

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Оренбургский государственный университет»

Кафедра механики материалов, конструкций и машин

# **ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА**

Методические указания

Составители: А.А. Гаврилов, Н.А. Морозов

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки»

Оренбург  
2020

УДК 531.3 (075.8)

ББК 22.213 я73

П 75

Рецензент – доцент, кандидат технических наук Е.В. Дырдина

П 75 **Применение принципа Даламбера:** методические указания / составители А. А. Гаврилов, Н.А. Морозов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2020. – 28 с.

Методические указания содержат варианты заданий и примеры решения задач динамики по применению принципу Даламбера.

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся направлений подготовки, входящих в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки» по дисциплинам «Теоретическая механика», «Механика» и «Динамика механических систем».

УДК 531.3 (075.8)

ББК 22.213 я73

© Гаврилов А.А.,  
Морозов Н.А.,  
составление, 2020

© ОГУ, 2020

## Содержание

Введение.....	4
1 Краткие теоретические сведения.....	5
1.1 Принцип Даламбера.....	5
1.2 Рекомендации к решению задач.....	7
1.3 Вопросы для самоконтроля.....	8
2 Постановка задачи и исходные данные.....	9
3 Пример выполнения задачи.....	11
3.1 Исходные данные.....	11
3.2 Порядок выполнения.....	12
3.2.1 Кинематический анализ системы.....	12
3.2.2 Определение действующих на систему сил.....	14
3.2.3 Составление и решение уравнений равновесия.....	16
3.2.4 Определение оставшихся реакций.....	20
3.2.5 Проверка решения задачи.....	20
4 Решение системы уравнений при помощи пакета MathCad.....	22
5 Частные случаи при определении направлений и значений силы трения скольжения.....	24
5.1 Выбор направления силы трения.....	24
5.2 Случай, когда полученное значение силы трения превышает предельное значение.....	26
Список использованных источников.....	28

## Введение

Традиционно в качестве основных разделов теоретической механики выделяются статика, кинематика и динамика. Зачастую дополнительно выделяется аналитическая механика.

При решении задач динамики обучающиеся часто сталкиваются со сложностями в выборе из обилия теорем и формул, которые необходимо использовать в конкретной задаче. Гораздо более простыми в этом отношении являются задачи статики, количество используемых формул в которых крайне невелико.

Использование принципа Даламбера позволяет решать различные задачи динамики, используя принципы и подходы статики, что обычно существенно упрощает решение.

Кроме того, данный принцип, который еще называют принципом кинестатики, часто используется для решения прикладных задач, что не требует глубоких знаний теорем динамики.

Целью данных методических указаний является формирование у обучающихся навыков применения принципа Даламбера, которые, в том числе, включают выбор объекта исследования, определение сил инерции при различных видах движения, составление уравнений равновесия. Дополнительно в методических указаниях рассматриваются варианты наличия и отсутствия проскальзывания при качении и связанные с этим особенности решения задач.

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся направлений подготовки, входящих в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки» по дисциплинам «Теоретическая механика», «Механика» и «Динамика механических систем».

# 1 Краткие теоретические сведения

## 1.1 Принцип Даламбера

Принцип Даламбера: если к действующим на систему активным силам и реакциям связей приложить главный вектор и главный момент сил инерции, то система будет находиться в равновесии [1, 2].

Применение этого принципа позволяет решать задачи динамики с использованием подходов статики. Поэтому данный принцип называют также принципом кинетостатики.

Например, при изучение равновесия систем сил можно использовать равенство нулю главного вектора и главного момента системы:

$$\begin{aligned}\sum \bar{F}_k^a + \sum \bar{N}_k + \bar{F}^u &= 0, \\ \sum \bar{m}_O \bar{F}_k^a + \sum \bar{m}_O (\bar{N}_k) + \bar{M}_O^u &= 0,\end{aligned}$$

где  $\sum \bar{F}_k^a$  и  $\sum \bar{m}_O \bar{F}_k^a$  – главный вектор и главный момент активных сил, действующих на точки системы;

$\bar{F}^u$  и  $\bar{M}_O^u$  – главный вектор и главный момент сил инерции;

$\sum \bar{N}_k$  и  $\sum \bar{m}_O \bar{N}_k$  – главный вектор и главный момент реакций опор, действующих на точки системы.

Сила инерции точки массой  $m$ , движущейся с ускорением  $\bar{a}$ , называется векторная величина, определяемая формулой

$$\bar{F}^u = -m\bar{a}.$$

Сила инерции прикладывается в точке в направлении, противоположном ускорению.

Главным вектором сил инерции называется геометрическая сумма сил инерции всех точек системы:

$$\bar{F}^u = \sum \bar{F}_k^u = -\sum m_k \bar{a}_k = -M \bar{a}_c,$$

где  $M$  – масса системы;

$\bar{a}_c$  – ускорение центра масс.

Главным моментом сил инерции называется геометрическая сумма моментов всех сил инерции относительно выбранного центра:

$$\bar{M}_O^u = \sum \bar{m}_O \bar{F}_k^u = -\sum \bar{m}_O m_k \bar{a}_k = -\frac{d\bar{K}_O}{dt},$$

где  $\bar{K}_O$  – момент количества движения системы.

В некоторых частных случаях главный вектор и главный момент могут быть определены по следующим правилам.

1) Поступательное движение. Силы инерции сводятся к одной силе (равнодействующей), приложенной в центре тяжести тела и направленной в сторону, противоположную ускорению тела  $\bar{a}$ . По модулю сила инерции имеет значение, определяемое формулой:

$$F^u = Ma.$$

2) Вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр тяжести. Силы инерции будут сведены к паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon$ . Значение момента пары относительно оси вращения:

$$M_z^u = J_z \varepsilon,$$

где  $J_z$  – момент инерции блока относительно оси вращения.

