли они точками максимума или минимума на некотором интервале.

Здесь мы отметили основные моменты исследования кривых. В некоторых задачах для выяснения вида кривой достаточно выполнить несколько из перечисленных пунктов, например, определить область задания кривой, установить ее гладкость и выявить асимптоты кривой, в других задачах даже перечисленных выше семи пунктов оказывается недостаточно. В это случае проводятся дополнительные исследования. Например, устанавливается наличие точек, в которых кривизна равна нулю или другому заданному значению. В этом случае строение кривой в этой точке определяется дугой соответствующей соприкасающейся окружности. С этой целью вычисляются координаты центра окружности, а радиус есть величина обратная кривизне кривой в рассматриваемой точке.

Рассмотрим несколько примеров исследования кривых.

Пример 1. Кривая задана координатно-параметрическими уравнениями:

$$x = t^2,\ y = t^4 + t^5. \qquad (3.5.20)$$

Исследовать кривую и построить ее график.

1. Кривая существует для любых значений параметра t принадлежащих промежутку $(-\infty, +\infty)$. При этом $x \geq 0$, $y \in (-\infty, +\infty)$. Таким образом, кривая располагается в правой полуплоскости от оси ординат.

2. При значении $t = 0$ кривая пересекает оси координат в точке $O(0,0)$. Второе уравнение кривой приведем к виду $y = t^4 (1+ t)$. Отсюда при $t = –1$ получаем вторую точку $A(1, 0)$ с осью абсцисс.

3. Найдем особые точки кривой. Приравняем нулю первые производные от функций (3.5.20):

$$2t = 0,\ 4t^3 + 5t^4 = 0.$$

Решение этой системы $t = 0$, точка O особая. Для определения ее типа найдем вторые производные в этой точке:

$$x'' = 2,\ y'' = 12t^2 + 20t^3 \Rightarrow \vec{r}^{(2)} = (2,0),$$

касательный вектор в точке O.

Далее ищем производную в этой точке, не коллинеарную вектору $\vec{r}^{(2)}$. Очевидно, что $\vec{r}^{(3)}(0) = \vec{0}$ и он коллинеарен вектору $\vec{r}^{(2)}$, а вектор $\vec{r}^{(4)}(0, 24)$ ему не коллинеарен. Таким образом, локальный репер в точке O состоит из векторов $\vec{r}^{(2)}$ и $\vec{r}^{(4)}$. Так как порядок производных у них четный, то точка O является точкой возврата второго рода и кривая располагается в окрестности этой точки в первой четверти относительно локального базиса.

4. Найдем точки на кривой, в которых касательная будет параллельна одной из осей координат. Вектор $\vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ параллелен оси ординат, если первая координата равна нулю. Отсюда имеем $t = 0$ и получаем особую точку, и других точек не будет. Из условия $y' = 0$ получаем, что касательный вектор параллелен оси абсцисс. Из урав-

нения 4 t^3 + 5 t^4 =0 получаем t = 0 и t = –0,8. Первое решение дает точку O, а второе, в силу (3.5.20), точку с координатами (0,64; 0,7).

Так, при $t \to \pm\infty$ координаты $x(t)$ и $y(t)$ стремятся к бесконечности, поэтому вертикальных асимптот нет. Так как $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^4+t^5}{t^2} = \pm\infty$, то наклонных асимптот у кривой нет.

На основе найденных свойств, график кривой должен выглядеть следующим образом (рис. 3.5.8).

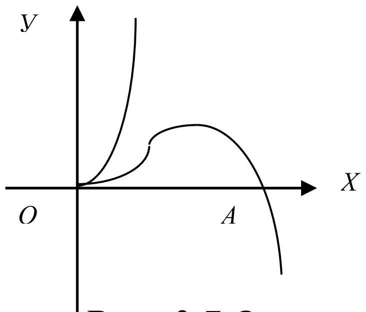

Рис. 3.5.8

Пример 2. Кривая задана неявным уравнением

$$F \equiv 9\,x^2 + 4y^2 - x^2y^2 = 0. \tag{3.5.21}$$

Исследовать кривую и построить график функции.

1. Область задания кривой. Преобразуем уравнение кривой к виду $4y^2 = x^2(y^2 - 9)$. Отсюда, $y^2 - 9 \geq 0$ и, следовательно, $3\leq y \leq -3$. Преобразуем уравнение (3.5.21) иначе: $9\,x^2 = y^2\,(x^2 - 4)$. Отсюда получаем $2 \leq y \leq -2$. Таким образом, кривая состоит из точки $O(0,0)$ и точек, располагающихся в четырех областях:

а) $x \geq 2, y \geq 3$; б) $x \geq 2, y \leq -3$; в) $x \leq -2, y \geq 3$; *г)* $x \leq -2, y \leq -3$;

В силу четности степеней у переменных кривая симметрична относительно осей координат.

2. Найдем вертикальные асимптоты $x = a$. Подставляя это значение в (3.5.21) и вынося старшую степень переменной y, получим $y^2(9\,a^2y^{-2} + 4 - a^2) = 0$. Отсюда при $y\to\infty$ получим $4 - a^2 = 0$. Следовательно, кривая имеет две вертикальные асимптоты $x = 2$ и $x = -2$.

Найдем наклонные асимптоты $y = кx + b$. Заменим переменную y в уравнении кривой $9\ x^2 + 4(кx + b)^2 - x^2(кx + b)^2 = 0$ и, вынося за скобки четвертую степень переменной x, получим отклонение для точек асимптоты от кривой:

$$x^4(9x^{-2} + \ 4(k^2x^{-2} + \ 2kbx^{-3} + b^2x^{-4}) - \ k^2 - 2kbx^{-1} - b^2x^{-4}).$$

При $x \to \infty$ получим $к^2 = 0$. Для этого значения углового коэффициента отклонение примет $9\ x^2 + 4\ b^{\,2} - x^2\ b^{\,2}$. Вынося вторую степень переменной x и устремляя $x \to \infty$, получим $9 - b^{\,2} =0$. В результате получаем две горизонтальных асимптоты $y = 3$, $y = -3$.

3. Выясним наличие особых точек кривой. Находим частные производные от функции F:

$$F_x = 18\,x - 2\,x\,y^2, \quad F_y = 8y - 2x^2y.$$

Далее решаем систему:

$$\begin{cases} 9\,x^2 \ + \ 4y^2 - \ x^2y^2 \ = \ 0, \\ 18\,x \ - \ 2\,x\,\mathrm{y}^2 \ = 0, \\ 8y - 2\,x^2y = 0. \end{cases}$$

Видно, что $x = 0$, $y = 0$ – решение данной системы. Следовательно, точка O особая.

Для установления типа особой точки найдем вторые частные производные и вычислим их в особой точке.

$$F_{xx} = 18 - 2y^2, \ F_{xy} = -\,x\,y, \quad F_{yy} = 8 - 2x^2.$$

Дискриминант $\Delta = F_{xy}{}^2 - F_{xx}\ F_{yy}$ в точке O будет отрицателен ($\Delta = -144$). Следовательно, касательных в этой точке нет, то есть она изолированная. График кривой представлен на рисунке 3.5.9.

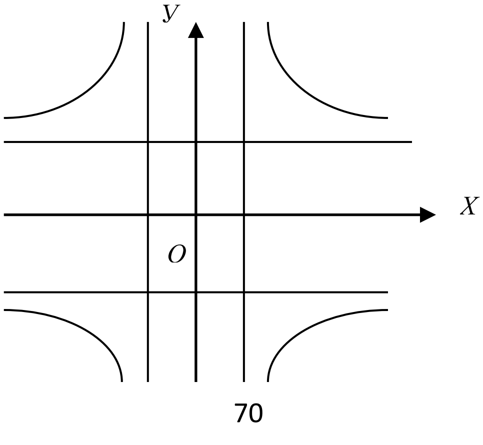

Рис. 3.5.9

Пример 3. Кривая задана неявным уравнением:

$$y = \frac{x^3}{x^2-4}. \qquad (3.5.22)$$

Исследовать кривую и построить ее график.

1. Область задания кривой. Функция (3.5.22) не определена лишь при $x = \pm 2$. Таким образом, кривая располагается в трех полосах:

$$\text{а) } x < -2, \quad \text{б) } -2 < x < 2; \quad \text{в) } x > 2.$$

Заметим сразу, что кривая симметрична относительно начала координат, так как если точка (x, y принадлежит кривой, то точка ($-x$, $-$у) также принадлежит кривой.

2. Найдем асимптоты кривой. Заметим, что при $x \to \pm 2$ переменная y стремится к бесконечности. Следовательно, кривая имеет две вертикальных асимптоты $x = 2$ и $x = -2$.

Наклонные асимптоты у кривой могут быть, так как при $x \to \pm \infty$ вторая переменная тоже стремится к бесконечности, то есть $y \to \pm \infty$. В случае явного задания параметром на кривой служит одна из координат. В данном случае это абсцисса точки.. Параметрическое задание кривой выглядит так:

$$x = x, \quad y = \frac{x^3}{x^2-4}.$$

В этом случае угловой коэффициент находится из формулы:

$$к = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}.$$

В нашем случаемы имеем:

$$\kappa = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x^2-4)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1.$$

Для коэффициента b будем иметь:

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2} = 0.$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты будет $y = x$. Заметим, что кривая пересекает эту асимптоту в точке O.

3. Найдем касательный вектор к кривой в произвольной точке. Его координаты (x', y') будут $(1, \frac{x^2(x^2-12)}{(t^2-4)^2})$. В особой точке касательный вектор имеет координаты (1, 0).

Точек, в которых касательная параллельна оси ординат, на кривой нет. Точки с горизонтальной касательной определяются из уравнения $x^2(x^2 - 12) = 0$. Оно имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_{2,\,3} = \pm\, 2\sqrt{3}$. В первом случае мы имеем точку O. Подставляя два других корня в (3.5.22) получим $y_2 = 3\sqrt{3}$ и $y_3 = -3\sqrt{3}$. Итак, кроме точки O имеем еще две точки с горизонтальными касательными $A(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$, $B(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$.

Учитывая, что знаменатель в формуле (3.5.22) при значениях переменной x в промежутке (–2, 0) отрицателен, ветка кривой, выходя из точки O, уйдет к асимптоте $x = -2$ во второй четверти, а при значениях $0 < x < 2$ вторая ветка будет находиться в четвертой четверти, приближаясь к асимптоте $x = 2$. Так как в точке O ось абсцисс является касательной к кривой, то точка O является точкой перегиба. Из формулы (3.5.22) следует симметрия кривой относительно начала координат. График кривой представлен на рисунке 3.5.10.

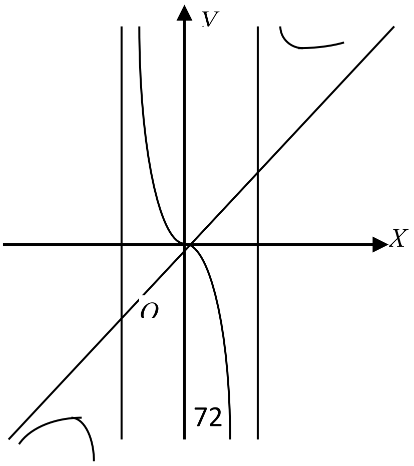

Рис. 3.13

Задания для самостоятельной работы

1. Выделите существенные признаки понятия «элементарная линия».

2. Что такое параметризация кривой? Сколько параметризаций допускает кривая?

3. Приведите примеры элементарных кривых и обоснуйте их.

4. Сформулируйте определение гладкой кривой, приведите примеры гладких кривых и обоснуйте их.

5. Являются ли гладкими кривые, задаваемые уравнениями:

1) $x = t, \quad y = t^3$;
2) $x = t^2, \quad y = t^3$;
3) $x = t^2 + t + 1, \; y = t^3$;
4) $x = t^3, \; y = t^4$;
5) $x = t^2 + t + 1, \; y = t^3 + t^2$;
6) $x = t^2 + t, \; y = e^{t^2}$;
7) $y^3 + y^2 + x = 0$;
8) $y^3 + y^2 + x^2 = 0$;
9) $y^2 - x^2 + x^4 = 0$;
10) $y^2 = x(x - 2)^2$;
11) $x^2y^2 = 2$;
12) $x^5 - x^4 + y^2 = 0$.

6. Выведите координатно-параметрические уравнения касательной к кривой.

7. Сколько кривых задает векторно-параметрическое уравнение?

8. Укажите признак, отличающий естественную параметризацию от произвольной параметризации.

9. Выведите уравнения основных геометрических образов, связанных с точкой кривой.

10. Выведите формулы Френе.

