

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Оренбургский государственный университет»

Кафедра механики материалов, конструкций и машин

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РЕАКЦИЙ ОПОР РАМ

Составители: Н. А. Морозов, А. А. Гаврилов

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки»

Оренбург
2020

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.213 я73
П 75

Рецензент – кандидат технических наук, доцент Е. В. Дырдина

П 75 **Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор рам:** методические указания / Н. А. Морозов, А. А. Гаврилов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2020. – 24 с.

Методические указания содержат варианты заданий и пример решения задачи по применению принципа возможных перемещений к определению реакций опор рам.

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся направлений подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки» по дисциплинам «Теоретическая механика», «Механика» и «Динамика механических систем».

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.213 я73

© Морозов Н. А.,
Гаврилов А. А.,
составление, 2020
© ОГУ, 2020

Содержание

| | |
|--|----|
| Введение..... | 4 |
| 1 Краткие теоретические сведения..... | 5 |
| 1.1 Принцип возможных перемещений | 5 |
| 1.2 Рекомендации к решению задач | 6 |
| 1.3 Вопросы для самоконтроля | 7 |
| 2 Постановка задачи и исходные данные | 8 |
| 3 Пример выполнения задачи | 15 |
| 3.1 Исходные данные | 15 |
| 3.2 Решение | 16 |
| 3.2.1 Определение реакций опор рамы | 16 |
| 3.2.2 Проверка правильности полученных реакций | 22 |
| Список использованных источников | 24 |

Введение

В аналитической динамике рассматриваются общие принципы механики, производится вывод из них основных дифференциальных уравнений движения, а также исследуются эти уравнения и методы их интегрирования.

Аналитическая динамика позволяет определять положение механических систем с использованием обобщенных координат, которые представляют собой независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве. Число обобщенных координат равно числу степеней свободы механической системы [1].

Очень важной составляющей аналитической динамики являются вариационные принципы. Преимущество вариационных принципов состоит в том, что из них сразу получаются уравнения движения или равновесия соответствующей механической системы, не содержащие неизвестных реакций связей. Одним из вариационных принципов является принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа).

Целью данных методических указаний является формирование у обучающихся навыков применения принципа Лагранжа, которые, в том числе, включают определение возможных скоростей частей рамы и составление уравнений возможных мощностей.

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся направлений подготовки, входящих в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки» по дисциплинам «Теоретическая механика», «Механика» и «Динамика механических систем».

1 Краткие теоретические сведения

1.1 Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с голономными, идеальными, стационарными, удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю [2, 3].

$$\sum \delta A_k^a = 0.$$

Возможные работы силы и момента силы определяются по формулам:

$$\delta A(\bar{F}) = F \cdot \delta S \cdot \cos(\alpha);$$

$$\delta A(M) = \pm M \cdot \delta \varphi,$$

где F – сила, приложенная к системе, Н;

δS – возможное перемещение точки приложения силы, м;

α – угол между силой и возможным перемещением, рад;

M – момент силы или пары сил, Н·м;

$\delta \varphi$ – возможный угол поворота той части системы, на которую действует момент, рад.

В том случае, когда зависимости между возможными перемещениями точек системы выражаются с помощью кинематического анализа, вместо уравнения возможных работ можно использовать уравнение возможных мощностей [4]:

$$\sum \delta N_k^a = 0.$$

Возможные мощности силы и момента силы определяются по формулам:

$$\delta N(\bar{F}) = F \cdot \delta v \cdot \cos(\alpha);$$

$$\delta N(M) = \pm M \cdot \delta \omega,$$

где δv – возможная скорость точки приложения силы, м/с;

α – угол между силой и возможной скоростью точки приложения силы, рад;

$\delta \omega$ – возможная угловая скорость той части системы, на которую действует момент, рад/с.

Знак «+» в формулах определения возможных работы и мощности момента ставится, когда момент способствует возможному движению, знак «-» – когда момент препятствует возможному движению.

1.2 Рекомендации к решению задач

Для решения задачи по определению реакций опор рамы с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется следующий алгоритм.

1 Отбросим одну и опор и заменим ее силой реакции связи. Если опора имеет несколько составляющих сил реакции, то одну из сил показываем и рисуем в этой точке такую опору, которые имеет оставшиеся составляющие силы реакции.

2 В полученном механизме рассмотрим возможные движения звеньев, изобразим возможные перемещения (возможные скорости) звеньев и их точек. Примечание: необходимо начинать со звена, закрепленного на неподвижном шарнире, так как это звено может совершать только вращательное движение; для определения вида возможного движения другого звена необходимо определить возможное перемещение (возможную скорость) общей

точки звеньев и найти положение мгновенного центра вращения (мгновенного центра скоростей) этого звена.

