

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра летательных аппаратов

Н. А. Морозов, В. Д. Проскурин

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.04 Авиастроение

Оренбург
2018

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.213 я73
М 80

Рецензент – кандидат технических наук А. А. Гаврилов

Морозов, Н. А.
М 80 Применение принципа возможных перемещений к определению усилий в стержнях плоской фермы: методические указания / Н. А. Морозов, В. Д. Проскурин; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2018. – 31 с.

Методические указания содержат варианты заданий и пример решения задачи по применению принципа возможных перемещений к определению усилий в стержнях плоской фермы.

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся направлений подготовки 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.04 Авиастроение по дисциплине «Аналитическая динамика и теория колебаний», а также рекомендуются для самостоятельной работы и практических занятий обучающихся по техническим направлениям бакалавриата и специалитета по дисциплинам «Механика», «Теоретическая механика» и могут быть полезны аспирантам и преподавателям.

Методические указания подготовлены в рамках проекта по совершенствованию содержания и технологий целевого обучения студентов в интересах организаций оборонно-промышленного комплекса («Новые кадры ОПК–2017»).

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.213 я73

© Морозов Н.А.,
Проскурин В.Д., 2018
© ОГУ, 2018

Содержание

Введение.....	4
1 Краткие теоретические сведения.....	5
1.1 Принцип возможных перемещений	5
1.2 Рекомендации к решению задач	6
1.3 Вопросы для самоконтроля	7
2 Постановка задачи и исходные данные	8
3 Пример выполнения задачи	20
3.1 Исходные данные	20
3.2 Решение	20
3.2.1 Определение усилий в стержнях фермы.....	20
3.2.2 Проверка значений усилий в стержнях.....	26
Список использованных источников	31

Введение

В аналитической динамике рассматриваются общие принципы механики, производится вывод из них основных дифференциальных уравнений движения, а также исследуются эти уравнения и методы их интегрирования.

Аналитическая динамика позволяет определять положение механических систем с использованием обобщенных координат, которые представляют собой независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве. Число обобщенных координат равно числу степеней свободы механической системы [1].

Очень важной составляющей аналитической динамики являются вариационные принципы. В большинстве задач механики рассматривается движение несвободных систем, то есть систем, перемещения которых ограничены связями. Поэтому в уравнения движения войдут дополнительные неизвестные величины в виде реакций связей, что обычно существенно усложняет весь процесс решения.

Преимущество вариационных принципов состоит в том, что из них сразу получаются уравнения движения или равновесия соответствующей механической системы, не содержащие неизвестных реакций связей. Достигается это за счет того, что действие связей учитывается не заменой их неизвестными реакциями, а рассмотрением тех возможных перемещений (возможных скоростей) точек системы, которые могут допустить наложенные связи. Одним из вариационных принципов является принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа).

Результаты освоения материала, представленного в методических указаниях, ориентированы на формирование компетенции ПК-10 (способность разрабатывать конструктивно силовую схему изделия, обеспечивающую максимальную прочность и надежность конструкции при минимальной массе и стоимости).

1 Краткие теоретические сведения

1.1 Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с голономными, идеальными, стационарными, удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю [2, 3].

$$\sum \delta A_k^a = 0.$$

Возможные работы силы и момента силы определяются по формулам:

$$\delta A(\bar{F}) = F \cdot \delta S \cdot \cos(\alpha),$$

$$\delta A(M) = \pm M \cdot \delta \varphi,$$

где F – сила, приложенная к системе, Н;

δS – возможное перемещение точки приложения силы, м;

α – угол между силой и возможным перемещением, рад;

M – момент силы или пары сил, Н·м;

$\delta \varphi$ – возможный угол поворота той части системы, на которую действует момент, рад.

В том случае, когда зависимости между возможными перемещениями точек системы выражаются с помощью кинематического анализа, вместо уравнения возможных работ можно использовать уравнение возможных мощностей [4]:

$$\sum \delta N_k^a = 0.$$

Возможные мощности силы и момента силы определяются по формулам:

$$\delta N(\bar{F}) = F \cdot \delta v \cdot \cos(\alpha),$$

$$\delta N(M) = \pm M \cdot \delta \omega,$$

где δv – возможная скорость точки приложения силы, м/с;

α – угол между силой и возможной скоростью точки приложения силы, рад;

$\delta \omega$ – возможная угловая скорость той части системы, на которую действует момент, рад/с.

Знак «+» в формулах определения возможных работы и мощности момента ставится, когда момент способствует возможному движению, знак «-» – когда момент препятствует возможному движению.

1.2 Рекомендации к решению задач

Для решения задачи по определению усилий в стержнях фермы с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется следующий алгоритм.

1 Отбросим стержень, усилие в котором необходимо определить, заменив его двумя усилиями, приложенными в узлах.

2 В полученном механизме рассмотрим возможные движения звеньев, изобразим возможные перемещения (возможные скорости) звеньев и их точек. Примечание: необходимо начинать со звена, закрепленного на неподвижном шарнире, так как это звено может совершать только вращательное движение; для определения вида возможного движения другого звена необходимо определить возможное перемещение (возможную скорость) общей

точки звеньев и найти положение мгновенного центра вращения (мгновенного центра скоростей) этого звена.

3 Составим уравнение возможных работ (возможных мощностей) активных сил.

4 Выразим возможные перемещения (возможные скорости) звеньев и их точек через одно возможное перемещение (одну возможную скорость).

5 Из уравнения возможных работ (возможных мощностей) выразим неизвестное усилие.

6 Проверим полученное усилие с помощью методов статики.

1.3 Вопросы для самоконтроля

- 1 Как формулируется принцип возможных перемещений?
- 2 Как определяется возможная мощность силы?
- 3 Как определяется возможная работа силы?
- 4 Как определяется возможная мощность силы?
- 5 Как определяется возможная работа момента?
- 6 Когда возможная работа (мощность) силы положительна?
- 7 Когда возможная работа (мощность) силы отрицательна?
- 8 Когда возможная работа (мощность) момента положительна?
- 9 Когда возможная работа (мощность) момента отрицательна?
- 10 Какое движение тела называется вращательным?
- 11 Какое движение тела называется поступательным?
- 12 Какое движение тела называется плоским?
- 13 Как определяется положение мгновенного центра скоростей?
- 14 Как определяется скорость точки вращающегося тела?
- 15 Как определить усилие в стержне фермы методом вырезания узлов?
- 16 Как определить усилие в стержне фермы методом Риттера?

2 Постановка задачи и исходные данные

Дана плоская ферма (рисунки 1 – 9), находящаяся под действием двух постоянных сил P_1 и P_2 . Используя принцип возможных перемещений, определить усилия в трех стержнях фермы: стержне 1, стержне 2 и стержне 3. Проверить правильность определения данных усилий с помощью методов статики: метода вырезания узлов или метода Риттера.

