

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

Учебное пособие

Рекомендовано к изданию ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии и специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

Оренбург
2020

УДК 519.17(075.8)

ББК 22.176я73

О075

Рецензент – кандидат физико-математических наук,
доцент С. А. Герасименко

Авторы: О.А. Пихтилькова, Л.Б. Усова,
Д.У. Шакирова, А.Н. Благовисная

О075 Основные понятия теории конечных графов [Электронный ресурс] :
учебное пособие для обучающихся по образовательным программам
высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика
и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и
информационные технологии и специальности 10.05.01 Компьютерная
безопасность / О. А. Пихтилькова [и др.]; М-во науки и высш.
образования Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват.
учреждение высш. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Оренбург :
ОГУ. - 2020. - 105 с- Загл. с тит. экрана.
ISBN 978-5-7410-2475-1

В учебном пособии содержатся основные темы курса «Теория конечных графов». Основу учебного издания составил материал лекционного курса, читаемый на занятиях. Представленные в данном пособии определения, теоремы, леммы и утверждения сопровождаются иллюстрациями, рисунками, таблицами, примерами и пояснениями для успешного усвоения данного курса.

Данное учебное пособие предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии и специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность.

УДК 519.17(075.8)

ББК 22.176я73

© Пихтилькова О.А.,
Усова Л.Б.,
Шакирова Д.У,
Благовисная А.Н.,2020

© ОГУ, 2020

ISBN 978-5-7410-2475-1

Содержание

| | |
|---|-----|
| Введение..... | 4 |
| 1. Основы теории графов..... | 7 |
| 1.1 Виды и способы задания графов | 7 |
| 1.2 Матричные способы задания графов | 15 |
| 1.3 Изоморфизм графов | 18 |
| 1.4 Маршруты в графах | 20 |
| 1.5 Связные графы. Компоненты связности..... | 27 |
| 1.6 Расстояния в графах | 34 |
| 1.7 Операции над графами | 36 |
| 1.8 Внутренняя и внешняя устойчивость графа..... | 40 |
| 1.9 Фундаментальные циклы и разрезы..... | 43 |
| 1.10 Деревья. Остовы | 49 |
| 1.11 Раскраски графов..... | 54 |
| 1.12 Паросочетание в графе | 56 |
| 1.13 Планарные графы. Критерии планарности графа..... | 58 |
| 1.14 Эйлеров цикл. Эйлеров граф..... | 63 |
| 1.15 Гамильтонов путь. Гамильтонов цикл. Граф гамильтонов | 69 |
| 1.16 Независимые и доминирующие множества | 72 |
| 1.17 Максимальные полные подграфы (клики) | 76 |
| 1.18 Дифференцирование графов | 92 |
| 2. Применение теории графов..... | 99 |
| 2.1 Графы и информация | 99 |
| 2.2 Графы и химия..... | 99 |
| 2.3 Графы и биология..... | 101 |
| 2.4 Графы и физика | 101 |
| 2.5 Графы и экономика | 102 |
| Список использованных источников | 105 |

Введение

Родоначальником теории графов принято считать математика Леонарда Эйлера (1707-1783). Историю возникновения этой теории можно проследить по переписке великого ученого. Вот перевод латинского текста, который взят из письма Эйлера к итальянскому математику и инженеру Маринони, отправленного из Петербурга 13 марта 1736 года: «Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинута семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь непрерывно обойти их, проходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто еще до сих пор не мог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. После долгих размышлений я нашел легкое правило, основанное на вполне убедительном доказательстве, с помощью которого можно во всех задачах такого рода тотчас же определить, может ли быть совершен такой обход через какое угодно число и как угодно расположенных мостов или не может».

Кенигсбергские мосты расположены так, что их можно представить в виде схемы (рис. 1). По поводу обнаруженного им способа решать задачи подобного рода Эйлер писал: «Это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, каким образом получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими».

Так можно ли обойти Кенигсбергские мосты, проходя только один раз через каждый из этих мостов? Чтобы найти ответ, продолжим письмо Эйлера к Маринони: «Вопрос состоит в том, чтобы определить, можно ли обойти все эти семь мостов, проходя через каждый только однажды, или нельзя. Мое правило приводит к следующему решению этого вопроса. Прежде всего,

нужно смотреть, сколько есть участков, разделенных водой, – таких, у которых нет другого перехода с одного на другой, кроме как через мост. В данном примере таких участков четыре – А, В, С, D. Далее нужно различать, является ли число мостов, ведущих к этим отдельным участкам, четным или нечетным. Так, в нашем случае к участку А ведут пять мостов, а к остальным – по три моста, т. е. Число мостов, ведущих к отдельным участкам, нечетно, а этого одного уже достаточно для решения задачи. Когда это определено, применяем следующее правило: если бы число мостов, ведущих к каждому отдельному участку, было четным, то тогда обход, о котором идет речь, был бы возможен, и в то же время можно было бы начать этот обход с любого участка. Если же из этих чисел два были бы нечетные, ибо только одно быть нечетным не может, то и тогда мог бы совершиться переход, как это предписано, но только начало обхода непременно должно быть взято от одного из тех двух участков, к которым ведет нечетное число мостов. Если бы, наконец, было больше двух участков, к которым ведет нечетное число мостов, то тогда такое движение вообще невозможно, если можно было привести здесь другие, более серьезные задачи, этот метод мог бы принести еще большую пользу и им не следовало бы пренебрегать». Обоснование вышеприведенного правила можно найти в письме Л. Эйлера к своему другу Элеру. Математик писал, что переход возможен, если на участке разветвления реки имеется не более двух областей, в которые ведет нечетное число мостов. Для того чтобы проще представить себе это, будем стирать на рисунке уже пройденные мосты. Легко проверить, что если мы начнем двигаться в соответствии с правилами Эйлера, пересечем один мост и сотрем его, то на рисунке будет изображен участок, где опять имеется не более двух областей, в которые ведет нечетное число мостов, а при наличии областей с нечетным числом мостов мы будем располагаться в одной из них. Продолжая двигаться так далее, пройдем через все мосты по одному разу. В заключение отметим, что задача о Кенигсбергских мостах и подобные ей задачи вместе с совокупностью методов их исследования составляют очень важный в

практическом отношении раздел математики, называемый теорией графов. Первая работа о графах принадлежала Л. Эйлеру и появилась в 1736 году. В дальнейшем над графами работали Кениг (1774-1833), Гамильтон (1805-1865), из современных математиков – К. Берж, О. Оре, А. Зыков. Впоследствии теория графов стала использоваться в топологии, алгебре, теории чисел. В наше время теория графов находит применение в самых разнообразных областях науки, техники и практической деятельности. Она используется при проектировании электрических сетей, планировании транспортных перевозок, построении молекулярных схем. Применяется теория графов также в экономике, психологии, социологии, биологии [4].

1. Основы теории графов

1.1 Виды и способы задания графов

Определение 1 *Графом* $G=(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (множества *вершин*) и множества E его двухэлементных подмножеств (множества *ребер*).

Другими словами, $G=(V, E), V \neq \emptyset, E \subseteq 2^V$.

Определение 2 *Граф* G – это математический объект, состоящий из множества *вершин* $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – непустого множества *вершин* графа, $E=\{\{v_i, v_j\} | v_i, v_j \in V \text{ для некоторых } i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ – множества *ребер* графа.

Таким образом, граф полностью определяется совокупностью множеств V, E .

Определение 3 *Графом* называется алгебраическая система $G = (M; R)$, где $M \neq \emptyset$, R – двухместный предикатный символ. Элементы носителя M называются *вершинами* графа G , а элементы бинарного отношения $R \subseteq M^2$ – *дугами*. Таким образом, дугами являются пары вершин $(a, b) \in R$. При этом дуга (a, b) называется *исходящей* из вершины a и *заходящей* в вершину b .

Важно помнить, что множество ребер графа может быть пустым, а множество вершин – нет.

Для многих задач несущественно, являются ли ребра отрезками прямых или криволинейными дугами; важно лишь то, какие вершины соединяет каждое ребро.

Существуют два основных вида графов (в которых выделяют подвиды): ориентированные и неориентированные.

Если ребра графа рассматриваются как упорядоченные пары, то граф называется *ориентированным*. Ребра ориентированного графа называются *дугами*. Вершины ориентированного графа называют *началом* и *концом*. Если направления ребер не указываются, то граф называется *неориентированным* (или просто графом).

Граф можно задать *изображением*:

- 1) вершина графа – точка в пространстве (на плоскости);
- 2) ребро неориентированного графа – линия;
- 3) дуга ориентированного графа – направленная линия.

Теория графов многократно претворялась разными авторами при решении различных прикладных задач.

Считается, что одной из первых была задача о Кёнигсбергских мостах. На рис. 1 представлен схематический план центральной части города Кенигсберг (ныне Калининград), включающий два берега реки Преголи, два острова в ее течении и семь соединяющих участки суши мостов. Задача состоит в том, чтобы обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. Эта задача была решена Эйлером в 1736 году (он показал, что решения не существует).

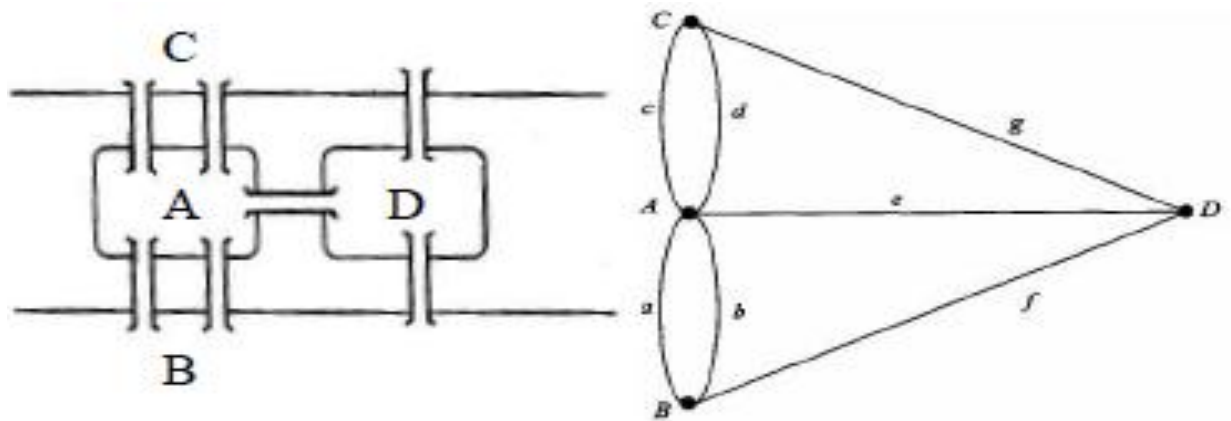
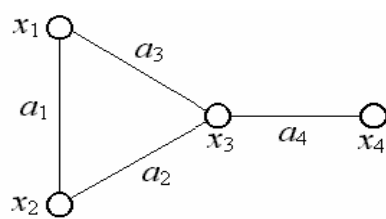


Рисунок 1 – Схематический план города и его представление в виде графа

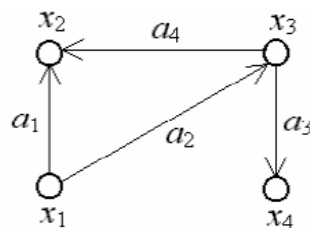
Пример 1 На рис. 2а изображен неориентированный граф $G=(V, E)$:

$$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$E = \{a_1 = \{x_1, x_2\}, a_2 = \{x_2, x_3\}, a_3 = \{x_1, x_3\}, a_4 = \{x_3, x_4\}\}$$



а)



б)

Рисунок 2

Пример 2 На рис. 2б изображен ориентированный граф $G=(V, E)$, у которого $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
 $E = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_1, x_3), a_3 = (x_3, x_4), a_4 = (x_3, x_2)\}$.

Пример 3 На рис. 3 изображен ориентированный граф $G=(V, E)$, у которого $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \emptyset$.



Рисунок 3

Определение 4 Граф называется *простым*, если каждую пару вершин соединяет не более чем одно ребро.

Определение 5 Граф, имеющий как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется *смешанным*.

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют *кратными (параллельными)*.

Определение 6 Граф, содержащий кратные ребра, называется *мультиграфом*.

Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Ребро вида (v, v) или $\{v, v\}$ называется *петлей*.

Определение 7 Граф с кратными ребрами и петлями называется *псевдографом*.

Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что *вершины x и y инцидентны ребру e* , если эти вершины соединены ребром e .

Определение 8 Две вершины называются *смежными*, если они инцидентны одному и тому же ребру. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Определение 9 *Степенью вершины* графа называется число ребер, инцидентных этой вершине.

Степень вершины v_i обозначают $\deg v_i$.

Вершина, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а степень 1 – *висячей*.

Необходимость учитывать ориентацию ребер в орграфе приводит к расщеплению понятия «степень вершины» на две части: *полустепенью захода* вершины v_i называется число ребер, заходящих в v_i , *полустепенью исхода* v_i – число ребер, выходящих из нее. Обозначаются $\deg^- v_i$ и $\deg^+ v_i$ соответственно.

Для орграфа $\deg v_i = \deg^- v_i + \deg^+ v_i$.

Если $\deg^+ v = 0$, то вершина v называется *истоком*. Если $\deg^- v = 0$, то вершина v называется *стоком*.

Определение 10 Граф, степени всех k вершин которого одинаковы, называется *однородным графом степени k* .

Определение 11 Неорграф называется *полным*, если любые две его вершины смежны. Полный граф с n вершинами обозначается K_n .

Если каждая вершина графа и (или) ребра помечена буквой или числом (обычно целым), то такой граф называется *помеченным* (или *нагруженным*).

Для ориентированного графа множество вершин, в которые ведут дуги, исходящие из вершины x , обозначают $G(x)$, то есть $G(x) = \{y: (x, y) \in E\}$.

Множество $G(x)$ называют *образом* вершины x в графе G .

Обозначим $G^{-1}(y)$ множество вершин, из которых исходят дуги, ведущие в вершину y : $G^{-1}(y) = \{x: (x, y) \in E\}$.

Множество $G^{-1}(y)$ называют *прообразом* вершины y в графе G .

Теорема 1 (Теорема Эйлера) Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер: $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$.

Доказательство. При подсчете суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза: для одного конца ребра и для другого. ■

Это утверждение называют еще леммой о рукопожатиях или леммой об эстафете.

Следствие 1 Число вершин нечетной степени четно.

Действительно, по предыдущей теореме сумма степеней всех вершин – четное число. Сумма степеней вершин четной степени четна, значит, сумма степеней вершин нечетной степени также четна, следовательно, их четное число. ■

Иначе это утверждение звучит так:

- 1) Нечетное число знакомых в любой компании всегда четно.
- 2) Число вершин многогранника, в которых сходится нечетное число ребер, четно.
- 3) Число всех людей, когда-либо пожавших руку другим людям, нечетное число раз, является четным.

Теорема 2 Во всяком графе с n вершинами, где n больше или равно 2, всегда найдутся две или более вершины с одинаковыми степенями.

Доказательство. Если граф имеет n вершин, то каждая из них может иметь степень 0, 1, 2, ..., $(n - 1)$. Предположим, что в некотором графе все его вершины имеют различную степень, то есть, и покажем, что этого быть не может. Действительно, если $\deg v = 0$, то это значит, что v – изолированная вершина, и поэтому в графе не найдется вершины x со степенью $\deg x = n - 1$. В самом деле, эта вершина должна быть соединена с $(n - 1)$ -ой вершиной, в том числе и с v но ведь v оказалась изолированной. Следовательно, в графе, имеющем n вершин, не могут быть одновременно вершины степени 0 и $(n - 1)$. Это значит, что из n вершин найдутся две, имеющие одинаковые степени.

Теорема 3 Если в графе с n вершинами ($n \geq 2$) только одна пара имеет одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо единственная изолированная вершина, либо единственная вершина, соединенная со всеми другими.

Содержание этой теоремы хорошо разъясняется задачей: группа, состоящая из n школьников, обменивается фотографиями. В некоторый момент времени выясняется, что двое совершили одинаковое число обменов. Доказать, что среди школьников есть либо один еще не начинавший обмена, либо один уже завершивший его.

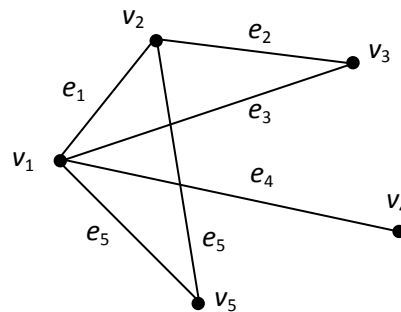


Рисунок 4

Пример 4 $G=(V, E)$ – граф, заданный изображением (рисунок 4).
 Определить степени вершин данного графа.

$deg\ v_1=4, deg\ v_2=3, deg\ v_3=2, deg\ v_4=1$ (висячая), $deg\ v_5=2$.

Пример 5 $G=(V, E)$ – граф, заданный изображением (рисунок 5).
 Определить полустепени исхода и захода для вершин данного орграфа.

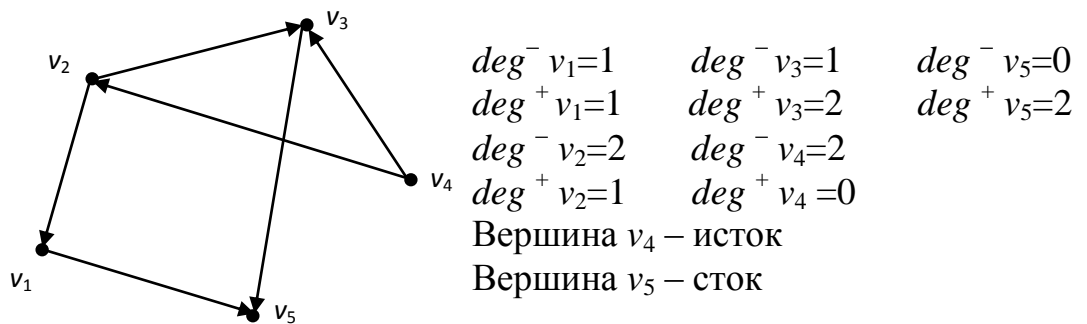


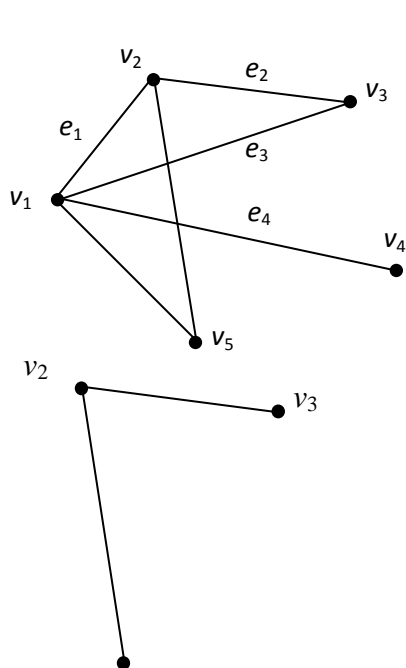
Рисунок 5

Определение 12 Граф $G'=(V', E')$ называется *подграфом* (или *частью*) графа $G=(V,E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. Если $V'=V$, то G' называется *остовным подграфом* G .

Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа.

Аналогично для орграфа вводится понятие ориентированного подграфа.

Пример 6 Дан неориентированный граф (рисунок 6).



$G=(V, E)$ – граф

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ – множество вершин

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ – множество ребер

Например, ребро $e_2=(v_2, v_3)$

e_2 – инцидентна к вершинам v_2 и v_3

Вершины v_2 и v_3 смежные

Подграф данного графа

Рисунок 6

Пример 7 В графе, изображенном на рис. 2а, концами ребра a_1 являются вершины x_1, x_2 вершина x_2 инцидентна ребрам a_1, a_2 , степень вершины x_3 равна 3; вершины x_1, x_3 смежные; ребра a_1, a_2 смежные; вершина x_4 висячая.

В ориентированном графе, изображенном на рис. 2б, началом дуги a_1 является вершина x_1 , а ее концом – вершина x_2 ; вершина x_1 , инцидентна дугам a_1, a_2 ;

$$G(x_1) = \{x_2, x_3\}, G(x_2) = \emptyset, G^{-1}(x_3) = \{x_1\}, G^{-1}(x_1) = \emptyset.$$

Определение 13 Граф $G=(V, E)$ – *симметрический*, если для любой дуги (x_i, x_j) существует противоположно ориентированная дуга (x_j, x_i) .

Определение 14 Граф $G=(V, E)$ – *планарный*, если он может быть изображен на плоскости так, что дуги пересекаются только в вершинах.

Определение 15 Неориентированный граф $G=(V, E)$ называется *двудольным*, если V можно представить как объединение непересекающихся множеств, скажем $V=A \cup B$, так что каждое ребро имеет вид (v_i, v_j) , где $v_i \in A$ и $v_j \in B$.

Двудольный граф называется *полным двудольным*, если A содержит m вершин, B содержит n вершин и для каждого $v_i \in A, v_j \in B$ имеем $(v_i, v_j) \in E$.

Обозначается $K_{m, n}$. Граф $K_{m, n}$ имеет ровно $m + n$ вершин и mn ребер.

$K_{4,3}$

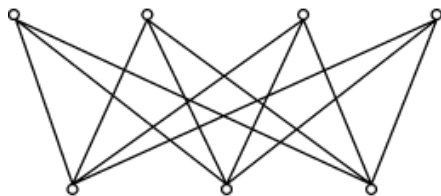


Рисунок 7

$K_{1,5}$ – *звездный граф*

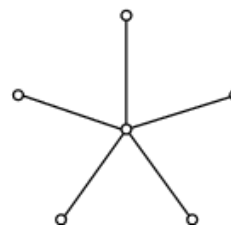
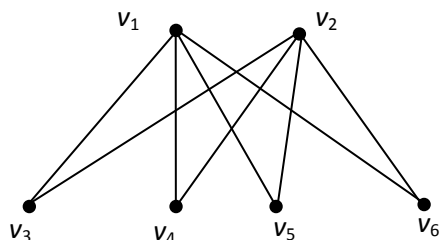
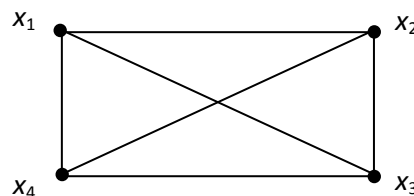


Рисунок 8



Полный двудольный граф $K_{2,4}$
 $A = \{v_1, v_2\}, B = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

Рисунок 9



Полный граф K_4

Рисунок 10

1.2 Матричные способы задания графов

Для алгебраического задания графов используются матрицы смежности и инцидентности.

Определение 16 Матрица смежности $A_G = (a_{ij})$ определяется одинаково для ориентированного и неориентированного графов. Матрицей смежности графа G называется квадратная матрица A_G размера $n \times n$, в которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Замечание. Если G – мультиграф, то значение a_{ij} можно положить равным k , где k – кратность дуги (v_i, v_j) .

Вопрос: Как по матрице смежности отличить орграф от неорграфа?

Можно ввести в рассмотрение матрицу смежности на множестве ребер графа.

Сформулируйте определение самостоятельно.

Определение 17 Матрицей инцидентности неорграфа G называется матрица B_G размера $n \times m$, в которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ и ребро } e_j \text{ инцидентны,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m.$$

Определение 18 Матрицей инцидентности орграфа G называется матрица B_G размера $n \times m$, в которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } e_j \text{ заходит в вершину } v_i, \\ -1, & \text{если ребро } e_j \text{ исходит из вершины } v_i, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m.$$

Пример 8 1) Для заданного неориентированного графа (рисунок 11) построить матрицы смежности и матрицу инцидентности.

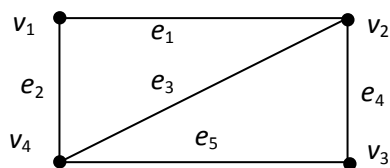


Рисунок 11

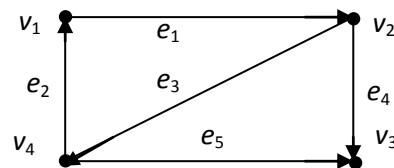


Рисунок 12

2) Для заданного ориентированного графа (рисунок 12) построить матрицы смежности и матрицу инцидентности.

Решение.

1) Строим матрицы согласно определениям:

$$A_G = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_G = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ e_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ e_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) A_G = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_G = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ e_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ v_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ v_4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 9 Матрицы смежности графов, изображенных на рис. 2а и 2б,

соответственно имеют вид: $A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Пример 10 Матрицы инцидентности графов, изображенных на рис. 2а

и 2б, соответственно имеют вид: $B_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B_{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

С помощью введенных матриц удобно задавать графы для обработки на ЭВМ. Однако при большом количестве вершин матрицы могут оказаться слишком громоздкими. Другим способом представить граф в памяти машины является *структура смежности*: для каждой вершины графа составляется перечень последователей, то есть смежных с ней вершин.