11. Докажите, что кривизна и кручение кривой в случае произвольной параметризации задается формулами:

$$k = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}\,, \quad \chi = \frac{(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,''')}{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'')^2}$$

12. Докажите, что кривизна кривой задаваемой в координатно-параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, задается формулой:

$$k = |x'y'' - x''y'| : (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

13. Докажите, что кривизна кривой задаваемой в явной форме $y = y(x)$, задается формулой:

$$k = |y''| : (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

14. Докажите, что кривизна кривой задаваемой в неявной форме $F\,(x, y) = 0$, задается формулой:

$$k = mod \begin{vmatrix} F_x & F_y & 0 \\ F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \end{vmatrix} : (F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

15. Докажите необходимый и достаточный признак того, что линия является прямой.

16. Докажите необходимый и достаточный признак того, что линия является плоской.

17. Исследуйте кривые в задании 5 и постройте их графики.

18. Исследуйте кривые и постойте их графики:

18.1. $x = t^4$, $y = t^2 + t^5$.

18.2. $x = \frac{t}{1- t^2}\,,\ y = \frac{t\,(1-2\,t^2)}{1- t^2}$.

18.3. $x = \frac{(t+2)^2}{t+1}\,,\ y = \frac{(t-2)^2}{t\,-1}$.

18.4. $x = 3cos^3(t),\ y = 3sin^3(t)$.

18.5. $x = t - sin\,t$, $y = 1 - cos\,t$.

18.6. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4\,(x^2 + y^2) = 0$.

18.7. $x^4 - x^2 + y^4 - y^2 = 0$.

18.8. $x^2\,y^2 + \text{y} - 1 = 0$.

18.9. $(x^2 - y^2)^2 - x^2 - y^2 = 0$.

18.10. $x^2(x - 1) + y^3 = 0$.

18.11. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

18.12. $y = \frac{x^2 - x^3}{x^2 - 4}$.

18.13. $y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$.

4 ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

4.1 Понятие гладкой параметризованной поверхности

Поверхность – одно из основных понятий геометрии. Определения поверхности в различных областях геометрии существенно отличаются друг от друга.

В элементарной геометрии рассматриваются плоскости, многогранные поверхности, а также некоторые кривые поверхности. Эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды вращений впервые рассматривались Архимедом в трактате «О сфероидах и коноидах»; полости двуполостных гиперболоидов вращения он называл, соответственно, тупоугольными и прямоугольными коноидами. Однополостный гиперболоид вращения впервые рассматривался англичанином Джоном Валлисом (XVII в.) под названием цилиндроид.

Общее понятие поверхности в элементарной геометрии лишь поясняется, а не определяется – говорят, что поверхность есть граница тела или след движущейся линии.

В аналитической геометрии поверхность рассматривается как множество точек, координаты которых удовлетворяют определенному виду уравнений. Важное место среди них занимают квадрики (поверхности второго порядка) – множество точек пространства E_3, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0. \qquad (4.1.1)$$

Термин «квадрика» введен Монжем и Ашетом в «Приложениях алгебры к геометрии» (1805 г.). В зависимости от коэффициентов общего уравнения (4.1.1) оно задает определенный класс поверхностей – эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, цилиндрические или конические поверхности, а также пару плоскостей. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды общего вида впервые рассматривались Эйлером во II томе « Введения в анализ бесконечных» (1748 г.).

В дифференциальной геометрии естественное определение поверхности строится по аналогии с определением кривой – при помощи гомеоморфного отображения.

Определение 4.1.1. Элементарной поверхностью называется фигура, гомеоморфная некоторому открытому кругу пространства R^2.

Примерами элементарных поверхностей служат плоскость, полусфера, эллиптический и гиперболический параболоиды, параболический цилиндр.

Пусть G – открытый круг, $(u, v) \in G$, f – гомеоморфное отображение $G \to E_3$ и $f(u, v) = M$. Пусть x, y, z – декартовы прямоугольные координаты точки M. Тогда координаты точки M будут непрерывными функциями от переменных u и v, то есть

$$x = f_1(u, v), \;\; y = f_2(u, v), \;\; z = f_3(u, v). \qquad (4.1.2)$$

Переменные u, v называются криволинейными координатами точки M на поверхности, а система (4.1.2) – параметрическими уравнениями элементарной поверхности. Криволинейные координаты на поверхности трехмерного пространства были введены Гауссом в «Общих исследованиях о кривых поверхностях» (1827 г.), а на поверхности в n-мерном пространстве – Риманом (1854 г.). Гомеоморфизм f называют параметризацией поверхности.

Уравнения (4.1.2) равносильны одному векторному уравнению

$$\vec{r}(u,v) = f_1(u,v)\vec{i} + f_2(u,v)\vec{j} + f_3(u,v)\vec{k},$$

где $\vec{r}(u,v) = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки M, описывающей элементарную поверхность.

Определение 4.1.2. Множество точек пространства E_3, декартовы координаты которых задаются уравнениями (4.1.2), где функции

f_1, f_2, f_3 имеют непрерывные частные производные до порядка k включительно, причем в каждой точке $(u, v) \in G$:

$$rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2,$$

называется гладкой поверхностью класса C^k.

В случае $k = 1$ поверхность называется просто гладкой. Можно показать, что гладкая поверхность есть поверхность элементарная.

Пример. Составьте параметрические уравнения поверхности вращения.

Поверхностью вращения называется поверхность, полученная вращением плоской кривой вокруг некоторой прямой линии, лежащей в той же плоскости и называемой осью вращения.

Пусть кривая γ и прямая l лежат в плоскости α. Выберем декартову систему координат следующим образом. Ось аппликат совместим с прямой l, а плоскость XOZ совместим с плоскостью α. Пусть $x = x(t)$, $y = 0$, $z = z(t)$ – координатно-параметрические уравнения линии γ и пусть $M(t)$ – произвольная точка кривой. Повернем всю плоскость α вокруг оси (OZ) на угол φ. Точка M в этом повороте опишет окружность с центром $O_1(0,0,z(t))$, лежащим на оси OZ. Радиус этой окружности O_1M равен $|x(t)|$. Пусть точка $N(X, Y, Z)$ – образ точки M в этом повороте и, следовательно, она лежит на этой окружности. Очевидно, что $Z = z\ (t)$. Так как точка N лежит на окружности, то O_1N – радиус окружности. Тогда

$$X = x(t)cos\varphi,\ Y = x(t)sin\varphi,\ Z = z\ (t) \qquad (4.1.3)$$

координатно-параметрические уравнения поверхности вращения.

Координатные линии на поверхности вращения $t = const$ есть семейство окружностей, центры которых располагаются на оси вращения и каждая из них лежит в плоскости, параллельной плоскости ХОУ. Эти линии называют параллелями на поверхности вращения.

Линии $\varphi = const$ получаются из линии γ в процессе ее вращения и называются они меридианами.

4.2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Зафиксируем одну из криволинейных координат, например, $u = \text{const}$. Это уравнение в R^2 определяет некоторый числовой интервал (a, b). Гомеоморфизм f, порождающий элементарную поверхность Φ, отобразит этот интервал в кривую γ_1, лежащую на поверхности Φ.

Кривая γ_1 называется координатной линией на поверхности Φ. Так как

$$d\vec{r} = \vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv,$$

то для γ_1 будем иметь $d\vec{r} = \vec{r}_v\, dv$ (здесь через $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ обозначены частные производные от функции $\vec{r}(u,v)$ по переменным u и v соответственно). Следовательно, $\vec{r}_v$ – касательный вектор к линии γ_1 в ее произвольной точке. Аналогично $\vec{r}_u$ – касательный вектор к линии γ_2, задаваемой уравнением $v = \text{const}$. Через каждую точку поверхности проходит ровно две координатных линии. Координатные линии покрывают всю поверхность и образуют координатную сеть. С помощью замены параметризации координатную сеть можно заменить новой.

Рассмотрим случай, когда криволинейные координаты являются функциями некоторой переменной.

Положим:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \tag{4.2.1}$$

где $t \in (a, b) \subset R$ и функции $u\,(t)$, $v\,(t)$ имеют непрерывные производные, причем $[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2 \neq 0$. В этом случае будем иметь:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u(t), v(t)\right). \qquad (4.2.2)$$

Так как правая часть уравнения (4.2.2) есть векторная функция одного аргумента, то уравнение (4.2.2) определяет гладкую линию γ, лежащую на поверхности *Ф*. Касательный вектор к этой линии в ее произвольной точке $M(u, v)$ запишется в виде:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv,$$

где $du = u'dt$, $dv = v'dt$. Из этого следует, что плоскость $T_M = [M, \vec{r}_u, \vec{r}_v]$ содержит касательную к этой линии. Линия γ, проходящая через точку *M*, это произвольная гладкая линия на поверхности *Ф*. Это обстоятельство позволяет плоскость T_M назвать касательной плоскостью к поверхности *Ф* в точке *M*.

Прямую *m*, проходящую через точку *M* поверхности *Ф* перпендикулярно плоскости T_M, называют нормалью к поверхности в данной точке (рис. 4.2.1).

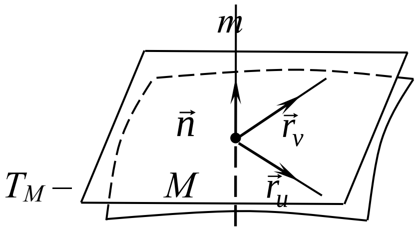

Рис. 4.2.1

Направляющим вектором нормали служит вектор $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Следовательно, нормаль *m* задается так: $m = (M, \vec{n})$.

4.3 Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление угла между кривыми на поверхности

Пусть кривая $\gamma \in Ф$ отнесена к натуральной параметризации (то есь в уравнениях (4.2.2) нужно положить $t = s$). Тогда по свойству натуральной параметризации, $d\vec{r}^{\,2} = ds^2$, или

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad (4.3.1)$$

где $E = \vec{r}_u^{\,2}$, $F = \vec{r}_u \circ \vec{r}_v$, $G = \vec{r}_v^{\,2}$.

Квадратичная форма (4.3.1) от дифференциалов криволинейных координат на поверхности называется первой квадратичной формой и обозначается φ_1. Первая квадратичная форма с коэффициентами E, F, G была введена Гауссом в 1827 году в той же работе, где были рассмотрены и криволинейные координаты. Геометрический смысл формы состоит в том, что для заданного направления в данной точке M поверхности $Ф$ значение первой квадратичной формы совпадает с квадратом главной линейной части приращения длины дуги при смещении из точки M в бесконечно близкую точку M' (рис. 4.3.1).

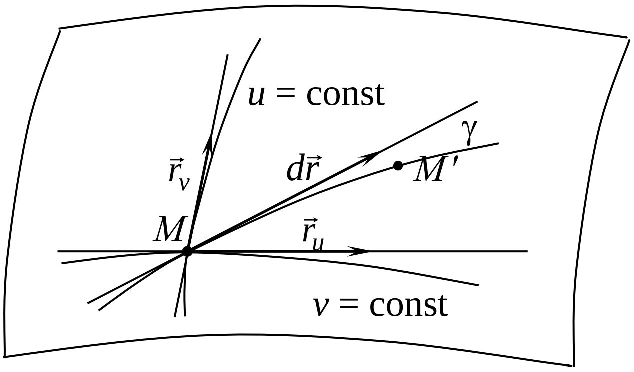

Рис. 4.3.1

Форма φ_1 обладает следующими свойствами:

1) $E > 0$, $G > 0$ (так как это скалярные квадраты не нулевых векторов);

2) $F^{\,2} - EG < 0$. Действительно, $F^2 - EG = (\vec{r}_u{}_{\circ\vec{r}_v})^2 - \vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} = \vec{r}_u^{\,2}\,\vec{r}_v^{\,2}\,cos^2\alpha - \vec{r}_u^{\,2}\,\vec{r}_v^{\,2} = -\,sin^2\alpha\,\vec{r}_u^{\,2}\,\vec{r}_v^{\,2} < 0.$

Таким образом, φ_1 является положительно определенной формой. Форма φ_1 характеризует метрические свойства поверхности. Она позволяет вычислять длины дуг на поверхности. Из формулы $dS^2 = d\vec{r}^{\,2}$ следует:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt, \qquad (4.3.2)$$

где t – параметр на кривой.