3) Плоскопараллельное движение. Силы инерции будут сведены к силе, приложенной в центре тяжести и направленной противоположно ускорению центра тяжести  $\bar{a}_C$ , и паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon$ . Значения силы и момента пары:

$$F^u = Ma_C;$$

$$M_{C\xi}^u = J_{C\xi}\varepsilon,$$

где  $J_{C\xi}$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести.

## 1.2 Рекомендации к решению задач

Для решения задачи по изучению движения систем с использованием принципа Даламбера необходимо использовать следующий порядок:

- 1) проводится кинематический анализ системы, то есть устанавливаются зависимости между скоростями точек системы;
- 2) при рассмотрении каждого тела системы прикладываются активные силы, реакции связей и силы инерции, определяются значения этих сил;
- 3) составляются уравнения равновесия для каждого тела системы, а затем решаются относительно неизвестных;
- 4) определяются оставшиеся неизвестные задачи или, при необходимости, корректируются предпосылки, сделанные в решении;
- 5) проверяется правильность решения задачи рассмотрением равновесия системы в целом.

### 1.3 Вопросы для самоконтроля

- 1 Как формулируется принцип Даламбера?
- 2 Как определяется сила инерции для материальной точки?
- 3 Что такое главный вектор сил инерции?
- 4 Что такое главный момент сил инерции?
- 5 Чему равны и как приложены главный вектор и главный момент при поступательном движении тела?
- 6 Чему равны и как приложены главный вектор и главный момент при вращательном движении тела?
- 7 Чему равны и как приложены главный вектор и главный момент при плоскопараллельном движении тела?
- 8 Какие уравнения равновесия составляются для различных систем сил?
- 9 Как определяется сила трения скольжения при движении и при равновесии тела?
- 10 Как описывается трение качения?
- 11 С какой целью проводится кинематический анализ?



## 2 Постановка задачи и исходные данные

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел, движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен  $f$ , коэффициент трения при качении равен  $\delta$ .

Пользуясь принципом Даламбера, определить ускорение тела  $1$ , а также натяжения нитей между телами и реакции опор.

Исходные данные для работы формируются по номеру варианта: первая цифра варианта – номер строки с данными из таблицы 1 задания, вторая цифра варианта – номер схемы задания из рисунка 1. Номера вариантов выдаются преподавателем в начале семестра.

Принять при расчетах  $m = 1,02$  кг,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>. Если значение  $i_{3\xi}$  для катка не задано, то считать его однородным круглым цилиндром.

Таблица 1 – Исходные данные задания

Первая цифра варианта	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$r_2/R_2$	$i_{2x}/R_2$	$\delta/R_3$	$R_3$ , см	$f$	$\alpha$ , град
0	3m	m	m	0,5	0,8	0,01	20	0,2	30
1	4m	2m	m	0,2	0,9	0,02	25	0,1	60
2	5m	3m	3m	0,6	0,8	0,025	50	0,25	30
3	2m	m	m/2	0,5	0,7	0,03	30	0,4	30
4	m	2m	m/5	0,4	0,7	0,01	28	0	60
5	4m	3m	2m	0,8	0,8	0,02	35	0,3	30
6	2m	m	m	0,3	0,9	0,03	25	0,2	45
7	3m	2m	1,5m	0,2	0,6	0,025	20	0,1	60
8	m	m	m	0,5	0,7	0,01	40	0,25	45
9	5m	2m	4m	0,6	0,8	0,02	45	0,3	30

П р и м е ч а н и е – Некоторые значения из таблицы для конкретной схемы могут не использоваться, например, для схемы 5 не используются значения  $\delta/R_3$ ,  $f$ ,  $\alpha$ .