Размеры фермы указаны на рисунках 1 – 9, необходимые для расчета данные представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные

Вариант	$P_1, кН$	$P_2, кН$	$a, м$	$h, м$
1	2	3	4	5
1	8	3	4	3
2	9	2	3	5
3	1	8	4	3
4	3	4	2	1
5	5	2	3	5
6	9	8	4	2
7	3	4	5	3
8	8	7	2	4
9	6	3	3	3
10	2	5	2	5
11	6	4	1	1
12	8	3	1	3
13	6	9	2	5
14	2	7	4	1
15	1	3	3	1
16	2	5	2	4

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5
17	8	3	5	4
18	9	2	3	2
19	1	8	4	5
20	3	4	3	4
21	5	2	2	1
22	9	8	3	4
23	3	4	2	5
24	8	7	3	2
25	6	3	3	1
26	3	5	4	2
27	8	2	2	3
28	1	6	1	3
29	5	3	5	5
30	9	2	2	3
31	3	7	3	2
32	5	3	4	5
33	4	7	3	4
34	8	1	2	1
35	6	3	3	4
36	3	5	2	5
37	8	2	3	2
38	1	6	3	2
39	5	3	4	5
40	9	2	5	5
41	3	7	4	3
42	5	3	3	5
43	4	7	4	3
44	8	8	2	1

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5
45	5	2	2	5
46	9	8	3	2
47	3	4	4	3
48	8	7	2	1
49	6	3	3	5
50	3	5	4	2
51	8	2	5	3
52	1	6	2	4
53	5	3	3	3
54	9	2	2	5
55	3	7	1	1
56	5	3	1	3
57	4	7	2	5
58	8	1	4	1
59	5	2	3	1
60	9	8	3	4
61	8	3	2	1
62	9	2	3	4
63	1	8	2	5
64	3	4	3	2
65	5	2	3	1
66	9	8	4	2
67	3	4	2	3
68	8	7	1	3
69	6	3	5	5
70	2	5	2	3
71	6	4	3	2
72	8	5	3	4