Основные свойства матриц смежности и инцидентности

1. Матрица смежности неориентированного графа является симметричной. Для ориентированного графа это, в общем случае, неверно.
2. Сумма элементов i -ой строки или i -го столбца матрицы смежности неориентированного графа равна степени вершины v_i .
3. Сумма элементов i -ой строки матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, исходящих из v_i .
4. Сумма элементов i -го столбца матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, входящих в вершину v_i .
5. Сумма строк матрицы инцидентности ориентированного графа является нулевой строкой.

Задание: проанализируйте и обоснуйте справедливость перечисленных свойств.

Итак, возможны следующие способы задания графов:

- а) посредством графического изображения;
- б) указанием множества вершин и множества ребер (дуг);
- в) матрицей смежности;
- г) матрицей инцидентности;
- д) структурой (списком) смежности.

1.3 Изоморфизм графов

Определение 19 Графы $G_1=(V_1, E_1)$ и $G_2=(V_2, E_2)$ *изоморфны*, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин E_1 и E_2 , такое, что любые две вершины одного графа соединены тогда и только тогда, когда соответствующие вершины соединены в другом графе.

Пример 11 Графы, изображенные на рис. 13, являются изоморфными.

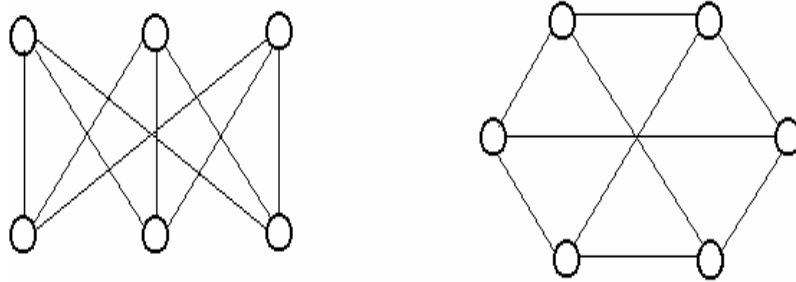


Рисунок 13

Пример 12 Покажем, что следующие два графа изоморфны.

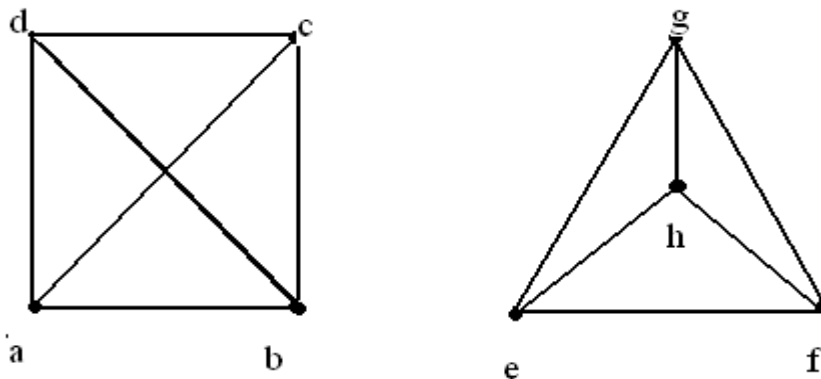


Рисунок 14

Действительно, рассмотрим отображение одного множества вершин в другое: $a \rightarrow e$, $b \rightarrow f$, $c \rightarrow g$, $d \rightarrow h$. Оно является изоморфизмом (легко представить преобразование как модификацию первого графа, передвигающую вершину d в центр рисунка). Второе изображение говорит о том, что граф планарный.

Изоморфные графы отличаются только нумерацией вершин. Матрицы смежности двух изоморфных графов могут быть получены одна из другой перестановкой соответствующих строк и столбцов.

Чтобы узнать, являются ли два графа изоморфными, нужно произвести все возможные перестановки строк и столбцов матрицы смежности одного из графов. Если после какой-нибудь перестановки получится матрица смежности второго графа, то эти графы изоморфны. Чтобы убедиться, что графы неизоморфны, надо выполнить все $n!$ возможных перестановок строк и столбцов.

В общем случае проверка изоморфности двух данных графов является трудноразрешимой задачей.

Пример 13 Дан неориентированный помеченный граф $G_1=(V_1, E_1)$. Построить изоморфные ему графы.

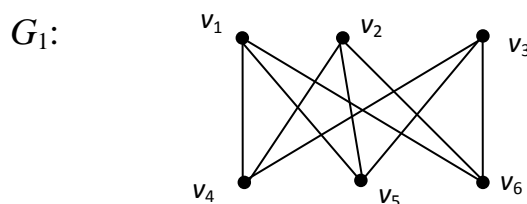
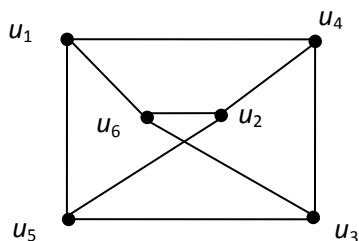


Рисунок 15

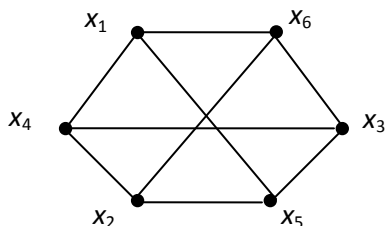
Решение.



$G_2=(V_2; E_2)$

Изоморфизм $f: G_1 \rightarrow G_2$

$f(v_1)=u_1$ $f(v_4)=u_4$ $f(v_1; v_2) \rightarrow (u_1; u_2)$
 $f(v_2)=u_2$ $f(v_5)=u_5$ и т.д.
 $f(v_3)=u_3$ $f(v_6)=u_6$



$G_3=(V_3; E_3)$

Изоморфизм $g: G_1 \rightarrow G_3$

$g(v_1)=x_1$ $g(v_4)=x_4$ $g(v_1; v_2) \rightarrow (x_1; x_2)$
 $g(v_2)=x_2$ $g(v_5)=x_5$ и т.д.
 $g(v_3)=x_3$ $g(v_6)=x_6$

Рисунок 16

Теорема 4 Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности.

Доказательство. Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами отношения эквивалентности:

Рефлексивность: $G \sim G$, где требуемая биекция есть тождественная функция.

Симметричность: Если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h , то $G_2 \sim G_1$ с биекцией h^{-1} .

Транзитивность: Если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h и $G_2 \sim G_3$ с биекцией g , то $G_1 \sim G_3$ с биекцией $g \circ h$.

Определение 20 Пусть $G=(V, E)$ – граф с вершинами $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ и ребрами $e_1, e_2, \dots, e_m \in E$. *Маршрутом (путем) длины k* из v_0 в v_k (или между v_0 и v_k) называется последовательность $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \dots v_{k-1} e_k v_k$ такая, что $e_i=(v_{i-1}, v_i)$.

Таким образом, путь длины k имеет k ребер. По причине избыточности обозначений в этом определении для графа в общем случае путь будет обозначаться через $v_0 v_1 v_2 \dots v_k$.

1.4 Маршруты в графах

Пусть G – неориентированный граф.

Определение 21 *Маршрутом*, соединяющим вершины v_1 и v_{k+1} в графе $G=(V, E)$ называется последовательность вида $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \dots e_k v_{k+1}$, (*)

где $k \geq 1$, $v_i \in V$, $i=1, \dots, k+1$, $e_j \in E$, $j=1, \dots, k$, и для каждого $j=1, \dots, k$ $e_j=\{v_j, v_{j+1}\}$.

При этом v_1 называется *начальной*, а v_{k+1} – *конечной* вершинами указанного маршрута, а остальные вершины – *внутренними*.

Коротко говорят, что последовательность (*) – это (v_1, v_{k+1}) -маршрут.

Замечание.

1) Последовательность вершин в маршруте определяет на ребрах, входящих в маршрут, ориентацию.

2) Последовательность (*) можно однозначно восстановить как по последовательности $e_1e_2\dots e_k$, так и по последовательности $v_1v_2\dots v_{k+1}$ (если все $e_1e_2\dots e_k$ имеют кратности, равные 1).

Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз.

Определение 22 *Длиной* (или *мощностью*) маршрута называется число ребер, входящих маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Маршрут (*) называется *замкнутым*, если $v_1=v_{k+1}$.

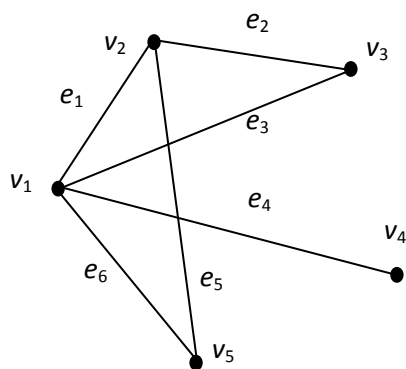
Определение 23 Незамкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны, называется *цепью*. Цепь, в которой все вершины попарно различны, называется *простой цепью*.

Определение 24 Замкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны, называется *циклом* (*контуром*). Цикл (контур), в котором все вершины попарно различны, называется *простым*.

Замечание. Приведенная терминология может несколько отличаться в различных источниках. К примеру, маршрут (цикл), в котором все ребра попарно различны, иногда называют *простой* цепью (циклом); маршрут (цикл), в котором все вершины попарно различны (кроме первой и последней), называют *элементарной* цепью (циклом).

Пусть $e_1e_2\dots e_k$ – маршрут (путь) и для некоторой последовательности номеров i_1, i_2, \dots, i_r , где $r \geq 1$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$, $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_r}$ снова является маршрутом в графе G . Тогда $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_r}$ называется *подмаршрутом* маршрута $e_1e_2\dots e_k$. При этом будем говорить, что маршрут $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_r}$ *выделен* из маршрута $e_1e_2\dots e_k$.

Пример 14 Дан неориентированный граф.



$G=(V, E)$

$v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_1e_1v_2e_5v_5$ ИЛИ $v_1v_2v_3v_1v_2v_5$ – маршрут

$v_1v_2v_3v_1v_5$ – цепь

$v_1v_3v_2v_5$ – простая цепь

$v_1v_3v_2v_5v_1$ – простой цикл

Рисунок 17

Пример 15 В изображенном на рис. 18 графе рассмотрим два маршрута из вершины x_1 в вершину x_4 : $M_1 = (a_1, a_2, a_4)$ и: $M_2 = (a_1, a_2, a_5, a_6)$ (обратите внимание на другой подход в обозначениях).

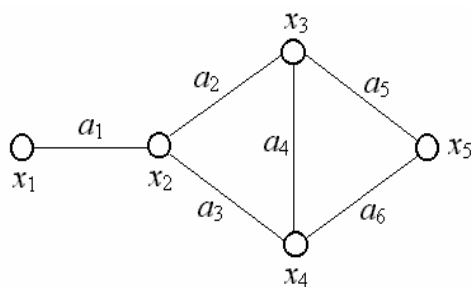


Рисунок 18

Длина маршрута M_1 равна 3, а длина маршрута M_2 равна 4.

Теорема 5 Если у графа все простые циклы четной длины, то он не содержит ни одного цикла четной длины.

Иначе, в этом графе невозможно найти цикл (как простой, так и непростой) нечетной длины, то есть содержащий нечетное число ребер.

Пример 16 В приведенном на рис. 19 графе выделим следующие маршруты: (a_1, a_3, a_4) – простая элементарная цепь длины 3, т.к. все ребра и вершины попарно различны; (a_2, a_4, a_3) – простой элементарный цикл, т.к. это замкнутый маршрут, у которого все ребра и вершины, кроме первой и

последней, различны; (a_1, a_2, a_4, a_3) . – цепь, которая является простой, но не элементарной, т.к. все ребра различны, но вершина x_2 встречается дважды; (a_1, a_2, a_2) – маршрут длины 3, не являющийся ни простой, ни элементарной цепью, т.к. ребро a_2 и вершина x_2 встречаются дважды.

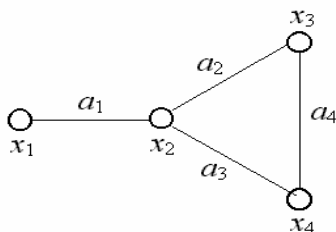


Рисунок 19

Граф, в котором найдется цикл, проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется *эйлеровым графом*. Замкнутый цикл с таким свойством также называется *эйлеровым*.

Понятия пути, контура в ориентированном графе аналогичны понятиям маршрута, цикла в неориентированном графе.

Определение 25 Замкнутый путь называется *контуром*.

Определение 26 Путь (контур), в котором все дуги различны, называется *простым*. Путь (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарным*.

Аналогично термину подмаршрут определяется термин *подпуть*, выделенный из пути в орграфе.

Еще раз обратим внимание на особенности терминологии:

Таблица 1

| Неориентированный граф | Ориентированный граф |
|------------------------|----------------------|
| ребро | дуга |
| маршрут | путь |
| цикл | контур |

Пример 17 В приведенном на рис. 20 графе выделим следующие пути: (x_1, x_2, x_3, x_4) – простой элементарный путь, т.к. каждая вершина и каждая дуга

используются не более одного раза; $(x_2, x_5, x_6, x_7, x_2)$ – простой элементарный контур, т.к. это замкнутый путь, в котором все дуги и вершины, кроме первой и последней, различны.

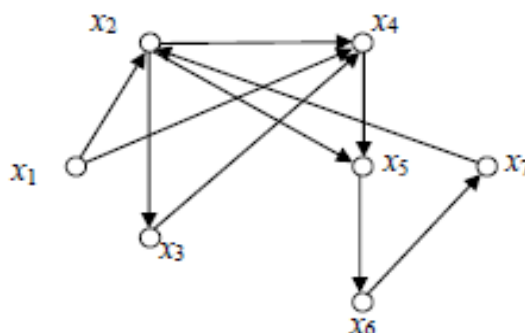


Рисунок 20

Рассмотрим, как с помощью матрицы смежности графа установить наличие маршрутов (путей), соединяющих две заданные вершины и имеющих заданную длину.

Анализируя определение матрицы смежности и понятие композиции бинарных отношений, выраженное в матричной форме, нетрудно установить связь между элементами матрицы A_G^k (k -ая степень матрицы A_G) и ответом на поставленный выше вопрос.

Будем обозначать элементы матрицы A_G^k как $a_{ij}^{(k)}$, $i, j=1, 2, \dots, n$.

Теорема 6 Элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A_G^k графа (орграфа) $G=(V, E)$ равен числу маршрутов (путей) в G длины k , соединяющих вершину v_i с вершиной v_j (из вершины v_i в вершину v_j).

Самостоятельно обоснуйте справедливость этого утверждения.

Следствие 2 а) В n -вершинном графе (орграфе) $G=(V, E)$ существует маршрут (путь), соединяющий вершину v_i с вершиной v_j (из вершины v_i в вершину v_j) тогда и только тогда, когда элемент c_{ij} матрицы $C=A_G + A_G^2 + A_G^3 + \dots + A_G^{n-1}$ отличен от нуля.

б) В n -вершинном графе (орграфе) $G=(V, E)$ существует замкнутый маршрут (путь), проходящий через вершину v_i тогда и только тогда, когда элемент c_{ii} матрицы $C=A_G + A_G^2 + A_G^3 + \dots + A_G^n$ отличен от нуля.

Замечание. Более экономичными в вычислительном отношении по сравнению с целочисленными матрицами являются *булевы матрицы*. Хранение их в памяти ЭВМ требует меньшего объема оперативной памяти, и логические операции над ними выполняются гораздо быстрее. Таким образом, устанавливать наличие (не количество!) (замкнутых) маршрутов (путей) в графе эффективнее обработкой булевых матриц.

Пример 18 Для неориентированного графа, изображенного на рисунке, найти все маршруты длины 2.

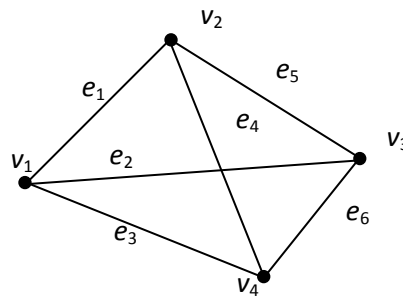


Рисунок 21

Решение. Составим матрицу A_G и возведем ее в квадрат:

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 3 & 2 & 2 \\ v_2 & 2 & 3 & 2 \\ v_3 & 2 & 2 & 3 \\ v_4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первую строку. Например, элемент $a_{11}^2 = 3$. Это значит, что существует три маршрута из v_1 в v_1 длиной в два ребра. Действительно, это маршруты $v_1e_1v_2e_1v_1, v_1e_2v_3e_2v_1, v_1e_3v_4e_3v_1$. Из v_1 в v_2 существует два маршрута: $v_1e_2v_3e_5v_2, v_1e_3v_4e_4v_2$.

Степень матрицы дает информацию о количестве маршрутов. Для их нахождения необходимо работать с изображением графа. Если воспользоваться модифицированной матрицей смежности, в ячейки которой записаны названия ребер, то можно получить не только количество маршрутов, но и сами маршруты.

Действительно, для данного примера имеем

$$P^2 = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ v_2 & e_1 & 0 & e_5 & e_4 \\ v_3 & e_2 & e_5 & 0 & e_6 \\ v_4 & e_3 & e_4 & e_6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ v_2 & e_1 & 0 & e_5 & e_4 \\ v_3 & e_2 & e_5 & 0 & e_6 \\ v_4 & e_3 & e_4 & e_6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & e_1e_1 + e_2e_2 + e_3e_3 & e_2e_5 + e_3e_4 & e_1e_5 + e_3e_6 & e_1e_4 + e_2e_6 \\ v_2 & e_5e_2 + e_4e_3 & e_1e_1 + e_5e_5 + e_4e_4 & e_1e_2 + e_4e_6 & e_1e_3 + e_5e_6 \\ v_3 & e_5e_1 + e_6e_3 & e_2e_1 + e_6e_4 & e_2e_2 + e_5e_5 + e_6e_6 & e_2e_3 + e_5e_4 \\ v_4 & e_4e_1 + e_2e_6 & e_3e_1 + e_6e_5 & e_3e_2 + e_4e_5 & e_3e_3 + e_4e_4 + e_6e_6 \end{pmatrix}$$

Аналогично обстоит дело с орграфом.

Пример 19 Для орграфа, изображенного на рисунке, найти все маршруты из трех дуг.

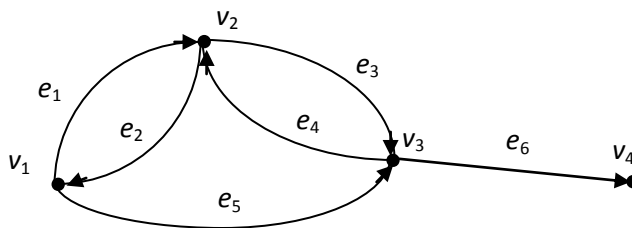


Рисунок 22

Решение. Матрица смежности A_G и результаты ее возведения в квадрат и в куб имеют следующий вид:

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_G^3 = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_3 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ v_2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ v_3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, элемент $a_{22}^2 = 2$: значит, из вершины v_2 в вершину v_2 есть два маршрута из двух дуг. Это циклы $v_2e_3v_3e_4v_2$ и $v_2e_2v_1e_1v_2$. Например, $a_{12}^3 = 2$: значит, что есть два маршрута длины три из вершины v_1 в вершину v_2 . Это маршруты $v_1e_1v_2e_2v_1e_1v_2$ и $v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_2$. Для получения цепей нужно в модифицированной матрице вычеркнуть те слагаемые, в которых какой-либо сомножитель встречается более одного раза.

1.5 Связные графы. Компоненты связности

Пусть $G=(V, E)$ – неориентированный граф.

Определение 26 Говорят, что вершина v_j достижима из вершины v_i в графе G , если существует некоторый $\langle v_i, v_j \rangle$ -маршрут или $v_i = v_j$.

Определение 27 Граф называется связным, если для любых двух его вершин существует связывающий их маршрут.

Определение 28 Если G – орграф, то вершина v_j достижима из вершины v_i в графе G , если существует некоторый $\langle v_i, v_j \rangle$ -путь или $v_i = v_j$.

Определение 29 Орграф называется сильно связным, если для любых двух его вершин существует путь из одной вершины в другую.

Определение 30 Псевдографом, ассоциированным с ориентированным псевдографом G , называется граф, множество ребер которого получается из

множества E графа G заменой всех упорядоченных пар вершин на неупорядоченные.

Определение 31 Орграф называется слабосвязным, если связан ассоциированный с ним псевдограф.

Определение 32 Граф (орграф) G , который не является связным (слабосвязным), называется несвязным.

Определение 33 Компонентой связности (сильной связности) графа (орграфа) G называется его связный (сильносвязный) подграф, который не является собственным подграфом никакого другого связного (сильносвязного) подграфа графа (орграфа) G .

Утверждение. Если $G_1 = \langle V_1; E_1 \rangle$ – компонента связности орграфа G , то G_1 – подграф, порожденный множеством V_1 .

Замечание. Это предложение справедливо и для произвольных псевдографов.

Теорема 7 Граф связан тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся графов.

Обозначим $p(G)$ количество компонент связности графа.

Определение 34 Вершину графа, удаление которой приводит к увеличению компонент связности графа, называют разделяющей (точкой сочленения).

Определение 35 Матрицей связности графа G называется матрица S_G ,

в которой: $s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \text{ достижима из } v_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Определение 36 Матрицей сильной связности орграфа G называется матрица S_G , в которой: $s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существуют } \overset{\leftarrow}{v_i}; \overset{\rightarrow}{v_j} \text{ путь и } \overset{\leftarrow}{v_j}; \overset{\rightarrow}{v_i} \text{ путь,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Определение 37 Матрицей достижимости графа G называется матрица T_G , в которой: $t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует } \overset{\leftarrow}{v_i}; \overset{\rightarrow}{v_j} \text{ путь или } i = j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Определение 38 Матрицей контрдостижимости графа G называется матрица Q_G , в которой: $q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует } \overset{\leftarrow}{v_j}; \overset{\rightarrow}{v_i} \text{ путь,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

$Q_G = T_G^T$ Легко установить, что $S_G = T_G * Q_G$.

Пусть A_G – матрица смежности графа (орграфа) G .

Рассмотрим матрицу $K = A_G + A_G^2 + \dots + A_G^{n-1} + E$. В этой матрице содержится информация о наличии различных маршрутов (путей) в графе (орграфе) G . С помощью матрицы K построим матрицу M :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } k_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{если } k_{ij} = 0. \end{cases}$$

M – матрица достижимости (связности) орграфа (графа) G . Тогда матрица сильной связности $S_G = M * M^T$.

Предложение 1. Пусть G – орграф, количество его компонент сильной связности $p \in \mathbb{N}, p \geq 2: G_1, G_2, \dots, G_p$. В результате удаления из G вершин, содержащихся в G_1 , получим орграф с $p-1$ компонентами связности.

Предложение 2. Пусть G' – компонента сильной связности орграфа G , $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. А G'' – орграф, полученный из G удалением вершин, содержащихся в G' , тогда матрицы $A_{G''}$ и $S_{G''}$ получаются из A_G и S_G в результате удаления строк и столбцов, соответствующих вершинам графа G' .

Предложение 3. Единицы i -ой строки или i -го столбца матрицы S_G орграфа G с n вершинами соответствуют вершинам компоненты сильной связности орграфа G , содержащей вершину v_i .

Алгоритм подсчета $\rho(\widehat{G})$ и выделения компонент сильной связности

G_1, G_2, \dots, G_p

1. $p:=1; S_p:=S_G$.
2. В множество V_p включаем вершины, соответствующие единицам в первой строке матрицы S_p . В качестве A_{G_p} берем подматрицу матрицы A_G , находящуюся на пересечении строк и столбцов, соответствующих вершинам из V_p .
3. Вычеркнем S_p из строки и столбцы, соответствующие вершинам из V_p . Если в результате не останется ни одной строки (соответственно, ни одного столбца), то p – количество компонент связности графа G , а $A_{G_1}, A_{G_2}, \dots, A_{G_p}$ – их матрицы смежности. В противном случае, оставшиеся после вычеркивания элементы матрицы обозначим $S_{p+1}; p:=p+1$; и возвращаемся к шагу 2.

Замечание. Сформулированные выше предложения и сам алгоритм остаются справедливы и для произвольных псевдографов после изменений в обозначениях и терминологии.

Задание 1. Докажите утверждения.

Утверждение 1. Пусть ρ – отношение достижимости на множестве вершин псевдографа G . Тогда:

- 1) ρ – эквивалентность на V ;
- 2) $v \rho w$ тогда и только тогда, когда вершины v и w принадлежат одной компоненте связности псевдографа G ;
- 3) для любого класса эквивалентности $V_1 \in V/\rho$ псевдограф G_1 , порожденный множеством V_1 , является компонентой связности псевдографа G ;

4) для любой компоненты связности $G_1=(V_1, E_1)$ псевдографа G выполняется $V_1 \in V/\rho$.