Площадь криволинейной области на поверхности вычисляется по формуле:

$$\sigma=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы позволяют так же вычислять углы между кривыми на поверхности. Пусть в точке $M(u, v)$ заданы два направления $du : dv$ и $\delta u : \delta v$. Угол α между векторами $d\vec{r} = \vec{r}_u\,du + \vec{r}_v\,dv$, $\delta\vec{r} = \vec{r}_u\,\delta u + \vec{r}_v\,\delta v$, задающими эти направления, может быть вычислен по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{d\vec{r}\circ\delta\vec{r}}{|d\vec{r}|\,|\delta\vec{r}|}.$$

Подставляя сюда разложения векторов $d\vec{r}$, $\delta\vec{r}$, получим:

$$\cos\alpha=\frac{E\,du\,\delta u+F\left(du\,\delta v+dv\,\delta u\right)+G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}}. \qquad (4.3.3)$$

В частности, угол между направлениями координатных линий в данной точке вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Отсюда ясно, что $\alpha = \pi/2 \Leftrightarrow F = 0$. Если условие $F = 0$ выполнено в каждой точке поверхности Φ, то координатная сеть называется ортогональной. В ортогональных криволинейных координатах форма φ_1 имеет канонический вид:

$$\varphi_1 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

В ортогональной системе условие ортогональности двух направлений $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$ выглядит следующим образом:

$$\frac{du}{dv}\frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{E}{G}. \qquad (4.3.4)$$

4.4 Кривизна поверхности

Кривизна кривой, рассмотренная в третьей главе, может быть положена в основу понятия кривизны поверхности.

Пусть поверхность задана уравнением:

$$\vec{r}(u,v) = f_1(u,v)\vec{i} + f_2(u,v)\vec{j} + f_3(u,v)\vec{k}. \qquad (4.4.1)$$

Зададим на поверхности некоторую линию γ:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u(s), v(s)). \qquad (4.4.2)$$

Здесь s – натуральный параметр. Пусть точка $M(u, v)$ принадлежит кривой γ. Тогда, вектор $\dot{\vec{r}}$ будет задавать направление в точке M, а модуль вектора $\ddot{\vec{r}}$ – кривизну кривой γ в точке M. Нормаль к поверхности в точке M зададим единичным вектором $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times r_v}{|\vec{r}_u \times r_v|}$.

Определение 4.4.1. Скалярная проекция вектора кривизны на нормаль к поверхности в точке M называется нормальной кривизной поверхности в точке M в заданном направлении.

Ясно что, заданное направление определяется направлением касательного вектора к кривой γ в точке M.

Обозначим нормальную кривизну через κ_n. Тогда, по определению скалярной проекции вектора на заданное направление будет

$$k_n = \ddot{\vec{r}} \circ \vec{n}. \qquad (4.4.3)$$

Подставляя в (4.4.3) вектор $\vec{n}$, вектор

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{uu}\frac{du^2}{ds^2} + 2\frac{dudv}{ds^2} + \frac{dv^2}{ds^2}$$

и учитывая, что для заданного направления $ds^2 = \varphi_1$, получим

$$k_n = \frac{Pdu^2 + \ 2\,Qdudv + Rdv^2}{Edu^2 + \ 2\,Fdudv + Gdv^2}. \tag{4.4.4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$P = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v r_{uu})}{|\vec{r}_u \ \times \ r_v|}, \quad Q = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v r_{uv})}{|\vec{r}_u \ \times \ r_v|}\ , R = \frac{(\vec{r}_u\vec{r}_v r_{vv})}{|\vec{r}_u \ \times \ r_v|}. \tag{4.4.5}$$

Итак, как следует из формул (4.4.4) и (4.4.5), нормальная кривизна поверхности зависит от выбора точки на поверхности и направления в этой точке, которое определяется отношением дифференциалов $du : dv$. То есть для вычисления нормальной кривизны мы можем взять любую другую кривую на поверхности, лишь бы у нее и кривой γ была общая касательная. Это позволяет связать между собой нормальную кривизну поверхности и кривизну кривой, проходящей через данную точку. Пусть l – нормаль к поверхности в точке M. Проведем через эту нормаль и направление ($du : dv$) некоторую плоскость Π, которая пересечет поверхность по кривой γ_0. Эту кривую называют нормальным сечением. Так как кривая γ_0 плоская, то ее вектор кривизны лежит в плоскости Π и перпендикулярен касательной к кривой γ_0. Следовательно, скалярная проекция его на нормаль к поверхности будет равна модулю этого вектора, то есть кривизне k_0 кривой γ_0. Отсюда $k_n = k_0$.

Итак, нормальная кривизна поверхности в данной точке в заданном направлении равна кривизне нормального сечения, проходящего через эту точку в том же направлении и, следовательно, характеризует искривление поверхности в данном направлении.

Выражение, стоящее в числителе формулы (4.4.4),называется второй квадратичной формой поверхности и обозначается φ_2.. Итак,

$$\varphi_2 = Pdu^2 + 2Qdudv + Rdv^2, \quad k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \tag{4.4.6}$$

Если точку на поверхности фиксировать, а направление в этой точке менять, поворачивая касательную вокруг точки на 360^0, то нормальная кривизна будет, вообще говоря, меняться. В том случае, когда нормальная кривизна в данной точке остается постоянной, то нормальные сечения будут искривлены одинаково. Это означает, что в бесконечно малой окрестности этой точки поверхность устроена как кусочек сферы или как кусочек плоскости. Такую точку называют *омбилической*. Можно показать, что поверхность, целиком состоящая из омбилических точек, есть сфера или плоскость.

Пусть точка M не омбилическая. Тогда нормальная кривизна, при изменении направления в точке достигает максимального и минимального значений. Эти экстремальные значения нормальной кривизны называются *главными* в точке M и обозначаются k_1 и k_2. Направления, для которых нормальная кривизна достигает экстремальных значений, называются *главными*.

Найдем уравнения, определяющие главные кривизны и главные направления в точке M. Найдем производную от функции (4.4.4) сначала по переменной du, считая переменную dv постоянной, и приравняем ее к нулю. Затем найдем производную от k_n по переменной dv при постоянной переменной du и тоже приравняем нулю. При этом учитываем второе равенство из (4.4.6). В результате получим систему из двух уравнений:

$$(Pdu + Qdv)\,\varphi_1 - (Edu + Fdv)\,\varphi_2 = 0,$$
$$(Qdu + Rdv)\,\varphi_1 - (Fdu + Gdv)\,\varphi_2 = 0.$$

Деля каждое из уравнений на φ_1 и группируя члены с du и dv, приведем данную систему к виду:

$$\begin{aligned}(P - k_n E)\, du + (Q - k_n F)\, dv = 0,\\ (Q - k_n F)\, du + (R - k_n G)\, dv = 0.\end{aligned} \qquad (4.4.7)$$

Система однородная относительно переменных du и dv и имеет не нулевое решение, если ее определитель равен нулю. Приравнивая нулю определитель системы, получаем:

$$(EG - F^2)k_n^2 + (2FQ - PG - ER)k_n + PR - Q^2 = 0. \quad (4.4.8)$$

Исключая переменные du и dv из системы (4.4.7), получим уравнение для определения главных направлений:

$$(PF - QE)\, du^2 + (PG - RE)\, dudv + (QG - RF)dv^2 = 0. \quad (4.4.9)$$

Уравнение (4.4.9) второй степени относительно (du : dv). Для определения числа решений перейдем в ортогональную систему криволинейных координат, то есть положим в (4.4.9) $F = 0$. В этом случае уравнение примет вид:

$$- QE\, du^2 + (PG - RE)\, dudv + QGdv^2 = 0, \quad (4.4.10)$$

а его дискриминант Δ соответственно:

$$\Delta = (PG - RE)^2 + Q^2EG.$$

Поскольку $E > 0$, $G > 0$, то $\Delta \geq 0$. Дискриминант может равняться нулю только в случае $PG - RE = 0$, $Q = 0$. В этом случае, как это следует из формулы (4.4.4), нормальная кривизна в точке будет иметь постоянное значение и, следовательно, точка M омбилическая, что не соответствует выбору точки. Таким образом, если точка не омбилическая, то в ней существует два главных направления и, следовательно, две главных кривизны k_1, k_2.

Между главными кривизнами k_1, k_2 и кривизной k_n произвольного нормального сечения, проходящего через точку M, существует связь, выражаемая формулой Эйлера

$$k_n = k_1 \cos\varphi + k_2 \sin\varphi,$$

где φ – угол между направлением произвольного нормального сечения и направлением одного из главных направлений.

Из уравнения (4.4.9) для главных направлений в точке *M* следует

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_1 \left(\frac{du}{dv}\right)_2 = -\frac{G}{E}.$$

Отсюда, на основании (4.3.4), вытекает, что *главные направления не в омбилической точке ортогональны.*

Выражения $K = k_1 k_2\,, H = \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2)$ называют соответственно *полной и средней кривизной поверхности в точке.*

Уравнение (4.4.9), будучи решенное как квадратное, приводит к двум дифференциальным уравнениям. Эти уравнения определяют на поверхности две линии.

Определение 4.4.2. Линия на поверхности, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (4.4.9), называется линией кривизны.

Через точку *M*, на основании выше изложенного, проходит две линии кривизны, они в каждой своей точке касаются одного из главных направлений, эти линии в точке *M* ортогональны. Следовательно, на поверхности существует ортогональная сеть, состоящая из линий кривизны.

Координатная ортогональная сеть будет совпадать с сетью линий кривизны, как это следует из (4.4.9), тогда и только тогда, когда $Q = 0$. В этом случае формула нормальной кривизны приобретает канонический вид:

$$k_n = \frac{Pdu^2 + Rdv^2}{Edu^2 + Gdv^2} \qquad (4.4.11)$$

Отсюда, полагая $du = 0$, получим $k_1 = P : E$, полагая $dv = 0$, соответственно, $k_2 = R : G$. Тогда полная кривизна будет иметь вид:

$$K = PR : EG.$$

Эта формула позволяет провести классификацию точек поверхности. Учитывая, что $EG > 0$, то в случае, когда $PR > 0$, точку *M* называют *эллиптической*, если $PR < 0$ – *гиперболической*, если $PR =0$

и при этом $P \neq 0$ или $R \neq 0$ точку называют *параболической*, в случае $P = 0$ и $R = 0$ точку M называют точкой *уплощения.*

Если точка M эллиптическая, то в ее окрестности (бесконечно малой) поверхность устроена как в вершине эллиптического параболоида. В случае точки гиперболического вида поверхность выглядит как гиперболический параболоид. В случае параболической точки одно из главных сечений является прямолинейной образующей или имеет точку перегиба. В последнем случае поверхность выглядит как кусочек плоскости.

4.5 Понятие о внутренней геометрии поверхности

Первая квадратичная форма является инвариантом изгибания поверхности. Изгибание поверхности – это топологическая деформация поверхности, сохраняющая длины дуг. Если Φ_1 есть образ поверхности Φ в некотором изгибании, то говорят, что поверхности Φ и Φ_1 наложимы.

Теорема 4.5.1. Если поверхности наложимы, то они допускают общую параметризацию, в которой в точках этих поверхностей с одинаковыми криволинейными координатами совпадут соответствующие коэффициенты их первых квадратичных форм.

Действительно, пусть поверхность Φ наложима на поверхность Φ_1 и φ: $\Phi \to \Phi_1$ – изгибание. Пусть f – какая-нибудь параметризация поверхности Φ и u, v – криволинейные координаты. Тогда $\varphi * f$ – параметризация поверхности Φ_1. Следовательно, на поверхностях Φ и Φ_1 возникает общая параметризация относительно изгибания φ.

Произвольную гладкую линию $\gamma \subset \Phi$ можно задать уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in (a, b)$. При этом линия $\gamma_1 = \varphi(\gamma) \subset \Phi_1$ определяется теми же уравнениями, что и линия γ. Пусть $t, t_1 \in (a, b)$ и $t > t_1$. Так как φ – изометрия, то

$$\int_{t_1}^{t}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t}\sqrt{E_1\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F_1\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G_1\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt, \qquad (4.5.1)$$

где E, F, G – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Φ, а E_1, F_1, G_1 – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Φ_1. Так как равенство (4.5.1) справедливо при любом t, удовлетворяющем указанным выше условиям, то справедливо равенство:

$$E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=E_1\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F_1\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G_1\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Линия γ – произвольная, поэтому последнее равенство должно выполняться при любых $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$.

Следовательно, $E = E_1$, $F = F_1$, $G = G_1$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что обратное утверждение также справедливо.

Определение 4.5.1. Совокупность свойств и величин поверхности, сохраняющихся при её изгибании, называют *внутренней геометрией* этой поверхности.

В качестве примера наложимых поверхностей можно указать, например, плоскость и параболический цилиндр. У этих поверхностей одинаковая внутренняя геометрия.