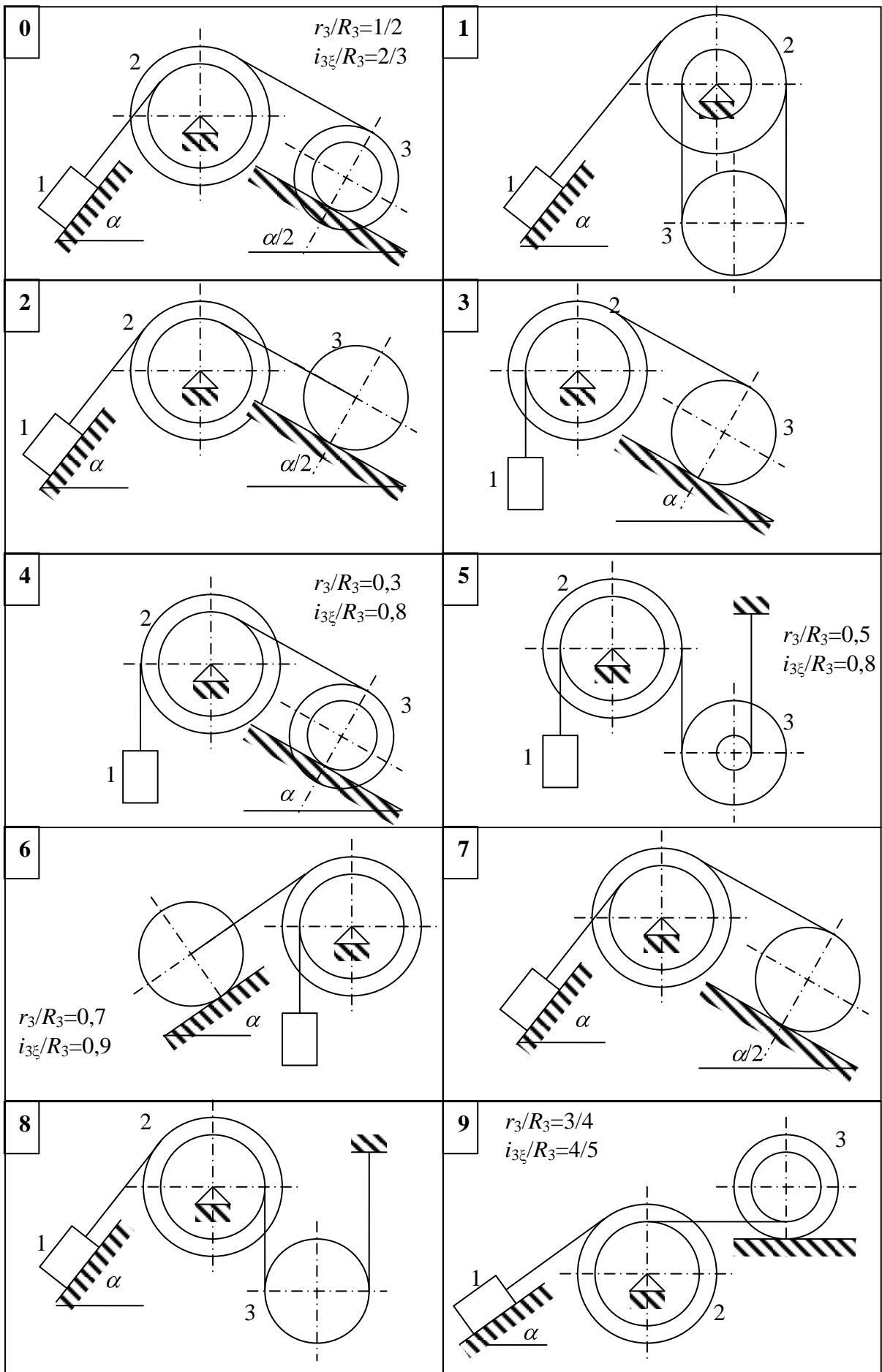


Рисунок 1 – Исходные схемы заданий

### 3 Пример выполнения задачи

#### 3.1 Исходные данные

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел (рисунок 2), движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен  $f$ , коэффициент трения при качении равен  $\delta$ . Исходные данные для примера приведены в таблице 2.

Пользуясь принципом Даламбера определить ускорение тела 1, а также натяжения нитей между телами и реакции опор.

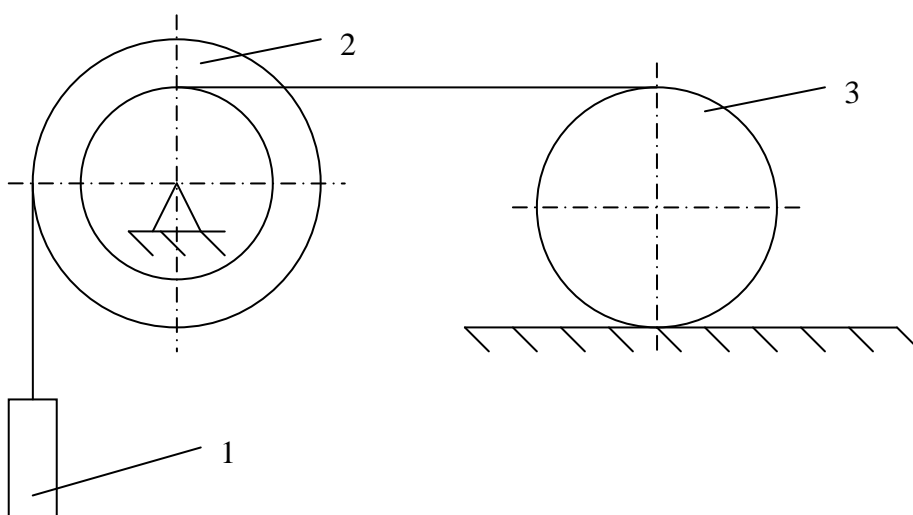


Рисунок 2 – Исходная схема для примера

Таблица 2 – Исходные данные для примера задания

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$r_2/R_2$	$i_{2x}/R_2$	$\delta/R_3$	$R_3, \text{ см}$	$f$
5m	m	2m	2/3	4/5	1/20	20	0,1

## 3.2 Порядок выполнения

### 3.2.1 Кинематический анализ системы

Установим зависимость между кинематическими характеристиками тел системы [2, с.158-175] и выразим все характеристики через характеристики движения тела 1, для этого составим уравнения связей.

Расположение тел системы и сведения о том, что движение начинается из состояния покоя, позволяют утверждать, что вектор скорости тела 1 будет направлен вниз. В случае, если направление движения было выбрано неверно, далее в п. 3.2.3 будет получено отрицательное значение ускорения, и в решение задачи необходимо внести правки.