Утверждение 2. Пусть ρ_1 – отношение достижимости на множестве вершин ориентированного псевдографа G , а $\rho_2=\rho_1\cap\rho_1^{-1}$ – отношение двусторонней достижимости на V . Тогда:

- 1) ρ_1 – рефлексивно и транзитивно;
- 2) ρ_2 – эквивалентность на V ;
- 3) $v \rho_2 w$ тогда и только тогда, когда вершины v и w принадлежат одной компоненте сильной связности ориентированного псевдографа G ;
- 4) для любого класса эквивалентности $V_1 \in V/\rho_2$ ориентированный псевдограф G_1 , порожденный множеством V_1 , является компонентой сильной связности ориентированного псевдографа G ;
- 5) для любой компоненты сильной связности $G_1=(V_1, E_1)$ ориентированного псевдографа G выполняется $V_1 \in V/\rho$.

Пример 20 У неориентированного графа, изображенного на рис. 23 две компоненты связности. Первая компонента связности включает вершины x_1, x_2, x_4, x_5 , а вторая состоит из одной вершины x_3 .

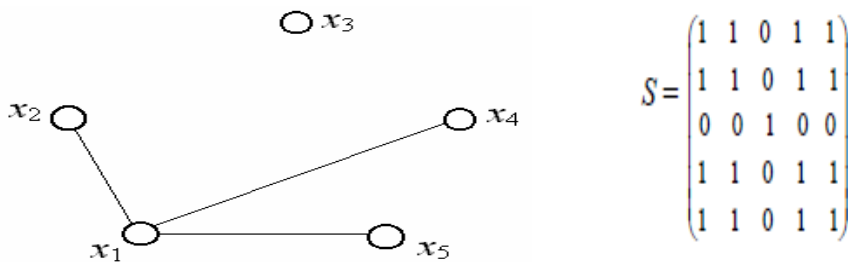


Рисунок 23

Матрица связности графа имеет вид:

Мы видим, что 1 – ая, 2 – ая, 4 –ая и 5 – ая строки матрицы S одинаковы.

Пример 21 У ориентированного графа, изображенного на рис. 24 две компоненты сильной связности. Первая компонента связности включает вершины x_1, x_2, x_3, x_5 , а вторая состоит из одной вершины x_4 . Действительно,

для любой пары вершин из множества $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ существует хотя бы один путь, соединяющий эти вершины. Например, путь $(x_1, x_2, x_5, x_3, x_1)$ соединяет все эти вершины. Из вершины x_4 нет пути ни в одну вершину графа.

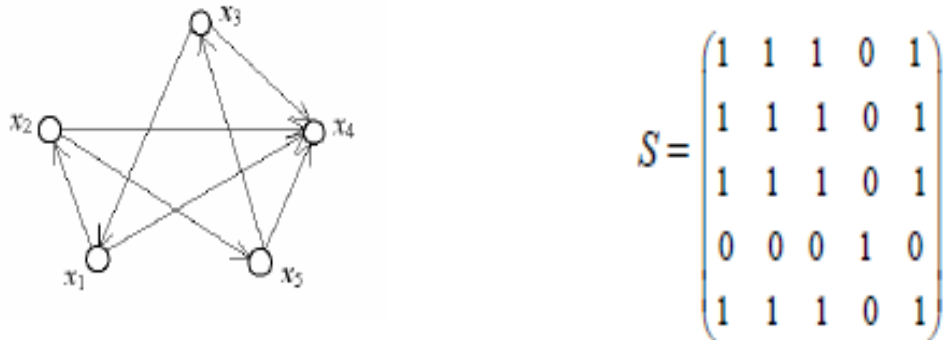


Рисунок 24

Матрица сильной связности графа имеет вид:

Мы видим, что 1 – ая, 2 – ая, 3 – ая и 5 – ая строки матрицы S одинаковы.

Определение 39 Вершинной связностью графа называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу или нуль–графу, т.е. графу из одних вершин.

Вершинная связность графа $G(7,7)$ рис. 25 для получения нуль графа равна 2 (результат удаления вершин c и e показан на рис. 26, а).

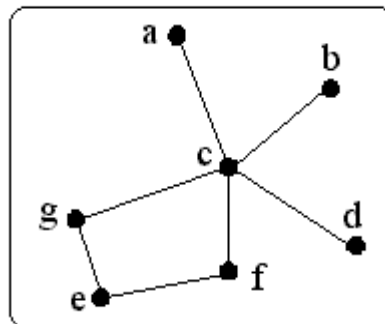


Рисунок 25

Вершинная связность графа $G(7,7)$ для получения несвязного графа равна 1 (результат удаления вершины c показан на рис. 26, б).

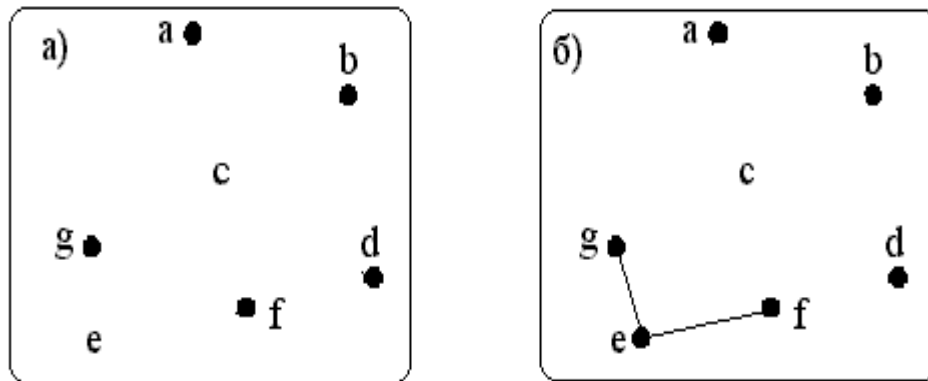


Рисунок 26

Определение 40 Реберная (дуговая) связность определяется как наименьшее число ребер (дуг), удаление которых приводит к несвязному или нуль графу. Реберная связность графа $G(4,6)$ показана на рис. 27.

На рис. 28 показан граф, имеющий мост и три точки сочленения: вершины x_3, x_4, x_6 – точки сочленения, ребро x_3, x_4 – мост.

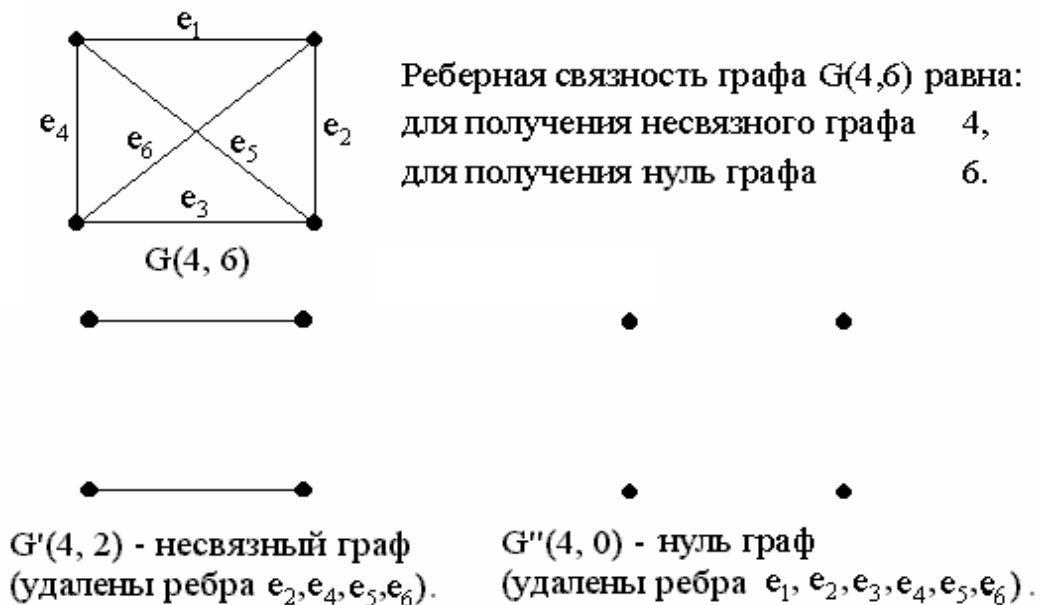


Рисунок 27

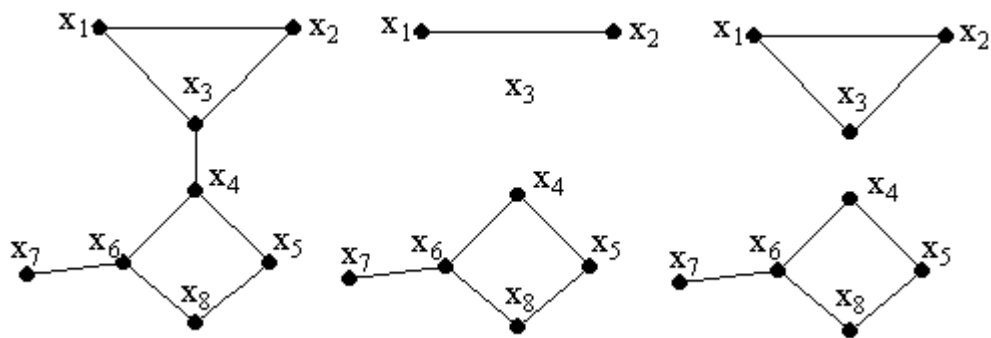


Рисунок 28

1.6 Расстояния в графах

Пусть $G = (M, R)$ – связный неорграф, a, b – две его несовпадающие вершины.

Определение 41 Длина кратчайшего (a, b) – маршрута называется *расстоянием* между вершинами a и b и обозначается через $\rho(a, b)$.

Определение 42 Если $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то матрица $P = (p_{ij})$, в которой $p_{ij} = \rho(a_i, a_j)$, называется *матрицей расстояний*.

Определение 43 Для фиксированной вершины a величина $e(a) = \max\{\rho(a, b) | b \in M\}$ называется *эксцентриситетом* вершины a . Таким образом, эксцентриситет вершины равен расстоянию от данной вершины до наиболее удаленной от нее.

Если P – матрица расстояний, то эксцентриситет $e(a_i)$ равен наибольшему из чисел, стоящих в i -й строке.

Определение 44 Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется *диаметром* графа G и обозначается через $d(G)$:

$$d(G) = \max\{e(a) | a \in M\}.$$

Определение 45 Вершина a называется *периферийной*, если $e(a) = d(G)$.

Пример 22 Найдем диаметр графа G , изображенного на рис. 29.

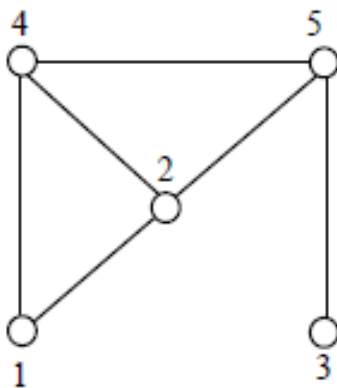


Рисунок 29

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица расстояний имеет вид. Отсюда $e(1)=3$, $e(2)=2$, $e(3)=3$, $e(4)=2$, $e(5)=2$ и, следовательно, $d(G)=3$. Вершины 1 и 3 являются периферийными.

Определение 46 Минимальный из эксцентриситетов графа G называется его *радиусом* и обозначается через $r(G)$: $r(G)=\min\{e(a) \mid a \in M\}$.

Определение 47 Вершина a называется *центральной*, если $e(a) = r(G)$.

Определение 48 Множество всех центральных вершин графа называется его *центром*.

Пример 23 Радиус графа, показанного на рис. 29, равен 2, а его центром является множество $\{2,4,5\}$.

1.7 Операции над графами

Пусть $G'=(M',R')$ является подграфом графа $G=(M,R)$, то есть $M'\subset M$ и $R'\subset R\cup(M')^2$.

Определение 49 Граф G' называется *частью* графа G , если $M'\subset M$ и $R'\subset R\cup(M')^2$.

Пример 24 Граф $G' = (\{1,2,3\}; \{\{1,2\}; \{2,3\}; (1,3)\})$ (рис. 30 б) является подграфом графа $G = (\{1,2,3,4\}; \{\{1,2\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{3,4\}; (1,3)\})$ (рис. 30 а), а граф $G'' = (\{1,2,3\}; \{\{1,2\}; (3,2)\})$ (рис. 30 в) – частью графа G .

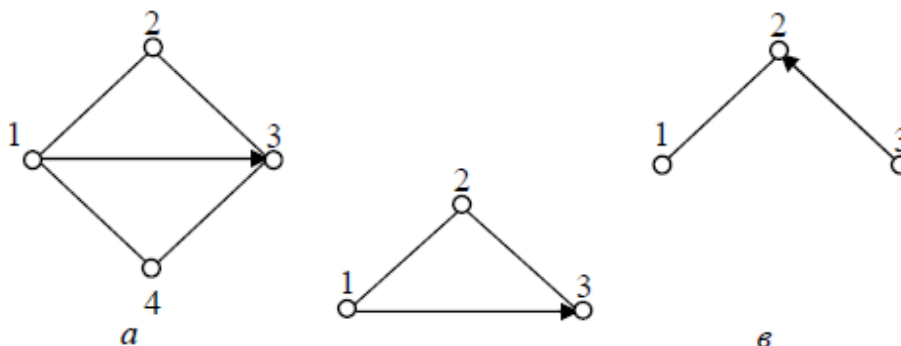


Рисунок 30

Рассмотрим некоторые основные операции, производимые над графами.

Определение 50 Операцией добавления к графу $G=(M,R)$ вершины a образуется граф $(M\cup\{a\},R)$.

Определение 51 Операция добавления дуги (a,b) к графу G состоит в образовании графа $(M\cup\{a,b\}, R\cup(a,b))$.

Определение 52 Под операцией удаления дуги (a,b) из графа G понимается операция, заключающаяся в удалении пары (a,b) из множества дуг R в результате получается граф $(M,R\setminus(a,b))$.

Определение 53 Операция удаления вершины a из графа G заключается в удалении вершины a вместе с инцидентными ей дугами: $(M \setminus \{a\}, R \setminus \{(b,c) | b=a \text{ или } c=a\})$.

Определение 54 Операция отождествления вершин a и b графа $G = (M, R)$ состоит в удалении из графа G вершин a и b и присоединении новой вершины a' , дуг (a', c) , если $(a, c) \in R$ или $(b, c) \in R$, и дуг (c, a') , если $(c, a) \in R$, или $(c, b) \in R$: $((M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}; (R \setminus \{(c, d) | c = a, \text{ или } d = a, \text{ или } c = b, \text{ или } d = b\}) \cup \{(a', c) | (a, c) \in R, \text{ или } (b, c) \in R\} \cup \{(c, a') | (c, a) \in R, \text{ или } (c, b) \in R\})$.

Говорят, что построенный граф получается из графа G отождествлением вершин a и b . В случае, когда a и b соединены дугой, операцию отождествления вершин a и b называют стягиванием дуги (a, b) .

Пример 25 Из графа G , показанного на рис. 31, добавлением вершины 5 образуется граф G_1 , добавлением дуги $(3,1)$ – граф G_2 , удалением дуги $(3,2)$ – граф G_3 , удалением вершины 2 – граф G_4 , отождествлением вершин 1 и 4 – граф G_5 , стягиванием дуги $(2,3)$ – граф G_6 .

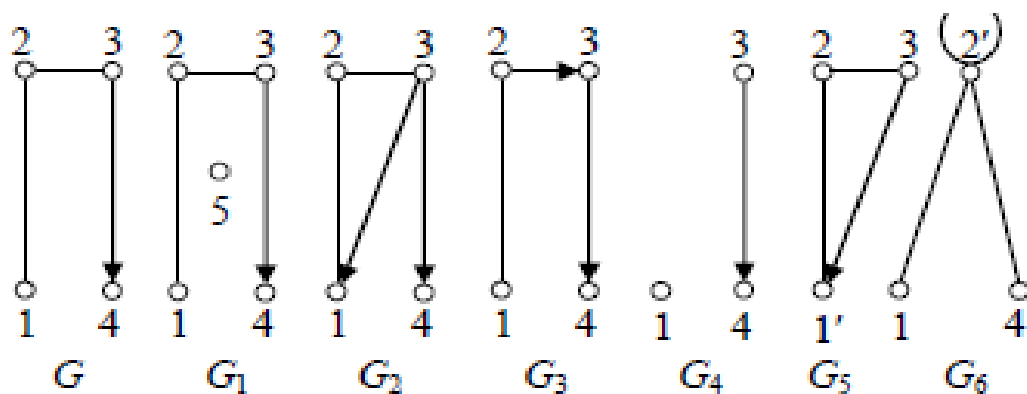


Рисунок 31

Определение 55 Дополнением графа без петель $G = (M, R)$ называется граф $G^{\sim} = (M, M^2 \setminus (R \cup id_M))$.

Пусть $G_1 = (M_1, R_1)$, $G_2 = (M_2, R_2)$ – графы.

Определение 56 Объединением графов $G_1 \cup G_2$ называется граф $(M_1 \cup M_2, R_1 \cup R_2)$.

Определение 57 Если $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, то пересечением графов $G_1 \cap G_2$ называется граф $(M_1 \cap M_2, R_1 \cap R_2)$.

Определение 58 Кольцевой суммой графов $G_1 \oplus G_2$ называется граф $(M_1 \cup M_2, R_1 \nabla R_2)$, где $R_1 \nabla R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$

Пример 26 Для графов $G_1 = (\{a_1, a_2, a_3\}; \{[a_1, a_2] \cup \{(a_2, a_3)\}\})$ и $G_2 = (\{a_1, a_2, a_4\}; \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\})$ (рис. 32) найти $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

По определению имеем: $G_1 \cup G_2 = (\{a_1, a_2, a_3, a_4\}; \{[a_1, a_2] \cup \{(a_2, a_3), (a_4, a_1)\}\})$, $G_1 \cap G_2 = (\{a_1, a_2\}; \{(a_1, a_2)\})$, $G_1 \oplus G_2 = (\{a_1, a_2, a_3, a_4\}; \{(a_2, a_3), (a_4, a_1)\})$.

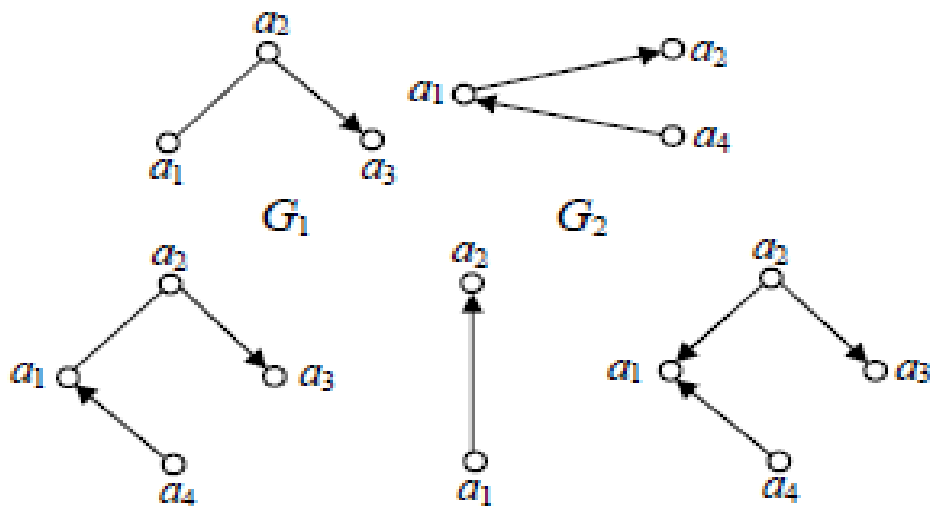


Рисунок 32

Определение 59 Соединением графов $G_1 + G_2$ называется граф $(M_1 \cup M_2; R_1 \cup R_2 \cup \{[a, b] | a \in M_1, b \in M_2, a \neq b\})$.

Пример 27 На рис. 33 изображены графы G_1 , G_2 и соединение $G_1 + G_2$.

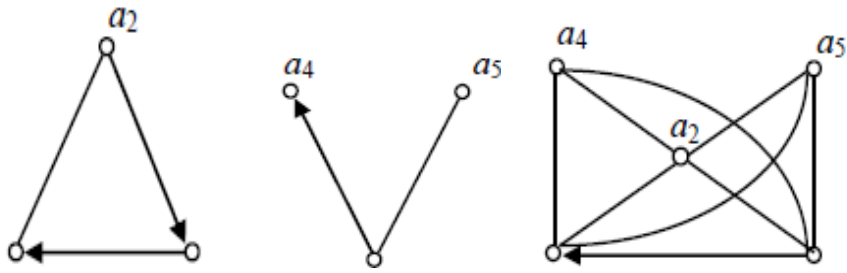


Рисунок 33

Определение 60 Произведением графов $G_1 \text{Ч} G_2$ называется граф $(M_1 \text{Ч} M_2, R)$, в котором $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \subset R$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $(b_1, b_2) \subset R_2$, или $b_1 = b_2$ и $(a_1, a_2) \subset R_1$.

Пример 28 Изобразите произведение $G_1 \text{Ч} G_2$ графов $G_1 = (\{1,2\}; \{(1,1), (2,1)\})$ и $G_2 = (\{a,b,c\}; [a,b] \cup \{(b,c)\})$ На рис. 34 изображено произведение данных графов.

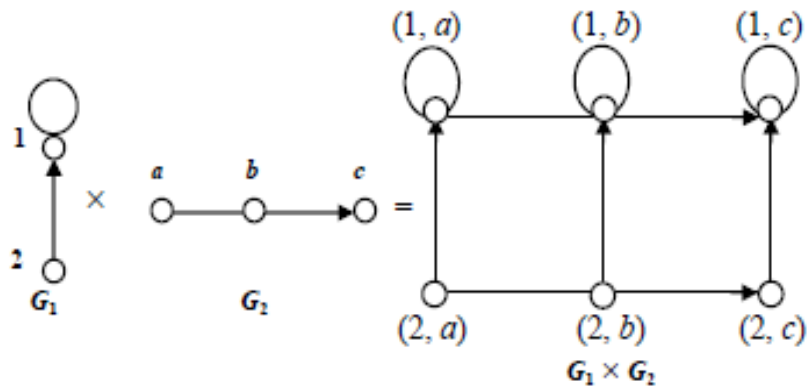


Рисунок 34

С помощью операции произведения определим по индукции важный класс графов, называемых n -мерными кубами (n -кубами). Рассмотрим граф K_2 , вершины которого обозначим 0 и 1. n -мерный куб, или n -куб Q_n определяется по следующим правилам: Q_0 – граф без петель, состоящий из одной вершины, $Q_1 = K_2$, $Q_n = K_2 \text{Ч} Q_{n-1}$, $n > 1$. Вершинами n -мерного куба Q_n являются всевозможные n -ки, состоящие из нулей и единиц (всего таких

наборов 2^n), а ребра задаются по следующему правилу: вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие кортежи различаются ровно одной координатой. На рис. 35 показаны двумерный Q_2 и трехмерный Q_3 кубы.

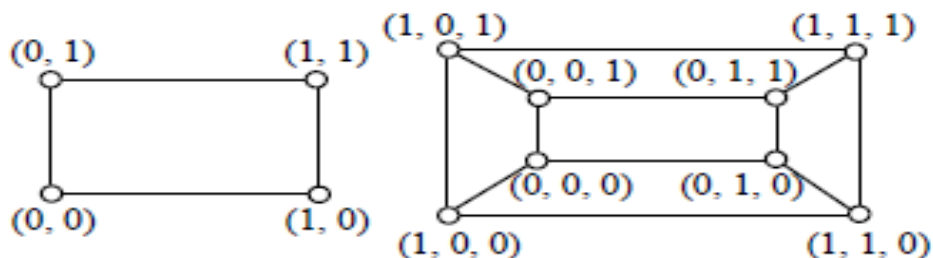


Рисунок 35

Определение 61 Композицией $G_1[G_2]$ графов G_1 и G_2 называется граф $(M_1 \times M_2, R)$, в котором $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: 1) $(a_1, a_2) \in R_1$; 2) $a_1 = a_2$ и $(b_1, b_2) \in R_2$.

1.8 Внутренняя и внешняя устойчивость графа

Пусть задан некоторый граф $G = (M, R)$.

Определение 61 Подмножество вершин $S \subset M$, в котором две любые точки являются несмежными, называется *внутренне устойчивым*.

Обозначим $|S|$ – мощность множества S . Пусть F – множество всех внутренне устойчивых множеств.

Определение 62 Числом внутренней устойчивости графа G называется $\alpha(G) = \max |S|$, где $S \in F$

Отыскание $\alpha(G)$ нужно начинать с максимального числа вершин и, постепенно увеличивая его, проверять, образуют ли выбранные вершины внутренне устойчивое множество.