3 Составим уравнение возможных работ (возможных мощностей) активных сил.

4 Выразим возможные перемещения (возможные скорости) звеньев и их точек через одно возможное перемещение (одну возможную скорость).

5 Из уравнения возможных работ (возможных мощностей) выразим неизвестную силу реакции опоры.

6 После нахождения всех неизвестных реакций опор проверим полученные результаты с помощью методов статики.

1.3 Вопросы для самоконтроля

- 1 Как формулируется принцип возможных перемещений?
- 2 Как определяется возможная мощность силы?
- 3 Как определяется возможная работа силы?
- 4 Как определяется возможная мощность силы?
- 5 Как определяется возможная работа момента?
- 6 Когда возможная работа (мощность) силы положительна?
- 7 Когда возможная работа (мощность) силы отрицательна?
- 8 Когда возможная работа (мощность) момента положительна?
- 9 Когда возможная работа (мощность) момента отрицательна?
- 10 Какое движение тела называется вращательным?
- 11 Какое движение тела называется поступательным?
- 12 Какое движение тела называется плоским?
- 13 Как определяется положение мгновенного центра скоростей?
- 14 Как определяется скорость точки вращающегося тела?
- 15 Как определить реакции опор рамы с помощью уравнений равновесия?

2 Постановка задачи и исходные данные

Дана плоская рама (рисунки 1 – 5), находящаяся под действием двух постоянных сил F_1 и F_2 , распределенной нагрузки q и момента пар сил M . Используя принцип возможных перемещений, определить реакции опор рамы. Проверить правильность определения реакций опор с помощью методов статики.

Размеры рамы указаны на рисунках 1 – 5, необходимые для расчета данные представлены в таблице 1.

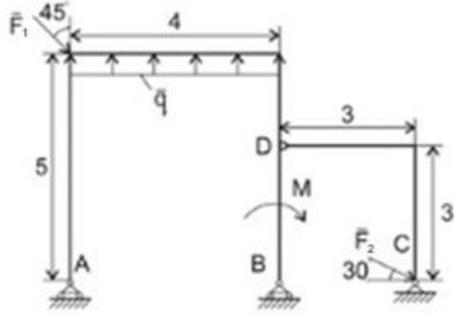
Таблица 1 – Исходные данные

| Вариант | $F_1, кН$ | $F_2, кН$ | $q, кН/м$ | $M, кН·м$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 8 | 3 | 4 | 3 |
| 2 | 9 | 2 | 3 | 5 |
| 3 | 1 | 8 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 4 | 2 | 1 |
| 5 | 5 | 2 | 3 | 5 |
| 6 | 9 | 8 | 4 | 2 |
| 7 | 3 | 4 | 5 | 3 |
| 8 | 8 | 7 | 2 | 4 |
| 9 | 6 | 3 | 3 | 3 |
| 10 | 2 | 5 | 2 | 5 |
| 11 | 6 | 4 | 1 | 1 |
| 12 | 8 | 3 | 1 | 3 |
| 13 | 6 | 9 | 2 | 5 |
| 14 | 2 | 7 | 4 | 1 |
| 15 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 16 | 2 | 5 | 2 | 4 |

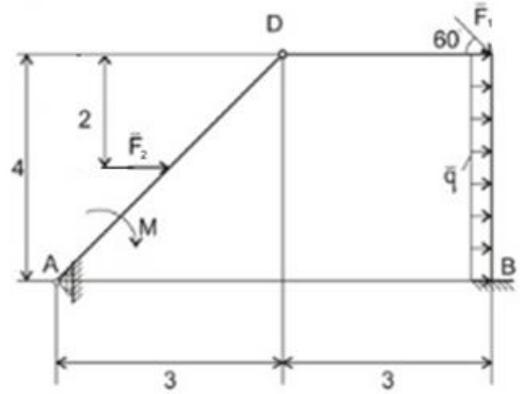
Продолжение таблицы 1

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 17 | 8 | 3 | 5 | 4 |
| 18 | 9 | 2 | 3 | 2 |
| 19 | 1 | 8 | 4 | 5 |
| 20 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 21 | 5 | 2 | 2 | 1 |
| 22 | 9 | 8 | 3 | 4 |
| 23 | 3 | 4 | 2 | 5 |
| 24 | 8 | 7 | 3 | 2 |
| 25 | 6 | 3 | 3 | 1 |
| 26 | 3 | 5 | 4 | 2 |
| 27 | 8 | 2 | 2 | 3 |
| 28 | 1 | 6 | 1 | 3 |
| 29 | 5 | 3 | 5 | 5 |
| 30 | 9 | 2 | 2 | 3 |