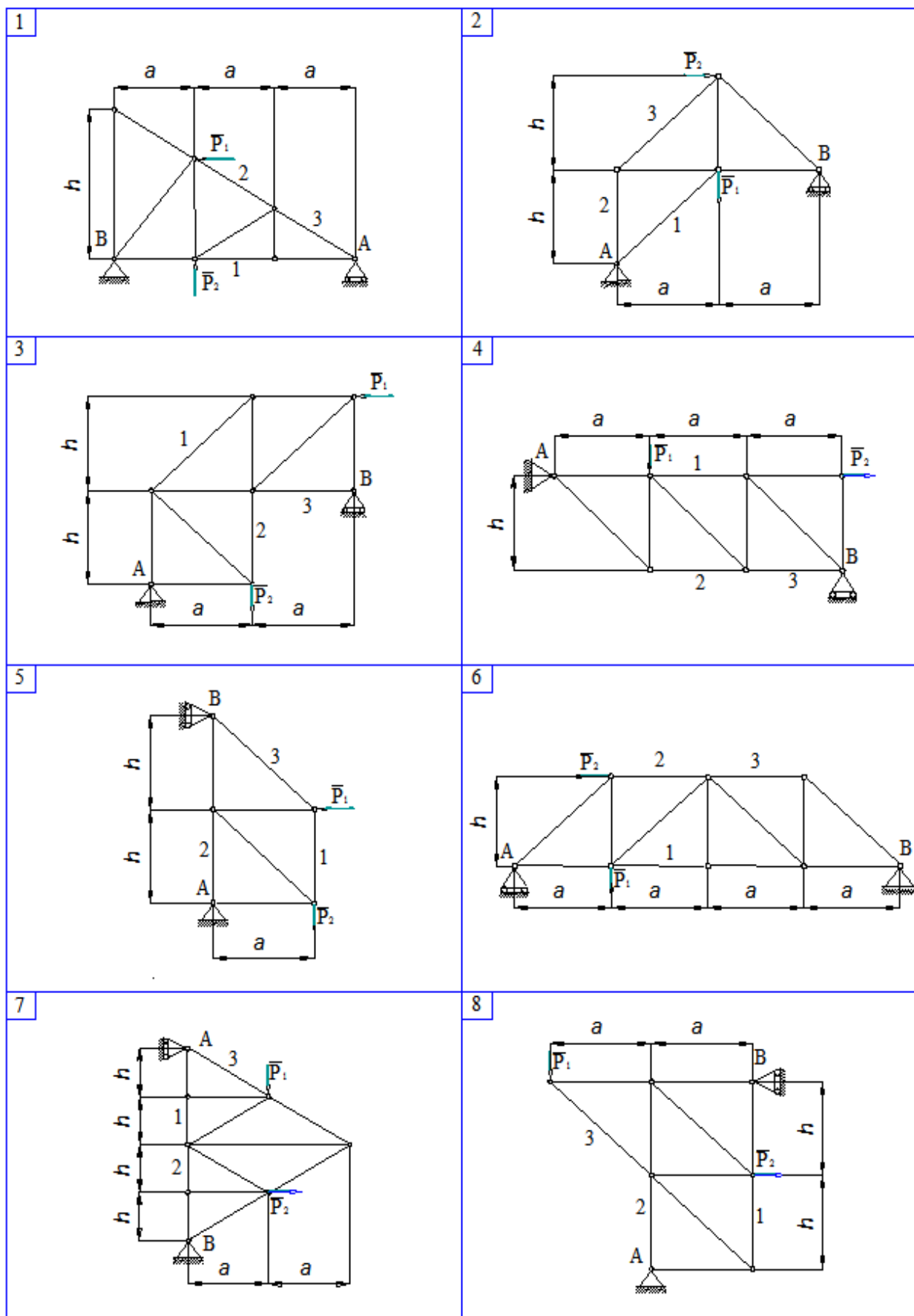


Рисунок 1 – Схемы ферм к вариантам 1 – 8

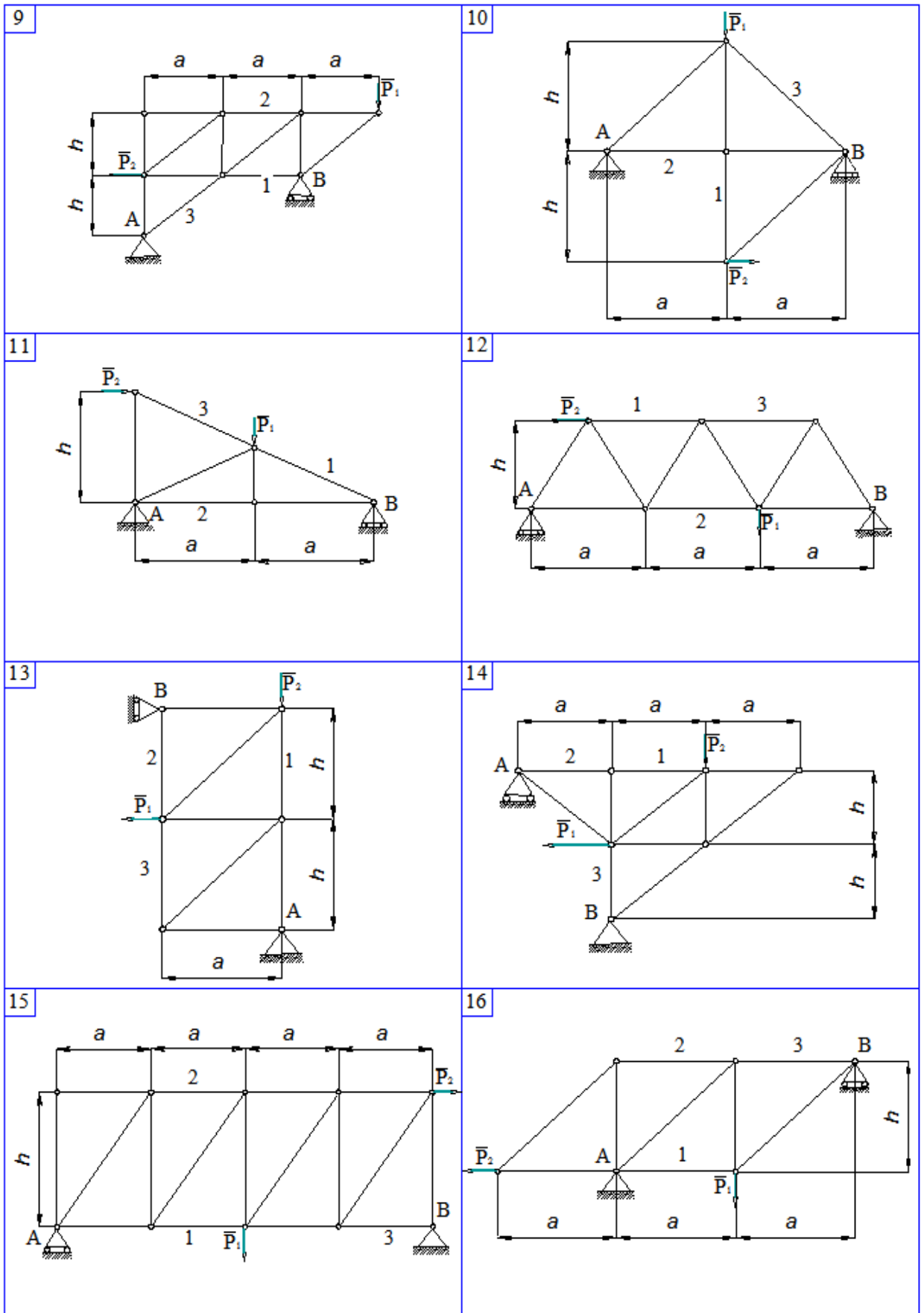


Рисунок 2 – Схемы ферм к вариантам 9 – 16

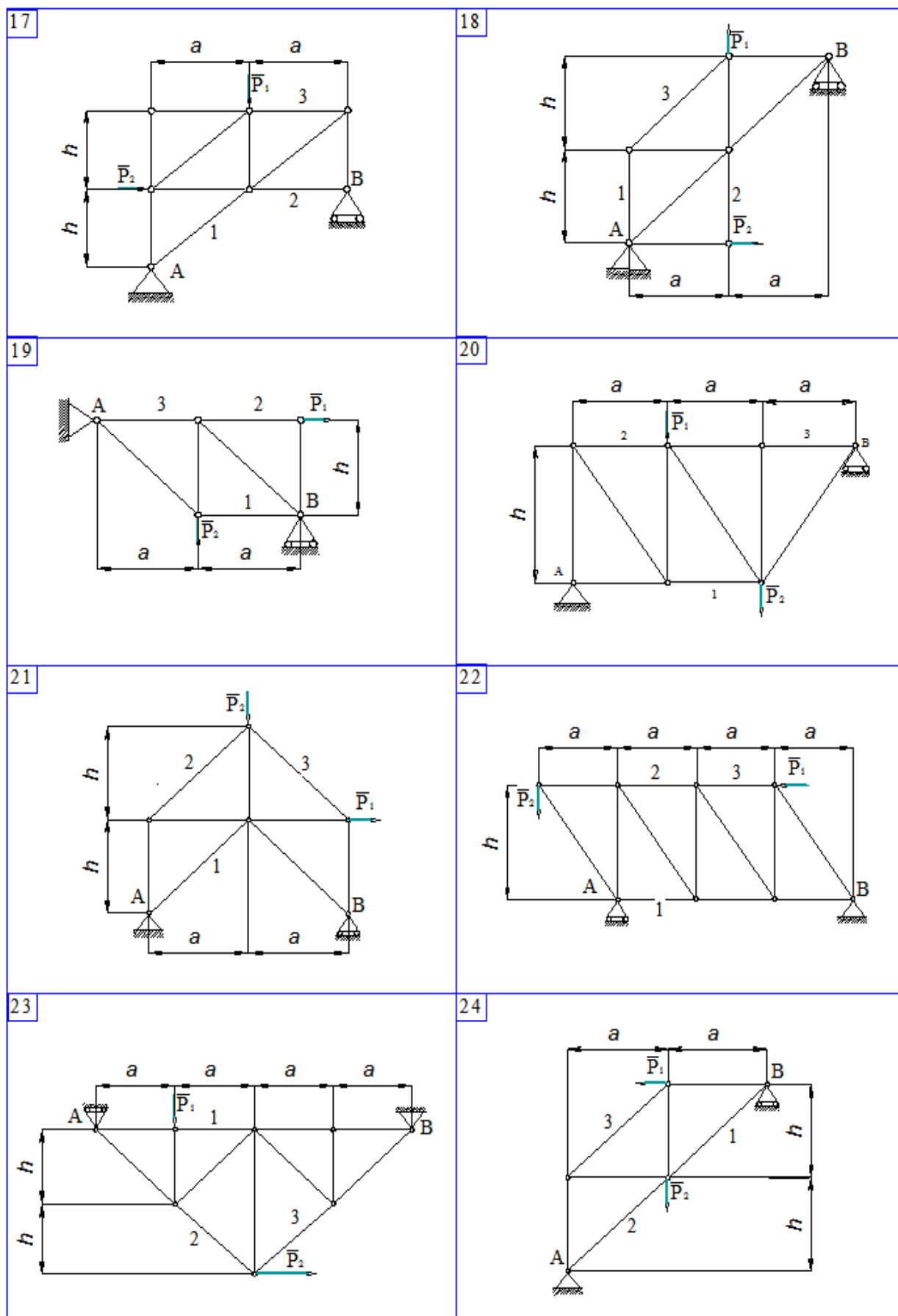


Рисунок 3 – Схемы ферм к вариантам 17 – 24

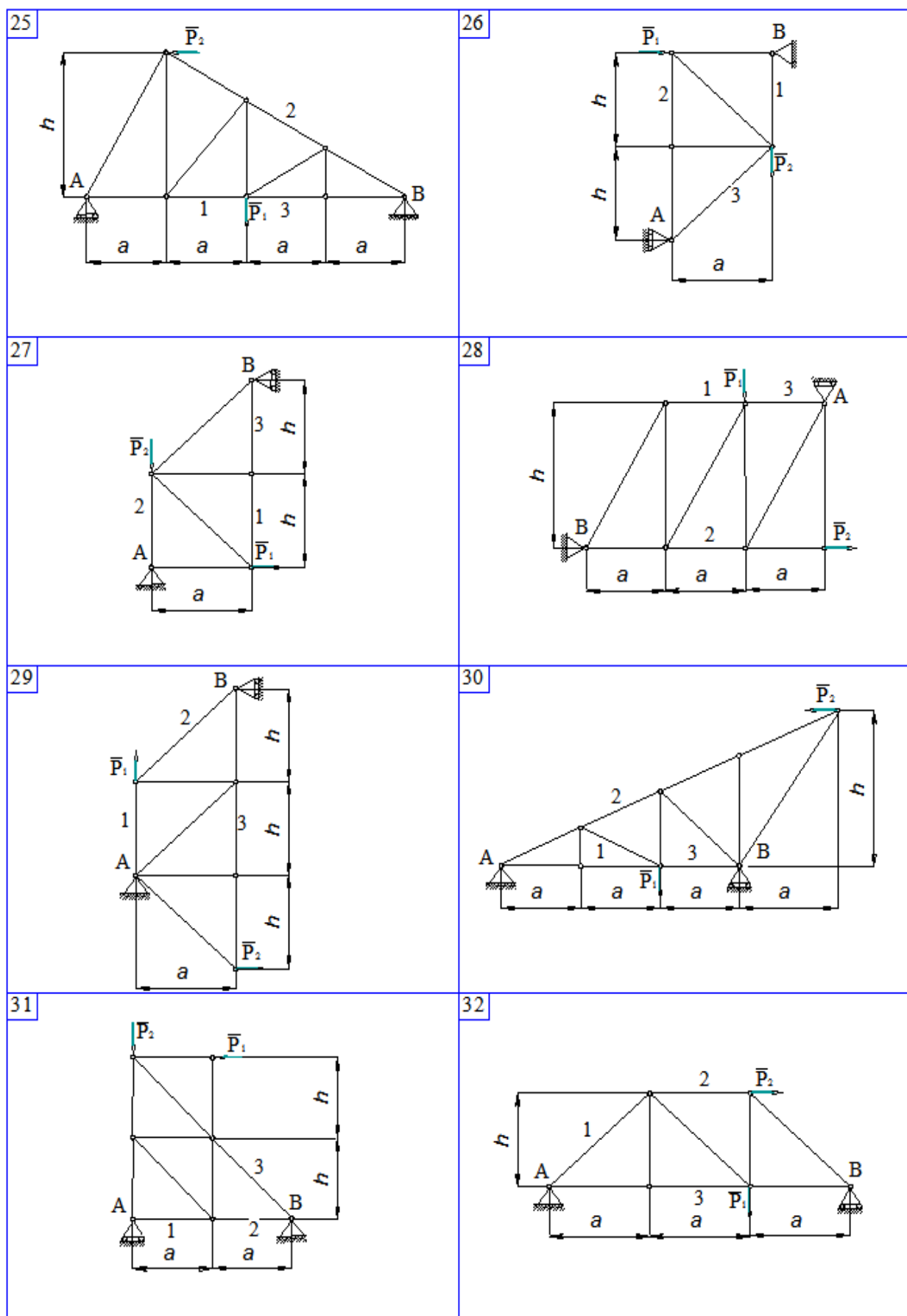


Рисунок 4 – Схемы ферм к вариантам 25 – 32