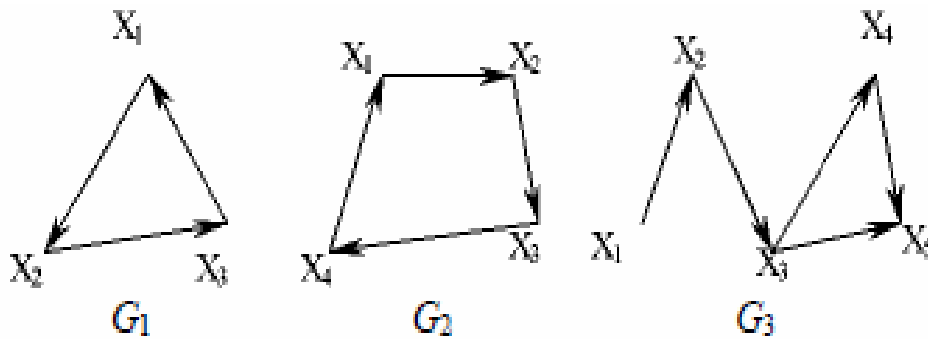


Рисунок 36

Для графов, изображенных на рис. 36, имеем следующие числа внутренней устойчивости. $\alpha(G_1)=1$, т.к. любая пара вершин G_1 является смежной. Граф G_2 имеет два внутренне устойчивых множества $S_1 = \{x_1, x_3\}$, $S_2=\{x_4, x_2\}$. Так как, $|S_1|=|S_2|=2$, то, следовательно, $\alpha(G_2)=2$. Граф G_3 содержит внутренне устойчивые множества $S_1=\{x_1, x_5\}$, $S_2=\{x_1, x_3\}$, $S_3=\{x_1, x_4\}$, $S_4=\{x_2, x_5\}$, $S_5=\{x_2, x_4\}$. Но если к любому из этих множеств добавить какую-либо вершину, не содержащуюся в нем, то подмножество перестанет быть внутренне устойчивым, следовательно, $\alpha(G_3)=2$.

Определение 63 Подмножество вершин $T \subset M$ есть *внешне устойчивое* множество, если для каждой точки $x_i \in (M \setminus T)$ выполнено условие $\Gamma(x_i) \cap T = \emptyset$, где $\Gamma(x_i)$ – множество дуг, порожденных точкой x_i .

Обозначим $|T|$ – мощность множества T .

Пусть Φ – множество всех внешне устойчивых множеств.

Определение 64 Числом внешней устойчивости графа G называется $\beta(G) = \min |T|$, где $T \in \Phi$

При подсчете числа внешней устойчивости следует начинать с максимального числа вершин графа, затем уменьшать его, проверяя, образуют ли выбранные вершины внешне устойчивое множество.

Пример 29 Определим число внешней устойчивости для графов, изображенных на рис. 36. Любая пара вершин графа G_1 образует внешне устойчивое множество, но любая его вершина не является внешне устойчивым множеством, следовательно, $\overline{\omega}(G_1)=2$. Граф G_2 содержит два внешне устойчивых множества $T_1=\{x_1,x_3\}$, $T_2=\{x_2,x_4\}$ с минимальным числом элементов, т.е. $\overline{\omega}(G_2)=2$. Для графа G_3 внешне устойчивым множеством минимальной мощности является $T=\{x_2,x_5\}$, т.е. $\overline{\omega}(G_3)=2$.

К определению числа внешней устойчивости графа сводится задача о часовых. На посту расставлены часовые, охраняющие n объектов, причем один и тот же часовой может наблюдать за несколькими объектами. Нужно выяснить, каково минимальное число часовых, необходимых для наблюдения за всеми объектами. Граф, изображенный на рис. 37, соответствует следующей задаче: 9 вершин графа – охраняемые объекты ($n=9$), ребра характеризуют возможность просматривания объектов часовыми. Так, например, часовой у объекта X_1 может одновременно наблюдать за объектами X_2, X_3, X_4, X_6, X_9 , часовой у объекта X_2 – за объектами X_1, X_3, X_7, X_8 и т.д. Для данного графа число внешней устойчивости равно 2. Внешне устойчивое множество образуют вершины X_4, X_8 . Достаточно двух часовых, расположенных в точках X_4 и X_8 , для охраны всех объектов.

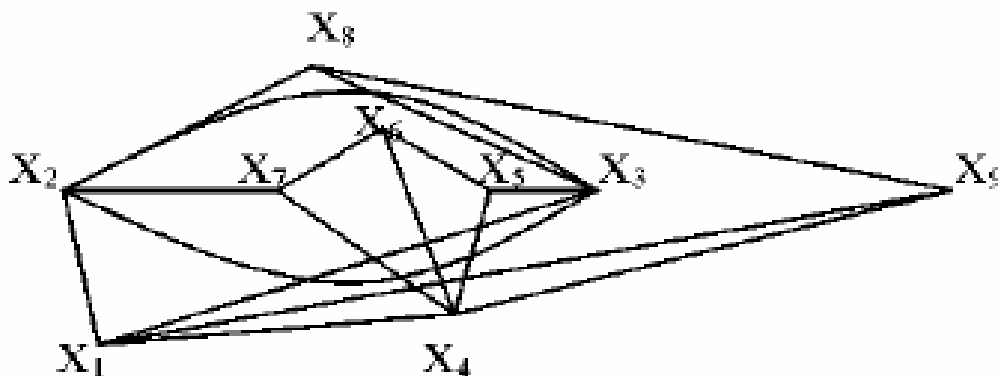


Рисунок 37

1.9 Фундаментальные циклы и разрезы

Определение 65 *Деревом* называется связной граф, не содержащий ни одного цикла.

Определение 66 *Остовный подграф* графа — это подграф, содержащий все вершины графа. *Остовом* называется остовный подграф, являющийся деревом. *Хордой остова* D в связном графе G называется всякое ребро графа, не принадлежащее D . Любой подграф, который состоит из хорды и остова, имеет точно один цикл. *Цикломатическое число* $\nu(G)$ графа G равно числу хорд любого остова в G .

Если связный граф G имеет n вершин и m ребер, то $\nu(G) = m - n + 1$.

Если граф G содержит k компонент связности, то его цикломатическое число $\nu(G) = m - n + k$.

Цикломатическое число несвязного графа может быть определено как сумма цикломатических чисел его компонент связности: $\nu(G) = \sum_{i=1}^k \nu(G_i)$

Определение 67 *Лесом* называется граф, не содержащий циклов. Иными словами, если граф состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых является деревом, то данный граф является лесом. Если лес G имеет n вершин и k компонент связности, то он содержит $n - k$ ребер.

Определение 68 *Остовным лесом* называется граф, каждая компонента которого является остовным деревом.

Коциклический ранг $\chi(G)$ (*ранг разреза*) графа — это число ребер в его остовном лесе: $\chi(G) = n - k$.

Количество базисных циклов в графе G определяется *цикломатическим числом* (*циклическим рангом*) графа $\nu(G)$.

Определение 69 Остов T графа G имеет $\nu^*(G) = n - c$ ребер u_1, \dots, u_{n-c} , которые называются *ветвями* остова.

Определение 70 Оставшиеся $m - n + c$ ребер u_1, \dots, u_{m-n+c} , не входящие в T , называются *хордами* остова T .

Если к лесу T добавить произвольную хорду v_i , то в полученном графе найдется ровно один цикл, который обозначим через C_i . Цикл C_i состоит из хорды v_i и некоторых ветвей остова T , которые принадлежат единственной простой цепи, соединяющей вершины хорды v_i .

Определение 71 Цикл C_i называется *фундаментальным циклом* графа G относительно хорды v_i остова T .

Определение 72 Множество $\{C_1, \dots, C_{m-n+c}\}$ всех фундаментальных циклов относительно хорд остова T называется *фундаментальным множеством* циклов графа G относительно остова T .

Отметим, что мощность фундаментального множества циклов равна цикломатическому числу $\nu(G) = m - n + c$.

Обозначим через (w_1, \dots, w_m) последовательность $(v_1, v_2, \dots, v_{m-n+c}, u_1, u_2, \dots, u_{n-c})$ всех ребер графа G . Тогда фундаментальному циклу C_i соответствует вектор $a = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$, определенный по следующему

правилу: $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } w_j \in C_i \\ 0, & \text{если } w_j \notin C_i \end{cases}$

Теперь фундаментальное множество циклов можно задать с помощью *матрицы фундаментальных циклов*, строки которой являются векторами $a_1, a_2, \dots, a_{\nu(G)}$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu(G).1} & a_{\nu(G).2} & \dots & a_{\nu(G).m} \end{pmatrix}$$

Так как каждый фундаментальный цикл C_i содержит ровно одну хорду, а именно v_i , то матрица C имеет вид:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,v(G)+1} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,v(G)+1} & \dots & a_{2m} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{v(G),v(G)+1} & \dots & a_{v(G),m} \end{array} \right)$$

Таким образом, $C=(C_1|C_2)$, где C_1 – единичная матрица порядка $v(G)$.

Пример 30 Найдём матрицу фундаментальных циклов графа G , изображенного на рис. 38.

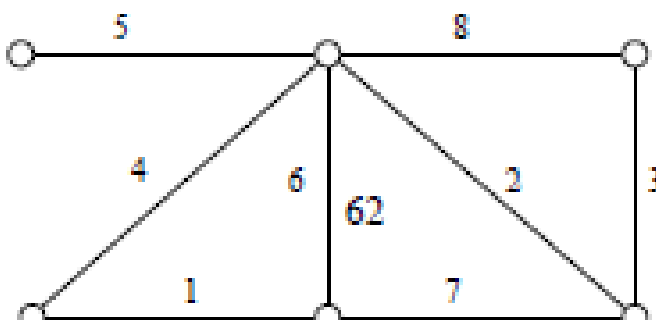


Рисунок 38

Так как $v(G) = 8 - 6 + 1 = 3$, то для получения остова удаляем из графа три ребра. Сопоставим этим ребрам номера 1, 2, 3. Ребрам, входящим в остов, поставим в соответствие номера 4, 5, 6, 7, 8. Легко видеть, что фундаментальный цикл C_1 , соответствующий хорде 1, состоит из ребер 1, 4, 6, цикл C_2 – из ребер 2, 6, 7, цикл C_3 – из ребер 3, 6, 7, 8. Поэтому матрица фундаментальных циклов C имеет вид:

$$\begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Понятие разреза играет важную роль при изучении вопросов, связанных с отделением одного множества вершин графа от другого. Такие задачи возникают, например, при изучении потоков в сетях.

Определение 73 *Сетью* называется связный оргграф $G = (M, R)$ без петель.

Определение 74 *Потоком* в сети G называется функция $\phi: R \rightarrow Z$, которая ставит в соответствие дуге некоторое число – вес дуги.

В этих задачах фундаментальную роль играют изучение поперечных сечений сети (т.е. множеств дуг, которые соединяют вершины двух непересекающихся множеств вершин) и нахождение ограниченного поперечного сечения, которое является самым узким местом. Эти узкие места определяют пропускную способность системы в целом.

Пусть $G = (M, R)$ – неорграф = $M \{M_1, M_2\}$ – разбиение множества M .

Определение 75 *Разрезом* графа G (по разбиению M) называется множество всех ребер, соединяющих вершины из M_1 с вершинами из M_2 (рис. 38). Отметим, что в связном графе любой разрез не пуст.

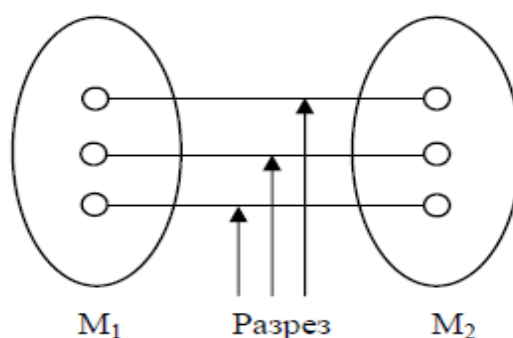


Рисунок 38

Определение 76 Непустой разрез K неорграфа G называется *простым разрезом* или *коциклом*, если любое непустое собственное подмножество $K' \subsetneq K$ не является разрезом ни по какому разбиению. Другими словами, из K нельзя удалить ни одно ребро с тем, чтобы полученное множество было непустым разрезом.

Пусть $G = (M, R)$ – неорграф, имеющий n вершин, m ребер и c компонент связности, T – остов графа G и u_1, \dots, u_{n-c} – ветви остова. Удаляя из остова T произвольную ветвь u_i , получаем лес с $(c + 1)$ компонентами связности, т. е. каждое ребро u_i является разрезом остова T по некоторому разбиению $\{M_1, M_2\}$ (рис. 39). В графе G могут найтись еще какие-то ребра $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ij}$ (являющиеся хордами T), которые соединяют вершины из M_1 и M_2 .

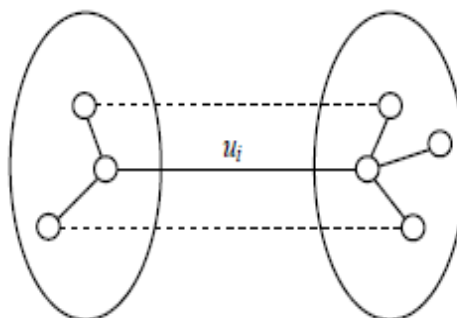


Рисунок 39

Определение 77 Множество $K_i = \{u_i, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ij}\}$ образует простой разрез, который называется *фундаментальным разрезом* графа G относительно ветви u_i остова T .

Определение 78 Множество $\{K_1, K_2, \dots, K_{n-c}\}$ всех фундаментальных разрезов графа G называется *фундаментальным множеством коциклов* графа G относительно остова T .

Отметим, что мощность фундаментального множества коциклов не зависит от выбора остова T и равна корангу $\nu^*(G) = n - c$. Каждому фундаментальному разрезу K_i ставится в соответствие вектор $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im})$, определенный по правилу

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } w_j \in K_i \\ 0, & \text{если } w_j \notin K_i \end{cases}$$

Фундаментальное множество коциклов задается матрицей фундаментальных разрезов K , строки которой являются векторами $b_1, b_2, \dots, b_{v^*(G)}$

$$K = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{v^*(G),1} & b_{v^*(G),2} & \dots & b_{v^*(G),m} \end{pmatrix}$$

Поскольку каждый фундаментальный разрез K_i содержит ровно одну ветвь, а именно u_i , матрица K имеет вид:

$$K = \left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,v^*(G)} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,v^*(G)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{v^*(G),1} & b_{v^*(G),2} & \dots & b_{v^*(G),v^*(G)} \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right. \right)$$

Таким образом, $K=(K_1|K_2)$, где K_2 —единичная матрица порядка $v^*(G)$. Отметим, что если $C=(C_1|C_2)$ – соответствующая матрица фундаментальных циклов, то $K_1 = C_2^T$, где C_2^T – транспонированная матрица C_2 .

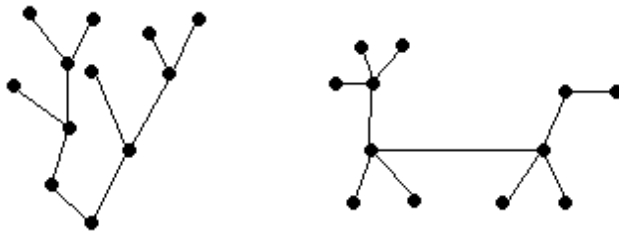
Пример 31 Найдем матрицу фундаментальных разрезов графа $G = (M,R)$, изображенного на рис. 38. Поскольку $v^*(G) = 6-1=5$, имеется пять фундаментальных разрезов. Ребру 4 соответствует коцикл $K_1 = \{1,4\}$, так как при удалении ребра 4 из остова T множество вершин M разбивается на две части: $\{a_1\}$ и $M \setminus \{a_1\}$, а ребра 1 и 4 образуют разрез поразбиению $\{\{a_1\}, M \setminus \{a_1\}\}$. Аналогично ребру 5 соответствует коцикл $K_2 = \{5\}$, ребру 6 – коцикл $K_3 = \{1,2,3,6\}$, ребру 7 – коцикл $K_4 = \{2,3,7\}$, ребру 8 – коцикл $K_5 = \{3,8\}$. Следовательно, матрица фундаментальных разрезов имеет вид:

$$\begin{array}{l}
K_1 \\
K_2 \\
K_3 \\
K_4 \\
K_5
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right)$$

1.10 Деревья. Остовы

Напомним некоторые определения.

Деревом называется связанный граф без циклов. *Лес* – это граф, компоненты которого являются деревьями.



Ориентированное дерево T' представляет собой свободный от петель ориентированный граф, соотнесенный граф которого является деревом.

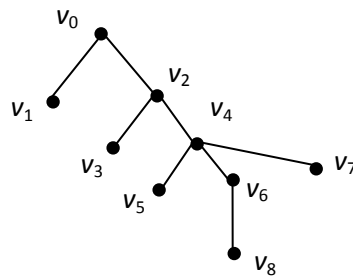
Если дерево имеет хотя бы одно ребро, оно имеет хотя бы две вершины со степенью 1. Вершины степени 1 называются *листьями*. Другие вершины называются *внутренними вершинами*.

Если дерево изображено таким образом, что в верхней части помещена вершина, а остальные находятся ниже его, то вершина в самой верхней части называется *корнем* дерева. Если корень дерева определен, то дерево называется *корневым деревом*.

Если корень выбран, *уровень вершины* v определяется длиной единственной цепи из корня в вершину v .

Высотой дерева называется длина самой длинной цепи от корня до листа. Высоту дерева будем обозначать $h(T)$.

Пример 32



v_0 – корень дерева

v_1, v_3, v_5, v_7, v_8 – листья

v_2, v_4, v_6 – внутренние вершины

Теорема 8 (характеристические свойства дерева).

Условия эквивалентны:

- (1) Граф G является деревом;
- (2) $m = n - 1$ и нет циклов;
- (3) $m = n - 1$ и граф связен;
- (4) Граф связен и удаление любого ребра делает граф не связанным;
- (5) Граф связен, нет циклов, но добавление любого нового ребра

приводит к циклу.

▶ \Leftrightarrow По лемме 3 $n - m = k = 1 \Rightarrow m = n - 1$.

\Leftrightarrow Если бы граф не был связен, то $k = n - m \geq 2$, что противоречит

$m = n - 1$.

\Leftrightarrow По лемме 4.

\Leftrightarrow Если в графе есть циклы, то применяем лемму 2, если нет – лемму 4.

\Leftrightarrow Если бы граф не был связен, то соединение ребром вершин из разных компонент не давало бы цикла (противоречие условию 5). ◀

Утверждение.

Дерево с $n \geq 2$ вершин имеет ≥ 2 висячих вершин (т. е. степени 1).

▶ $\sum_{i=1}^n d_i = 2m = 2(n-1) = 2n-2 \Rightarrow \exists$ по крайней мере две вершины степени

1. ◀

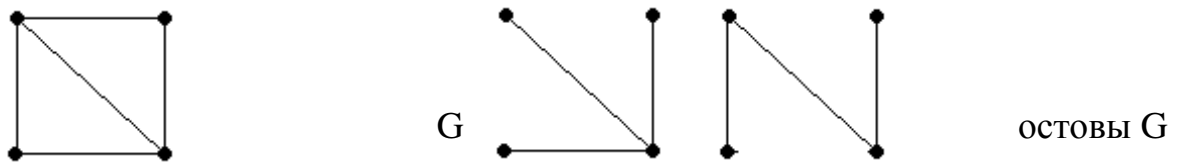
Из определения дерева следует наличие в таком графе хотя бы одной висячей вершины.

Нетрудно заметить, что удаление висячей вершины и инцидентного ей ребра в связном графе сохраняет свойство связности в новом графе

Важно: Если G – дерево, то добавление новой вершины и ребра, связывающего ее с любой из имевшихся в G вершин, создает дерево, «вырастает новая ветка»

Подграф $G_1 \langle V_1, E_1 \rangle$ графа $G \langle V, E \rangle$ называется остовным, если $V_1 = V$.

Остовный подграф графа G , являющийся деревом называется остовом графа G (остовным деревом).



Пусть в G n вершин и m ребер.

Что необходимо делать для получения остова?

Сколько нужно «убрать» ребер?

$\nu = m - n + 1$ – цикломатическое число графа (циклический ранг)

В данном графе содержится $n=4$ вершины и $m=5$ ребер.

Найдем цикломатическое число графа (циклический ранг) $\nu = m - n + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$. Т.е. чтобы из графа получить остовное дерево необходимо убрать 2 ребра.

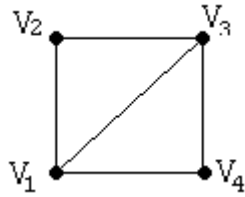
Следствие. Неорграф имеет единственный цикл $\Leftrightarrow \nu(G)=1$

Теорема 9 (матричная теорема Кирхгофа).

Пусть A – матрица смежности графа, $M = -A + \begin{pmatrix} d \langle v_1 \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d \langle v_2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \langle v_n \rangle \end{pmatrix}$,

тогда алгебраическое дополнение \forall элемента матрицы M равно числу остовов графа G .

Пример 33 Найти все остовы графа.

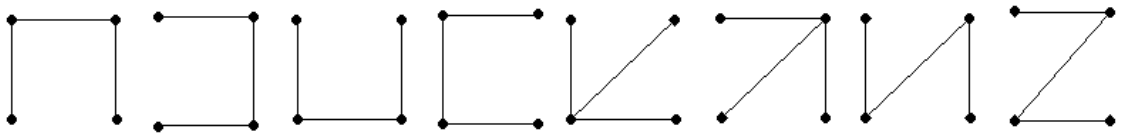


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-II} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 \cdot 2 = 8$$

$$A_{43} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-III} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -4 \cdot 2 = 8$$

Все 8 остовов графа:



Теорема 10 (Кэли).

Число деревьев с n помеченными вершинами V_1, V_2, \dots, V_n равно n^{n-2} .

► Для $n=1$ и $n=2$ очевидно. Пусть число вершин $n \geq 3$, тогда каждое дерево является остовом полного графа K_n и для подсчёта их числа используем матричную теорему Кирхгофа.

$$M = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n-1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

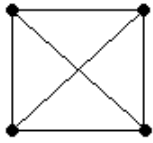
$$A_{11} = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{строка} \\ i=2,3,\dots \\ \leftarrow -1}} \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 \\ -n & n & 0 & 0 \\ -n & 0 & \ddots & 0 \\ -n & 0 & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{столбец} \\ \leftarrow -1 \end{bmatrix} + \sum_{j=2}^{n-1} \begin{bmatrix} \leftarrow -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \leftarrow -1 & \leftarrow -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix} = 1 \cdot n^{n-2}$$

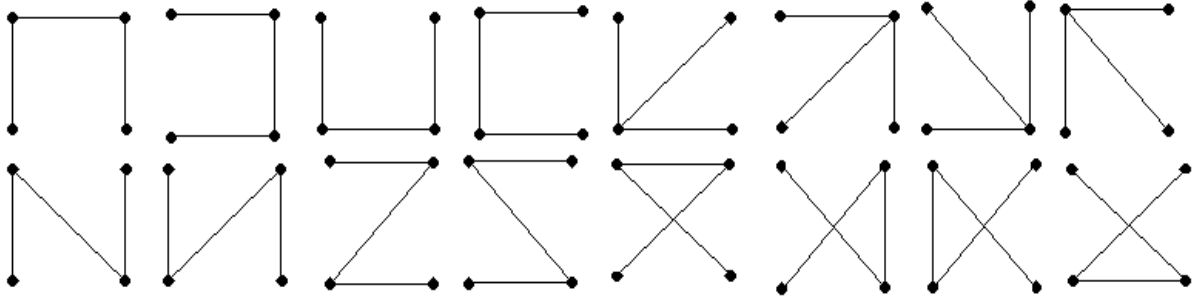
треугольная матрица



Пример 34 Найти все деревья с помеченными вершинами.



$$n = 4, n^{n-2} = 16$$



В корневых деревьях выделяется одна вершина, которая является корневой.

Утверждение 1. Число корневых деревьев с n помеченными вершинами равно n^{n-1} .

1.11 Раскраски графов

Пусть $G = (M, R)$ – неорграф без петель.

Определение 79 *Раскраской (вершин) графа G называется такое задание цветов вершинам G , что если $\{a, b\}$ – ребро, то вершины a и b имеют различные цвета. Раскраска называется *правильной*, если образы любых двух смежных вершин различны.*

Определение 80 *Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется минимальное число цветов, требующееся для раскраски G .*

Раскраска вершин графа в χ цвета есть разбиение множества вершин графа на попарно непересекающиеся непустые подмножества, состоящие из попарно несмежных вершин, т.е. $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_\chi$; $M_i \cap M_j = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq \chi$.

Пример 35 Так как в полном графе K_n любые две различные вершины связаны ребром, то $\chi(K_n) = n$.