К внутренней геометрии поверхности относятся те ее свойства и связанные с этой поверхностью величины, которые вычисляются только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные. Например, длина гладкой дуги, угол между линиями, площадь поверхности или ее области. Главные кривизны k_1 и k_2 поверхности – величины, характеризующие максимальное и минимальное искривление поверхности в заданной точке, – при изгибании не сохраняются. Но сохраняется величина $K = k_1k_2$, то есть полная кривизна. Этот факт следует из формулы Гаусса, в которой утверждается, что дискриминант второй квадратичной формы поверхности выражается через коэффициенты первой квадратичной формы и их частные первые и вторые производные по криволинейным координатам. С другой стороны, произведение корней k_1k_2 квадратного уравнения (4.4.8) есть отношение дискриминанта второй квадратичной формы к дискриминанту первой квадратичной формы, то есть

$$k_1k_2 = \frac{PR - Q^2}{EG - F^2}.$$

Так как при изгибании коэффициенты первой квадратичной формы не изменяются, следовательно, не изменяютсяи их производные, то не меняется и полная кривизна.

Среди поверхностей особое место занимают поверхности с постоянной полной кривизной. В случае K = const и $K > 0$ внутренняя геометрия поверхности является сферической. Если $K = 0$ в каждой точке поверхности, то ее внутренняя геометрия совпадает с евклидовой. Если же K = const и $K < 0$ (например, псевдосфера), то внутренняя геометрия такой поверхности совпадает с геометрией Лобачевского.

Задания для самостоятельной работы

1. Выделите существенные признаки понятия «элементарная поверхность».

2. Сформулируйте определение гладкой поверхности и приведите примеры.

3. Укажите условия, при которых вектор-функция скалярного аргумента будет определять гладкую поверхность.

4. Найдите векторно-параметрические уравнения следующих поверхностей:

– сферы;

– кругового цилиндра;

– кругового конуса;

– параболоида вращения;

– эллипсоида вращения;

– двуполостного гиперболоида вращения;

– однополостного гиперболоида вращения.

5. Выведите векторно-параметрическое уравнение касательной плоскости, нормали к поверхности.

6. Для каждой из поверхностей задания 4 составьте уравнения нормали в произвольной точке, касательной плоскости.

7. Что называется квадратичной формой?

8. Что называется первой квадратичной формой поверхности? Каков ее геометрический смысл?

9. Обоснуйте свойства первой квадратичной формы.

10. Для каждой из поверхностей задания 4 найдите первую и вторую квадратичные формы.

11. Найдите условие ортогональности двух направлений на поверхности и выведите из него необходимое и достаточное условие ортогональности направлений координатных линий.

12. На каждой из поверхностей задания 4 возьмите конкретную точку и найдите главные кривизны в этой точке, среднюю и полную кривизну, главные направления.

13. Какие типы точек (обыкновенных) на поверхности Вы знаете?

14. На каждой из поверхностей задания 4 определите типы точек, которые имеются на данной поверхности.

15. Выделите существенные признаки наложимых поверхностей.

16. Что называется внутренней геометрией поверхности?

17. Верно ли утверждение: «Совокупность изгибаний данной поверхности образует группу»?

5 ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

5.1 Аксиоматический метод построения теорий

Мы рассмотрели несколько теорий топологию, векторное пространство, векторное и точечное евклидовы пространства. Наступил момент описания способа построения этих и других теорий. Этот способ известен в математике как аксиоматический метод построения теорий.

Аксиоматический метод – способ построения научной теории, при котором в основу кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами, а все остальные предложения получаются как логические следствия аксиом.

Аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих ученых (примерно 300 г. до н.э.). Геометрическая система Евклида, известная под названием «Начала», – пример применения аксиоматического метода. Он получил дальнейшее развитие после открытия в начале XIX века неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским и Я. Больяйи. По мере накопления опыта аксиоматического изложения (работы Паша, Пеано, Саккери, Ламберта, Лежандра, Даламбера и др.) уточнялось понятие аксиоматического метода. Впервые список аксиом, достаточный для логического построения евклидовой геометрии, был дан в книге немецкого математика Д. Гильберта « Основания геометрии» (1899 г.).

В основу аксиоматического метода положены понятие множества и понятие отношения. Первое понятие относится к числу неопределяемых.

Пусть дан набор не пустых множеств M_1, M_2,…, M_n и их прямое произведение $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Его элементами служат кортежи длины n (упорядоченный набор элементов по одному из каждого сомножителя M_i). Всякое непустое подмножество Δ множества M называют отношением, определенным во множествах M_1, M_2, …, M_n. Если элемент $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ принадлежит Δ, где $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$,

…, $m_n \in M_n$, то в этом случае говорят, что элементы $m_1, m_2, . . . , m_n$ находятся в отношении Δ.

В частности, всякая алгебраическая операция $f : Q \times Q \rightarrow Q$ порождает на множестве Q^3 тернарное (трехместное) отношение $\{(a, b, c = f\,(a, b))\}$.

Пусть на множествах M_i (i = 1, … , n) заданы некоторые отношения $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_k$. Обозначим через $A_1, A_2 \ldots A_t$ свойства этих отношений, которые мы явно не формулируем.

Определение 5.1.1. Математической структурой называется множество $S = \{M_1, M_2, \ldots , M_n, \Delta_1, \Delta_2, \ldots , \Delta_k\}$, где отношения Δ_j (j = 1,…, k) обладают свойствами:

$$\Sigma = \{A_1, A_2 \ldots A_t\}. \qquad (5.1.1)$$

Множество S называют базой структуры, а список Σ называется списком аксиом. Элементы множеств $M_1, M_2, \ldots , M_n$ называют основными, или неопределяемыми, понятиями, а отношения Δ_j – неопределяемыми отношениями. Следовательно, математическая структура определяется списком аксиом Σ.

Приведем примеры алгебраических структур.

Пример 1. Структура группоида $S = \{Q , \Delta\}$, $\Sigma = \{A_1\}$. Здесь аксиома A_1 формулируется так: отношение Δ порождается алгебраической операцией. Если операцию обозначить через (·), то структуру можно записать в следующем виде:

$$S = \{Q , \cdot\}, A_1\text{: } \forall\, a, b \in Q , \exists! c \in Q \mid c = a \cdot b.$$

Коротко можно сказать так: группоид ‑ это множество с алгебраической операцией.

Пример 2. Структура квазигруппы. База структуры $S = \{Q , \cdot\}$, список аксиом содержит три аксиомы:

A_1: $\forall\, a, b \in Q , \exists! c \in Q \mid c = a \cdot b$.

A_2: $\forall a, c \in Q , \exists! b \in Q \mid c = a \cdot b$.

A_3: $\forall b, c \in Q , \exists! a \in Q \mid c = a \cdot b$.

Иначе, квазигруппа – это специальный группоид, в котором уравнения $a{\cdot}x = b$ и $x{\cdot} b = c$ имеют единственное решение.

Пример 3. Структура лупы. База структуры $S = \{Q\ ,\ \cdot\}$, список Σ содержит четыре аксиомы:

A_1: $\forall\ a, b \in Q\ , \exists! c \in Q\ |c = a \cdot b.$

A_2: $\forall\ a, c \in Q\ , \exists!\ b \in Q\ |c = a \cdot b.$

A_3: $\forall\ b, c \in Q\ , \exists! a \in Q\ |c = a \cdot b.$

A_4:$(\exists\ e \in Q| \forall\ \ a \in Q) \Rightarrow e\ \cdot a = a\ \cdot e = a.$

Таким образом, лупа - это специальная квазигруппа с универсальным нейтральным элементом.

Пример 4. Структура полугруппы. База структуры $S = \{Q\ ,\ \cdot\}$, список Σ содержит две аксиомы:

A_1: $\forall\ a, b \in Q\ , \exists! c \in Q\ |\ c = a \cdot b.$

A_2: $(\forall\ a, B, c \in Q) \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a{\cdot} (b \cdot c).$

Итак, полугруппа - это группоид, в котором выполняется ассоциативный закон.

Пример 5. Структура группы. База $S = \{Q\ ,\ \cdot\}$, список Σ содержит 4 аксиомы:

A_1: $\forall\ a, b \in Q\ , \exists! c \in Q\ |\ c = a \cdot b.$

A_2: $(\forall\ a, b, c \in Q) \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a{\cdot} (b \cdot c).$

A_3; $(\exists\ e \in Q| \forall\ \ a \in Q) \Rightarrow e\ \cdot a = a\ \cdot e = a.$

A_4: $\forall\ a, \in Q\ , \exists\ a^{-1} \in Q\ |\ a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e.$

Таким образом, группа - это специальная полугруппа с универсальным нейтральным элементом, причем каждый элемент обратим.

Приведем примеры геометрических структур. В отличие от перечисленных алгебраических структур, геометрические структуры являются алгебраическими системами. То есть в таких структурах присутствуют, по крайней мере, два разных множества и отношения не всегда являются алгебраическими операциями.

Пример 6. Структура векторного пространства.

База структуры $S = \{V, R , +, \cdot\}$, где R – поле, а операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры подчиняются 10 аксиомам (см. п. 2.1).

Пример 7. Структура n-мерного векторного пространства.

$S = \{V, R , +, \cdot\}$ – база, где операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры подчиняются 12 аксиомам (см. п. 2.1).

Пример 8. Структура евклидова векторного пространства.

$S = \{V, R , +, \cdot\}$ – база, где R – поле скаляров, а операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры подчиняются 17 аксиомам (см. п. 2.1).

Пример 9. Топологическая структура.

Пусть $E \neq \emptyset$ и $\tau = \{\emptyset, E , O_\alpha \subset E\}$. База $S = \{E, \tau , \cup , \cap\}$ состоит из двух множеств и двух операций $\cup$, $\cap$ – операции объединения и пересечения элементов множества τ . Эти операции подчиняются двум аксиомам замкнутости (см. определение 1.1.1).

Пример 10. Структура проективного пространства.

Пусть E – непустое множество элементов, называемых точками и пусть $V_{п + 1}$ – векторное пространство размерности $n + 1$. Пусть $V'_{n+1} = V_{n+1} \setminus \vec{0}$ и f – отображение множества V'_{n+1} на точечное множество E. Структура n-мерного проективного пространства выглядит так: $S = \{E, V'_{n+1}, f\cdot\}$, где отображение f обладает свойствами.

A_1: отображение f – сюръективное,

A_2: коллинеарным векторам соответствует единственная точка.

Пример 11. Структура аффинного пространства.

Пусть E – множество точек, $V_п$ – векторное пространство размерности n, Δ – отношение связи точек с векторами. Тогда, множество $S = \{E, V_п, \Delta\}$ – база n-мерного аффинного пространства, если отношение связи точек с векторами удовлетворяет аксиомам V группы (п. 3.1). Напомним их:

1. $(\forall\ (A, B)|\ A \in E, B \in E) \Rightarrow \exists!\ \vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

2. $(\forall A \in E, \forall \vec{a}\ V_n), \exists!\, B \in E \lceil\, \overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

3. Для любых трех точек A, B, C выполняется равенство:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Таким образом, в общей сложности эта структура задается 15 аксиомами.

Пример 12. Структура евклидового точечного пространства выглядит так же. как структура аффинного пространства с единственной поправкой – множество $V_{\text{п}}$ – *евклидово* векторное пространство. Следовательно, эта структура задается 20 аксиомами, указанными в п. 2.1 и п. 2.2. Этот список аксиом называют аксиоматикой Вейля - Неймана.

Пример 13. Структура метрического пространства выглядит следующим образом – $\{X, R_+, \rho\}$, где R_+ множество неотрицательных чисел, ρ - отображение $X \times X \to R_+$, обладающее свойствами:

1. $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,

2. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$,

3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$,

где A, B и C произвольные точки из множества X.

Список Σ может определять не один набор отношений $\sigma = \{\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_k\}$ на данных множествах M_1, M_2, …, $M_{\text{п}}$ и, следовательно, не одну математическую структуру. Обозначим через T множество структур, определяемых данным списком аксиом Σ. Если структура S принадлежит множеству T, то говорят, что S – математическая структура рода T. Таким образом, сам род T определяется списком аксиом Σ и в этом случае записывают $T(\Sigma.)$

Используя неопределяемые понятия, отношения и выстраивая конечную цепочку из аксиом, взятых в определенном порядке из списка Σ, формируют новые понятия и отношения, которые называют определяемыми, а также их свойства. Эти свойства называют логическими следствиями списка Σ, иначе – *теоремами*, а саму конечную логическую цепочку – *доказательством теоремы*.