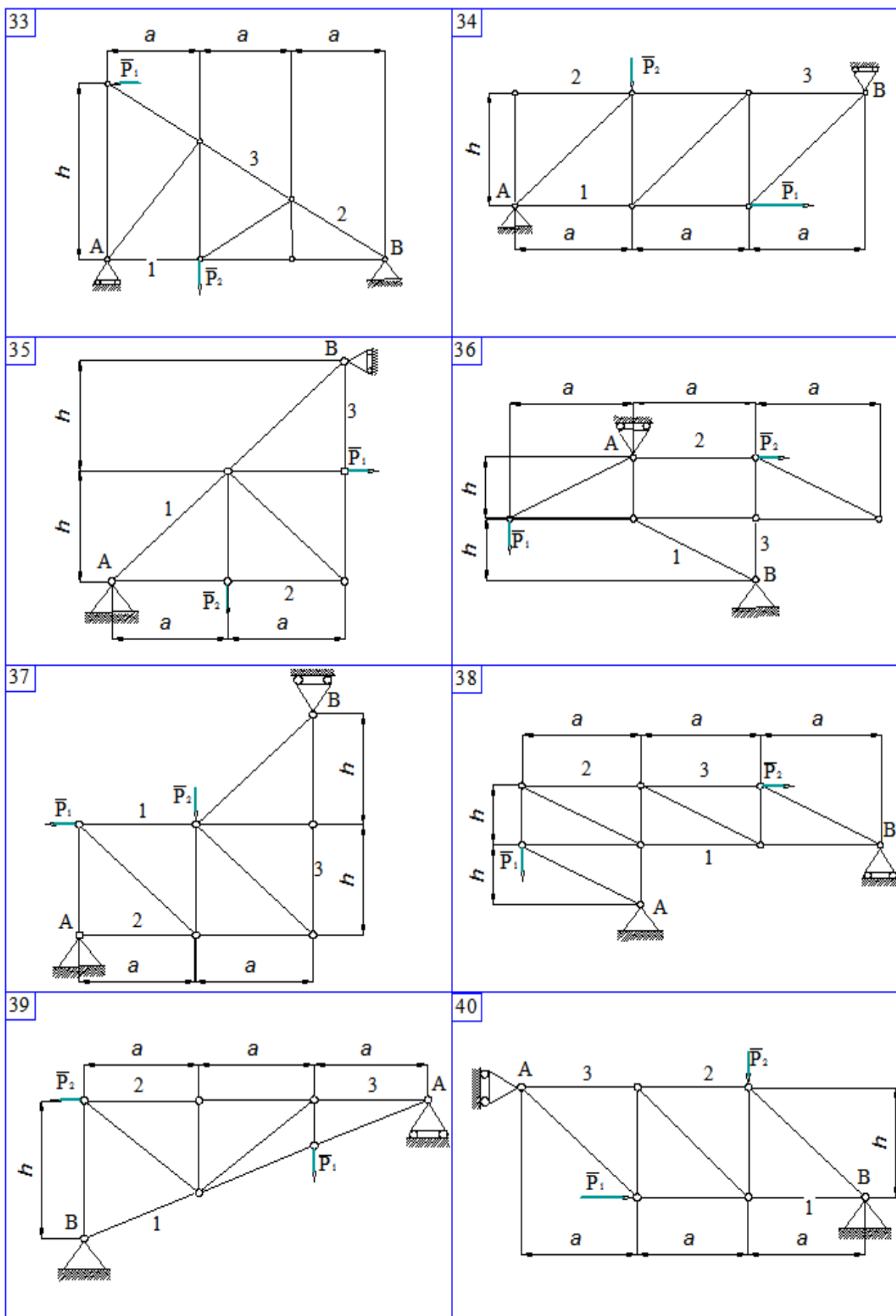


Рисунок 5 – Схемы ферм к вариантам 33 – 40

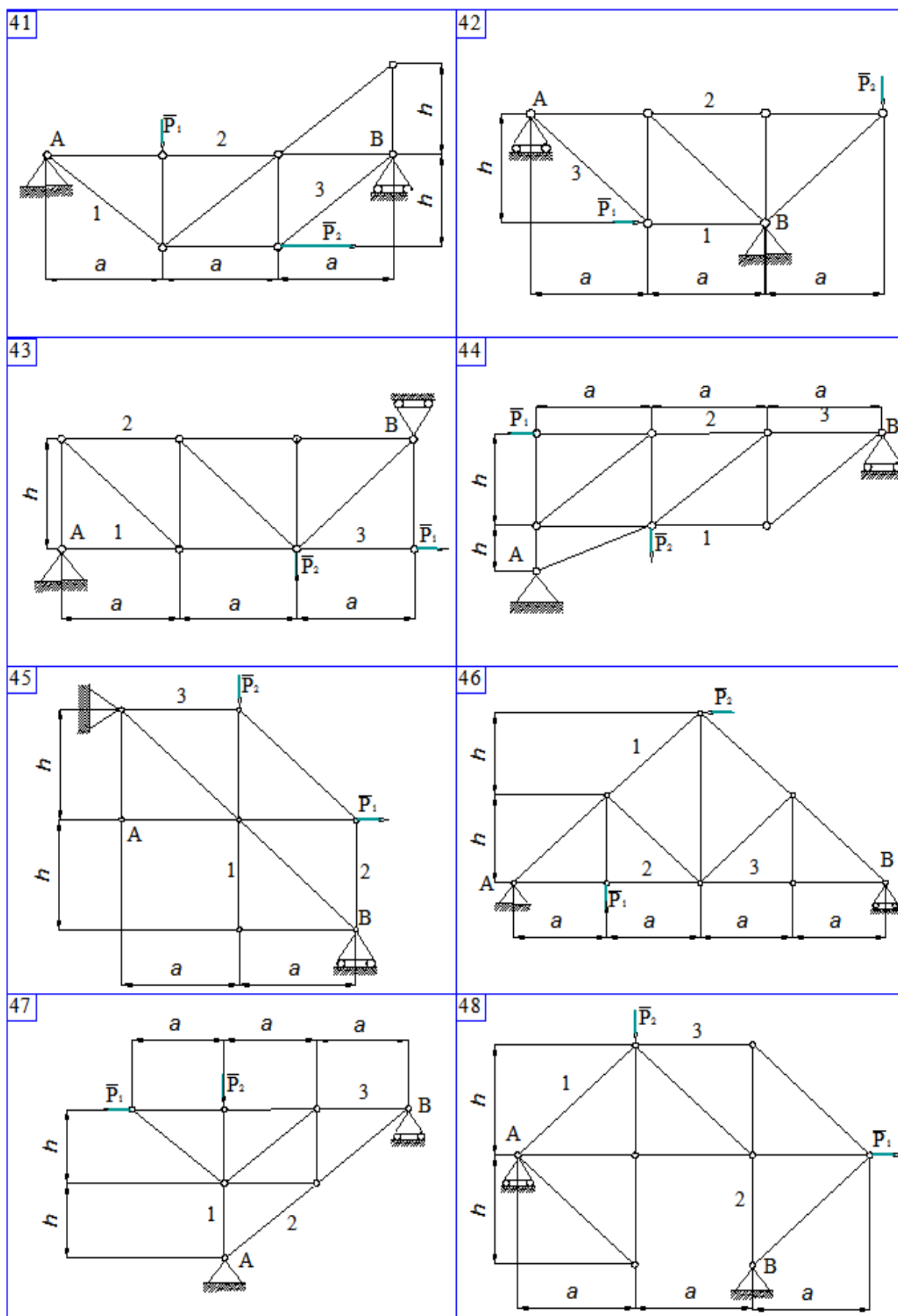


Рисунок 6 – Схемы ферм к вариантам 41 – 48

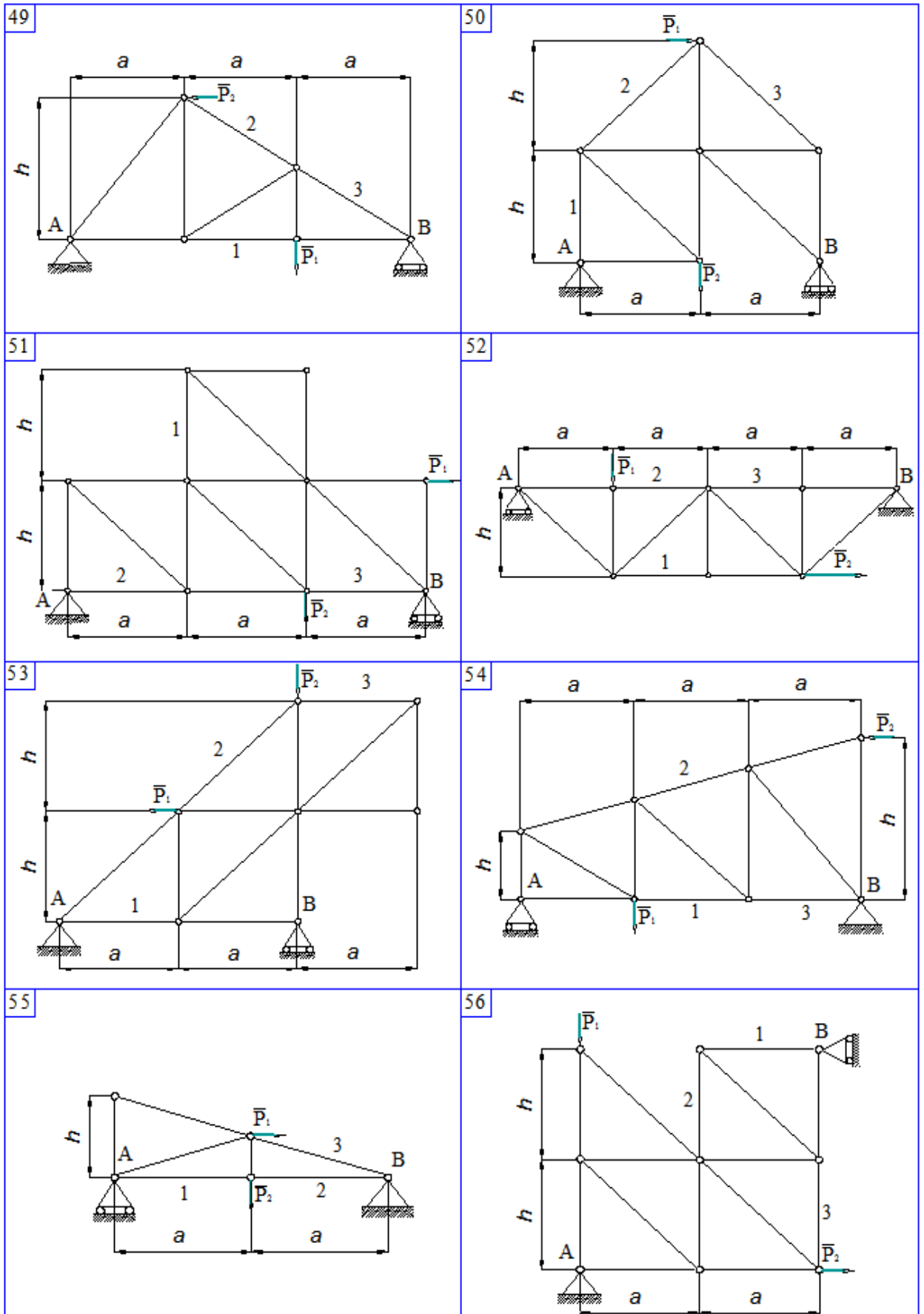


Рисунок 7 – Схемы ферм к вариантам 49 – 56

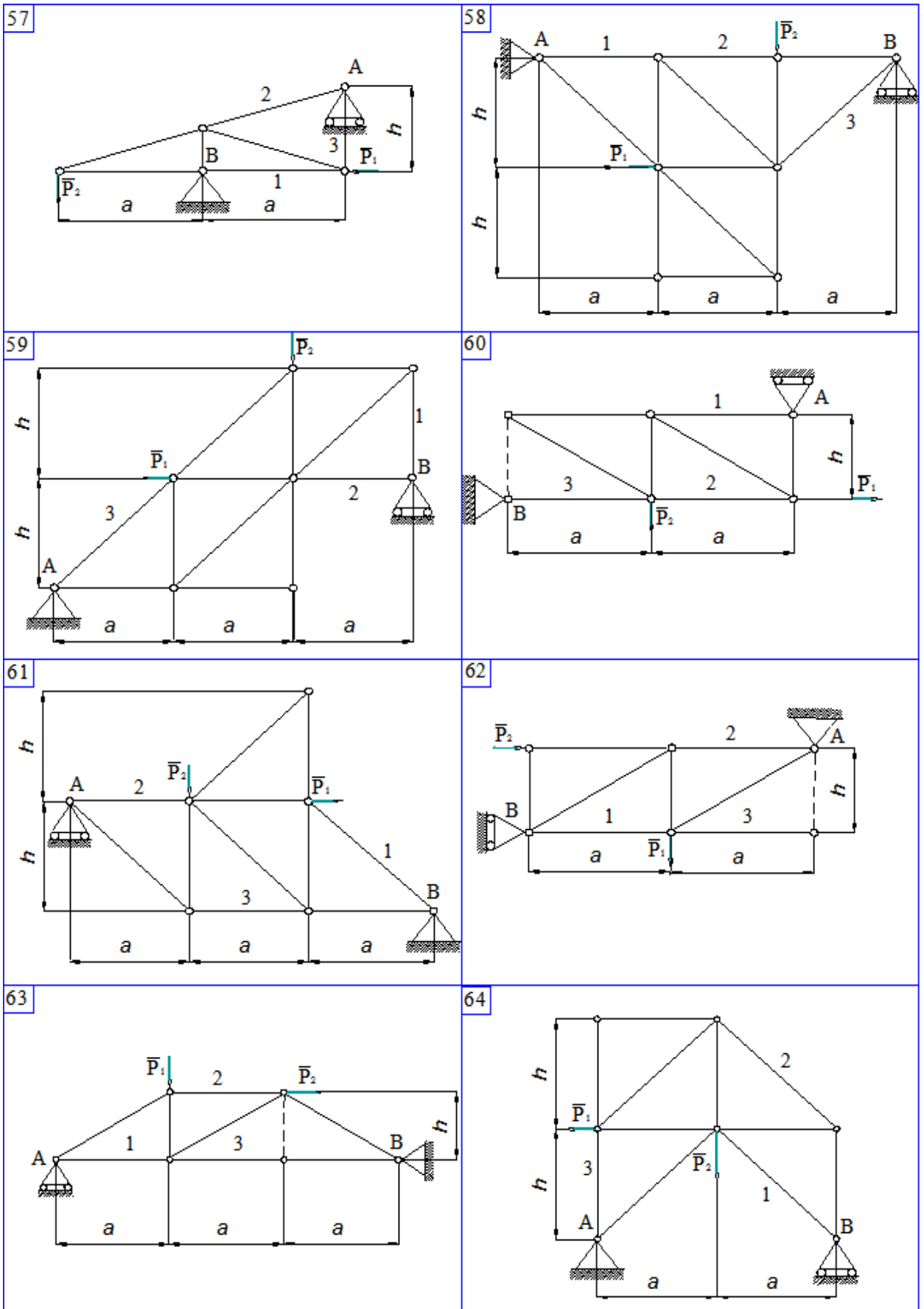


Рисунок 8 – Схемы ферм к вариантам 57 – 64