Теорема 11 Пусть G – неорграф без петель, имеющий хотя бы одно ребро. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) G – бихроматический граф;
- 2) G – двудольный граф;
- 3) G не содержит циклов нечетной длины.

Следствие Если G – лес, то $\chi(G) \leq 2$.

Оценим хроматическое число графа G через его параметры. Обозначим через $\deg(G)$ максимальную степень вершин графа G .

Теорема 12 Для любого неорграфа G без петель выполняется неравенство $\chi(G) \leq \deg(G) + 1$.

Пример 36

1. Рассмотрим задачу составления расписания. Предположим, что нужно прочесть несколько лекций за кратчайшее время. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно (например, их читает один и тот же лектор). Построим граф G , вершины, которого биективно соответствуют лекциям и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им лекции нельзя читать одновременно. Очевидно, что любая раскраска этого графа определяет допустимое расписание: лекции, соответствующие вершинам одного цвета, могут читаться одновременно. Напротив, любое допустимое расписание определяет раскраску графа G . Оптимальные расписания соответствуют раскраскам с минимальным числом цветов, а число часов, необходимое для прочтения всех лекций, равно $\chi(G)$.

2. Рассмотрим граф G , вершины которого – страны, а ребра соединяют страны, имеющие общую границу. Числу $\chi(G)$ соответствует наименьшее число красок, необходимых для раскраски карты так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет.

Существуют и практические задачи, связанные с раскраской ребер в мультиграфе.

Раскраска ребер в мультиграфе G может быть определена с помощью раскраски вершин так называемого реберного мультиграфа $L(G)$.

Определение 81 Для произвольного неориентированного мультиграфа $G = (M, U, P)$ реберным мультиграфом $L(G)$ называется тройка (U, M, P') , где $P' \in U \times M \times U$, и выполняется $(u, a, v) \in P'$ тогда и только тогда, когда в мультиграфе G вершина a является концом ребер u и v .

Определение 82 Раскраской ребер мультиграфа G называется раскраска вершин мультиграфа $L(G)$.

Пример 37 Проводится монтаж аппаратуры. Чтобы не перепутать проводники, необходимо их окрасить таким образом, чтобы два проводника, идущие к одной плате, имели разные цвета. В этом случае вершинами являются платы, а ребрами – проводники.

Определение 83 Неорграф G называется *бихроматическим*, если $\chi(G)=2$.

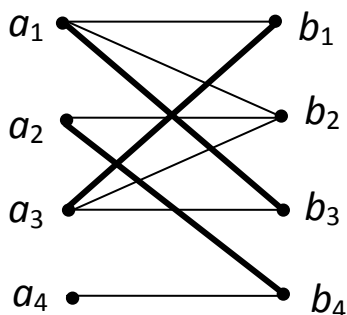
1.12 Паросочетание в графе

Теория потоков в сети имеет непосредственное применение в теории графов, в частности, используется в двудольных графах.

Напомним, какой граф называется двудольным. Граф $G=G(V, E)$ называется *двудольным*, если множество вершин V можно представить как объединение непересекающихся множеств, скажем $V=A \cup B$, так что каждое ребро имеет вид (v_i, v_j) , где $v_i \in A$ и $v_j \in B$. Не существует двух вершин из одного и того же множества (A или B), которые были бы соединены ребром друг с другом.

Определение 83 *Паросочетанием* в неориентированном графе $G=G(V,E)$ называется произвольное множество ребер $M \subseteq E$ такое, что никакие два ребра из M не инцидентны одной вершине.

Пример 38 На рисунке 40 изображен двудольный граф.



Выделенные ребра образуют паросочетание.
 $M = a_1; b_3, a_2; b_4, a_3; b_1$ - паросочетание.

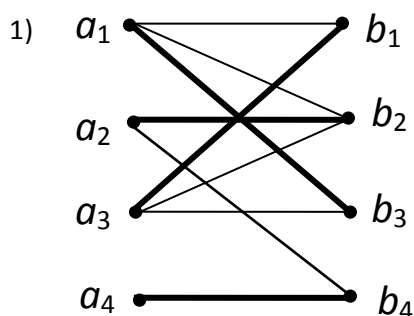
Рисунок 40

С практической точки зрения целесообразно рассматривать паросочетания, которые включают наибольшее число ребер. В связи с этим введем понятия «максимальное паросочетание» и «полное паросочетание».

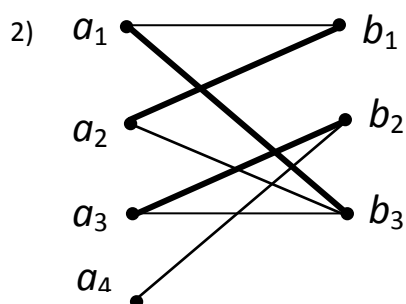
Определение 84 Паросочетание M на двудольном графе $G=G(V,E)$ называется *максимальным*, если никакое другое паросочетание на G не содержит ребер больше, чем M .

Определение 85 Паросочетание M на двудольном графе $G=G(V,E)$, где $V=A\cup B$, называется *полным*, если для каждой $v_i\in A$ существует $v_j\in B$ такое, что $(v_i,v_j)\in M$.

Пример 38 На рисунке 41 изображен двудольный граф. Выделенные ребра образуют паросочетание.



$M = a_1;b_3, a_2;b_2, a_3;b_1, a_4;b_4$ -
максимальное и полное паросочетание.



$M = a_1;b_3, a_2;b_1, a_3;b_2$ -
максимальное, но не полное паросочетание.

Рисунок 41

Очевидно, нужен некоторый метод, позволяющий находить максимальное паросочетание в двудольном графе.

1.13 Планарные графы. Критерии планарности графа

Графы, которые рассматривались выше, изображали на плоскости, где вершинами являются точки плоскости, а ребра – непрерывные плоские линии. Среди многих прикладных задач из теории графов интерес представляют те, которые можно изобразить на плоскости так, чтобы их ребра не пересекались.

Вот, например, некоторые прикладные задачи. Интегральная микросхема состоит из слоев миниатюрных микросхем, впечатанных в пластину. В такой ситуации крайне важно исключить пересечение проводов в местах, не предназначенных для соединений. Если изобразить места указанных соединений вершинами графа, то возникает задача построения графа с непересекающимися ребрами. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Определение 86 *Планарным графом* называется граф, который может быть изображен на плоскости, так что его ребра не пересекаются.

Все планарные графы укладываются на плоскости (имеют плоскую укладку).

Пример 39 На рисунках изображен граф и его плоская укладка.

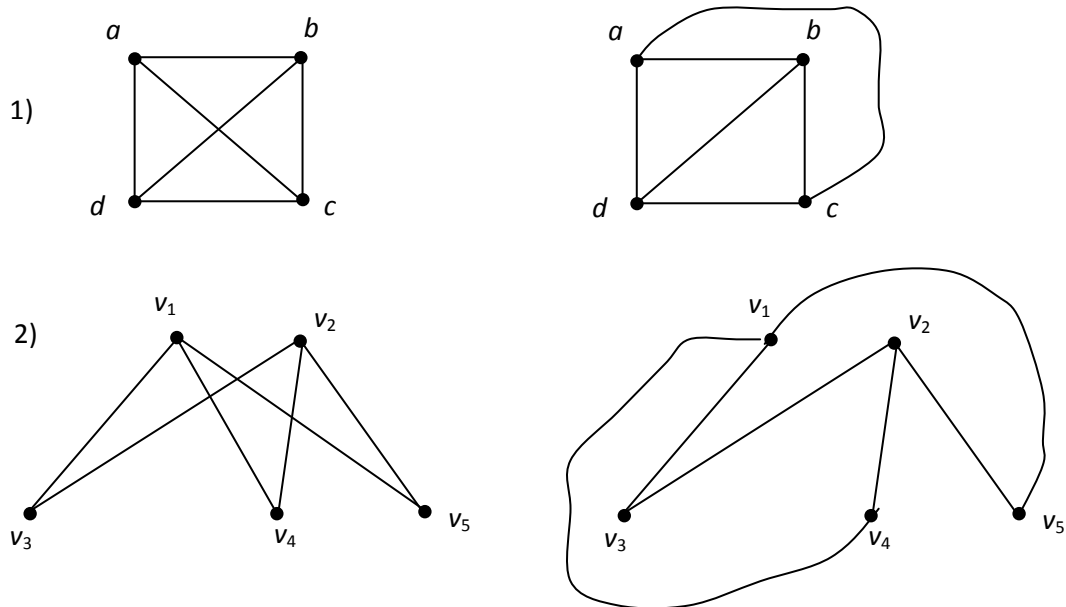


Рисунок 42

Очевидно, что

- 1) Всякий подграф планарного графа планарен.
- 2) Граф планарен тогда и только тогда, когда каждая связная компонента этого графа – планарный граф.

Рассмотрим граф как рисунок, изображенный на листе бумаги. Если граф планарен и нарисован так, что никакие линии не пересекаются, и его необходимо разрезать вдоль ребер, то граф окажется разделенным на части, включая внешнюю часть. Такие части называются *гранями*. Заметим, что границы каждой грани являются циклом.

Определение 87 *Гранью* планарного графа называется множество точек плоскости, каждая из которых может быть соединена плоской кривой, не пересекающей ребер графа. *Границей* грани называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

Пример 40

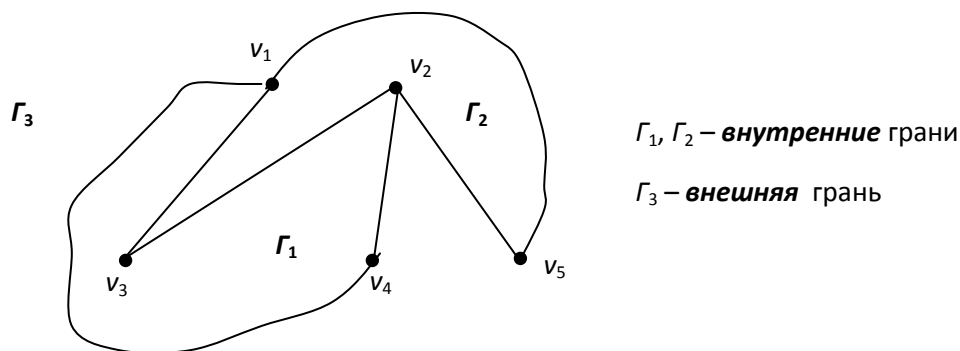


Рисунок 43

Теорема 13 (Эйлера) Если G – связный планарный граф, содержащий v вершин, e ребер и f граней, то $v - e + f = 2$ (1)

Доказательство. Пусть G – связный планарный граф, который имеет v вершин. Рассмотрим некоторый остов \tilde{G} этого графа. Остов имеет всего одну внешнюю грань, v вершин и $v-1$ ребер, т.е. $f = 1$, $v = v$ и $e = v-1$. Значит, $v - e + f = v - v + 1 + 1 = 2$. Формула (1) для остова \tilde{G} выполняется. Будем

поочередно добавлять к остову \tilde{G} недостающие ребра графа G . При каждом добавлении число вершин не изменится, число ребер увеличивается на единицу, так же как и число граней, поскольку при добавлении к остову ребра, связывающего две несмежные вершины, получается цикл, разделяющий текущую грань на две. Таким образом, формула (1) будет верна для всякого графа, получающегося в результате таких операций, а поскольку графом G заканчивается вся эта процедура, то эта формула будет верна и для него. ■

Пример 41 Планарный граф имеет вершины со степенями 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4 и 5, соответственно. Сколько у него ребер и граней?

Решение. Всего вершин 10, т.е. $v=10$. Найдем сумму степеней вершин графа $\sum d v_i = 32$. Значит, число ребер равно $e = \frac{32}{2} = 16$ (по теореме Эйлера о сумме степеней вершин графа). Тогда число граней $f = 2 - 10 + 16 = 8$.

Были найдены несколько критериев планарности графов, которые сформулируем ниже.

Теорема 14 Полный двудольный граф $K_{3,3}$ не является планарным.

Доказательство. Используем метод «от противного» и предположим, что граф $K_{3,3}$ – планарный. Если $K_{3,3}$ планарный граф, и поскольку имеется девять ребер и шесть вершин, то $6 - 9 + f = 2$. Поэтому $f = 5$. Пусть A и B – непересекающиеся трехэлементные множества вершин, формирующие множество V вершин графа $K_{3,3}$. Если начать путь из одного из непересекающихся множеств, например, A , и не повторять ребра, то можно попасть в вершину из множества B , вернуться в вершину из множества A , вернуться в вершину из множества B и, наконец, вернуться в вершину множества A , прежде чем завершить цикл. Каждый цикл в $K_{3,3}$ представляет собой путь, длина которого, по крайней мере, равна 4. Поэтому каждая грань определена циклом, в котором не менее четырех ребер. Следовательно, сумма ребер всех граней больше, чем $4f$. Но каждое ребро подсчитывается не более двух раз, поскольку оно может служить границей только двух

граней. Значит, сумма ребер граней должна быть меньше, чем $2e$. Объединяя эти неравенства, получаем, $4f \leq 2e$. Поэтому $4f \leq 18$. Но это противоречит тому, что $f = 5$. Следовательно, мы пришли к противоречию, и граф $K_{3,3}$ не является планарным. ■

Следующую лемму примем без доказательства.

Лемма 1 В произвольном связном планарном графе G с количеством вершин не менее трех имеет место неравенство $3v - e \geq 6$.

Теорема 15 Полный граф K_5 не является планарным.

Доказательство. Граф K_5 имеет пять вершин и десять ребер, $3v - e = 3 \cdot 5 - 10 = 5$. Поэтому, согласно лемме 1, граф K_5 не является планарным.

Если граф $G(V, E)$ содержит ребро $e = (v_i, v_j)$ и граф $G'(V', E')$ получен из графа $G(V, E)$ добавлением новой вершины v в множество V и заменой ребра (v_i, v_j) ребрами v_i, v и v, v_j , то граф $G'(V', E')$ называется *расширением* графа $G(V, E)$. Если графы $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ таковы, что G_{i+1} является расширением графа G_i , то граф G_n называется *производным* от графа G_1 .

Если граф $G'(V', E')$ – расширение графа $G(V, E)$, то посередине одного из ребер появляется вершина, а исходное ребро делится на два новых ребра, которые соединяют вершины, инцидентные исходному ребру, и новую вершину.

Определение 88 Графы G' и G'' называются *гомеоморфными*, если существует граф G такой, что оба графа, G' и G'' являются производными от графа G .

Пример 42 Граф, который изображен слева, является расширением графа, изображенного справа.



Рисунок 44

Пример 43 Граф, который изображен слева, является производным от графа, изображенного справа.

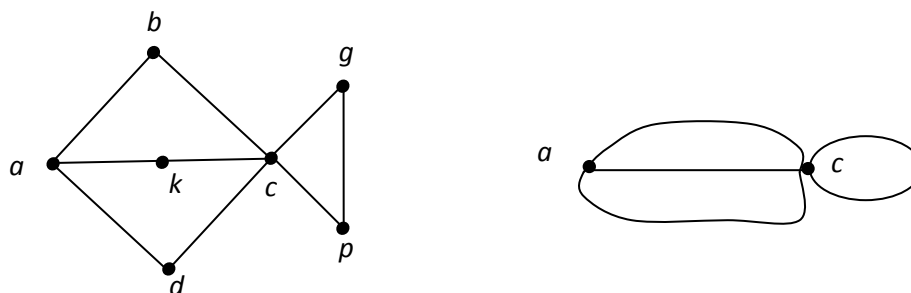


Рисунок 45

Рассмотрим следующие критерии планарности графа.

Теорема 16 Каждый планарный граф содержит вершину степени 5 или менее.

Теорема 17 Если два связных графа гомеоморфные, то они либо оба планарные, либо оба не планарные.

Теорема 18 (Теорема Понтрягина-Куратовского)

Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5 .

Теорема 19 Полный граф с пятью вершинами не является плоским.

Доказательство. Воспользуемся формулой Эйлера: $V - P + \Gamma = 2$, где V – число вершин плоского графа, P – число его ребер, Γ – число граней. Формула Эйлера справедлива для плоских связных графов, в которых ни один из многоугольников не лежит внутри другого. Эту формулу можно доказать методом математической индукции. Это доказательство мы опускаем. Заметим только, что формула справедлива и для пространственных многогранников. Пусть все пять вершин графа соединены друг с другом. Замечаем, что на графе нет ни одной грани, ограниченной только двумя ребрами. Если через φ_1 обозначить число таких граней, то $\varphi_2 = 0$. Далее рассуждаем от противного, а именно: предположим, что исследуемый граф

плоский. Это значит, что для него верна формула Эйлера. Число вершин в данном графе $V = 5$, число ребер $P = 10$, тогда число граней $G = 2 - V + P = 2 - 5 + 10 = 7$. Это число можно представить в виде суммы: $G = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$, где φ_3 – число граней, ограниченных тремя ребрами, φ_4 – число граней, ограниченных четырьмя ребрами и т. д. С другой стороны, каждое ребро является границей двух граней, а поэтому число граней равно $2P$, в то же время $2P = 20 = 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + \dots$. Умножив равенство $G = 7 = \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \dots$ на три, получим $3G = 21 = 3(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \dots)$. Ясно, что $(3\varphi_3 + 3\varphi_4 + 3\varphi_5 + \dots) < (3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \dots)$ или $3G < 2P$, но по условию, $2P = 20$, а $3G = 21$; поэтому вывод, полученный при введенном нами предположении (граф плоский), противоречит условию. Отсюда заключаем, что полный граф с пятью вершинами не является плоским.

1.14 Эйлеров цикл. Эйлеров граф

Выше были введены понятия «путь» и «цикл» для связного графа. Особый интерес для математиков представляют так называемые два цикла, имеющие практическое применение – эйлеров цикл и гамильтонов цикл.

Определение 89 Пусть $G(V, E)$ – граф. Цикл, который включает все ребра и вершины графа G , называется *эйлеровым циклом*. Граф, в котором существует эйлеров цикл называется *эйлеровым*.

Эйлеров цикл содержит не только все ребра (по одному разу), но и все вершины графа (возможно, по несколько раз). Ясно, что эйлеровым может быть только связный граф. С эйлеровым циклом как раз связана задача о кенигсбергских мостах, приведшей к исторически первой попытке развития теории графов как самостоятельного предмета. Чтобы решить данную задачу потребуется сначала сформулировать и доказать теорему. Эта теорема справедлива также и для мультиграфов, и для псевдографов, исключая тот случай, когда псевдограф имеет только одну вершину.

Теория графов многократно преоткрывалась разными авторами при решении различных прикладных задач. Например, задача о Кёнигсбергских мостах. На рис. 46 (он был представлен выше) представлен схематический план центральной части города Кенигсберг (ныне Калининград), включающий два берега реки Преголи, два острова в ней и семь соединяющих их мостов. Задача состоит в том, чтобы обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. Эта задача была решена (показано, что решения не существует) Эйлером в 1736 году.

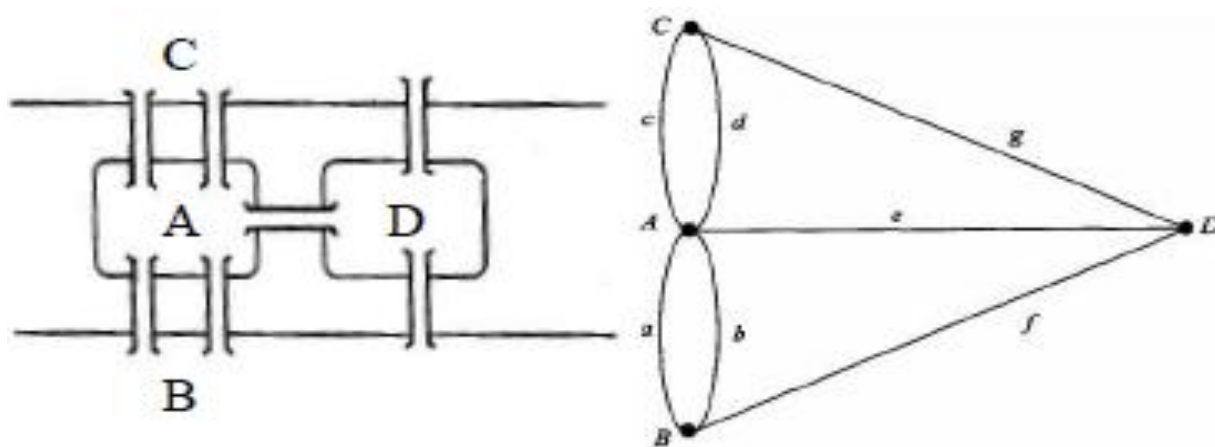


Рисунок 46 – Схематический план города и его представление в виде графа

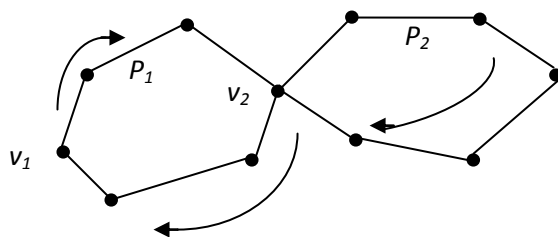
Теорема 20 Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четная.

Доказательство. Необходимость. Пусть G – связный эйлеров граф. Эйлеров цикл этого графа, проходя через каждую его вершину, входит в нее по одному ребру, а выходит по другому. Это означает, что каждое прохождение вершины по циклу вносит слагаемое 2 в ее степень. Поскольку цикл содержит все ребра графа, то степени всех вершин будут четными.

Достаточность. Предположим, что степени всех вершин связного графа G четные. Начнем цепь G_1 из произвольной вершины v_1 , и будем продлевать ее, выбирая каждый раз новое ребро. Так как степени вершин

четная, то, попав в некоторую вершину, мы всегда будем иметь в распоряжении еще не пройденное ребро. Таким образом, построение цепи P_1 обязательно закончится в вершине v_1 , и P_1 будет циклом. Если P_1 содержит все ребра графа G , то построен эйлеров цикл.

В противном случае, удалив из графа G ребра графа P_1 , получим граф G_2 . Так как степень всех вершин графов G и P_1 были четными, то и G_2 будет обладать этим свойством. В силу связности G графы P_1 и G_2 должны иметь хотя бы одну общую вершину v_2 . Теперь начиная из v_2 , построим в G цикл P_2 подобно тому, как построили P_1 .



Объединим циклы P_1 и P_2 следующим образом: пройдем часть P_1 от вершины v_1 до вершины v_2 , затем пройдем цикл P_2 , затем – оставшуюся часть P_1 от v_2 до v_1 . Если объединенный цикл не эйлеров, проделав аналогичные построения, получим еще больший цикл. Поскольку степени вершин во всех графах, составленных из ребер, не попавших в строящийся цикл, четные, и число ребер в этих графах убывает, то процесс закончится построением эйлерова цикла. ■

Теперь можно показать, что на графе к задаче о кенигсбергских мостах нельзя построить эйлеров цикл, так как этот граф имеет вершины нечетной степени. Вообще эйлеров граф – это такой граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

Для построения эйлерова цикла применяется **алгоритм Флери**.

Конечно, в задаче о кенигсбергских мостах можно было бы поставить такой вопрос: «Возможно, ли пройти каждый мост по одному разу, но не

обязательно возвращаться в исходную точку?» Для этого рассматриваются такие понятия как *эйлеров путь* и *собственный эйлеров путь*.

Определение 90 Пусть $G(V, E)$ – граф. Путь, который включает каждое ребро графа G только один раз называется *эйлеровым путем*. Эйлеров путь, который не является циклом называется *собственным эйлеровым путем*.

Сформулируем теорему (без доказательства), в которой описано условие, при котором граф имеет собственный эйлеров путь.

Теорема 21 Граф (мультиграф или псевдограф) имеет собственный эйлеров путь тогда и только тогда, когда он связный и ровно две его вершины имеют нечетную степень.

По этой теореме получается, что задача о кенигсбергских мостах так же не имеет и эйлерова пути.

Аналогично можно ввести понятие эйлерова цикла для ориентированного графа и условие существования эйлерова цикла в орграфе.

Определение 91 Пусть $G(V, E)$ - ориентированный граф. Ориентированный цикл, который включает все ребра и вершины графа G , называется *эйлеровым циклом*.

Теорема 22 Ориентированный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и полустепень захода каждой вершины равна ее полустепени исхода.

Теорема 23 Если связный граф содержит ровно $2n$ вершин нечетной степени, то минимальное число реберно-непересекающихся цепей, на которые можно разбить его ребра, равно n .

Сформулируем определения и теоремы для неорграфа и орграфа.

Определение 92 Цикл называется Эйлеровым, если в него входят все ребра графа, причем, строго по одному разу.

Теорема 24 (Эйлер, 1748) для неориентированных графов.

Следующие условия эквивалентны:

В графе $G \exists$ Эйлеров цикл

Граф G сильно связан и $\forall V d(V)$ чётно

Множество рёбер разбивается на непересекающиеся простые циклы

Очевидно.