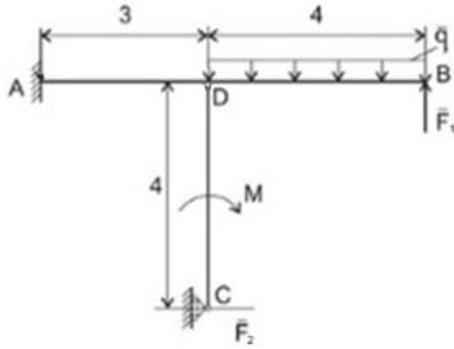
1



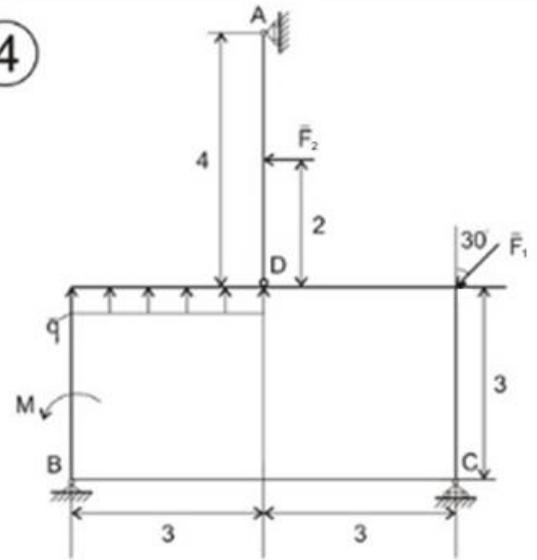
2



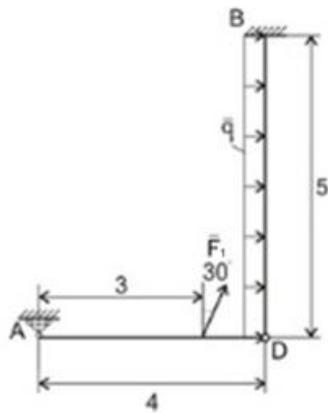
3



4



5



6

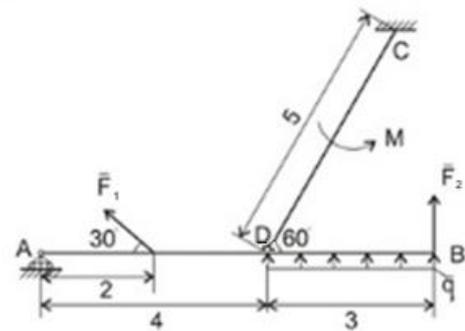
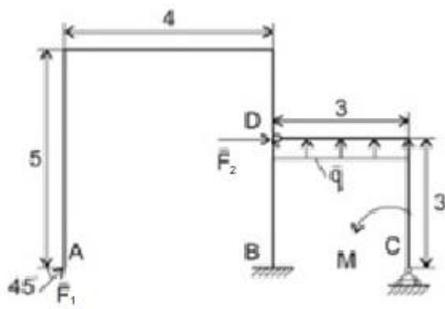
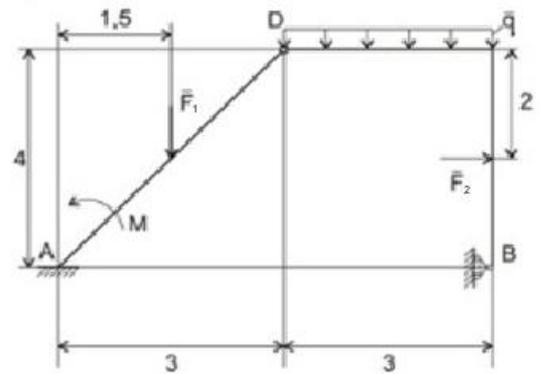