Множество предложений, являющихся логическими следствиями аксиом системы Σ, называется теорией структур рода Т. Как правило, такую теорию обозначают через τ(*T*). Каждому роду присваивается определенное название (теория квазигрупп, теория луп, теория полугрупп, теория групп, топология, проективная геометрия, аффинная геометрия, евклидова геометрия и т. д.). Так как род *T* определяется списком аксиом Σ, то и теория τ зависит от списка Σ, т.е. τ(Σ). Указанный способ построения теории τ(*Σ*) называют аксиоматическим методом.

В геометрических теориях используются различные понятия и отношения. Их свойство быть неопределяемым или определяемым в данной теории зависит только от исходного списка аксиом Σ. Как известно, в аксиоматике Гильберта понятия «прямая линия», «плоскость», отношения «инцидентность», «лежать между», «конгруэнтность», участвующие в построении геометрии евклидова пространства, являются неопределяемыми. В аксиоматике Вейля (см. пример 11) эти понятия и отношения подлежат определению через понятия «точка», «вектор», «скаляр» и отношения «сложения векторов», «умножение вектора на скаляр», «скалярное произведение векторов», «отношение связи точек с векторами». Обратно, в аксиоматике Гильберта неопределяемые понятия и отношения из списка аксиом Вейля подлежат определению.

При построении теории аксиоматическим методом возникают три законных вопроса:

1) Всякий ли список аксиом Σ определяет некоторую математическую структуру (*существование структуры*)?

2) Если список аксиом Σ задает математическую структуру, то все ли аксиомы из списка Σ необходимы для этого (*минимальность списка*)?

3) Можно ли список Σ пополнить новыми аксиомами, не изменяя неопределяемых отношений и понятий так, чтобы новый список определял новую структуру (*максимальность списка*)?

Иначе эти требования, предъявляемые к списку Σ, называют требованиями « *непротиворечивости*» , « *независимости*» и « *полноты*» . Остановимся на них подробнее.

5.2 Непротиворечивость системы аксиом

Определение 5.2.1. Систему аксиом называют внутренне непротиворечивой, если из нее нельзя получить логическим путем два утверждения, из которых одно является отрицанием другого.

Ясно, что противоречивую систему аксиом нельзя использовать для построения теории, так как не существует реальных отношений, обладающих противоречивыми свойствами.

Чтобы решать вопросы о внутренней непротиворечивости данной системы аксиом, надо изучить технику логических выводов предложений из аксиом. Такая задача относится к одной из нерешенных задач математической логики. В силу этого обстоятельства дают иное определение « непротиворечивости» .

Определение 5.2.2. Список аксиом Σ называется *содержательно непротиворечивым*, если существуют конкретные множества M_1, $M_2,\ldots,M_п$ с конкретными отношениями Δ_1, Δ_2 … Δ_k, обладающими свойствами из списка Σ.

Такой конкретный набор множеств и отношений называется моделью структуры данного рода. Таким образом, проверка списка на содержательную непротиворечивость достигается построением модели.

В рассмотренных в п. 5.1 примерах 1-5 универсальной моделью выступает множество действительных чисел с операцией сложения. Таким образом, эти структуры содержательно непротиворечивы.

Следует заметить, что модель у структуры может быть не одна. Приведем модели квазигруппы и лупы.

Рассмотрим множество $Q = \{a, b, c\}$. Зададим на этом множестве операцию φ с помощью таблицы Кэли:

φ	a	b	c
a	c	b	c
b	a	c	b
c	b	a	c

а)

φ	a	b	c
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

б)

В случае *а*) таблица квазигруппу на множестве Q не задает, а в случае *б*) мы имеем квазигруппу.

В следующем примере элемент c служит как левой единицей, так и правой, поэтому мы имеем дело с лупой.

φ	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

В качестве моделей структуры векторного пространства можно взять, например, множество направленных отрезков с общим началом, множество классов эквиполентных отрезков, множество параллельных переносов на плоскости или в пространстве, множество матриц размера $n \times n$, множество непрерывных функций, заданных на интервале (a, b), и т. д. Простой моделью евклидового векторного пространства служит множество матриц, состоящих из n строк и одного столбца. Сложение на этом множестве определим по правилу сложения матриц, умножение вектора на скаляр – по правилу умножения матрицы на число.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ \cdots \\ ka_n \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение определим формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n. \qquad (5.2.1)$$

В физике, при изучении движения тела по наклонной плоскости, механических свойств рычагов, подвижных и неподвижных блоков, клина и так далее, используются различные модели векторов, в частности радиус-вектор, класс эквиполентных отрезков.

Для доказательства непротиворечивости аксиом, задающих топологическую структуру, можно построить числовую модель. Пусть, например, даны числовые множества X={1, 2, 3, 4}, τ_4 = {$\varnothing$, X, 2, (1, 2), (2, 3), (1, 2, 3)}. Тогда пара (X, τ_4) является моделью топологического пространства.

Моделью одномерного проективного пространства служит пучок прямых, моделью двумерного проективного пространства соответственно связка прямых.

Моделью аффинного пространства служит набор матриц размера 1×n (одна строка и n столбцов), называемых точками, и множество векторов (матриц размера $n \times 1$):

$$A = (a_1\, a_2 \ldots a_n), \qquad B = (b_1\, b_2 \ldots b_n).$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$, соответствующий точкам A и B, определим формулой:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \cdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Модель евклидового пространства получается из модели аффинного пространства добавлением формулы (5.2.1).

Модель метрического пространства следует из предыдущей модели, если расстояние между точками определить как модуль вектора, соответствующего этим точкам, то есть

$$\rho\,(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 \cdots (b_n - a_n)^2}\;.$$

Представляем самостоятельно доказать, что в примерах 1 – 13 на перечисленных выше соответствующих моделях будут выполняться аксиомы рассматриваемой структуры.

Если модель построена, то говорят также, что построена интерпретация данного списка аксиом, и тогда проблема внутренней непротиворечивости этой системы аксиом сводится к вопросу о внутренней непротиворечивости системы тех понятий, которые были использованы при построении интерпретации. Если известно, что эта система понятий внутренне непротиворечива, то тогда будет внутренне непротиворечива исходная система аксиом.

Так, например, непротиворечивость геометрии Лобачевского доказана Ф. Клейном и А. Пуанкаре в предположении, что непротиворечива геометрия Евклида, а вопрос о непротиворечивости евклидовой геометрии сводится к проблеме непротиворечивости арифметики.

Если оставаться только в рамках геометрии, то мы можем решать вопрос исключительно о содержательной непротиворечивости данной системы аксиом.

Вывод. Для доказательства непротиворечивости списка аксиом, следовательно, и теории, необходимо построить модель структуры.

5.3 Независимость системы аксиом

Метод интерпретаций позволяет также решить вопрос о независимости аксиом в непротиворечивом списке. Пусть известно, что список Σ непротиворечив.

Определение 5. 3.1. Аксиома A_l из списка Σ называется независимой от аксиом данного списка, если предложение A_l не является логическим следствием аксиом списка $\Sigma' = \Sigma \setminus \{A_l\}$.

Для проверки независимости аксиомы A_l ее заменяют в данном списке на отрицание $\overline{A_l}$. Если при этом окажется, что список $\overset{*}{\Sigma} = \Sigma' \cup \{\overline{A_l}\}$ непротиворечив, то это означает, что предложение A_l логически не следует из списка Σ'. В противном случае эта аксиома будет зависимой в списке.

Если аксиома A_l зависима от остальных аксиом списка Σ, то ее можно вычеркнуть из этого списка, и, в результате, теория $\tau(\Sigma)$ не изменится.

Вернемся к пятому примеру в котором рассматриваются аксиомы группы. Добавим к четырем аксиомам группы еще одну, пятую:

$$A_5\colon (\forall a, b, \in Q) \Rightarrow a \cdot b = b \ \cdot a.$$

В этом случае список будет другим. Новый список Σ' задает коммутативную группу. Проверим независимость пятой аксиомы в новом списке. Составим отрицание аксиомы A_5:

$$\bar{A}_5\colon \exists a \in Q, \exists b \ \in \ Q \ |a \cdot b \ \neq b \cdot a.$$

Заменим в списке Σ' аксиому A_5 на аксиому $\bar{A}_5$ и получим новую систему $\tilde{\Sigma}$. Выясним его непротиворечивость. На множестве матриц размера $n \times n$ в качестве бинарной операции возьмем умножение матриц. Известно, что умножение матриц не коммутативно. Поэтому множество матрицы размера $n \times n$ образует не коммутативную группу. Итак, интерпретация списка $\tilde{\Sigma}$ существует. Следовательно, аксиома A_5 в списке Σ' является независимой.

Заметим, что проверку на «независимость» нельзя применять к аксиомам, которые используются для формулировки других аксиом. Так, например, в системе аксиом, определяющих структуру группы, аксиома о существовании нейтрального элемента считается выполненной при формировании аксиомы о существовании симметричного элемента. Поэтому для этой аксиомы вопрос о ее независимости ставить нельзя.

Проверка аксиом в списке на независимость позволяет сделать его минимальным для построения теории.

В школьном курсе геометрии, с целью облегчения понимания теории, иногда задают зависимый список, помещая в него утверждения, которые можно доказать.

Польза от проверки на независимость заключается еще и в том, что если какая-то аксиома A_l в списке является независимой, то в результате процедуры ее проверки получаем новую непротиворечивую систему аксиом, которая задает новую теорию. Ярким примером этого является доказательство независимости аксиомы параллельности прямых на плоскости. Эту задачу удалось решить русскому геометру Н. И. Лобачевскому методом, который описан выше и автором которого он является. В результате появилась новая геометрия, известная как геометрия Лобачевского.

5.4 Полнота системы аксиом

Пусть Σ – непротиворечивый, независимый список аксиом.

Определение 5.4.1. Система аксиом Σ, вводящая основные отношения Δ_1, Δ_2 … Δ_k, называется неполной, если существует аксиома A, удовлетворяющая условиям:

а) аксиома A не вводит новых отношений;

б) аксиома A независима от аксиом списка Σ;

в) система $\tilde{\Sigma} = \Sigma \bigcup \{A\}$ непротиворечива.

Если не существует аксиомы, удовлетворяющей условиям определения 5.4.1, то список Σ называется полным.

Для доказательства полноты системы Σ достаточно доказать, что все ее интерпретации изоморфны, то есть между моделями существуют взаимно-однозначные соответствия, сохраняющие отношения, вводимые списком аксиом Σ. Действительно, если M и M_1 – модели одного и того же списка аксиом и установлено взаимно-однозначное отображение φ модели M на модель M_1, и при этом для какого-то отношения Δ на модели M выполняется аксиома A, а для $\Delta_1= \varphi(\Delta)$ она не выполняется, то отображение φ изоморфизмом быть не может.

Примерами неполных систем аксиом служат системы, задающие структуры группоида, моноида, квазигруппы, лупы, полугруппы, группы. В них постепенный переход от структуры группоида к структуре группы осуществлялся без добавления алгебраической операции, а только за счет изменения числа аксиом. В структуре группы мы можем добавить аксиому коммутативности (см. п. 5.2). В результате мы получаем каждый раз непротиворечивую систему.

Рассмотрим теперь две модели коммутативной группы: $(R, +)$ и $(R_+, \cdot)$, где R – множество действительных чисел, $(+)$ – операция сложения на множестве R, R_+ – множество положительных действительных чисел, операция $(\ \cdot\ )$ – умножение на этом множестве. Зададим отображение φ: $R_+ \leftrightarrow R$ функцией $y = ln\ x$. Пусть $y_1 = ln\ x_1$, $y_2 = ln\ x_2$. Тогда, $ln\ (x_1x_2) = ln\ x_1 + ln\ x_2 = y_1 + y_2$. Следовательно, отображение φ – изоморфизм и аксиоматика коммутативной группы полная.

Теории, построенные на неполных аксиоматиках, называются многозначными, теории, построенные на полных аксиоматиках, называются однозначными. Геометрические теории являются полными.

В заключение отметим еще одну характеристику систем аксиом. Пусть система $\Sigma = \{A_k\}$ задает теорию $\tau(\Sigma)$, система $\Sigma_1 = \{B_t\}$ – теорию τ_1 (Σ_1). Если любая аксиома B_t из списка Σ_1 является теоремой в теории $\tau(\Sigma)$ и любая аксиома A_k из списка Σ является теоремой в теории τ_1 (Σ_1), то это означает, что теории $\tau(\Sigma)$ и τ_1 (Σ_1) совпадают. В этом случае системы аксиом Σ и Σ_1 называются равносильными (эквивалентными).