Докажем методом математической индукции по числу рёбер.

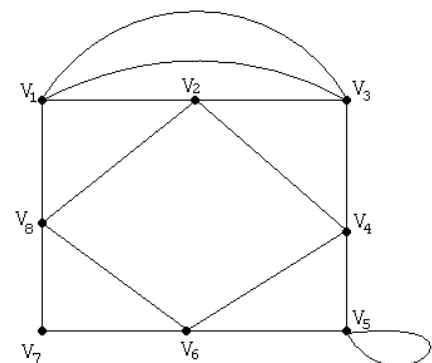
Базис индукции $m=1,2,3\dots$. Рассмотрим индуктивный переход. Пусть выполнено условие (2). Возьмём $V_0 \in V$. Выйдем из вершины V_0 по любому инцидентному ребру, попадём в другую вершину $V_1, d(V_1) \geq 2$. Из неё выйдем по следующему ребру, попадём в другую вершину $V_2, d(V_2) \geq 2$ и т. д. пока не вернёмся в одну из пройденных вершин.

Найдём простой цикл G_0 . Удаляем из графа все рёбра этого цикла G_0 . Оставшийся граф разобьётся на несколько компонент связности. Каждая компонента связности является связанным подграфом и степень каждой вершины осталась чётной.

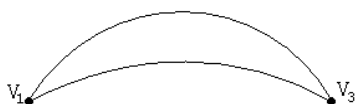
Имеем $< m$ рёбер. По индуктивному предположению в $G_1, G_2 \dots G_k \exists$ Эйлеровы циклы. Склеим эти циклы в $G_1, G_2 \dots G_k$ и G_0 по общим вершинам и получим Эйлеров цикл во всём графе. ◀

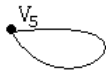
Пример 44

| i | $d(V_i)$ |
|-----|----------|
| 1 | 4 |
| 2 | 4 |
| 3 | 4 |
| 4 | 4 |
| 5 | 4 |
| 6 | 4 |
| 7 | 2 |
| 8 | 4 |

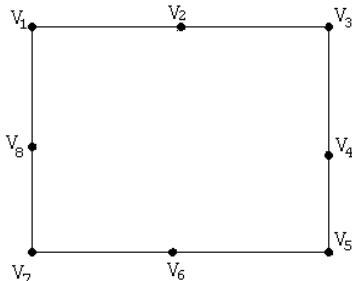


C_1 – простой цикл длины 2

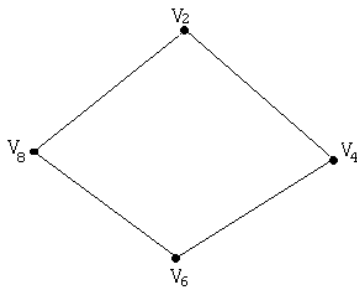




C_2 – простой цикл длины 1



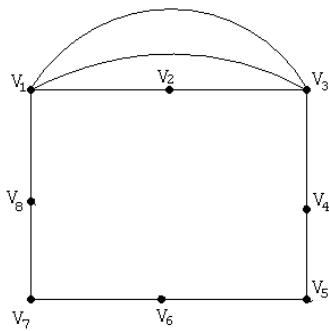
C_3 – простой цикл длины 8



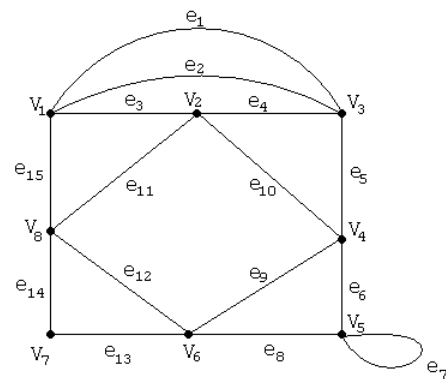
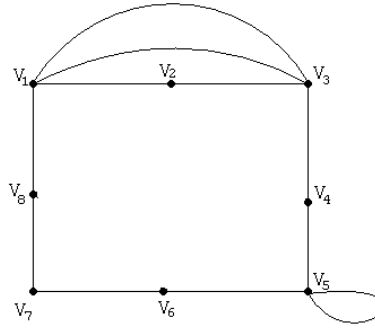
C_4 – простой цикл длины 4

C_1 и C_3 имеют общую вершину V_1 C_5 и C_2 имеют общую вершину V_5 C_6 и C_4 имеют общую вершину V_6

$$C_1 + C_3 = C_5$$



$$C_5 + C_2 = C_6$$



Теорема 25 (для ориентированных графов).

Следующие условия эквивалентны:

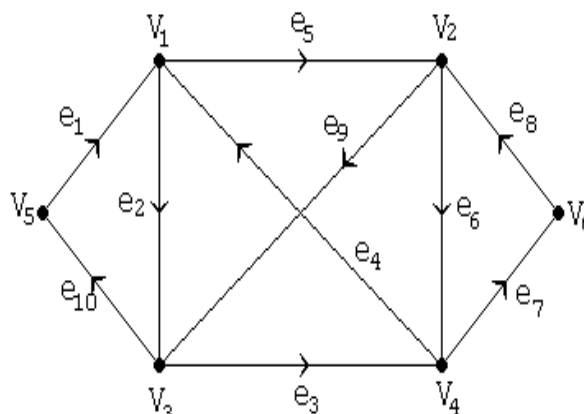
☞ В орграфе G \exists Эйлеров контур

☞ Орграф G сильно связан и $\forall V d^-(V) = d^+(V)$

☞ Множество дуг разбивается на непересекающиеся простые контуры

Пример.

| i | $d^+ \zeta_i^-$ | $d^- \zeta_i^-$ |
|-----|-----------------|-----------------|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 2 |
| 4 | 2 | 2 |
| 5 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 |



Разложите самостоятельно на непересекающиеся простые контуры.

1.15 Гамильтонов путь. Гамильтонов цикл. Граф гамильтонов

В 1857 году математик Уильям Роуэн Гамильтон придумал игру. Существует несколько версий того, как это произошло. По одной из версий он описал игру в письме к другу. Согласно другой, он действительно изобрел игру и продал ее производителю игрушек. В любом случае она включала додекаэдр, т.е. правильный многогранник, 12 граней которых представляли собой равные правильные пятиугольники. В каждом из 20 углов, или вершин тела, просверливалась дырочка, в которую вставлялся колышек, изображавший город. Используя веревку, требовалось найти путь через города, посетив каждый город один раз, и вернуться в исходный город.

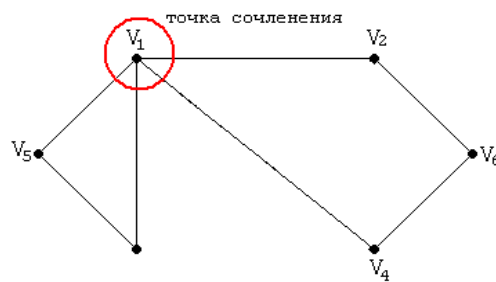
Проблема в таком случае сводилась к нахождению цикла в графе, проходящего через каждую вершину только один раз, исключая начальную. Отсюда любой цикл, обладающий таким свойством, называется гамильтоновым циклом. Этот цикл в некотором смысле противоположен эйлерову циклу, который проходит через все ребра только один раз. До определенного момента оба цикла могут показаться похожими, но на самом деле цикл Гамильтона намного сложнее.

Определение 93 Пусть $G(V, E)$ – граф. *Гамильтонов путь* – это простой путь, который проходит через каждую вершину графа G . *Гамильтонов цикл* – это простой цикл, который проходит через каждую вершину графа G .

Неизвестны условия (необходимые и достаточные) для существования Гамильтонова цикла.

Утверждение 1.

Если в графе имеется точка сочленения, то Гамильтонова цикла не существует.



Утверждение 2 (Достаточное условие Дирака).

$$\begin{cases} \text{Число вершин } n \geq 3 \\ \forall V d(V) \geq \frac{n}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Существует Гамильтонов цикл}$$

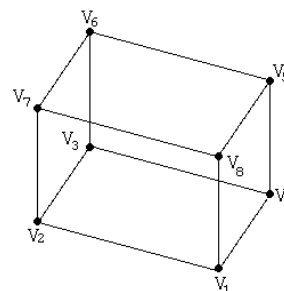
Утверждение 3 (Достаточное условие Оре).

$$\begin{cases} \text{Число вершин } n \geq 3 \\ \forall \text{ несмежных } V_i \text{ и } V_j d(V_i) + d(V_j) \geq n \end{cases} \Rightarrow \text{Существует Гамильтонов цикл}$$

Покажем, что эти условия не являются необходимыми.

$n=8, \forall V_i d(V_i) \geq 3 \Rightarrow$ Условия Дирака и Оре не выполняются,

Гамильтонов цикл существует!



Задача коммивояжера (развозчика продукции или бродячего торговца).

Формулировка задачи: коммивояжер должен посетить один и только один раз каждый из n городов и вернуться в исходный пункт. Его маршрут должен минимизировать суммарную длину пройденного пути.

Когда задача сформулирована, то с помощью математического языка (символов, функций, уравнений или неравенств и т.д.) строится *математическая модель задачи*. Понятие «математическая модель» введем в разделе «Основы математического моделирования». Пока будем оперировать данным понятием, как некоторым объективным фактом.

Пусть $C=[c_{ij}]$ – матрица расстояний между городами. Для составления математической модели задачи обозначим через x_{ij} факт переезда коммивояжером из города i в город j . Поскольку переезд из одного города в другой может осуществляться только один раз, то x_{ij} должны принимать только два значения: 1 или 0, т.е. *булевы значения*. Таким образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер из города } i \text{ приезжает непосредственно в город } j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель задачи примет следующий вид:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Система ограничений (2) обеспечивает построение маршрута, при котором коммивояжер въезжает в каждый город только один раз, а система (3) – маршрута, когда он выезжает из каждого города только один раз. К сожалению, эти ограничения недостаточны, так как среди допустимых ими решений имеются маршруты, не образующие полный цикл, включающий все города. Устранение подциклов достигается при добавлении системы ограничений:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (4)$$

где переменные u могут принимать произвольные действительные значения.

Отметим, что придумано еще много других развлекательных и полезных задач, связанных с поиском гамильтоновых циклов. Сформулируем две из них.

1. *Задача про банкет.* Компанию из нескольких человек требуется рассадить за круглым столом таким образом, чтобы по обе стороны от каждого сидели его знакомые. Очевидно, для решения этой задачи нужно найти гамильтонов цикл в графе знакомств компании.

2. *Задача о шахматном коне.* Можно ли, начиная с произвольного поля шахматной доски, обойти конем последовательно все 64 поля по одному разу и вернуться в исходное поле?

Теорема 26 В полном графе $G(V, E)$ всегда существует гамильтонов путь.

1.16 Независимые и доминирующие множества

Пусть дан граф $G = (X, \Gamma)$. Довольно часто возникает задача поиска таких подмножеств множества вершин X графа G , которые обладают определенным, наперед заданным свойством. Например, какова максимально возможная мощность такого подмножества $S \subseteq X$, для которого порожденный подграф $\langle S \rangle$ является полным? Или какова максимальная мощность подмножества S , такого, что граф $\langle S \rangle$ — вполне несвязный? Ответ на первый вопрос дает так называемое *кликное число* графа G , а на второй — *число независимости*. Еще одна задача. Она состоит в нахождении минимально возможной мощности таких подмножеств S множества X , что любая вершина из $X \setminus S$ достижима из S с помощью путей единичной длины. Решение этой задачи дается так называемым *числом доминирования* графа G .

Эти числа и связанные с ними подмножества вершин описывают важные структурные свойства графа и имеют разнообразные непосредственные приложения при ведении проектного планирования исследовательских работ, в кластерном анализе и численных методах таксономии, параллельных вычислениях на ЭВМ, при размещении предприятий обслуживания, а также источников и потребителей в энергосистемах.

В настоящем разделе приводятся алгоритмы определения указанных выше чисел и обсуждаются некоторые их приложения. Кроме того, рассматривается *задача о наименьшем покрытии*, которая является обобщением задачи о нахождении числа доминирования графа, и излагается некоторый метод ее решения. Последняя задача очень важна не только потому, что она имеет большое число прямых приложений, но и в связи с тем, что она часто возникает как подзадача в ряде разделов теории графов, которые затронуты в этой работе. В частности, большую роль она играет при вычислении хроматических чисел, нахождении центров графа и паросочетаний.

Рассмотрим неориентированный граф $G=(X,\Gamma)$. *Независимое множество вершин* (известное также как *внутренне устойчивое множество*) есть множество вершин графа G , такое, что любые две вершины в нем не смежны, т.е. никакая пара вершин не соединена ребром. Следовательно, любое множество $S\subset X$, которое удовлетворяет условию: $S \cap \Gamma S = \emptyset$ (1) является независимым множеством вершин. Например, для графа, приведенного на рис. 47, множества вершин $x_7, x_8, x_2, x_3, x_1, x_7, x_8, x_2, x_5$ — независимые.

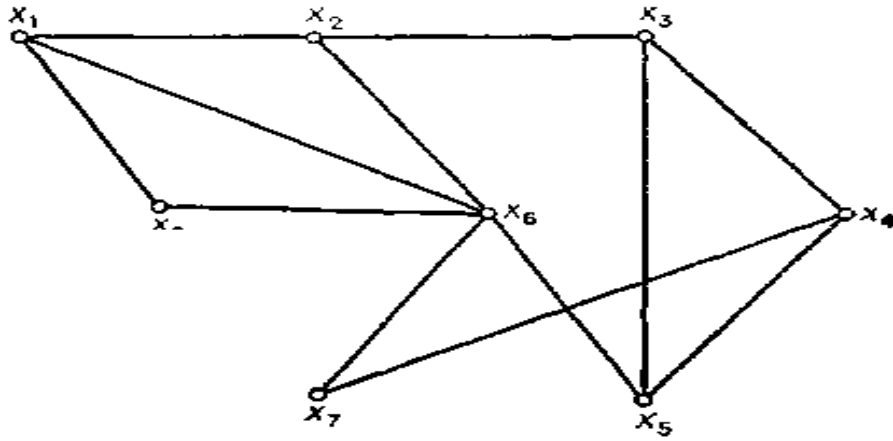


Рисунок 47

Когда не могут возникнуть недоразумения, эти множества будут называться просто независимыми множествами (вместо независимые множества вершин).

Независимое множество называется *максимальным*, когда нет *другого* независимого множества, в которое оно бы входило. Таким образом, множество S является *максимальным независимым множеством*, если оно удовлетворяет условию (1) и еще такому' условию:

$$H \cap \Gamma H \neq \emptyset \quad \forall H \supset S \quad (2)$$

Следовательно, для графа, приведенного на рис. 47, множество

x_7, x_8, x_2, x_5 — является максимальным, а x_7, x_8, x_2 не является таковым. Множества x_7, x_1, x_3 и x_4, x_6 также являются максимальными независимыми множествами, и, значит, в данном графе больше одного независимого множества. Следует также отметить, что число элементов (вершин) в разных максимальных множествах, как следует из приведенного выше примера, не обязательно одинаковое.

Если Q является семейством всех независимых множеств графа G , то число $\alpha G = \max_{S \in Q} S \quad (3)$ называется *числом независимости* графа G , а множество S^* , на котором этот максимум достигается, называется *наибольшим независимым* множеством. Для графа, приведенного на рис. 47, семейство максимальных независимых множеств таково: x_7, x_8, x_2, x_5 , x_7, x_1, x_3 , x_4, x_8, x_2 , x_6, x_4 , x_6, x_3 , x_7, x_5, x_1 , x_1, x_4 , x_7, x_8, x_3 .

Наибольшее из этих множеств имеет 4 элемента и, следовательно, $\alpha[G]=4$. Множество x_7, x_8, x_2, x_5 является наибольшим независимым множеством.

Пример выбор проекта.

Имеется n проектов, которые должны быть выполнены, и допустим, что для выполнения проекта x_i требуется некоторое подмножество R_i наличных ресурсов из множества $\{1, \dots, p\}$. Далее предположим, что каждый проект, задаваемый совокупностью средств, необходимых для его реализации, может быть выполнен за один и тот же промежуток времени. Построим граф G , каждая вершина которого соответствует некоторому проекту, а ребро (x_i, x_j) — наличию общих средств обеспечения у проектов x_i и x_j , т. е. условию $R_i \cap R_j \neq \emptyset$. Максимальное независимое множество графа G представляет тогда максимальное множество проектов, которое можно выполнить одновременно за один и тот же промежуток времени.

В динамической системе происходит постоянное обновление проектов через определенный промежуток времени, так что каждый раз нужно заново повторять процедуру построения максимального независимого множества в соответствующем графе G . В практических ситуациях бывает весьма не просто выполнить множество проектов, соответствующих максимальному независимому множеству на данном отрезке времени, поскольку исполнение некоторых проектов может быть по каким-то причинам отложено. Тогда лучший способ действия состоит в присвоении каждому проекту (вершине) x_i некоторого штрафа p_i , который увеличивается с ростом времени отсрочки в исполнении проекта, и в каждый расчетный момент времени надо выбирать из семейства максимальных независимых множеств такое множество, которое максимизирует некоторую функцию штрафов на вершинах, содержащихся в выбранном множестве.

1.17 Максимальные полные подграфы (клики)

Понятие, противоположное максимальному независимому множеству, есть максимальный полный подграф. Таким образом, *максимальный полный подграф (клика)* графа G есть порожденный подграф, построенный на подмножестве S вершин графа и являющийся полным и максимальным в том смысле, что любой другой подграф графа G , построенный на множестве вершин H , содержащем S , т.е. $H \supset S$, не является полным. Следовательно, в противоположность максимальному независимому множеству, в котором не могут встретиться две смежные вершины, в клике все вершины попарно смежны. Совершенно очевидно, что максимальное независимое множество графа G соответствует клике графа G и наоборот, где \bar{G} — дополнение графа G .

Вполне очевидно также, что понятие клики для неориентированного графа подобно понятию клики для графа; однако эта аналогия более глубокая, чем та, которая существует между понятиями клики и сильной компоненты. Клику в действительности можно рассматривать как такую сильную компоненту, в которой достижимость ограничена путями единичной длины .

Аналогично тому, как было определено число независимости графа, с помощью соотношения (3) мы можем определить *кликое число* графа (известное также как *густота* или *плотность*). Это — максимальное число вершин в кликах данного графа. Тогда, образно говоря, у «плотного» графа кликовое число будет, вероятно, больше, а число независимости меньше, в то время как у «разреженного» графа, по всей вероятности, будет иметь место противоположное соотношение между этими числами.

Построение всех максимальных независимых множеств.

Вследствие упомянутой выше связи между кликами и максимальными независимыми множествами методы, рассматриваемые в данном разделе и описываемые на «языке максимальных независимых множеств», могут быть

непосредственно использованы для построения клика. На первый взгляд кажется, что нахождение всех максимальных независимых множеств графа — очень простая задача, которую можно решить последовательным перебором независимых множеств с одновременной проверкой каждого множества на максимальность (последнее осуществляется путем добавления к исследуемому множеству дополнительной, не принадлежащей ему, вершины и выяснения того, сохраняется ли независимость) и запоминанием максимальных множеств. Представление о простоте задачи действительно справедливо, но только для небольших графов, например с числом вершин, не превосходящим 20. Однако с увеличением числа вершин этот метод поиска становится с вычислительной точки зрения громоздким. Но все же громоздкость здесь не столь велика, как кажется с первого взгляда. Число максимальных независимых множеств увеличивается, но в процессе выполнения процедуры большое число независимых множеств формируется, а затем вычеркивается, так как обнаруживается, что они содержатся в других, ранее полученных множествах и поэтому не являются максимальными.

В этом разделе будет описан систематический метод перебора Прона и Кэрбоша, который позволяет обходить указанные выше трудности. В этом методе не нужно запоминать генерируемые независимые множества для проверки их на максимальность путем сравнения с ранее сформированными множествами.

Обоснование алгоритма. Этот алгоритм является существенно упрощенным перебором, использующим дерево поиска. В процессе поиска — на некотором этапе k — независимое множество вершин S_k расширяется путем добавления к нему подходящим образом выбранной вершины (чтобы получилось новое независимое множество S_{k+1}) на этапе $k + 1$, и так поступают до тех пор, пока добавление вершин станет невозможным, а порождаемое множество не станет максимальным независимым множеством. Пусть Q_k будет на этапе k наибольшим множеством вершин, для которого S_k

$\cap Q_k = \emptyset$, т.е. после добавления любой вершины из Q_k к S_k получается независимое множество S_{k+1} . В некоторый произвольный момент работы алгоритма множество Q_k состоит вообще говоря, из вершин двух типов: подмножества Q_k^- тех вершин, которые уже использовались в процессе поиска для расширения множеств S_k и подмножества Q_k^+ таких вершин, которые еще не использовались. Тогда дальнейшее ветвление в дереве поиска включает процедуру выбора вершины $x_{i_k} \in Q_k^+$, добавление ее к S_k для построения множества $S_{k+1} = S_k \cup \{x_{i_k}\}$ (4) и порождение новых множеств:

$$Q_{k+1} = Q_k - \Gamma\{x_{i_k}\} \quad (5) \text{ И}$$

$$Q_{k+1}^+ = Q_k^+ - (\Gamma(x_{i_k}) \cup \{x_{i_k}\}) \quad (6)$$

Шаг возвращения алгоритма состоит в удалении вершины x_{i_k} из S_{k+1} , чтобы вернуться к S_k , изъятии x_{i_k} из старого множества Q_k^+ и добавлении x_{i_k} , к старому множеству Q_k^- для формирования новых множеств Q_k^+ и Q_k^- .

Легко заметить, что множество S_k является максимальным независимым множеством только тогда, когда невозможно его дальнейшее расширение, т. е. когда $Q_k^+ = \emptyset$. Если $Q_k^- \neq \emptyset$, то заключаем, что текущее множество S_k было расширено на некотором предшествующем этапе работы алгоритма путем добавления вершины из Q_k^- , и поэтому оно не является максимальным независимым множеством. Таким образом, необходимым и достаточным условием того, что S_k — максимальное независимое множество, является выполнение равенств $Q_k^+ = Q_k = \emptyset$ (7)

Теперь совершенно очевидно, что если очередной этап работы алгоритма наступает тогда, когда существует некоторая вершина $x \in Q_k^-$, для которой $\Gamma(x) \cap Q_k^+ = \emptyset$, то безразлично, какая из вершин, принадлежащих Q_k^+ , используется для расширения S_k , и это справедливо при любом числе дальнейших ветвлений; вершина x не может быть удалена из Q_k^- на любом следующем шаге $p > k$.

$$\text{Таким образом, условие } \exists x \in Q_k^-, \text{ такая, что } \Gamma(x) \cap Q_k^+ = \emptyset, \quad (8)$$

является достаточным для осуществления шага возвращения, поскольку из S_k при всяком дальнейшем ветвлении уже не получится максимальное независимое множество.

Как и во всяком методе, использующем дерево поиска, здесь выгодно стремиться начать шаги возвращения как можно раньше, поскольку это ограничит «размеры» «ненужной» части дерева поиска. Следовательно, целесообразно сосредоточить усилия на том, чтобы возможно раньше добиться выполнения условия (8) с помощью подходящего выбора вершин, используемых при расширении множеств S_k . На каждом следующем шаге процедуры можно выбирать для добавления к S_k любую вершину $x_{i_k} \in Q_k^+$; на шаге возвращения x_{i_k} будет удалена из Q_k^+ и включена в Q_k^- . Если вершину x_k выбрать так, чтобы она принадлежала множеству $\Gamma(x)$ при некоторой вершине x из Q_k^- , то на соответствующем шаге возвращения величина

$$\Delta(x) = |\Gamma(x) \cap Q_k^+| \quad (9)$$

уменьшится на единицу (по сравнению с тем значением, которое было до выполнения прямого шага и шага возвращения), так что условие (8) теперь станет выполняться раньше. Таким образом, один из возможных способов выбора вершины x_{i_k} для расширения множества S_k состоит, во-первых, в нахождении вершины $x^* \in Q_k^-$ с возможно меньшим значением величины $\Delta(x^*)$ и, кроме того, в выборе вершины x_{i_k} из множества $\Gamma(x^*) \cap Q_k^+$. Такой выбор вершины x_{i_k} будет приводить на шаге возвращения к уменьшению величины $\Delta(x^*)$ — каждый раз на единицу — до тех пор, пока вершина x^* не станет удовлетворять условию (8) при выполнении шага возвращения.

Следует отметить, что поскольку на шаге возвращения вершина x_{i_k} попадает в Q_k^- , то может оказаться, что при этом новом входе значение величины Δ меньше, чем для ранее фиксированной вершины x^* . Значит, надо проверить, не ускорит ли эта новая вершина выполнение условия (8). Это особенно важно в начале ветвления, когда $Q_k^- = \emptyset$.