Выразим скорости точек *A* и *B* блока через угловую скорость блока (рисунок 3):

$$v_A = \omega_2 R_2, \quad (1)$$

$$v_B = \omega_2 r_2. \quad (2)$$

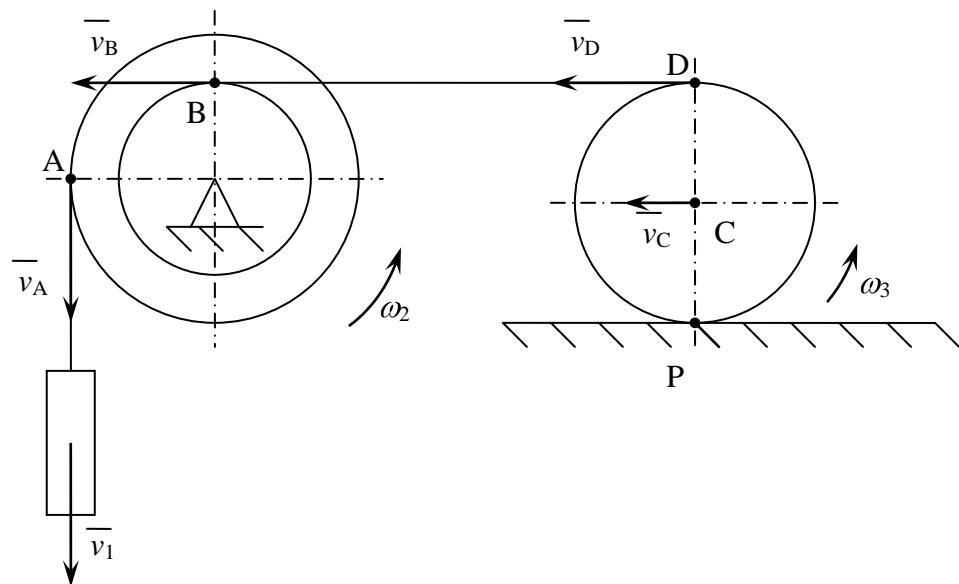


Рисунок 3 – Расчетная схема системы

В условии задачи не оговаривается отсутствие или наличие проскальзывания при движении катка. Поэтому на первом этапе решения будем считать, что проскальзывание отсутствует. Тогда мгновенный центр скоростей (МЦС) плоскодвижущегося катка находится в точке соприкосновения катка и неподвижной поверхности. В дальнейшем (в п. 3.2.4) можно будет проверить, правильна ли сделанная предпосылка, и, при необходимости, решение должно быть скорректировано с этого момента.

Скорости точек  $C$  и  $D$  катка равны

$$v_C = \omega_3 R_3, \quad (3)$$

$$v_D = \omega_3 \cdot 2R_3. \quad (4)$$

Скорости груза и точки  $A$  блока равны, откуда

$$v_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}. \quad (5)$$

Скорости точек  $B$  блока и  $D$  катка равны

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 \cdot 2R_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{2R_3} = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3}, \quad (6)$$

$$v_C = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} R_3 = \frac{v_1 r_2}{2R_2}. \quad (7)$$

Уравнения (5) – (7) являются уравнениями связи для системы груз – блок – каток. Установим зависимости между ускорениями

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1}{R_2} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{dv_1}{dt} = \frac{a_1}{R_2}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} \right) = \frac{a_1 r_2}{2R_2 R_3}, \quad (9)$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = R_3 \frac{d\omega_3}{dt} = R_3 \varepsilon_3 = \frac{a_1 r_2}{2R_2}. \quad (10)$$

### 3.2.2 Определение действующих на систему сил

Рассматривая каждое тело в отдельности, прикладываем к ним активные силы, реакции связей и силы инерции.

1) Активной силой, действующей на тело 1 является сила тяжести  $\bar{G}_1$  ( $G_1 = m_1 g$ ), приложенная в центре тяжести и направленная вертикально вниз (рисунок 4 а). Связью для тела является нить, на которой тело подвешено. Реакцию  $\bar{S}_{12}$  направляем вдоль нити. Так как тело движется поступательно, то силы инерции будут сведены к одной силе (равнодействующей), приложенной в центре тяжести тела и направленной в сторону, противоположную ускорению тела  $\bar{a}_1$ . Ускорение направлено в ту же сторону, что и скорость, так как движение начинается из состояния покоя, то есть является ускоренным. По модулю сила инерции имеет значение, определяемое формулой:

$$F_1^u = m_1 a_1. \quad (11)$$

2) Активной силой, действующей на тело 2, также является сила тяжести  $\bar{G}_2$  ( $G_2 = m_2 g$ ), приложенная в центре блока и направленная вертикально вниз (рисунок 4 б). Связями для тела являются:

– реакция неподвижного шарнира  $\bar{R}_2$  (рисунок 4 в), которую можно представить как сумму двух составляющих по осям координат  $\bar{R}_2 = \bar{R}_{2x_1} + \bar{R}_{2y_1}$ ;

– натяжения нитей между телами 2 и 1  $\bar{S}_{12}$  ( $\bar{S}_{21}$ ) и телами 2 и 3  $\bar{S}_{23}$ , эти реакции направляются вдоль нитей.