Если список Σ содержит m аксиом, а список Σ_1, соответственно, n аксиом, для установления их равносильности необходимо в теории $\tau(\Sigma)$ определить все основные понятия и отношения, вводимые списком Σ_1 и проверить выполнимость каждой из n аксиом этого списка. Затем проделать эту процедуру со списком Σ. То есть доказать в общей сложности $m + n$ теорем. Если все они окажутся истинными, то списки будут равносильными и будут задавать одну и ту же теорию. Практическое использование равносильности состоит в том, что учебники по геометрии могут иметь разные, но равносильные аксиоматики.

Рассмотрим на примере аксиом инцидентности теоретические вопросы аксиоматического метода.

Аксиомы рода структур инцидентности

A_1. Двум любым различным точкам инцидентна прямая.

A_2. Двум любым различным точкам инцидентна единственная прямая.

A_3. Всякой прямой инцидентны, по крайней мере, две точки.

A_4. Существуют три точки, не инцидентные одной прямой.

Эта система из четырех аксиом задает структуру $S = \{T, P, \in\}$, где T – множество элементов, называемых точками, P – множество элементов, называемых прямыми, $\in$ – отношение, связывающее элементы этих двух множеств и называемое отношением инцидентности. Его элементами служат пары (точка M, прямая l), и оно обладает свойством симметричности, то есть $(M, l) = (l, M)$.

Эта система непротиворечива. Действительно, любой треугольник служит моделью этой системы аксиом. Вершины треугольника – это точки, а его стороны – прямые. Инцидентность здесь понимается так: вершина – это конец отрезка.

Рассмотрим независимость аксиом в этой аксиоматике в соответствии с методом, указанным выше.

Рассмотрим параллелограмм *ABCD*. Он служит моделью, на которой выполняются аксиомы A_2, A_3, A_4, но не выполняется аксиома A_1, так как через точки *A* и *C*, *B* и *D* прямые не проходят. Таким образом, параллелограмм *ABCD* служит моделью системы аксиом A_2, A_3, A_4 и аксиомы: существуют пары точек, не лежащие на одной прямой. Эта аксиома является отрицанием аксиомы A_1. Следовательно, аксиома A_1 является независимой в исходном списке.

Для проверки независимости второй аксиомы рассмотрим параллелограмм *ABCD*, в котором все пары вершины соединены отрезками и через точки *AB* дополнительно проведена окружность ω, которую тоже будем считать прямой. Получаем фигуру, состоящую из четырех точек и семи прямых, которая служит моделью системы A_1, $\bar{A}_2$, A_3, A_4, где вторая аксиома формулируется так: существуют две точки, через которые проходят, по крайней мере, две различные прямые. Следовательно, аксиома A_2 в исходном списке независимая.

Если потребовать, чтобы окружность ω проходила только через точку *A*, то получим модель, на которой выполняются аксиомы A_1, A_2, A_4 и аксиома: существует прямая, которой инцидентна одна точка. Эта аксиома является отрицанием аксиомы A_3. Из этого следует независимость третьей аксиомы в исходном списке.

Для доказательства независимости четвертой аксиомы достаточно рассмотреть прямую с тремя различными точками *A*, *B*, *C* на ней. На этой модели выполняются все аксиомы, кроме A_4. Отсюда следует независимость аксиомы A_4.

Выясним теперь полноту системы аксиом A_1, A_2, A_3, A_4.

Моделями этой системы служит треугольник *ABC* и параллелограмм *ABCD* вместе с диагоналями *AC* и *BD*. Эти две модели не изоморфны, так как имеют разное число точек и разное число прямых. Следовательно, исходная система полнотой не обладает.

5.5 Аксиоматики евклидовой планиметрии

В этом параграфе дадим обзор наиболее известных аксиоматик, позволяющих построить евклидову геометрию на плоскости.

1. «Начала» Евклида

Аксиоматика, изложенная в книге Евклида «Начала», – первая попытка аксиоматического построения геометрии. Мы приведем ее в том виде, как она представлена в книге А. П. Киселева « Элементарная геометрия» (Книга для учителя. – М. : Просвещение, 1980. – 287 с., ил.).

В начале перечисляются **определения**:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Границы линии суть точки.
4. Прямая линия есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Границы поверхности суть линии.
7. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.
8. Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину.
9. Границы тела суть поверхности.

Далее следуют **постулаты.** Требуется, чтобы:

1. От каждой точки до каждой другой точки можно было провести одну прямую.
2. Ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать до прямой линии.
3. Из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.
4. Все прямые углы были равны.
5. Если прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, которые вместе меньше двух прямых, то требуется, чтобы эти прямые, будучи продолжены неограни-

ченно, пересекались с той стороны, с которой лежат углы, которые вместе меньше двух прямых.

Замыкают список **аксиомы:**

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавить равные, то суммы будут равны.
3. Если от равных отнять равные, то остатки будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны.
5. Целое больше своей части.

Перечисленные определения, постулаты и аксиомы вызывают веские возражения.

Во-первых, ряд понятий определяется дважды. Например, понятие точки (определения 1-е и 3-е), линии (определения 2-е и 6-е), поверхности (определения 5-е и 9-е).

Во-вторых, некоторые определения и постулаты включают в себя понятия, ранее не определенные, а именно *длина, ширина, глубина, одинаково расположены, непрерывность.*

В-третьих, нет разграничения между постулатами и аксиомами.

В-четвертых, 4-й постулат представляет собой теорему.

В-пятых, очень сложная формулировка 5-го постулата (параллельности).

В-шестых, предложения, называемые аксиомами (кроме 4-й), относятся к величинам вообще, а не только к геометрическим.

В-седьмых, 4-я аксиома должна быть отнесена к постулатам.

Позже эта аксиоматика была исправлена и дополнена.

2. Аксиоматика Гильберта

База структуры в этой аксиоматике состоит из двух множеств и трех отношений: $S_H = \{E, F, \in, \mu, \cong\}$, где E – множество точек, F – множество прямых, $\in$ – отношение «принадлежности» (инцидентности); μ – отношение «лежать между»; $\cong$ – отношение «конгруэнтности». Список аксиом, задающих указанные отношения, содержит шестнадцать аксиом, разбитых на пять групп $\Sigma_H = \{I, II, III, IV, V\}$.

I. *Аксиомы инцидентности.* Этих аксиом четыре и они перечислены в 5.4.

Из аксиом инцидентности следует, что множество E содержит, по крайней мере, три точки, а множество F – по крайней мере три прямые. Две различные прямые имеют не более одной общей точки.

II. *Аксиомы порядка*:

1. Если точка B лежит между точками A и C, то точка B лежит между точками C и A, и точки A, B, C – три различные точки прямой.

Условная запись $\mu\ (ABC)$ читается так: точка B лежит между точками A и C. С учетом этого обозначения первая аксиома порядка запишется в виде: $\mu\ (ABC) \Rightarrow \mu\ (CBA)$.

Из данной аксиомы вытекает, что «лежать между» является симметричным тернарным отношением.

2. Для всяких двух различных точек A и B существует точка C, лежащая между ними.

Из первой и второй аксиом следует, что на всякой прямой существует, по крайней мере, три точки.

3. Из трех различных точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Используя отношение μ, дадим определение отрезка.

Определение 5.5.1. Отрезком с концами в точках A и B называется множество точек

$[AB] = \{A, B\} \cup \{M \mid \mu\ (AMB)\}$.

Точки отрезка, отличные от концевых, называются внутренними точками этого отрезка.

Сформулируем теперь последнюю аксиому (аксиому Паша) из второй группы.

4. Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой, a – прямая, не проходящая через точки A, B, C. Тогда, если прямая a проходит через внутреннюю точку отрезка $[AB]$, то она проходит через внутреннюю точку отрезка $[AC]$ или через внутреннюю точку отрезка $[BC]$.

Из аксиом инцидентности и порядка можно доказать целый ряд утверждений. Приведем некоторые из них.

а) Каковы бы ни были точки A и C, существует, по крайней мере, одна точка B, лежащая между A и C.

б) Среди любых трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

в) Всякая прямая содержит бесконечное множество точек.

г) Всякая точка O прямой разделяет все остальные точки этой прямой на два не пустых класса так, что любые две точки принадлежащие одному классу, лежат с одной стороны от точки O, а две точки, принадлежащие разным классам, лежат по разные стороны от точки O.

д) На всякой прямой существует два порядка следования точек.

Для формулировки последующих аксиом нам потребуются понятия луча, полуплоскости, угла. Эти понятия в данной аксиоматике являются определяемыми.

Определение 5.5.2. Лучом с началом в точке A и проходящим через точку B называют множество точек $[AB] \cup \{M \mid \mu\ (ABM)\}$.

Луч с началом в точке A и проходящим через точку B обозначают $[AB)$.

Определение 5.5.3. Пусть a – прямая, A и B – точки, не принадлежащие a. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a, если отрезок $[AB]$ не содержит точек прямой a, и по разные стороны, если $[AB]$ содержит точку прямой a.

Определение 5.5.4. Полуплоскостью, определяемой границей (ребром) a и точкой A, называется множество точек прямой a и точек, лежащих с точкой A по одну сторону от прямой a.

Определение 5.5.5. Пара лучей h и k с общим началом называется углом и обозначается $\angle(h, k)$. Если лучи h и k принадлежат одной прямой, то говорят, что они образуют развернутый угол.

Пусть $h = [OA)$, $k = [OB)$. Тогда угол $\angle(h, k)$ обозначают $\angle AOB$.

III. *Аксиомы конгруэнтности*

Условную запись $F \cong F_1$ читают так: фигура F конгруэнтна фигуре F_1. Таким образом, конгруэнтность есть отношение на множестве фигур. Конгруэнтность задается пятью аксиомами.

1. $(\forall\ [AB],\ \forall\ [OX))\ \exists!\ B_1 \in [OX)\ |\ [AB] \cong [OB_1]$.

2. $([A_1B_1] \cong [AB],\ [A_2B_2] \cong [AB]) \Rightarrow [A_1B_1] \cong [A_2B_2]$.

3. $(\mu\ (ABC),\ \mu\ (A_1B_1C_1),\ [AB] \cong [A_1B_1],\ [BC] \cong [B_1C_1]) \Rightarrow$
$\Rightarrow [AC] \cong [A_1C_1]$.

4. Пусть даны угол $\angle AOB$, луч $[O_1A_1)$ и полуплоскость Π с ребром (O_1A_1). Тогда существует единственный луч $[O_1B_1)$, принадлежащий полуплоскости Π, такой, что $\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1$. Каждый угол конгруэнтен самому себе, то есть $\angle AOB \cong \angle AOB \cong \angle BOA$.

5. Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой и точки A_1, B_1, C_1 тоже не лежат на одной прямой. Тогда

$$([AB] \cong [A_1B_1],\ [AC] \cong [A_1C_1],\ \angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle ABC \cong \angle A_1B_1C_1 \text{ и } \angle ACB \cong \angle A_1C_1B_1.$$

Определение 5.5.6. Отрезок $[AB]$ меньше отрезка $[CD]$, если существует точка K, принадлежащая отрезку $[CD]$ такая, что отрезок $[AB]$ конгруэнтен отрезку $[CK]$ и записывают $[AB] < [CD]$.

Добавление аксиом конгруэнтности позволяет ввести новые определения. Например, середины отрезка, прямого угла, перпендикуляра к прямой, соотношения «больше» и «меньше» и т. д. Вместе с тем появляются и новые теоремы. Например, существование и единственность середины у каждого отрезка, конгруэнтность вертикальных углов, конгруэнтность прямых углов, три признака конгруэнтности треугольников, теорема о внешнем угле треугольника и т.д. Аксиомы третьей группы позволяют определить движение. Движением называют взаимно-однозначное соответствие, в котором всякий отрезок конгруэнтен своему образу.

IV. *Аксиомы непрерывности*:

1 (Аксиома Архимеда). Для всяких отрезков $[AB]$ и $[CD]$ существует конечное множество точек $A_1 \ldots A_n$, принадлежащих прямой (AB) и удовлетворяющих условиям:

а) $\mu\ (AA_1A_2)$, $\mu\ (A_1A_2A_3)$, … $\mu\ (A_{n-2}\,A_{n-1}\,A_n)$;

б) $[A\,A_1] \cong [A_1\,A_2] \cong \ldots \cong [A_{n-1}\,A_n] \cong [CD]$;

в) $\mu\ (ABA_n)$.

2 (Аксиома Кантора). Пусть на прямой a дана последовательность отрезков $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, …, удовлетворяющая двум условиям:

а) $[A_1B_1] \supset [A_2B_2] \supset \ldots$

б) для любого заданного отрезка $[CD]$ найдется натуральное число n такое, что $[A_nB_n] < [CD]$.

Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков этой последовательности.