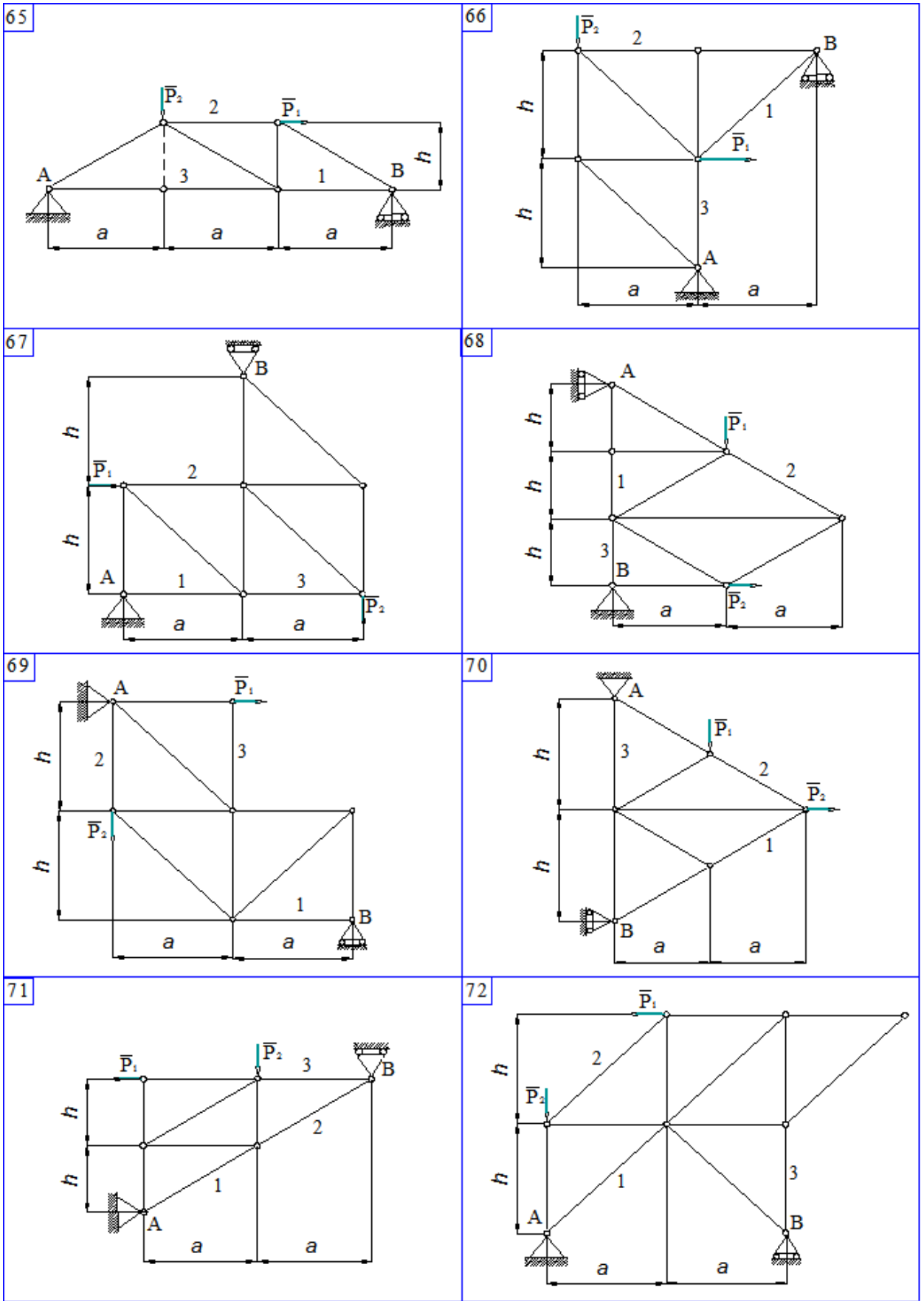


Рисунок 9 – Схемы ферм к вариантам 65 – 72

3 Пример выполнения задачи

3.1 Исходные данные

На плоскую ферму, изображенную на рисунке 10, закрепленную на двух опорах и имеющую размеры $a=2\text{ м}$, $h=1\text{ м}$, действуют две постоянные силы $P_1=3\text{ кН}$ и $P_2=4\text{ кН}$, приложенные в узлах.

Необходимо определить усилия в стержне 1, стержне 2 и стержне 3, а также произвести проверку значений данных усилий с помощью методов статики.

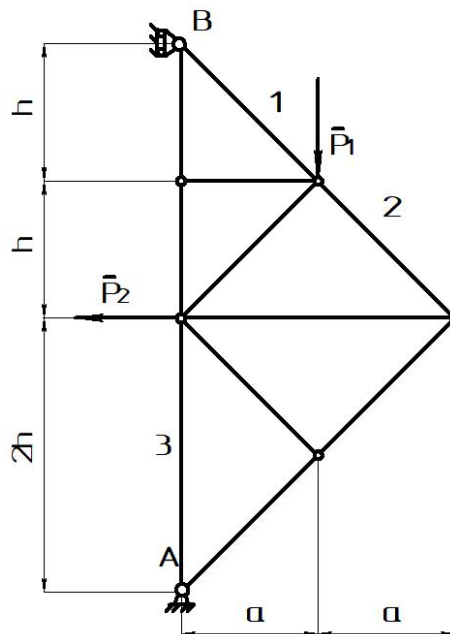


Рисунок 10 – Плоская ферма

3.2 Решение

3.2.1 Определение усилий в стержнях фермы

Применим принцип возможных перемещений.