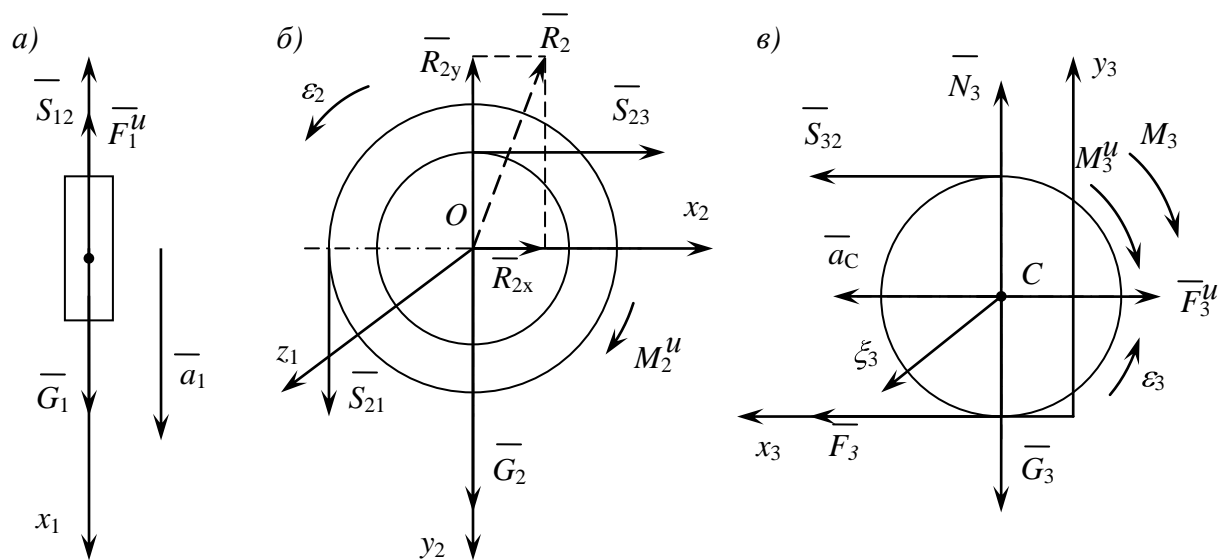


Рисунок 4 – Расчетные схемы тел системы

Так как тело вращается, то силы инерции будут сведены к паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon_2$ . Значение момента пары:

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2, \quad (12)$$

где  $J_2 = m_2 i_{2z}^2$  – момент инерции блока относительно оси вращения.

3) Активной силой, действующей на тело 3 также является сила тяжести  $\bar{G}_3$  ( $G_3 = m_3 g$ ), приложенная в центре катка и направленная вертикально вниз (рисунок 4 в). Связями для тела являются:

- натяжение нити между телами 3 и 2  $\bar{S}_{32}$ ;
- реакция поверхности, которая раскладывается на нормальную реакцию  $\bar{N}_3$  (направленную по нормали к соприкасаемым поверхностям), силу трения скольжения  $\bar{F}_3$  (направленную по касательной к соприкасаемым поверхностям в сторону, противоположную возможному проскальзыванию тела по поверхности) и момент сопротивления качению  $\bar{M}_3$  (направленный в сторону, противоположную качению тела), при этом можно направление силы

трения  $\bar{F}_3$  выбрать произвольно, а затем скорректировать при необходимости, но можно и воспользоваться рекомендациями из п. 5.

Так как качение предполагается без проскальзывания, то сила трения не может быть пока определена, но ее значение должно находиться в пределах:

$$0 \leq F_3 \leq fN_3. \quad (13)$$

Момент сопротивления качению определяется по формуле

$$M_3 = \delta N_3. \quad (14)$$

Так как тело совершает плоскопараллельное движение, то силы инерции будут сведены к силе, приложенной в центре тяжести и направленной противоположно ускорению центра тяжести  $a_C$ , и паре сил, момент которой направлен в сторону, противоположную угловому ускорению тела  $\varepsilon_3$ . Значения силы и момента пары:

$$F_3^u = m_3 a_C, \quad (15)$$

$$M_3^u = J_3 \varepsilon_3, \quad (16)$$

где  $J_3 = m_3 R_3^2 / 2$  – момент инерции катка относительно оси  $\xi_3$ .

### 3.2.3 Составление и решение уравнений равновесия

Принцип Даламбера гласит, что если к системе приложить активные силы, реакции связей и силы инерции, то полученная система будет уравновешенной. Первоначально составим уравнения равновесия для каждого тела



в отдельности. При этом учтем, что в большинстве случаев система будет произвольной плоской.

Равновесие тела 1. Все силы направлены вдоль одной прямой, тогда уравнение равновесия имеет вид:

$$\sum F_{kx_1} = 0; \quad G_1 - S_{12} - F_1^u = 0. \quad (17)$$

Равновесие тела 2:

$$\sum F_{kx_2} = 0; \quad S_{23} + R_{2x} = 0, \quad (18)$$

$$\sum F_{ky_2} = 0; \quad S_{21} + G_2 - R_{2y} = 0, \quad (19)$$

$$\sum m_0(\bar{F}_k) = 0; \quad S_{21} \cdot R_2 - S_{23} \cdot r_2 - M_2^u = 0. \quad (20)$$

Равновесие тела 3:

$$\sum F_{kx_3} = 0; \quad S_{32} + F_3 - F_3^u = 0, \quad (21)$$

$$\sum F_{ky_3} = 0; \quad N_3 - G_3 = 0, \quad (22)$$

$$\sum m_C(\bar{F}_k) = 0; \quad S_{32} \cdot R_3 - F_3 \cdot R_3 - M_3^u - M_3 = 0. \quad (23)$$

Необходимо убедиться, что каждая из сил вошла хотя бы в одно из уравнений. В дальнейшем эти уравнения решаются совместно с учетом ранее записанных соотношений.

Необходимо отметить, что уравнения (18) и (19) решаются в самом конце для определения реакций шарнира.

Из уравнения (22) сразу можно определить нормальную реакцию и с помощью (14) найти момент сопротивления качению:

$$N_3 = G_3 = m_3 g, \quad (24)$$

$$M_3 = N_3 \delta = m_3 g \delta. \quad (25)$$

Так как нити, связывающие тела системы, невесомые, то усилия в разных частях каждой нити равны, то есть

$$S_{12} = S_{21} = S_1, \quad S_{23} = S_{32} = S_2. \quad (26)$$

Силы и моменты инерции найдем по формулам (11), (12), (15) и (16) с учетом соотношений (8), (9), (10):

$$F_1^u = m_1 a_1; \quad (27)$$

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2 = m_2 i_{2z}^2 \frac{a_1}{R_2}, \quad (28)$$

$$F_3^u = m_3 a_c = m_3 \frac{a_1 r_2}{2R_2}, \quad (29)$$

$$M_3^u = J_3 \varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} \frac{a_1 r_2}{2R_2 R_3}. \quad (30)$$