Аксиомы четвертой группы позволяют ввести понятие длины и доказать, что у всякого отрезка существует длина. Наличие длины и ортогональности позволяет рассматривать ортонормированные системы координат.

Совокупность теорем, вытекающих из аксиом I-IV групп, образуют так называемую абсолютную геометрию. К этой геометрии принадлежит утверждение «Сумма углов любого треугольника меньше или равна двум прямым углам».

Определение 5.5.7. Две прямые на плоскости, не имеющие общей точки, называются параллельными.

V. *Аксиома параллельности*

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая линия, параллельная данной прямой.

Система аксиом Σ_H непротиворечива, обладает свойствами независимости, полноты и позволяет построить теорию, называемую евклидовой геометрией плоскости.

Аксиоматика Гильберта (по сути дела, это исправленная система аксиом Евклида) была представлена в книге немецкого математика Д. Гильберта «Основания геометрии», опубликованной в 1899 г.

Следует заметить, что в Σ_{H} формулировка аксиом гораздо сложнее, чем в алгебраических структурах. В целях компактного изложения мы воспользовались смешанным приемом, используя в тексте логические символы.

3. Система аксиом Вейля – Неймана

Выше, в п. 5.1 в примерах 11 и 12, мы уже описывали аксиоматику аффинного и евклидового точечных пространств. Для двумерного евклидового точечного пространства она выглядит так.

База структуры $S = \{E, V_2, \Delta\}$. Элементы множества E называются точками, множество V_2 – двумерное векторное евклидово пространство (здесь мы воспользовались тем, что для задания структуры можно использовать другие структуры, непротиворечивость которых доказана). На множествах базы задается отношение Δ, называемое отношением связи точек с векторами. Это отношение удовлетворяет трем аксиомам, приведенным в примере 11 п. 5.1, и мы их здесь не перечисляем.

Система аксиом аффинного пространства была предложена немецким математиком Германом Вейлем в книге «Пространство, время, материя», вышедшей в 1918 г. Аксиоматика евклидова пространства, полученная на основе аксиоматики аффинного пространства добавлением группы аксиом скалярного произведения векторов, была предложена И. Нейманом в работе «Математические основы квантовой механики», вышедшей в 1927 г. Отсюда вытекает название аксиоматики.

Достоинство этой аксиоматики, в отличие от гильбертовской аксиоматики, состоит в том, что она позволяет просто ввести понятие расстояния между точками через модуль вектора и быстро применить координатный метод.

5.6 Аксиоматика курса планиметрии в школьных учебниках федерального комплекта

Понятие равносильности систем аксиом подтолкнуло математиков во второй половине двадцатого века к поиску таких аксиоматик, которые бы позволили эффективно решать вопросы качества образования. В последнее время предпринимались разные попытки построить планиметрию школьного курса геометрии для общеобразовательной школы. Рассмотрим структуры двух учебников школьного курса геометрии.

Аксиомы планиметрии в учебнике под редакцией академика А. Н. Колмогорова

а) База структуры $S = \{E, F, G, \in, \Delta\}$, где E – множество точек, F – множество прямых, $\in$ – отношение принадлежности, Δ – отношение, порождаемое отображением ρ: $E^2 \to G$. Значение функции ρ для всяких точек A и B называется расстоянием от A до B и обозначается $\rho(A, B) = |AB|$. Система аксиом, задающих структуру, содержит 12 аксиом, разбитых на пять групп $\Sigma = \{\text{I, II, III, IV, V}\}$.

I. Аксиомы принадлежности

1. Прямая есть непустое подмножество из E, отличное от множества E.

2. Всякие две различные точки принадлежат одной и только одной прямой.

3. Существует, по крайней мере, одна прямая и каждая прямая содержит хотя бы одну точку.

II. Аксиомы расстояния

1. $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$.
2. $|AB| = |BA|$.
3. $|AB| \leq |AC| + |CB|$, $\forall A, B, C \in E$.

Определение 5.6.1. Точка C лежит между точками A и B, если $C \neq A$, $C \neq B$ и $|AB| = |AC| + |CB|$.

Если точка C лежит между точками A и B, то в этом случае записывают $\mu(ACB)$. Таким образом «*лежать между*» есть тернарное отношение на множестве точек.

III. Аксиомы порядка

1. Если имеет место отношение $\mu(ACB)$, то точки A, B, С принадлежат одной прямой.

2. Всякая точка O прямой p разбивает множество $p \setminus O$ на два не пустых множества L_1, L_2 так, что:

a) $\forall\ A \in L_1$, $\forall B \in L_2$, имеем $\mu(AOB)$;

b) если точки A и $B \neq A$ принадлежат одному из множеств L_1 или L_2, то имеем $\mu(OAB)$ или $\mu(OBA)$.

Определение 5.6.2. Если точка O принадлежит прямой p и точка A принадлежит L_1, то множество точек $L_1 \cup \{O\}$ называют лучом с началом в точке O и проходящим через точку A и обозначается $[OA)$.

3. Для всякого луча $[OX)$ существует отображение $f : \mathrm{G} \to [OX)$ такое, что $|O\, f(a)| = a$, $\forall\ a \in G$.

Определение 5.6.3. Отрезком с концами в точках A и B называется множество $[AB] = \{A, B\} \cup \{X \mid \mu(AXB)\}$.

Точки отрезка, отличные от концевых точек, называются внутренними точками.

Определение 5.6.4. Прямая p разделяет точки A и B, если прямая p пересекает отрезок $[AB]$ во внутренней точке.

4. Любая прямая p разбивает множество $E \setminus p$ на два не пустых множества Π_1 , Π_2 так, что:

a) любые точки $A \in \Pi_1$, $B \in \Pi_2$ разделены прямой p;

b) если точки A и B принадлежат одному из множеств Π_1, Π_2, то эти точки не разделены прямой p.

Каждое из множеств $\Pi_1 \cup p$, $\Pi_2 \cup p$ называется полуплоскостью с границей (ребром) p.

Определение 5.6.5. Взаимно-однозначное отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние между точками, называется движением.

IV. Аксиомы движения плоскости

1. Если $|AB| > 0$ и $|AB| = |A_1 B_1|$, то существует точно два движения, каждое из которых переводит точку A в точку A_1, а точку B в точку B_1. Эти движения переводят полуплоскость с ребром (AB) в две разные полуплоскости с ребром $(A_1 B_1)$.

V. Аксиома параллельности

1. Через данную точку проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой.

В этой аксиоматике отношения «лежать между» и «конгруэнтности» являются определяемыми. Понятия вектора и движения являются определяемыми.

Аксиома движения плоскости представляет собой попытку реализации идеи Ф. Клейна о реализации геометрии с помощью группы преобразований.

б) Аксиомы планиметрии в учебнике геометрии для общеобразовательных учреждений [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кодомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина].

Данный учебник в настоящее время широко используется в школах России. Приведем эту аксиоматику так, как она представлена в учебнике, и опишем ее базу .

Первая группа аксиом характеризует взаимное расположение точек и содержит три аксиомы.

1. Каждой прямой принадлежит, по крайней мере, две точки.
2. Имеются, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.
3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Из этой группы следует, что в базе имеется два множества: E – множество точек и F – множество прямых. На этих множествах вводится отношение «взаимного расположения». В аксиомах это отношение называется три раза по-разному – «принадлежит», «лежат», «проходит». На самом деле эти аксиомы совпадают с аксиомами инцидентности, причем первая и вторая аксиомы объединены в одну. Поэтому третья аксиома в данной аксиоматике содержит два независимых утверждения. Вывод: в базу входит отношение инцидентности «$\in$».

Вторая группа аксиом характеризует понятие «лежать между» .

1. Из трех точек одной прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Из этой аксиомы вытекает определение «лежать по одну сторону» от точки или прямой, луча, полуплоскости.

2. Каждая точка *O* прямой разделяет ее на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки *O*, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки *O*.

3. Каждая прямая *a* разделяет плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой *a*, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой *a*.

Вторая и третья аксиомы, по сути, утверждают существование луча, полуплоскости и позволяют ввести порядок следования точек на прямой. Поэтому эту группу аксиом можно назвать аксиомами порядка.

Третья группа аксиом – это аксиомы *равенства* фигур.

На множестве фигур плоскости можно ввести отношение «равенства». Это отношение порождается взаимно-однозначным соответствием, называемым «наложением». Если фигура Ф налагается на фигуру $Ф_1$, то они называются равными. Само наложение обладает свойствами:

1. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

2. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

3. Любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами: 1) так, луч h совместится с лучом h_1, а луч k - с лучом k_1; 2) так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k – с лучом h_1.

Отношение « равенства» обладает свойствами:

4. Любая фигура равна самой себе.

5. Если фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре Ф.

6. Если фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$, а фигура $Ф_2$ равна фигуре $Ф_3$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_3$.

Из последних трех аксиом следует: отношение равенства является рефлексивным, симметричным, транзитивным, то есть отношение «равенства» есть отношение эквивалентности, разбивает множество фигур на не пустые, непересекающиеся классы, и каждая фигура попадает в один и только один класс.

Четвертая группа аксиом связана с *измерением отрезков*.

1. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

2. При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

В аксиомах четвертой группы говорится об отображении множества отрезков на множество R_+ неотрицательных действительных чисел. Это отображение порождает на указанных множествах отношение Δ, называемое измерением отрезков. Таким образом, в базу необходимо добавить множество R_+ и отношение Δ.

Аксиомы четвертой группы позволяют доказать аксиомы Архимеда и Кантора из аксиоматики Гильберта, а следовательно, непрерывность на множестве точек прямой.

Последняя пятая группа содержит одну аксиому, называемую аксиомой параллельных прямых.

1. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Итак, база системы аксиом учебника под редакцией Л. С. Атанасяна выглядит так $S_A = \{E, F, R_+, \in, \mu, =, \Delta\}$, где E – множество точек, F – множество прямых, R_+ – множество неотрицательных чисел, $\in$ – отношение инцидентности, μ – отношение лежать между, = – отношение равенства фигур, Δ – отношение измерения отрезков.

Эта аксиоматика, так же как аксиоматика А. Н. Колмогорова, аксиоматика Вейля – Неймана, Гильберта, является непротиворечивой, независимой, полной. Эти аксиоматики являются равносильными и определяют планиметрию евклидовой плоскости, и эта теория является однозначной.

В рассматриваемой аксиоматике движение является определяемым понятием. *Движением плоскости называется отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние между точками.* В силу аксиомы 7 при наложении отрезок преобразуется в равный отрезок. Равные отрезки, исходя из процедуры измерения и аксиомы 14, имеют равные длины. Следовательно, всякое наложение есть движение.

Рассмотрим теперь движение плоскости. Исходя из процедуры измерения, аксиомы 14 и определения движения, приходим к утверждениям: «При движении отрезок отображается в отрезок» и «При движении треугольник отображается на равный ему треугольник».

Связь между наложениями и движениями устанавливается теоремой: «Любое движение есть наложение». Действительно, пусть треугольник ABC при движении отображается в равный треугольник $A_1B_1C_1$ и произвольная точка M отображается в точку M_1. Тогда, $AM = A_1M_1$, $BM = B_1M_1$, $CM = C_1M_1$. С другой стороны, существует наложение, отображающее треугольник ABC на равный ему треугольник $A_1B_1C_1$. Пусть в этом отображении точка M отображается на точку M_2. Тогда, $AM = A_1M_2$, $BM = B_1M_2$, $CM = C_1M_2$. Таким образом, точки A_1, B_1, C_1 равноудалены от точек M_1 и M_2, то есть лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2, что невозможно. Следовательно, наложения в аксиоматике Атанасяна Л. С. реализуют ту же идею, что и движения в аксиоматике Колмогорова А. Н.

5.7 Измерение длин отрезков и площадей многоугольников

В этом параграфе рассмотрим структуры измерения длин отрезков и площадей выпуклых многоугольников, которые относятся к общей структуре, называемой *системой величин*.

а) Структура измерения длин отрезков

Пусть L– множество всех отрезков, R_+ – множество всех положительных чисел, l – отображение $L \to R_+$.

Определение 5.7.1. Структуру $S = \{ L, R_+, l\}$ называют системой измерения отрезков, если отображение l удовлетворяет следующим аксиомам:

1. l инвариантно относительно движения, то есть

$$([AB] \cong [A_1B_1]) \Rightarrow l([AB]) = l([A_1B_1]).$$

2. l обладает аддитивным свойством, то есть

$\mu(ABC) \Rightarrow l([AB]) + l([BC]) = l([AC])$.

3. Существует отрезок $[PQ]$ такой, что $l([PQ]) = 1$.