Описание алгоритма.

Начальная установка

Шаг 1. Пусть $S_0=Q_0^-=\emptyset$, $Q_0^+=X$, $k=0$.

Прямой шаг

Шаг 2. Выбрать вершину $x_{i_k} \in Q_k^+$, как упоминалось ранее, и сформировать S_{k+1} , Q_{k+1}^- и Q_{k+1}^+ , оставляя Q_k^- и Q_k^+ нетронутыми. Положить $k = k + 1$.

Проверка

Шаг 3. Если удовлетворяется условие (8), то перейти к шагу 5, иначе к шагу 4.

Шаг 4. Если $Q_k^+=Q_k^-=\emptyset$, то напечатать максимальное независимое множество S_k и перейти к шагу 5. Если $Q_k^+=\emptyset$, а $Q_k^- \neq \emptyset$, то перейти к шагу 5. Иначе перейти к шагу 2.

Шаг возвращения

Шаг 5. Положить $k = k - 1$. Удалить x_{i_k} из S_{k+1} , чтобы получить S_k . Исправить Q_k^- и Q_k^+ , удалив вершину x_{i_k} из Q_k^+ и добавив ее к Q_k^- . Если $k = 0$ и $Q_0^+=\emptyset$, то остановиться. (К этому моменту будут уже напечатаны все максимальные независимые множества.) Иначе перейти к шагу 3.

Доминирующие множества.

Для графа $G = (X, \Gamma)$ *доминирующее множество вершин* (называемое также *внешне устойчивым множеством*) есть множество вершин $S \subseteq X$, выбранное так, что для каждой вершины x_j , не входящей в S , существует дуга, идущая из некоторой вершины множества S в вершину x_j .

Таким образом, S есть доминирующее множество вершин (или просто *доминирующее множество*, когда нет опасности возникновения путаницы), если $S \cup T(S) = X$ (10)

Для графа, приведенного на рис. 48, множества вершин x_1, x_4, x_6 , x_1, x_4 , x_3, x_6, x_5 являются доминирующими множествами.

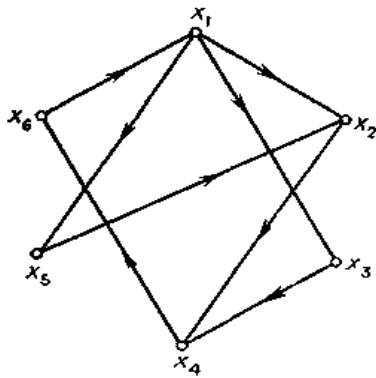


Рисунок 48

Доминирующее множество называется *минимальным*, если нет другого доминирующего множества, содержащегося в нем.

Таким образом, множество S является минимальным доминирующим множеством, если оно удовлетворяет соотношению (10) и нет собственного подмножества в S , которое удовлетворяет условию, аналогичному (10). Так, например, для графа, приведенного на рис. 87, множество x_1, x_4 , — минимальное, а x_1, x_4, x_6 нет. Минимальным доминирующим множеством является также множество x_3, x_6, x_5 , и еще существует несколько таких множеств в этом графе. Следовательно, как и в случае максимальных независимых множеств, в графе может быть несколько минимальных доминирующих множеств, и они не обязательно содержат одинаковое число вершин.

Если P — семейство всех минимальных доминирующих множеств графа, то число $\beta G = \min_{S \in P} S$ (11) называется *числом доминирования* графа G , а множество S^* , на котором достигается минимум, называется *наименьшим* доминирующим множеством. Для графа, приведенного на рис. 97, наименьшим доминирующим множеством является множество x_1, x_4 , и, следовательно, $\beta [G]=2$.

Пример Размещение «центров», покрывающих заданную область.

Задач такого типа весьма много. К ним относятся:

(а) Размещение телевизионных или радиопередающих станций на некоторой территории.

(б) Размещение военных баз, контролирующих данную территорию,

(в) Размещение центров торговли, обслуживающих некоторый район.

Предположим, что территория, представленная большим квадратом на рис. 49(а), разделена на 16 районов, как показано на рисунке.

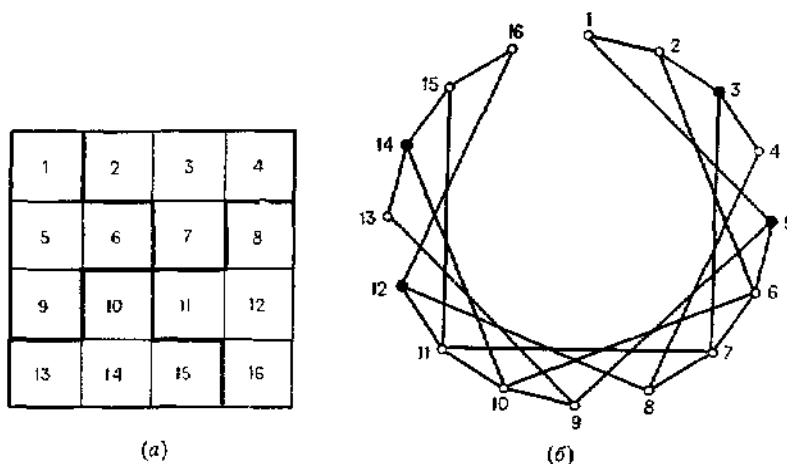


Рисунок 49

Предполагается, что военная база, расположенная в каком-либо районе, может контролировать не только этот район, но и соседние, граничащие с ним районы. Требуется найти наименьшее возможное число военных баз и места для их размещения, чтобы был обеспечен контроль всей территории.

Если мы представим каждый район вершиной графа и ребрами соединим только те пары вершин, которые соответствуют соседним районам, то получится граф, показанный на рис. 49(б). Тогда задача сводится к определению наименьшего доминирующего множества в этом графе. Число $\beta[G]$ является наименьшим числом баз, «покрывающих» всю территорию. Для графа, приведенного на рис. 49(б), $\beta[G]=4$ и базы следует размещать в квадратах, номера которых принадлежат множеству $\{3,5,12,14\}$ или множеству $\{2,9,15,8\}$.

Аналогично, для территории, показанной на рис. 50, число доминирования соответствующего графа равно 12 и базы следует размещать

в районах 2,6,11,15,21,24,26,29,35,39,44,48. Только три заштрихованных квадрата «защищены» одновременно тремя базами.

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | ② | 3 | 4 | 5 | ⑥ | 7 |
| 8 | 9 | 10 | ⑪ | 12 | 13 | 14 |
| ⑮ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | ⑳ |
| 22 | 23 | ⑳ | 25 | ⑳ | 27 | 28 |
| ⑳ | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | ⑳ |
| 36 | 37 | 38 | ⑳ | 40 | 41 | 42 |
| 43 | ⑳ | 45 | 47 | 48 | ⑳ | 49 |

Рисунок 50

Связь между понятиями минимального доминирующего множества и базой графа почти очевидна, так же как между минимальным доминирующим множеством и p -центром.

Для случая максимальных независимых множеств мы привели алгоритм, который выдает полный список всех таких множеств.

Задача о наименьшем покрытии.

Пусть A^T — транспонированная матрица смежности графа G с единичными диагональными элементами. Задача определения наименьшего доминирующего множества графа G эквивалентна задаче нахождения такого наименьшего множества столбцов в матрице A^T , что каждая строка матрицы содержит единицу хотя бы в одном из выбранных столбцов. Эта последняя задача в поиске наименьшего множества столбцов, «покрывающих» все строки, изучалась довольно интенсивно под названием *задачи о наименьшем покрытии* (ЗНП).

В общей ЗНП матрица, состоящая из 0 и 1, не обязательно является квадратной. Кроме того, каждому столбцу j (в нашем случае каждой вершине

x_j) сопоставляется некоторая стоимость или вес c_j и требуется выбрать покрытие (или, в другой терминологии — для случая графов — доминирующее множество вершин) с наименьшей общей стоимостью или веса. Поскольку задача построения наименьшего доминирующего множества вершин является весьма частной задачей о покрытии с $c_j = 1$ для всех $j = 1, \dots, n$, то на первый взгляд кажется, что нахождение такого множества осуществляется на деле значительно проще, чем решение общей ЗНП. Однако это, вообще говоря, не так. Поэтому в данном разделе мы начнем с решения общей ЗНП.

Постановка задачи.

ЗНП своим названием обязана следующей теоретико-множественной интерпретации. Даны множество $R = \{r_1, \dots, r_M\}$ и семейство $\varphi = \{S_1, \dots, S_N\}$ множеств $S_j \subset R$. Любое подсемейство $\varphi^l = \{S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_k}\}$ семейства φ , такое, что $\bigcup_{i=1}^k S_{j_i} = R$, (12) называется *покрытием множества R* , а множества S_{j_i} называются *покрывающими множествами*. Если в дополнение к соотношению (12) φ^l удовлетворяет условию

$$S_{j_h} \cap S_{j_l} = \emptyset, \forall h, l \in 1, \dots, k, h \neq l \quad (13)$$

т.е. множества S_{j_i} ($i = 1, \dots, k$) попарно не пересекаются, то φ^l называется *разбиением множества R* .

Если каждому $S_j \in \varphi$ поставлена в соответствие (положительная) стоимость c_j , то ЗНП формулируется так: найти покрытие множества R , имеющее наименьшую стоимость, причем стоимость семейства

$$\varphi^l = \{S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_k}\} \text{ определяется как } \sum_{i=1}^k c_{j_i}$$

Аналогично формулируется и *задача о наименьшем разбиении* (ЗНР). В матричной форме, упомянутой ранее, когда строки (МЧН)-матрицы $[t_{ij}]$, состоящей из нулей и единиц, покрываются столбцами, ЗНП может быть сформулирована как задача линейного программирования: минимизировать $z = \sum_{j=1}^N c_j \xi_j$

при ограничениях $\sum_{j=1}^N t_{ij} \xi_j \geq 1, i = 1, 2, \dots, M,$ (14)

где $c_j \geq 0$ и $\xi_j = \begin{cases} 1, \text{ если } S_j \in \varphi^l \\ 0, \text{ если } S_j \notin \varphi^l \end{cases}$

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } r_i \in S_j \\ 0, \text{ если } r_i \notin S_j \end{cases}$$

Для ЗНР неравенства (14) обращаются в равенства

$$\sum_{j=1}^N t_{ij} \xi_j = 1, i = 1, 2, \dots, M, \quad (15)$$

Упрощение задачи, определенные, хорошо известные заранее выводы и упрощения.

Например:

(1) если для некоторого элемента r_i из R справедливы соотношения $r_i \notin S_j \forall j = 1, \dots, N$ то r_i покрыть нельзя и, следовательно, задача не имеет решения;

(2) если $\exists r_i \in R$, такое, что $r_i \in S_k$ и $r_i \notin S_j \forall j \neq k$ то S_k должно присутствовать во всех решениях и задачу можно свести к «меньшей», положив $R = R - r_i$ и $\phi = \phi - S_k$

(3) пусть $V_i = \{j \mid r_i \in S_j\}$ тогда если $\exists p, q \in 1, \dots, M$ такие, что $V_p \subseteq V_q$, то r_p можно удалить из R , поскольку любое множество, которое покрывает r_p , должно также покрывать r_q , т.е. r_p доминирует над r_q ;

(4) если для некоторого семейства множеств $\phi \subset \phi$ справедливы соотношения $\bigcup_{S_j \in \phi} S_j \supseteq S_k$ и $\sum_{S_j \in \phi} c_j \leq c_k$ для любых $S_k \in \phi - \phi$ то S_k может быть вычеркнуто из ϕ , поскольку $\bigcup_{S_j \in \phi} S_j$ доминирует над S_k .

Предположим, что все эти упрощения выполнены (если они возможны) и что исходная ЗНР уже переформулирована в соответствующей неприводимой форме.

Другие задачи о покрытии графов.

Большое число задач теории графов можно сформулировать как ЗНП, хотя многие из них могут быть решены более эффективно с помощью иных теоретико-графовых средств, рассмотренных в других частях этой работы. В данном разделе мы хотим показать, как некоторые из этих задач связаны с ЗНП.

1. Наименьшее доминирующее множество. Как упоминалось ранее, задача о нахождении наименьшего доминирующего множества графа G является ЗНП с такой матрицей T , которая получается в результате транспонирования матрицы смежности графа G с единичными элементами на главной диагонали.

2. Наибольшее независимое множество. Один из способов нахождения наибольшего независимого множества вершин графа $G = (X, \Gamma)$ состоит в построении всех максимальных независимых множеств вершин и выборе из них множества с наибольшей мощностью. Другой способ таков: исходная задача интерпретируется как ЗНП, в которой столбцы матрицы T соответствуют вершинам графа G , а строки — ребрам, причем $t_{ij} = 1$, если вершина x_j инцидентна ребру a_i , и $t_{ij} = 0$ в противном случае.

Тогда очевидно, что если $\check{X} \subseteq X$ — множество столбцов в (наименьшем) решении рассматриваемой ЗНП, то множество $X - \check{X}$ является наибольшим независимым множеством графа G . Это справедливо потому, что если \check{X} — множество, покрывающее ребра графа G , то каждое ребро инцидентно по крайней мере одной вершине из \check{X} и, следовательно, никакие две вершины множества $X - \check{X}$ не могут быть смежными, т. е. $X - \check{X}$ — независимое множество. Более того, если $X - \check{X}$ является независимым, то каждое ребро графа инцидентно самое большее одной вершине из $X - \check{X}$ и, значит, \check{X} — множество, покрывающее ребра графа G . Отсюда следует, что дополнение каждого множества вершин, покрывающего ребра графа G , является независимым множеством, а поскольку \check{X} имеет

наименьшую возможную мощность, то $X - \check{X}$ есть наибольшее независимое множество.

3. Наименьшее покрытие и наибольшее паросочетание. То, что в литературе называют *наименьшим «покрытием»*, представляет собой множество E ребер графа $G = (X, A)$, такое, что каждая вершина графа G инцидентна по крайней мере одному ребру из E и мощность множества E — минимально возможная. Таким образом, поскольку E можно рассматривать как «доминирующее над вершинами» графа G , то множество E^* — наименьшее из таких множеств — можно назвать, согласно терминологии, использованной в этой главе, *наименьшим доминирующим множеством ребер*. Известна иная задача о нахождении наименьшего покрытия: нужно отыскать «специальное» множество M ребер графа G — в M не должно быть смежных ребер. Множество M называют *паросочетанием*, а множество M^* — с наибольшей мощностью — является *наибольшим паросочетанием*, его можно называть также *наибольшим независимым множеством ребер*. Эквивалентность задач о наибольшем паросочетании и о наименьшем покрытии рассматривается в разделе, посвященном изучению паросочетаний. Там устанавливается, в частности, следующее утверждение: пусть в наибольшем покрытии E^* степень вершины x_i есть $d^{E^*}(x_i)$ (рассматриваются только ребра из E^*), тогда, если для каждой вершины x_i с $d^{E^*}(x_i) > 1$ удалить $d^{E^*}(x_i) - 1$ ребер, инцидентных x_i , то оставшееся множество ребер образует наибольшее паросочетание. Обратно, если M^* есть наибольшее паросочетание и для каждой вершины x_i с $d^{M^*}(x_i) = 0$ добавляется ребро, инцидентное x_i , то получающееся множество ребер образует наименьшее покрытие.

Наибольшие паросочетания и наименьшие покрытия можно описать на «языке» ЗНП. В случае покрытий столбцы матрицы T представляют ребра графа G , а строки — его вершины, причем $t_{ij} = 1$, если вершина x_i инцидентна ребру a_j , а иначе $t_{ij} = 0$. Следовательно, матрица T в этом случае есть матрица инциденций графа G .

На рис. 51 показана диаграмма взаимосвязей между задачами, где дуга от задачи α к задаче β означает, что решение задачи α влечет за собой решение задачи β .

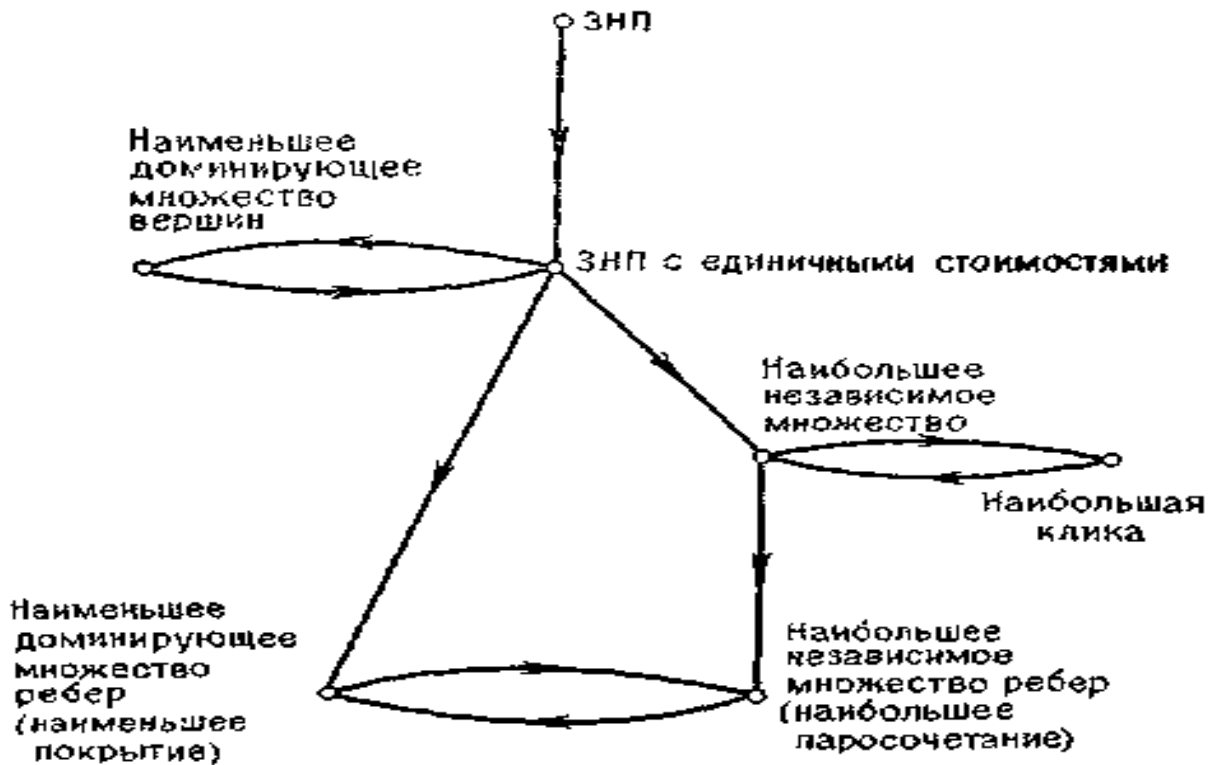


Рисунок 51 Диаграмма взаимосвязей между задачами.

Связь между наибольшими независимыми множествами вершин и наибольшими кликами устанавливается с помощью дополнительных графов, а между наибольшими независимыми множествами вершин и наибольшими паросочетаниями — с помощью реберных графов.

Устойчивость и покрытия.

В любом графе можно выделить совокупность некоторых множеств, объединяемых по какому-то признаку, например подмножеств вершин таких, что никакие две вершины одного и того же подмножества не смежны. Аналогично граф можно разбить на подмножества ребер таким образом, чтобы ребра одного подмножества были попарно не смежны. В общем случае число элементов в различных подмножествах различно и существует

подмножество, где число элементов принимает наибольшее значение. Поэтому можно ввести два инварианта графа для попарно несмежных вершин и попарно несмежных ребер.

Множество вершин называется *внутренне устойчивые*, если они попарно не смежны.

Внутренне устойчивое множество вершин называется *пустым подграфом*, если при добавлении хотя бы одной вершины, не принадлежащей этому множеству, образуется хотя бы одно ребро (дуга).

Максимальная мощность пустого подграфа графа G называется *числом внутренней устойчивости* или *вершинным числом независимости графа* $\varepsilon_0(G)$.

Максимальное число попарно несмежных ребер графа G называется *реберным числом независимости графа* $\varepsilon_1(G)$.

Если ребро инцидентно вершине, то говорят, что они покрывают друг друга. Множество вершин, покрывающих все ребра графа, называется *вершинным покрытием* графа G . Минимальная мощность вершинного покрытия называется *числом вершинного покрытия* графа $\pi_0(G)$. Аналогично, множество ребер, покрывающих все вершины графа G , называется *реберным покрытием* графа. Минимальная мощность реберного покрытия графа G называется *числом реберного покрытия* $\pi_1(G)$.

Условимся считать, что любая вершина графа покрывает сама себя и две смежные вершины покрывают друг друга. Тогда минимальная мощность множества вершин, покрывающих все вершины графа G , называется *вершинным числом внешней устойчивости графа* $\beta_0(G)$.

Аналогично будем считать, что каждое ребро графа покрывает себя и два смежных ребра покрывают друг друга; тогда минимальная мощность множества ребер, покрывающих все ребра графа G , называется *реберным числом внешней устойчивости* $\beta_1(G)$.

Вычисление рассмотренных инвариантов графа требуется при решении многих практических задач. Пусть, например, вершины графа представляют

собой технологические модули гибкого автоматизированного процесса, за которыми должно осуществляться непрерывное наблюдение, а две вершины графа соединены ребром, если соответствующие им модули можно наблюдать, находясь около одного из них. Требуется так расставить телекамеры, чтобы оператор, находящийся у монитора на диспетчерском пульте, мог наблюдать за всеми модулями, но при этом число телекамер было бы минимальным. Для решения этой задачи надо определить вершинное число внешней устойчивости данного графа.

Пример 44 Введенные инварианты для графа Петерсена G (см. рис. 52) имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 G &= 4, \quad 1,3,10,9 = 4; \quad \varepsilon_1 G = 5, \quad a,d,n,x,y = 5; \\ \pi_0 G &= 6, \quad 1,3,5,7,8,9 = 6; \quad \pi_1 G = 5, \quad k,m,n,p,r = 5; \\ \beta G &= 3, \quad 1,4,10 = 3; \quad \beta_1 G = 4, \quad a,c,x,u = 4. \end{aligned}$$

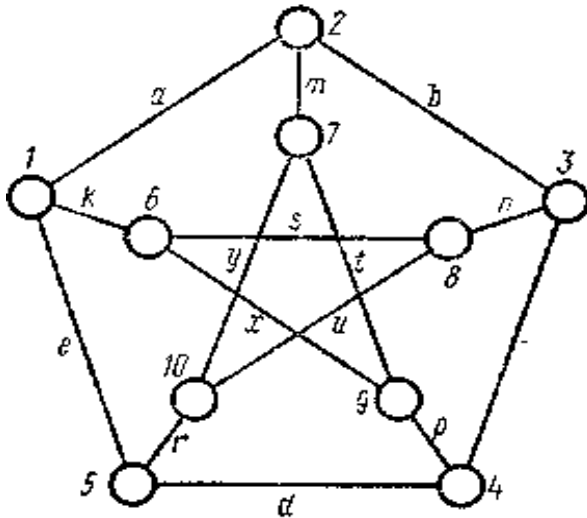


Рисунок 52

Теорема 27 Для любого нетривиального связного графа $G = (V, U)$

$$\varepsilon_0 G + \pi_0(G) = \varepsilon_1 G + \pi_1(G) = V$$

Множество ребер графа, в котором никакая пара ребер не смежна, называется *паросочетанием* графа. Множество ребер паросочетания, в

котором число ребер равно ε_1 , называется *наибольшим паросочетанием* графа.

Для двудольных графов справедлива следующая теорема о паросочетании.

Теорема 28 (теорема Кенига). Для двудольного графа G число ребер в наибольшем паросочетании равно числу вершинного покрытия, т. е. $\varepsilon_1 = \pi_0$.

Совершенным паросочетанием из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ называется взаимно однозначное соответствие между вершинами из V_1 и подмножеством вершин из V_2 , при котором каждая вершина из V_1 соединена ребром с некоторой вершиной из V_2 .

Понятие паросочетания в двудольном графе позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 29 (теорема Холла) Пусть $G = G(V_1, V_2)$ - двудольный граф и для любого подмножества $A \subset V_1$ пусть также $\varphi(A)$ — множество тех вершин из V_2 , которые смежны по крайней мере с одной вершиной из A . Тогда совершенное паросочетание из V_1 в V_2 существует тогда и только тогда, когда число элементов $|A| \leq |\varphi(A)|$ для каждого подмножества $A \in V_1$.

Рассмотрим выделение пустых подграфов $\{E_i\}$ в графе G . Окрестностью $G(v_0)$ вершины v_0 графа $G = \langle V, \Gamma \rangle$ называется подграф $\langle V_0, U_0 \rangle$, носитель которого совпадает с окрестностью единичного радиуса этой вершины, $V_0 = \Gamma v_0$, а сигнатуру U_0 образуют все ребра графа G , соединяющий вершины V_0 .