Определим усилие в стержне 1. Отбросим стержень 1, заменив его двумя усилиями S_1 и S'_1 , приложенными в узлах (рисунок 11).

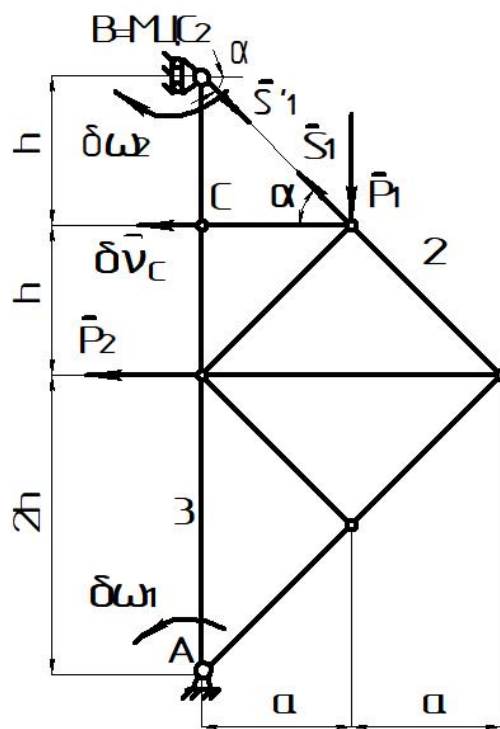


Рисунок 11 – Возможные перемещения частей фермы при отсутствии стержня 1

В результате получим механизм, состоящий из двух звеньев, соединенных шарниром С: стержня ВС и нижней части фермы (назовем ее звеном АС).

Так как звено АС закреплено в точке А на неподвижном шарнире, значит оно может вращаться вокруг точки А с возможной угловой скоростью $\delta\omega_1$. Тогда возможная скорость точки С будет δv_C .

Звено ВС может совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек С и В к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке В, следовательно, эта точка совпадает с МЦС, и мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью $\delta\omega_2$.

Составим уравнение возможных мощностей:

$$\delta\omega_1 \cdot P_1 \cdot 2h - \delta\omega_1 \cdot P_1 \cdot a + \delta\omega_1 \cdot S_1 \cdot \cos\alpha \cdot 3h + \delta\omega_1 \cdot S_1 \cdot \sin\alpha \cdot a = 0.$$

Разделим каждый член уравнения на $\delta\omega_1$:

$$P_1 \cdot 2h - P_1 \cdot a + S_1 \cdot \cos\alpha \cdot 3h + S_1 \cdot \sin\alpha \cdot a = 0.$$

С учетом того, что $\operatorname{tg}\alpha = h/a$, найдем усилие в стержне 1.

$$S_1 = \frac{P_1 \cdot a - P_2 \cdot 2h}{\cos\alpha \cdot 3h + \sin\alpha \cdot a},$$

$$S_1 = \frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot 2}{0,894 \cdot 3 + 0,447 \cdot 2} = -0,56 \text{ кН}.$$

Знак «-» указывает на то, что стержень сжат.

Определим усилие в стержне 2. Отбросим стержень 2, заменив его двумя усилиями S_2 и S'_2 , приложенными в узлах (рисунок 12).

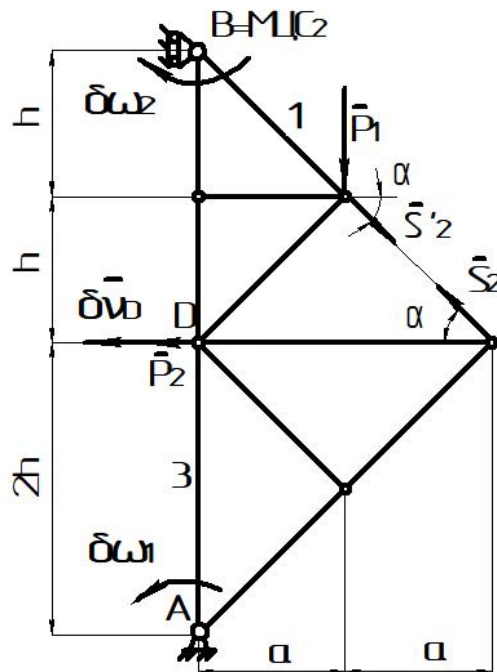


Рисунок 12 – Возможные перемещения частей фермы при отсутствии стержня 2

В результате получим механизм, состоящий из двух звеньев, соединенных шарниром D: верхней части фермы (назовем ее звеном BD) и нижней части фермы (назовем ее звеном AD).

Так как звено AD закреплено в точке A на неподвижном шарнире, значит оно может вращаться вокруг точки A с возможной угловой скоростью $\delta\omega_1$. Тогда возможная скорость точки D будет δv_D .

Звено BD может совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек D и B к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке B, следовательно, эта точка совпадает с МЦС, и мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью $\delta\omega_2$.

Составим уравнение возможных мощностей:

$$P_2 \cdot 2h \cdot \delta\omega_1 + S_2 \cdot \cos\alpha \cdot 2h \cdot \delta\omega_1 + S_2 \cdot \sin\alpha \cdot 2a \cdot \delta\omega_1 + P_1 \cdot a \cdot \delta\omega_2 + S_2' \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot \delta\omega_2 - S_2' \cdot \cos\alpha \cdot h \cdot \delta\omega_2 = 0.$$

Найдем соотношение между возможными угловыми скоростями. Возможная скорость точки D при вращении со звеном AD:

$$\delta v_D = \delta\omega_1 \cdot 2h.$$

Возможная скорость точки D при вращении со звеном BD:

$$\delta v_D = \delta\omega_2 \cdot 2h.$$

Следовательно: $\delta\omega_1 = \delta\omega_2$.

Разделим каждый член уравнения на $\delta\omega_1$:

В результате получим механизм, состоящий из двух звеньев, соединенных шарниром G: стержня AG и верхней части фермы (назовем ее звеном BG).

Так как звено AG закреплено в точке A на неподвижном шарнире, значит оно может вращаться вокруг точки A с возможной угловой скоростью $\delta\omega_1$. Тогда возможная скорость точки G будет δv_G .

Звено BG может совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек G и B к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке, являющейся МЦС звена BG. Мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью $\delta\omega_2$.

Составим уравнение возможных мощностей:

$$-S_3' \cdot 4a \cdot \delta\omega_2 - P_1 \cdot 3a \cdot \delta\omega_2 + P_2 \cdot 2h \cdot \delta\omega_2 = 0.$$

Разделим каждый член уравнения на $\delta\omega_2$:

$$-S_3' \cdot 4a - P_1 \cdot 3a + P_2 \cdot 2h = 0.$$

С учетом того, что $S_3 = S_3'$, найдем усилие в стержне 3.

$$S_3 = \frac{-P_1 \cdot 3a + P_2 \cdot 2}{4 \cdot a},$$

$$S_3 = \frac{-3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{4 \cdot 2} = -1,25 \text{ кН}.$$

3.2.2 Проверка значений усилий в стержнях

Для проверки значений усилий в стержнях фермы воспользуемся методами статики: методом вырезания узлов и методом Риттера. Сечения представлены на рисунке 14.