Отрезок $[PQ]$ называют линейной единицей или единичным отрезком. В силу аксиомы 1 всякий отрезок, конгруэнтный отрезку $[PQ]$, также называется единичным отрезком. Значение $l([AB])$ называют *длиной* отрезка $[AB]$.

Система аксиом, задающая измерение отрезков, непротиворечива. Для доказательства воспользуемся системой аксиом Вейля – Неймана, непротиворечивость которой установлена.

Определение 5.7.2. Длиной отрезка $[AB]$ назовем модуль вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, то есть $l([AB]) = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$.

Покажем, что аксиомы измерения длин будут выполняться.

1) Пусть $[AB] \cong [A_1B_1]$. Следовательно, существует движение D, преобразующее отрезок $[AB]$ в отрезок $[A_1B_1]$. Движение D, как из-

вестно, задается двумя ортонормированными реперами r и r_1 по правилу: координаты точки M в репере r и координаты ее образа в репере r_1 совпадают. Следовательно, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}|$. Отсюда, $l([AB])$ = $l([A_1B_1])$.

2) Пусть $\mu(ABC)$. Тогда, согласно определению отношения «лежать между», $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \text{к}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, где $0 < \text{к} < 1$. По аксиоме треугольника $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Отсюда, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1-\text{к})\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Тогда $l([AB]) + l([BC]) = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \kappa|\overrightarrow{AC}| + (1-\kappa)|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC}| = l([AC])$.

3) Пусть P – произвольная точка и $\vec{e}$ – единичный вектор. Тогда, откладывая этот вектор от точки P, получим точку Q такую, что $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \vec{e}$. Следовательно, $l([PQ]) = 1$.

В аксиоматике Гильберта функция $l([AB])$ строится иначе, опираясь на аксиому Архимеда. Этот же способ используется и в аксиоматике Атанасяна. Связь между функциями, задающими длину отрезка, устанавливается следующей теоремой.

Теорема 5.7.1. Если отображение $f : L \rightarrow \mathrm{R}_+$ удовлетворяет аксиомам 1), 2), 3) определения 5.6.2, то для всякого отрезка $[AB]$ имеет место $l([AB]) = f([AB])$.

Эта теорема устанавливает изоморфизм моделей системы измерения длин. Таким образом, аксиоматика измерения длин отрезков полная.

б) Структура измерения площадей многоугольников

Пусть $\mathcal{M}$ – множество всех многоугольников плоскости и M – некоторый многоугольник из этого множества. Пусть $L \subset M$, где L – ломаная, соединяющая две какие-либо вершины многоугольника M и лежащая внутри его. Ломаная L разбивает многоугольник M на два многоугольника M_1 и M_2 таких, что $M_1 \cup M_2 = M$. В этом случае говорят, что многоугольник M есть сумма многоугольников M_1, M_2 и записывают: $M = M_1 + M_2$.

Пусть s – отображение множества $\mathcal{M}$ на множество R_+.

Определение 5.7.3. Структуру $\{\mathcal{M}, R_+, s\}$ называют системой измерения площадей многоугольников, если отображение s удовлетворяет аксиомам:

1) s инвариантно относительно движения, то есть

$$(M_1 \cong M_2) \Rightarrow s(M_1) = sM_2).$$

2) s обладает аддитивным свойством, то есть

$$(M = M_1 + M_2) \Rightarrow s(M) = s(M_1) + s(M_2).$$

3) s(Q)=1, где Q – квадрат с единичной стороной.

В силу аксиомы 1 всякий квадрат, конгруэнтный квадрату Q, удовлетворяет аксиоме 3. Значение s(M) называют *площадью* многоугольника M.

Система аксиом, задающая измерение площадей многоугольников, непротиворечива. Для доказательства воспользуемся системой аксиом Вейля – Неймана.

Пусть r = $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ – ортонормированный репер и пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – вершины многоугольника M. Обозначим через $(x_\mathrm{i}, y_\mathrm{i})$ координаты вершины A_i в репере r. Рассмотрим функцию

$$F = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}. \qquad (5.7.1)$$

Эта функция обладает следующими свойствами.

1) Если на многоугольнике M поменять порядок нумерации вершин на противоположный, то функция F изменит знак.

2) При параллельном переносе многоугольника M значение функции F не меняется, то есть

$$F' = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x'_n & y'_n \\ x'_1 & y'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + a & y_1 + b \\ x_2 + a & y_2 + b \end{vmatrix} + \cdots =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \cdots = F.$$

Данное свойство непосредственно вытекает из формул параллельного переноса и свойств определителя второго порядка.

3) При движении первого рода значение функции *F* не меняется.

Пусть при движении первого рода *D* многоугольник *M* преобразуется в многоугольник $M' = A_1' \dots A_n'$ и пусть (x_i', y_i') – координаты точки A_i'.

Функция (5.7.1) для многоугольника M' будет иметь вид:

$$F' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n' & y_n' \\ x_1' & y_n' \end{vmatrix}. \tag{5.7.2}$$

Как известно, формулы движения первого рода имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + \ y\sin\varphi + a, \\ y' = \ -x\sin\varphi + y\cos\varphi + \ b. \end{cases} \tag{5.7.3}$$

Согласно формулам (5.7.3) выражение (5.7.2) примет вид:

$$F' = \begin{vmatrix} x_1\cos\varphi + \ y_1\sin\varphi + a & -x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi + \ b \\ x_2\cos\varphi + \ y_2\sin\varphi + a & -x_1\sin\varphi + y_2\cos\varphi + \ b \end{vmatrix} + \cdots \tag{5.7.4}$$

В силу второго свойства функции *F* имеем:

$$F' = \begin{vmatrix} x_1\cos\varphi + \ y_1\sin\varphi & -x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \\ x_2\cos\varphi + \ y_2\sin\varphi, & -x_1\sin\varphi + y_2\cos\varphi \end{vmatrix} + \cdots$$

или

$$F' = \begin{vmatrix} x_1 & \mathrm{y}_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} + \dots = \begin{vmatrix} x_1 & \mathrm{y}_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \ \dots = F.$$

4) При движении второго рода значение функции *F* меняется на противоположное.

Функцию (5.7.2) называют характеристикой многоугольника.

Теорема 5.7.2. Функция *S*(*M*) = $\frac{1}{2}$ $|F(M)|$ удовлетворяет аксиомам измерения площадей многоугольников.

Первая аксиома имеет место в силу свойств 3 и 4 функции *F*.

Покажем, что аксиома 2 также выполняется. Выберем из двух ориентаций на многоугольнике ту, для которой его характеристика будет положительной. Пусть ломаная $A_кB_1B_2…B_mA_t$ – ломаная, разбивающая многоугольник M на два многоугольника M_1 и M_2. На многоугольниках M_1 и M_2 выберем ориентации так, чтобы они совпадали с ориентацией многоугольника M на общих сторонах. Тогда на ломаной $A_кB_1B_2…B_mA_t$ у многоугольников M_1 и M_2 ориентация будет противоположной. Следовательно, определители, входящие в характеристики многоугольников M_1 и M_2 и составленные из координат вершин ломаной, будут иметь разные знаки. Тогда сумма характеристик многоугольников M_1 и M_2 будет равняться характеристике многоугольника M. Отсюда вытекает выполнимость второй аксиомы измерения площадей.

Покажем выполнимость третьей аксиомы. Пусть Q – квадрат с единичной стороной. Выберем ортонормированный репер r так, чтобы начало репера и единичные точки совпали с вершинами квадрата Q. Тогда при положительной ориентации последовательные вершины квадрата будут иметь координаты (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1). Отсюда

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \dots + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\,.$$

Следовательно, $S(Q) = 1$.

Определение 5.7.4. Величину $S(M) = \frac{1}{2}\,|F(M)|$ назовем площадью многоугольника M.

Итак, мы показали существование функции $S(M)$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5.7.3. Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.

Доказательство. Пусть x и y – длины сторон прямоугольника. Известно, что если две стороны прямоугольника равны двум сторонам другого прямоугольника, то такие прямоугольники конгруэнтны. Отсюда, в силу первой аксиомы, площадь прямоугольника есть функция от длин его сторон – $f(x, y)$. Если прямоугольник, при фиксированной переменной y, разбит на два прямоугольника с параметрами (x_1 , y) и (x_2, y), где $x = x_1 + x_2$, то, в силу аксиомы 2, имеет место равенство $f(x, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$. При $x > x_1$, учитывая положительную определенность функции f, имеем $f(x, y) > f(x_1, y)$. То есть функция $f(x, y)$, при $y = const$, имеет вид: $f(x, y) = кx$. Отсюда, при $y = 1$, следует: $f(x, 1) = кx$. Положив в этом равенстве $x = 1$, получаем $f(1, 1) = к$. Прямоугольник со сторонами (1, 1) есть квадрат. По аксиоме 3, имеем $к = 1$ и, следовательно, $f(x, y) = x$ при фиксированной переменной у.

Функция $f(x, y)$ симметрична, то есть $f(x, y) = f(y, x)$. На основании предыдущего $f(y, x) = y$ при $x = const$. Отсюда, для данного многоугольника M имеем $f(x, y) = xy$. Теорема доказана.

На основании теоремы 5.7.3 получаем следствие.

Следствие 5.7.1. Площадь треугольника равна половине произведения любой его стороны на соответствующую высоту.

Важность этого следствия состоит в том, что площадь треугольника не зависит от выбора функции $S(M)$. Это дает возможность доказать следующее утверждение.

Теорема 5.7.4. Если, наряду с отображением s : $\mathcal{M} \rightarrow$ R₊, существует отображение h: $\mathcal{M} \rightarrow$ R₊, удовлетворяющее аксиомам 1), 2), 3), то s(M) = h(M).

Действительно, разобьем многоугольник M диагоналями на треугольники. Площади этих треугольников, на основании следствия 5.7.1, одинаковы для отображений s и h. Площадь многоугольника M равна сумме площадей этих треугольников. Отсюда, s(M) = h(M).

Из этой теоремы вытекает полнота системы измерения площадей многоугольников.

Задания для самостоятельной работы

1. Опишите структуру кольца.
2. Опишите структуру поля

3. Докажите в аксиоматике Гильберта утверждение « Всякая прямая плоскости разбивает плоскость на две полуплоскости» .

4. Докажите, что система аксиом Гильберта равносильна системе аксиом Вейля – Неймана.

5. Докажите, что аксиоматика Вейля – Неймана равносильна аксиоматике Колмогорова А. Н.

6. Докажите, что аксиоматика Колмогорова А. Н. равносильна аксиоматике Атанасяна Л. С.

7. Докажите теорему 5.7.1. Указание. Рассмотрите последовательно случаи: длина $f([AB])$ равна единице, выражается числом $1 : n$ (n натуральное число), числом $m : n$ (m и n натуральные числа), числом α (α - иррациональное число).

8. Докажите, что при параллельном переносе многоугольника M значение функции F не меняется.

9. Два многоугольника равновелики, если их площади равны. Докажите, что равновеликость есть отношение эквивалентности.

10. Два многоугольника называются равносоставленными, если их можно разложить на одно и то же число конгруэнтных треугольников. Докажите, что равновеликость есть отношение эквивалентности на множестве многоугольников.

11. Приведите доказательство теоремы Бояи – Гервина: Если два многоугольника равновеликие, то они равносоставленные.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Атанасян, Л. С. и др. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. – 22-е изд. – М. : Просвещение, 2012.– 394 с. : ил. – ISBN 978-5-09-026716-8.

2. Базылев, В. Т. Геометрия. Учебник : пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев. – М. : «Просвещение», 1975. – 367 с. с ил.

3. Киселев, А. П. Элементарная геометрия : книга для учителя / А. П. Киселев. –М. : Просвещение, 1980. – 287 с., ил.

4. Концепция развития математического образования. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24. 12. 2013 г.

5. Уткин, А. А. Геометрическое моделирование окружающего мира : учебное пособие / А. А. Уткин. – Орск : Издательство Орского гуманитарно-технологического института (филиала) ОГУ, 2013. – 215 с. – ISBN 978-5-8424-0659-3.

Учебное издание

Алексей Алексеевич Уткин,
Тамара Ильинична Уткина

ГЕОМЕТРИЯ:
Топология. Гладкие линии и поверхности. Основания геометрии

Учебное пособие

Редактор
Е. В. Кондаева

Редактор 2 категории
Г. А. Чумак

Подписано в печать 15.04.2016 г.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 7,9.
Тираж 300 (1 завод – 50) экз. Заказ .

Издательство Орского гуманитарно-технологического института (филиала) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет»

462403, г. Орск Оренбургской обл., пр. Мира, 15А