Тогда уравнения (17), (20), (21) и (23) с учетом значений сил тяжести и соотношений (24) – (30) принимают вид системы

$$\begin{cases} m_1 g - S_1 - m_1 a_1 = 0, \\ S_1 R_2 - S_2 r_2 - m_2 i_{2z}^2 \frac{a_1}{R_2} = 0, \\ S_2 + F_3 - m_3 \frac{a_1 r_2}{2R_2} = 0, \\ S_2 R_3 - F_3 R_3 - m_3 g \delta - \frac{m_3 R_3 a_1 r_2}{4R_2} = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Полученная система уравнений содержит четыре неизвестных величины. После подстановки исходных данных система принимает вид

$$\begin{cases} 5mg - S_1 - 5ma_1 = 0, \\ S_1 - \frac{2}{3}S_2 - \frac{16m}{25}a_1 = 0, \\ S_2 + F_3 - \frac{2m}{3}a_1 = 0, \\ S_2 - F_3 - \frac{mg}{10} - \frac{m}{3}a_1 = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Решение системы уравнений может производиться с использованием программных средств (пример изложен в п. 3.1) или аналитически. Далее рассмотрен аналитический вариант решения.

Из первых трех уравнений системы (32) получим

$$S_1 = 5m(g - a_1), \quad (33)$$

$$S_2 = \frac{m}{50} 375g - 423a_1, \quad (34)$$

$$F_3 = \frac{m}{150} 1369a_1 - 1125g. \quad (35)$$

Подставим выражения (34), (35) в последнее уравнение системы (32), после преобразований получим

$$a_1 = \frac{2235}{2688}g = 0,831g = 8,16 \text{ м/с}^2. \quad (36)$$

Используем полученное значение в (33) – (35), найдем значения реакций  $S_1 = 0,845mg = 8,45 \text{ Н}$ ,  $S_2 = 0,47mg = 4,7 \text{ Н}$ ,  $F_3 = 0,084mg = 0,84 \text{ Н}$ .

### 3.2.4 Определение оставшихся реакций

Реакции поверхности на каток по формулам (24) и (25):  
 $N_3 = 2mg = 20\text{Н}$ ,  $M_3 = 2mg \cdot 0,01 = 0,2\text{Н/м}$ .

Проверим условие отсутствия проскальзывания по формуле (13):  
 $F_3 < 2mg \cdot 0,1 = 2\text{Н}$ . Следовательно, проскальзывание отсутствует.

Пример при наличии проскальзывания приведен в п. 5.

Реакции опоры блока вычислим из формул (18) и (19):  
 $R_{2x} = -S_2 = -4,7\text{Н}$ ,  $R_{2y} = G_2 + S_1 = 18,45\text{Н}$ .

Отрицательный знак  $R_{2x1}$  говорит о том, что истинное направление этой реакции противоположно показанному на рисунке.

### 3.2.5 Проверка решения задачи

Рассмотрим систему целиком, приложив к ней активные силы, реакции связей и силы инерции. При этом учтем, что реакции нити теперь – внутренние силы, и их не указываем. Схема системы с силами показана на рисунке 5.

Так как расстояния между телами неизвестны, то уравнение моментов будет составить затруднительно, поэтому ограничиваемся только уравнениями вида:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & F_3 - R_{2x} - F_3'' &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & R_{2y} - G_1 - G_2 - G_3 + F_1'' + N_3 &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя значения, получим

$$0,84 - -4,7 - \frac{2}{3} \cdot 1,02 \cdot 8,16 = 0 \text{ (верно).}$$

$$18,45 - 5 \cdot 1,02 \cdot 9,81 - 1,02 \cdot 9,81 - 2 \cdot 1,02 \cdot 9,81 + 5 \cdot 1,02 \cdot 8,16 + 20 = 0 \text{ (верно).}$$

Задача решена.

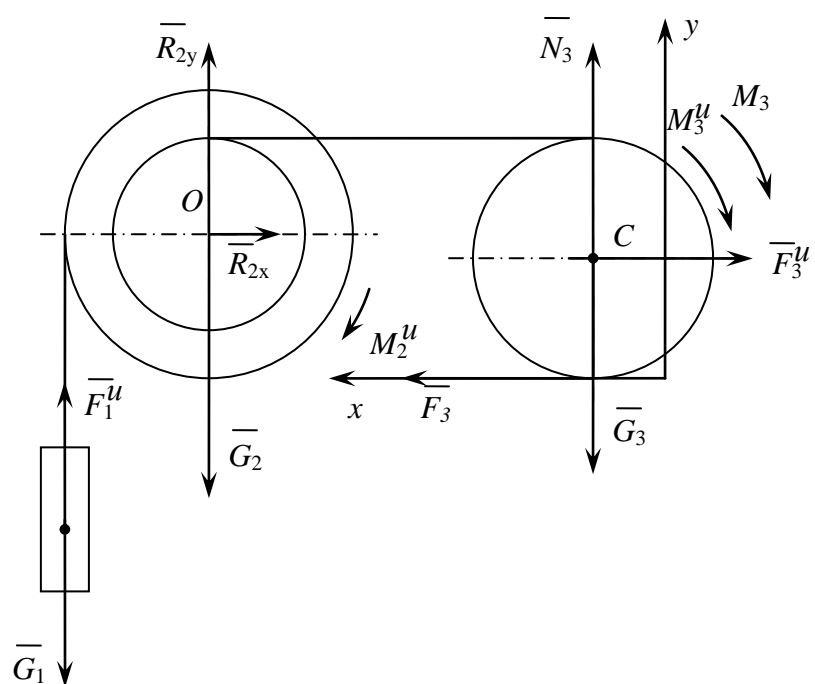


Рисунок 5 – Расчетная схема системы в целом

## 4 Решение системы уравнений при помощи пакета MathCad

Для численного решения линейных систем уравнений в MathCAD имеется специальная функция  $lsolv(A,B)$  [7, с. 699].