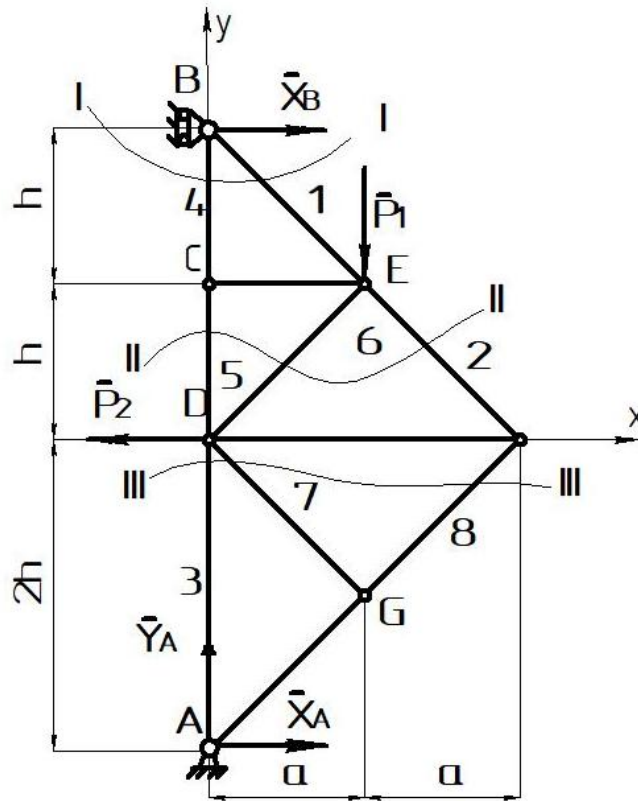


Рисунок 14 – Сечения фермы

Определим реакции опор фермы. Составим уравнения равновесия.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_A - P_2 + x_B = 0 \\ y_A - P_1 = 0 \\ -x_B \cdot 4h - P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2h = 0 \end{cases}$$

Откуда:

$$y_A = P_1 = 3 \text{ кН},$$

$$x_B = \frac{-P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2h}{4h} = \frac{-3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 1} = 0,5 \text{ кН},$$

$$x_A = P_2 - x_B = 4 - 0,5 = 3,5 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим уравнение:

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0,$$

$$x_A \cdot 4h - P_1 \cdot a - P_2 \cdot 2h = 0,$$

$$3,5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0.$$

Реакции определены верно.

Для определения усилия в стержне 1 с помощью сечения I – I вырежем узел В (рисунок 15).

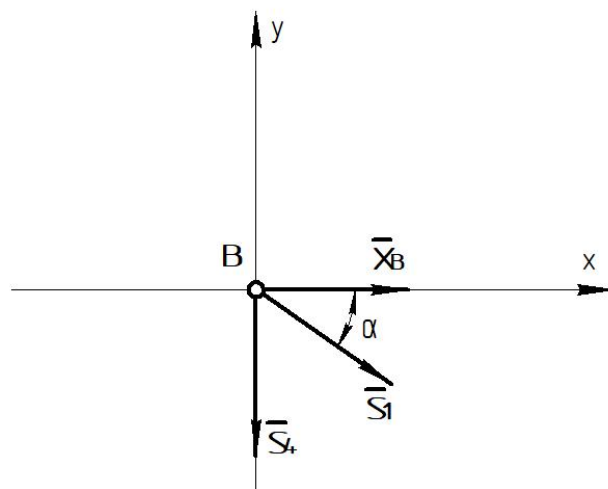


Рисунок 15 – Узел В

Составим уравнение равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$S_1 \cdot \cos \alpha + x_B = 0.$$

Откуда:

$$S_1 = -\frac{x_B}{\cos \alpha} = -\frac{0,5}{0,894} = -0,56 \text{ кН}.$$

Для определения усилия в стержне 2 разрежем ферму с помощью сечения II – II и рассмотрим верхнюю отсеченную часть (рисунок 16).

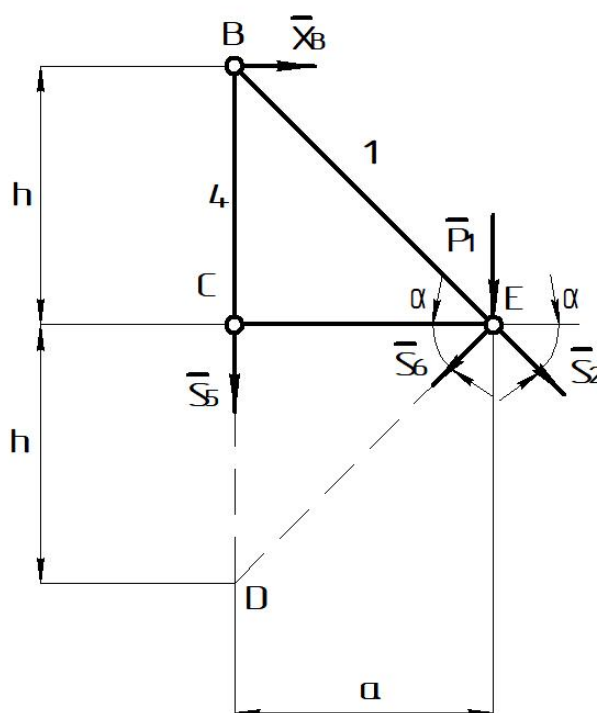


Рисунок 16 – Часть фермы, отсеченная сечением II – II

Определим усилие с помощью уравнения моментов:

$$\sum m_D \vec{F}_k \overset{\curvearrowright}{=} 0,$$

$$-x_B \cdot 2h - P_1 \cdot a - S_2 \cdot \cos \alpha \cdot h - S_2 \cdot \sin \alpha \cdot a = 0,$$

$$S_2 = -\frac{x_B \cdot 2h + P_1 \cdot a}{h \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha} = -\frac{0,5 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{1 \cdot 0,894 + 2 \cdot 0,447} = -3,91 \text{ кН}.$$

Для определения усилия в стержне 3 разрежем ферму с помощью сечения III – III и рассмотрим нижнюю отсеченную часть (рисунок 17).

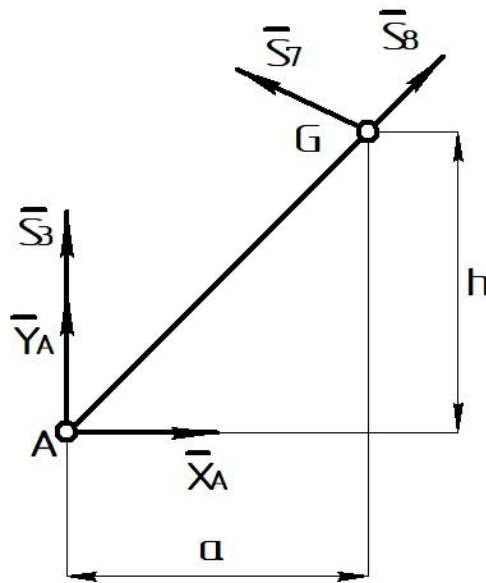


Рисунок 16 – Часть фермы, отсеченная сечением III – III

Определим усилие в стержне 3 с помощью уравнения моментов:

$$\sum m_G \vec{F}_k \overset{\curvearrowright}{=} 0,$$

$$-S_3 \cdot a - y_A \cdot a + x_A \cdot h = 0,$$

$$S_3 = \frac{-y_A \cdot a + x_A \cdot h}{a} = \frac{-3 \cdot 2 + 3,5}{2} = -1,25 \text{ кН}.$$

Таким образом, установлено, что усилия в стержнях определены верно.

Список использованных источников

1. Смолин, И. Ю. Аналитическая динамика и теория колебаний: учеб. пособие / И. Ю. Смолин, В. В. Каракулов. – Томск : Томский государственный университет, 2012. – 172 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.
4. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
5. Диевский, В. А. Теоретическая механика: учебное пособие / В. А. Диевский. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 336 с.
6. Кирсанов, М. Н. Решебник: Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов; под ред. А. И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.