Неокрестностью $\bar{G}(v_0)$ вершины v_0 графа $G = \langle V, \Gamma \rangle$ называется подграф $\langle \bar{V}_0, \bar{U}_0 \rangle$, носитель которого $V_0 = v_i \ v_i \notin \Gamma v_0$ а сигнатура \bar{U}_0 состоит из всех ребер графа G , соединяющих вершины \bar{V} .

Теорема 30 Пустой подграф $G = \langle V, \Gamma \rangle$, не содержащий вершину $v_0 \in V$, содержит хотя бы одну вершину из ее окрестности.

Сведем выделение пустых подграфов в заданном графе G к построению дерева, в котором каждый путь между *висячей вершиной* и концом дуги, исходящей из корня, состоит из вершин, которые образуют пустой подграф, где под корнем понимается вершина, не являющаяся концом ни одной из дуг.

Согласно теореме это дерево строим следующим образом:

- 1) сопоставим корню дерева заданный граф;
- 2) фиксируем произвольную вершину v_0 заданного графа $G = \langle V, \Gamma \rangle$ и вершины ее окрестности V_0 . Взаимно однозначно сопоставим концу каждой дуги, исходящей из корня дерева, вершину из множества $\{v_0, V_0\}$;
- 3) каждый конец v_α построенных дуг взвесим неокрестностью $\bar{G}(v_\alpha)$ вершины v_α ;
- 4) считаем конец v_α построенного яруса корнем нового дерева.

Будем повторять п. 2) — 4) до тех пор, пока каждый конец построенных дуг не будет взвешен символом \emptyset . Этот символ означает отсутствие соответствующей неокрестности. Согласно теореме путь между концом дуги, исходящей из корня построенного дерева, и висячей вершиной, взвешенной символом \emptyset , состоит из вершин пустою графа.

1.18 Дифференцирование графов

Понятие производной в математическом анализе характеризует степень изменения функции при малом изменении ее аргумента, в основу понятия производной положено понятие предела. В дискретной математике отсутствует понятие предела, поэтому невозможно механически перенести понятие производной из непрерывной математики в дискретную. Для решения оптимизационных задач дискретной математики введем понятие производной, основанное на использовании понятия частоты букв в словах некоторой модели Ψ .

Перед формальным определением производной рассмотрим следующий пример. Пусть задан граф G (рис. 53, а) и нас интересует частота участия ребер в образовании остовов графа G .

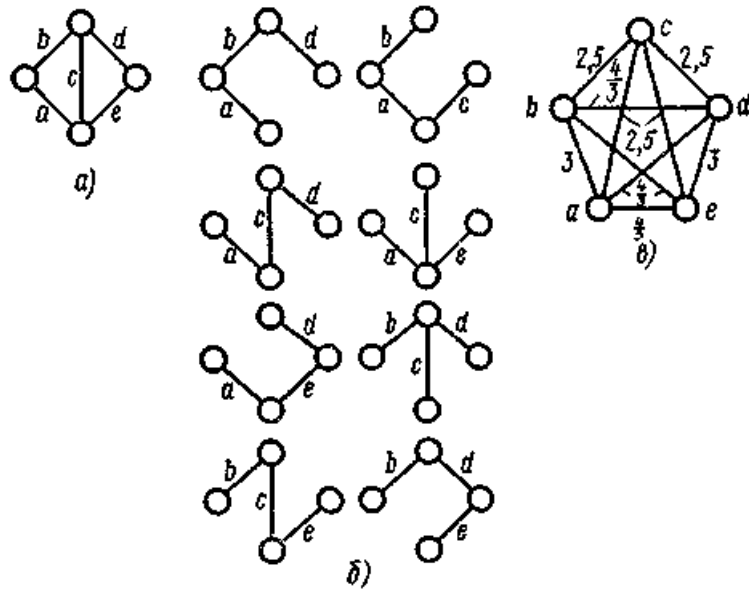


Рисунок 53

Граф G содержит 8 остовов (рис. 53, б) и искомую частоту можно характеризовать, например, числом вхождения каждого из ребер в эти остовы. Например, ребро a участвует 5 раз в образовании остовов, ребро c — 4 раза и т. д. Частота ребер будет характеризоваться более полно, если наряду с указанными выше числами вычислять числа, каждое из которых равно количеству остовов, в которых содержатся два зафиксированных ребра. Например, ребра a и b содержатся в двух остовах. Еще более точно искомая частота пары ребер ρ_i и ρ_j определяется отношением числа остовов, которые содержат ребро ρ_i или ρ_j , но не содержат их одновременно, к числу остовов, содержащих как ребро ρ_i , так и ребро ρ_j : $(f_i - f_{ij} + f_j)/f_{ij}$, где f_i , f_j , f_{ij} — количества остовов графа, в которые вошли ребра ρ_i , ρ_j , ρ_i и ρ_j соответственно. Это отношение показывает степень неравномерности участия пар ребер в образовании остовов графа.

Условимся в дальнейшем исследуемый процесс называть событием S , происходящим при выполнении определенных условий. В рассматриваемом

примере событием S является «образование множеством ребер остова графа G », а условиями - вхождение ребер графа в данное множество. Событие S может быть задано соответствующим предикатом.

Каждое событие определяет некоторую двумерную двоичную матрицу $Q=[q_{ij}]_{T \times Ч_n}$, каждому столбцу которой взаимно однозначно соответствует условие, входящее в событие, строке — совокупность условий, при которых событие имеет место (при которых событие истинно), и

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j - \text{е условие входит в } i - \text{ю совокупность условий,} \\ & \text{при которых событие истинно;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Другими словами, каждое событие определяет модель, матрицей инцидентности которой является матрица Q , т.е. условия, входящие в событие, являются буквами модели; совокупности условий, при которых событие истинно,— словами модели.

Интенсивность участия условий (букв) в событиях (словах) будем характеризовать с помощью частот их вхождения. Для этого введем частотную матрицу отношений $F=[f_{ij}]_{n \times Ч_n}$, характеризующую модель Ψ , матрица инцидентности которой есть $Q(\Psi) = [q_{ij}]_{T \times Ч_n}$.

Частотной матрицей отношений $F=[f_{ij}]_{n \times Ч_n}$ называется матрица, каждой строке (столбцу) которой взаимно однозначно соответствует буква, и элемент f_{ij} равен числу слов, в которые входят буквы i и j , если $i \neq j$, в противном случае ($i = j$) — числу слов, в которые входит буква i . При этом если $i = j$, то f_i — собственная частота буквы, если же $i \neq j$, то f_{ij} — взаимная частота букв i и j .

Из определения частотной матрицы отношений $F=[f_{ij}]_{n \times Ч_n}$ следует, что она симметрична относительно главной диагонали, т.е. $f_{ij}=f_{ji}$, и что собственная частота любой буквы не меньше взаимной частоты этой буквы с любой другой буквой: $f_i \geq f_{ij}$. Можно показать, что частотная матрица

отношений F , характеризующая модели, матрица инцидентности которой Q , удовлетворяет соотношению $Q^T C Q = F$,

где Q^T - транспонированная матрица.

Определим степень участия компонент графа G в наперед заданном событии S в графе G , другими словами, степень неоднородности компонент графа относительно заданного события. Будем характеризовать эту неоднородность производной $\partial G / \partial S$ графа G по событию S .

Определение 94 Производной $\partial G / \partial S$ графа G по событию S называется неориентированный взвешенный граф $\langle V, (U, P) \rangle$, носитель которого совпадает с носителем модели, определяемой этим событием, и пара вершин (v_i, v_j) взвешена отношением частоты $(f_i - f_{ij}) + (f_j - f_{ij})$ их несовместного участия к частоте f_{ij} совместного участия в событии S : $\frac{\partial G}{\partial S} v_i, v_j = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}}$.
Значение выражения называется значением производной на ребре v_i, v_j .

Причем

$$v_i, v_j \notin U, \text{ если } \frac{\partial G}{\partial S} v_i, v_j = \infty;$$

$$v_i, v_j \in U, \text{ если } \frac{\partial G}{\partial S} v_i, v_j - \text{конечная величина, отличная от нуля};$$

$$v_i = v_j, \text{ если } \frac{\partial G}{\partial S} v_i, v_j = 0.$$

Проиллюстрируем понятие производной от графа по событию на двух примерах.

Пример 45 Пусть заданы граф G (рис. 53, а) и событие S — «образование ребрами остова графа G ». Найдем производную от графа G по событию S , которая будет характеризовать интенсивность участия ребер в образовании остовов графа G .

Заданное событие определяет модель, матрица инцидентности которой имеет следующей вид:

$$Q = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

В этой матрице каждому столбцу взаимно однозначно соответствует ребро графа G (условие, входящее в событие), строке - совокупность ребер, образующих остов графа (совокупность условий, при которых заданное событие имеет место) (рис. 53, б).

Частотная матрица отношений F , соответствующая матрице Q ,

$$F = Q^T \times Q = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline & 5 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ & 2 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ & 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \end{array}$$

Элементы этой матрицы определяют $\frac{\partial G}{\partial S}$, представляющую собой граф, носитель которого - $\{a,b,c,d,e\}$, и две вершины этого графа смежны, если значение производной на дуге, образуемой этими вершинами, отлично от нуля и бесконечности. Вычисляя значения производной на ребрах графа $\frac{\partial G}{\partial S}$:

$$\frac{\partial G}{\partial S} \quad a, b = \frac{f_a - 2f_{ab} + f_b}{f_{ab}} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 5}{2} = 3$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} \quad a, c = \frac{f_a - 2f_{ac} + f_c}{f_{ac}} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 4}{2} = 2,5$$

.....

$$\frac{\partial G}{\partial S} \quad d, e = \frac{f_d - 2f_{de} + f_e}{f_{de}} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 5}{2} = 3$$

- получаем граф $\frac{\partial G}{\partial S}$ (рис. 53, в).

Пример 46 Рассмотрим граф G (рис. 54, а), на котором задано событие S - «образование ребрами базисного цикла относительно остова G' (рис. 54, б) графа G ».

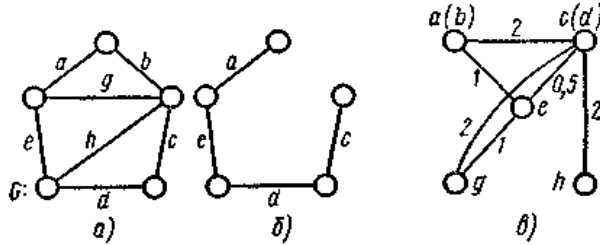


Рисунок 54

Вычислим производную от графа G по событию S .

Цикломатическое число $\nu(G)$ графа G равно 3: $\nu(G) = m - n + k = 7 - 5 + 1 = 3$.

Следовательно, граф содержит три базисных цикла. Событие S

определяет модель вида: $Q = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & g & h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Этой модели соответствует частотная матрица отношений

$$F = Q^T \times Q = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & g & h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & d \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & g \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & h \end{vmatrix}$$

Вычисляя значение производной, получаем граф $\frac{\partial G}{\partial S}$ (рис. 54, в).

Анализируя граф $\frac{\partial G}{\partial S}$, замечаем, например, что ребра c и d (a и b) одинаково интенсивно участвуют в заданном событии.

Таким образом, для определения производной от графа G по событию S необходимо:

- а) построить модель, определяемую заданным событием;
- б) найти частотную матрицу отношений, соответствующую этой модели;
- в) вычисляя по частотной матрице отношений значения производной на ребрах графа $\frac{\partial G}{\partial S}$, построить искомый граф $\frac{\partial G}{\partial S}$, характеризующий интенсивность участия элементов графа G в заданном событии S .

Определение 95 Производной $\frac{\partial G}{\partial S}$ k -го порядка по событию S называется производная от производной $(k - 1)$ -го порядка по тому же событию S : $\frac{\partial^k G}{\partial S^k} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial^{k-1} G}{\partial S^{k-1}} \right)$.

Определение 96 Смешанной производной по событиям S_a и S_b называется производная по событию S_a от производной по событию S_b :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S_a \partial S_b} = \frac{\partial}{\partial S_a} \left(\frac{\partial G}{\partial S_b} \right).$$

Аналогично определяются смешанные производные от графа G по событиям S_1, S_2, \dots, S_n .

2. Применение теории графов

2.1 Графы и информация

Двоичные деревья играют весьма важную роль в теории информации. Предположим, что определенное число сообщений требуется закодировать в виде конечных последовательностей различной длины, состоящих из нулей и единиц. Если вероятности кодовых слов заданы, то наилучшим считается код, в котором средняя длина слов минимальна по сравнению с прочими распределениями вероятности. Задачу о построении такого оптимального кода позволяет решить алгоритм Хаффмана. Двоичные кодовые деревья допускают интерпретацию в рамках теории поиска. Каждой вершине при этом сопоставляется вопрос, ответить на который можно либо «да», либо «нет». Утвердительному и отрицательному ответу соответствуют два ребра, выходящие из вершины. «Опрос» завершается, когда удастся установить то, что требовалось. Таким образом, если кому-то понадобится взять интервью у различных людей, и ответ на очередной вопрос будет зависеть от заранее неизвестного ответа на предыдущий вопрос, то план такого интервью можно представить в виде двоичного дерева.

2.2 Графы и химия

Еще А. Кэли рассмотрел задачу о возможных структурах насыщенных (или предельных) углеводородов, молекулы которых задаются формулой: $C_n H_{2n+2}$

Все атомы углеводорода четырехвалентны, все атомы водорода одновалентны. Молекула каждого предельного углеводорода представляет собой дерево. Если удалить все атомы водорода, то оставшиеся атомы углеводорода также будут образовывать дерево, каждая вершина которого имеет степень не выше 4. Следовательно, число возможных структур предельных углеводородов, т.е. число гомологов данного вещества, равно числу деревьев с вершинами степени не больше четырех. Таким образом,

подсчет числа гомологов предельных углеводородов также приводит к задаче о перечислении деревьев определенного типа. Эту задачу и ее обобщения рассмотрел Д. Пойа. Приведем следующий пример. Насыщенным углеводородом называется соединение атома углерода C , имеющего валентность 4, и водорода H , имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода. Рассмотрим граф, в котором вершинами являются атомы, а ребрами – соответствующие валентные связи между ними. Покажем от противного, что в графе не существует цикла, то есть возможности, переходя по ребрам графа из вершины в вершину, вернуться в исходную вершину. Если цикл есть, то должен быть составлен из атомов углерода, поскольку водород имеет валентность 1 и может соединяться только с одним атомом. В случае существования цикла разорвем связь между двумя атомами углерода и присоединим к каждому из них еще по атому водорода. Число атомов водорода увеличится, значит, исходный граф описывал не молекулу насыщенного углеводорода.

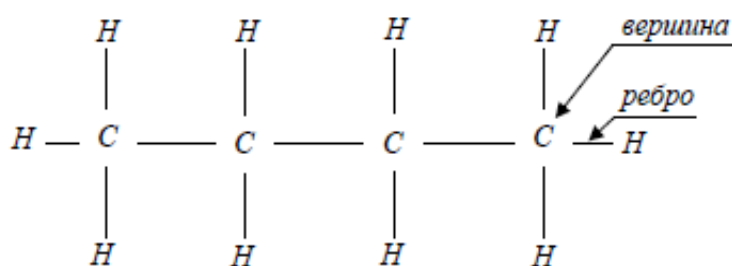


Рисунок 55

В построенном графе можно перейти по ребрам от любой вершины к любой другой, и в нем нет циклов. Такой граф называется деревом. Пусть молекула содержит n атомов углерода и m атомов водорода, тогда граф будет содержать $n + m$ вершин. Далее воспользуемся соотношением: в дереве число ребер на единицу меньше числа вершин. Следовательно, в графе $n + m - 1$ ребер. Из вершин графа, обозначающих атомы углерода, выходит по 4 ребра, а из вершин, обозначающих атомы водорода, – одно. Используя простой

факт, что сумма степеней вершин, то есть сумма числа ребер, выходящих из вершин, равна удвоенному числу ребер (это утверждение очевидно, поскольку каждое ребро соединяет ровно 2 вершины, и называется леммой о рукопожатиях), можно написать соотношения: $4n + m = 2(n + m - 1)$. Отсюда получаем, что $m = 2n + 2$. Следовательно, формула насыщенного углеводорода, имеющего n атомов углерода: $C_n H_{2n + 2}$.

2.3 Графы и биология

Деревья играют большую роль в биологической теории ветвящихся процессов. Для простоты мы рассмотрим только одну разновидность ветвящихся процессов – размножение бактерий. Предположим, что через определенный промежуток времени каждая бактерия либо делится на две новые, либо погибает. Тогда для потомства одной бактерии мы получим двоичное дерево.

Нас будет интересовать лишь один вопрос: в скольких случаях n -е поколение одной бактерии насчитывает ровно k потомков? Рекуррентное соотношение, обозначающее число необходимых случаев, известно в биологии под названием процесса Гальтона-Ватсона. Его можно рассматривать как частный случай многих общих формул.

2.4 Графы и физика

Еще недавно одной из наиболее сложных и утомительных задач для радиолюбителей было конструирование печатных схем. Печатной схемой называют пластинку из какого-либо диэлектрика (изолирующего материала), на которой в виде металлических полосок вытравлены дорожки. Пересекаться дорожки могут только в определенных точках, куда устанавливаются необходимые элементы (диоды, триоды, резисторы и другие), их пересечение в других местах вызовет замыкание электрической цепи. В ходе решения этой задачи необходимо вычертить плоский граф, с вершинами в указанных точках.

2.5 Графы и экономика

Теория графов находит применение в различных областях современной математики и ее многочисленных приложений, в особенности это относится к экономике, например, когда надо выбрать наилучшие варианты развозки товаров по магазинам, строительных материалов. При составлении больших проектов, содержащих различные виды работ, часто возникает ситуация, когда ту или иную работу можно начать лишь по окончании других. Так, при строительстве дома нельзя приступить к отделочным работам, пока не возведены стены, и нельзя возводить стены до укладки фундамента. Последовательность работ изображается в виде сетевых графиков. Они применяются при планировании деятельности предприятия. Например, зная дату начала строительства и время, необходимое для выполнения каждой работы, можно выяснить, к какому сроку следует подвезти материалы или пригласить бригады специалистов: плотников, маляров, электриков и т. д. Сетевые графики используют не только строители, но и конструкторы машин с большим количеством узлов и деталей, диспетчеры железных дорог и многие другие специалисты. Рассмотрим применение графа в строительстве (рис. 56).

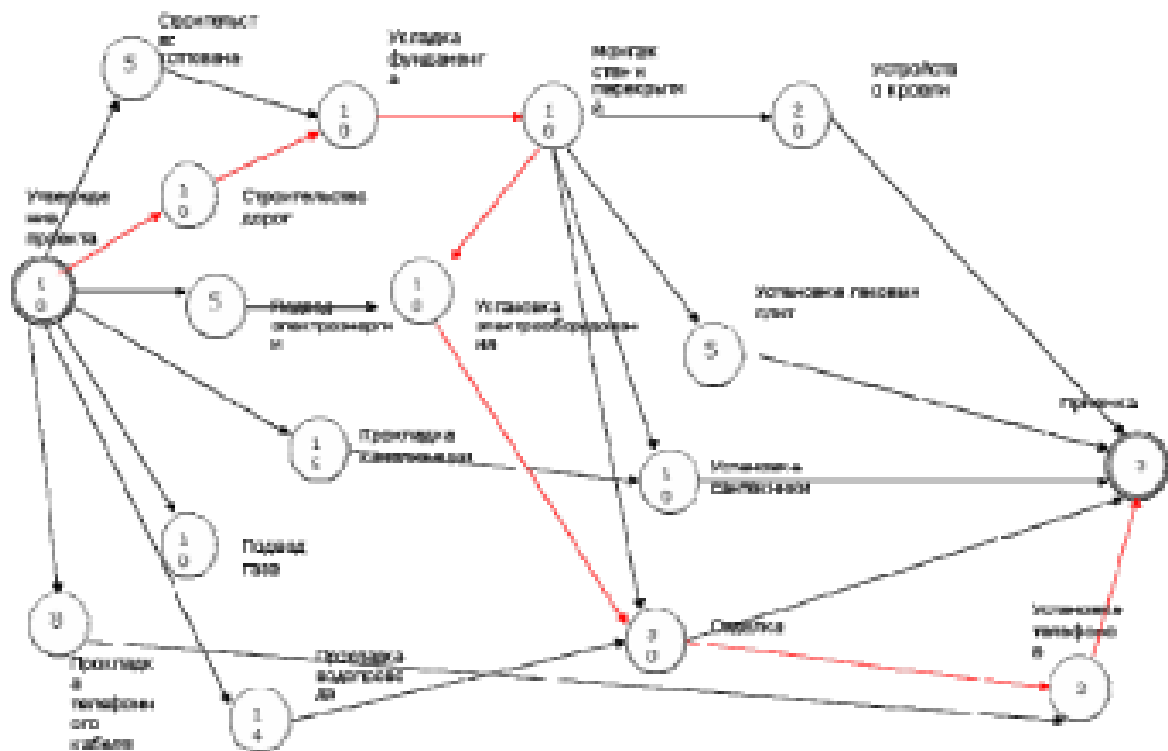


Рисунок 56 Железные дороги

Предполагается проложить железную дорогу, которая соединит несколько крупных городов. Для любой пары городов известна стоимость прокладки пути между ними. Требуется найти наиболее дешевый вариант строительства. Интересно, что алгоритм нахождения оптимального варианта строительства довольно прост (чего нельзя сказать о других задачах теории графов). Продемонстрируем его на примере дороги, соединяющей пять городов: А, В, С, D и E. Стоимость прокладки пути между каждой парой городов указана в таблице 1

Таблица 1

| | A | B | C | D | E |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| A | | 1,5 | 1 | 2 | 2,5 |
| B | 1,5 | | 1,2 | 3 | 0,8 |
| C | 1 | 1,2 | | 1,1 | 0,9 |
| D | 2 | 3 | 1,1 | | 2,7 |
| E | 2,5 | 0,8 | 0,9 | 2,7 | |

Сначала строим ту дорогу, которая имеет наименьшую стоимость. В нашем случае это маршрут В – Е. теперь найдем самую дешевую линию, соединяющую город В или Е с каким-то из остальных городов. Это путь между Е и С. Включаем его в схему. Далее поступаем аналогично – ищем самый дешевый из путей, соединяющих один из городов В, С, Е с одним из оставшихся – А или D. Дешевле всего соединить его с С. Получим сеть, изображенную на рисунке 57.

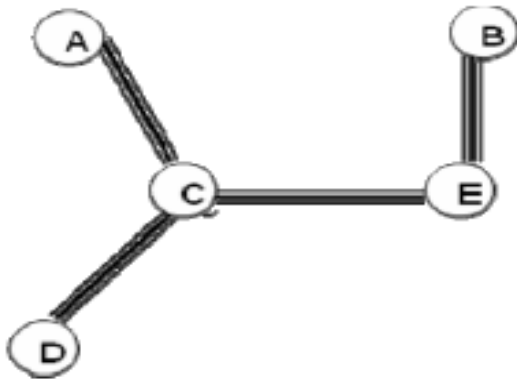


Рисунок 57

Описанный алгоритм относится к категории «жадных»: на каждом шаге мы выбираем самое дешевое продолжение пути.

Список использованных источников

- 1 Березина, Л. Ю. Графы и их применение: популярная книга для школьников и преподавателей / Л. Ю. Березина. – 2-е изд. испр. и доп. – Москва: ЛИБРОКОМ, 2009. – 146 с.
- 2 Гаврилов, Г. П. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики: учебное пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – М.: Физматлит, 2003.
- 3 Галушкина, Ю.И. Конспект лекций по дискретной математике /Ю.И. Галушкина. – М.: Айрис–пресс, 2007.
- 4 Гладких, О.Б. Основные понятия теории графов: учебное пособие / О.Б Гладких, О. Н. Белых. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2008. – 175 с.
- 5 Горбатов, В.А Дискретная математика: учебник для студентов вузов/ В.А. Горбатов, А.В. Горбатов, М.В. Горбатова – Москва: АСТ, Астрель, 2003. – 447с.
- 6 Иванов, Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Издательство: Физматлит, 2007. – 408 с. ISBN – 978-5-9221-0787-7
- 7 Кононюк А. Е. Дискретно-непрерывная математика. Графы: Ч.4. учебное пособие / А.Е. Кононюк. – К.: Освіта України, 2015. – 494с.
- 8 Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. – 3-е изд., Санкт Петербург. – Лань, 2004. – 394 с.
- 9 Молчанов, В. А. Дискретная математика: учебное пособие / В.А. Молчанов. – Саратов, 2013. – 132 с.
- 10 Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов: учебник для вузов / Ф.А. Новиков. – 3-е изд. – М.: Питер, 2009.
- 11 Судоплатов, С.В. Дискретная математика / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: ИНФРА–М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.
- 12 Хаггарт, Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарт. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2005. – 320 с.