Она решает систему линейных алгебраических уравнений вида  $A \cdot X = B$ , выдавая решение – вектор  $X$ .

$A$  – матрица коэффициентов размерности  $n \times n$ ;

$B$  – вектор свободных членов размерности  $n$ ;

$X$  – вектор неизвестных пока решений.

Пример решения приведен на рисунке 6.

Исходные данные:

$$m := 1.02 \quad g := 9.81$$

Решение:

Решение системы в матричной форме.

$$A := \begin{pmatrix} 5m & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{25}m & -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3}m & 0 & -1 & -1 \\ \frac{m}{3} & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5m \cdot g \\ 0 \\ 0 \\ -m \cdot \frac{g}{10} \end{pmatrix}$$

$$X := lsolv(A, B) \quad \text{или} \quad X := A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} 8.157 \\ 8.432 \\ 4.66 \\ 0.886 \end{pmatrix}$$

Рисунок 6 – Решение системы уравнений с применением функции  $lsolv$

Хорошей альтернативой решению систем в матричной форме является так называемый solve block (Блок решения) [7, с. 700]. Он удобен тем, что

при его использовании уравнения записываются не в матричной, а в обычной форме, а также тем, что позволяет решать нелинейные уравнения и вводить ограничительные условия для определяемого решения. Блок решения применяется как для нахождения численного решения, так и для отыскания решения в символьном виде.

Синтаксис Блока решения:

*Given*

Уравнения

Ограничительные условия

*Find(v1,v2,...vn)* – возвращает значение одной или ряда переменных для точного решения;

$v_i$  – переменные, которые надо найти.

При символьном решении не надо вводить начальные значения, а после ключевого слова *Find(v1,v2,...vn)* вместо знака равенства следует ввести символьный знак равенства (при помощи комбинации [Ctrl+.] или соответствующей пиктограммы панели Evaluation).

Пример приведен на рисунке 7.

Существует еще одно важное отличие между блоком решения и использованием матричных операций. Если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, матричные методы оказываются непригодными. В таком случае система не имеет решений или разрешима неоднозначно. Если же применить блок решения, MathCAD распознает неоднозначность и выдает решение в параметрической форме.

Исходные данные:  
 $m := 1.02$        $g := 9.81$

Решение с помощью "Блока решения"

Given

$$5 \cdot m \cdot x'' = 5 \cdot m \cdot g - S_1$$

$$\frac{16}{25} \cdot m \cdot x'' = S_1 - \frac{2}{3} S_2$$

$$\frac{2}{3} \cdot m \cdot x'' = S_2 + F_3$$

$$\frac{1}{3} \cdot m \cdot x'' = S_3 - F_2 - m \cdot \frac{g}{3}$$

$$\text{find}(x'', S_1, S_2, F_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 8.1567522321428571429 \\ 8.4315636160714285714 \\ 4.6602536383928571429 \\ 0.88633787946428571429 \end{pmatrix}$$

Рисунок 7 – Решение системы уравнений с применением блока решения

## 5 Частные случаи при определении направлений и значений силы трения скольжения

### 5.1 Выбор направления силы трения

При выборе направления силы трения необходимо исходить из того, что эта сила препятствует проскальзыванию тела по поверхности. В случае, если тело совершает поступательное движение, направление этой силы однозначно противоположно направлению движения. В случае качения тела по поверхности необходимо провести дополнительный анализ.

Рассмотрим следующие варианты крепления тела:

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вниз по наклонной поверхности (рисунок 8 а): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вниз, следовательно, сила трения направлена вверх по поверхности;



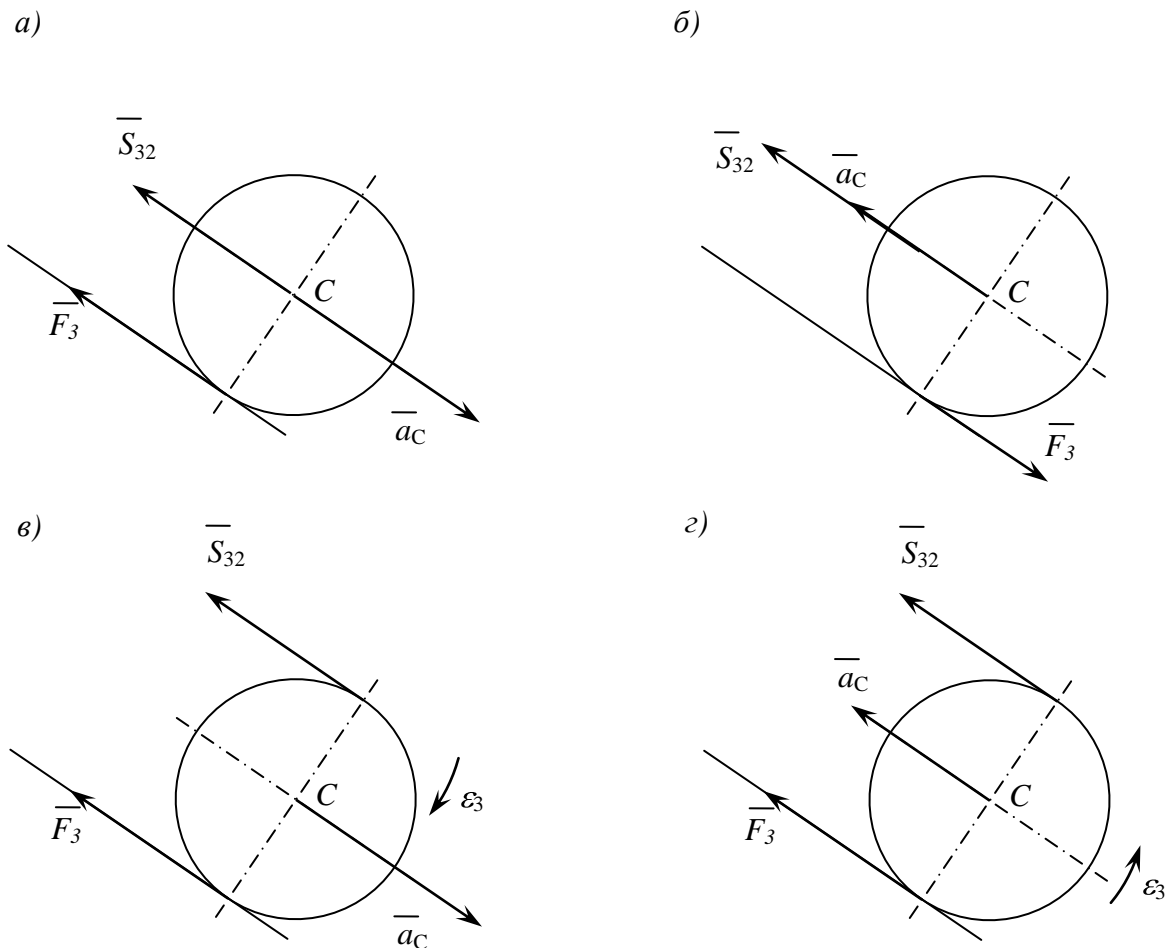


Рисунок 8 – Выбор направления силы трения

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вверх по наклонной поверхности (рисунок 8 б): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вверх, следовательно, сила трения направлена вниз по поверхности;

– тело, на которое намотана нить, движется вниз по наклонной поверхности (рисунок 8 в): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вниз, так как тело, разматывая нить, также двигалось бы вниз, следовательно, сила трения направлена вверх по поверхности;

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вверх по наклонной поверхности (рисунок 8 г): в данном случае однозначно направить силу трения нельзя, так как при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхно-

стью может скользить вместе с центром вверх, но может и скользить вниз, разматывая нить.

В последнем примере направление силы выбирается произвольным образом, а полученный в результате решения знак сообщит об истинном направлении силы.

## 5.2 Случай, когда полученное значение силы трения превышает предельное значение

Вернемся к примеру, приведенному в п. 3.2, приняв коэффициент трения скольжения  $f = 0,04$ , тогда, при проверке условия отсутствия проскальзывания (13), получим  $F_3 = 0,084mg = 0,84 > 2mg \cdot 0,04 = 0,8 \text{ Н}$ . Следовательно, тело проскальзывает по поверхности. В этом случае не будут соблюдаться некоторые кинематические соотношения, так как скорость центра катка уже не будет пропорциональна угловой скорости.

МЦС плоскодвижущегося катка находится в точке соприкосновения катка и неподвижной поверхности. Скорость точки  $D$  катка

$$v_D = v_C + \omega_3 R_3 \quad (37)$$

или

$$\omega_2 r_2 = v_C + \omega_3 R_3. \quad (38)$$

Откуда скорость точки  $C$

$$v_C = v_1 \frac{r_2}{R_2} - \omega_3 R_3 \quad (39)$$

и ее ускорение

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = a_1 \frac{r_2}{R_2} - \varepsilon_3 R_3. \quad (40)$$

При подстановке этих значений в выражения (21) и (23) получим для катка уравнения равновесия в виде

$$S_2 + F_3 - m_3 \frac{r_2}{R_2} a_1 + m_3 \varepsilon_3 R_3 = 0, \quad (41)$$

$$S_2 R_3 - F_3 R_3 - m_3 g \delta - \frac{m_3 R_3^2 \varepsilon_3}{2} = 0. \quad (42)$$

Здесь сила трения принимает предельное значение  $F_3 = 0,08mg$ . В дальнейшем, система вместо вида (32), принимает вид

$$\begin{cases} 5mg - S_1 - 5ma_1 = 0, \\ S_1 - \frac{2}{3}S_2 - \frac{16m}{25}a_1 = 0, \\ S_2 + 0,8 - \frac{2 \cdot 2m}{3}a_1 + 2m \cdot R_3 \varepsilon_3 = 0, \\ S_2 - 0,8 - \frac{mg}{10} - mR_3 \varepsilon_3 = 0. \end{cases} \quad (43)$$

Эта система содержит четыре неизвестные, которые после решения принимают значения:

$$a_1 = \frac{3333}{4007} g = 8,16 \text{ м/с}^2, \quad (44)$$

$$S_1 = 5m(g - a_1) = 8,25m = 8,42 \text{ Н}, \quad (45)$$

$$S_2 = 4,68 \text{ Н}, \quad (46)$$

$$\varepsilon_3 = 13,96 \text{ рад/с}^2. \quad (47)$$

Дальнейшее решение не меняется.

## Список использованных источников

- 1 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.
- 2 Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
- 3 Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
- 4 Диевский, В. А. Теоретическая механика: учебное пособие / В. А. Диевский. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 336 с.
- 5 Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т. Т. II. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М.: Наука, 1991. – 641 с.
- 6 Кирсанов, М. Н. Решебник: Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов; под ред. А. И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.
- 7 Бертяев, В. Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В. Д. Бертяев. – СПб.: БХВ, 2010. – 752 с.
- 8 Доев, В. С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad.: учебное пособие / В. С. Доев, Ф. А. Доронин. – СПб.: «Лань», 2010. – 592 с.