Рисунок 1 – Схемы рам к вариантам 1 – 6

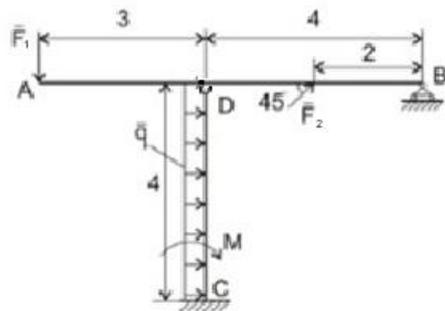
7



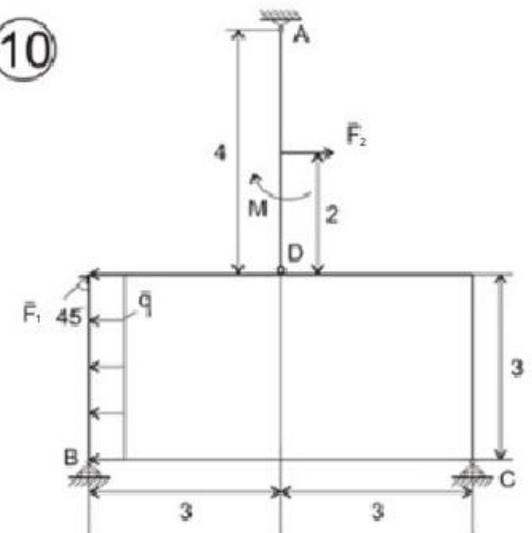
8



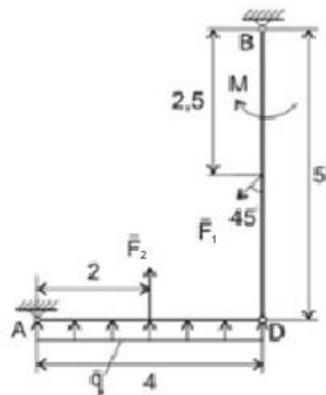
9



10



11



12

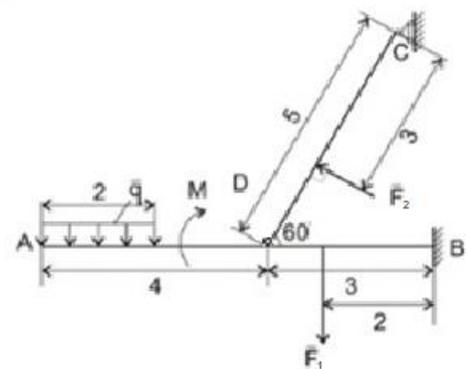
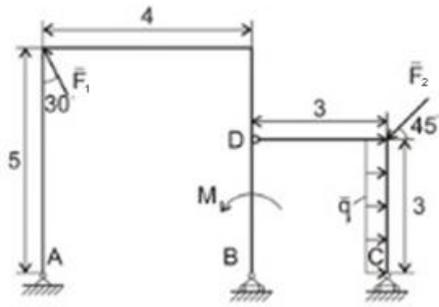
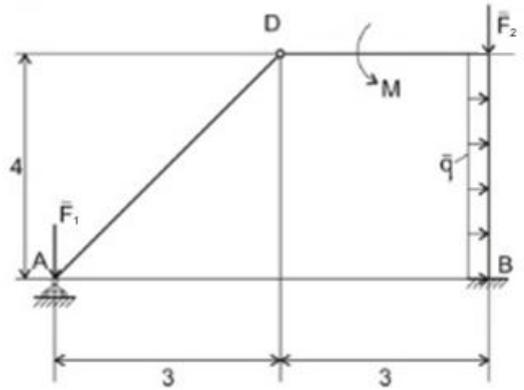


Рисунок 2 – Схемы рам к вариантам 7 – 12

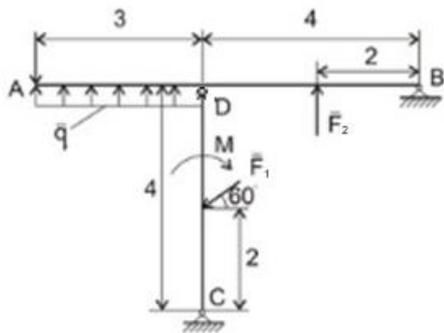
13



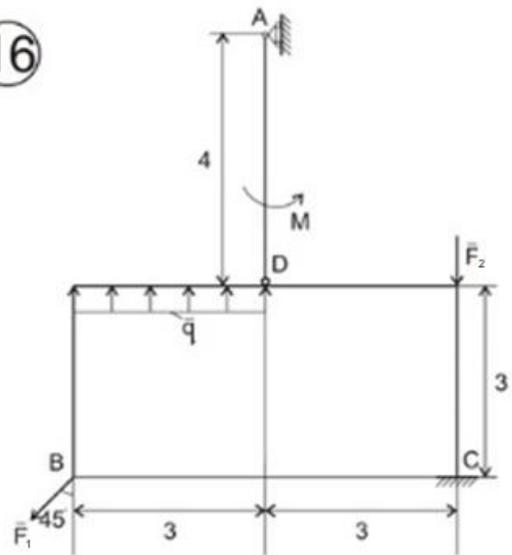
14



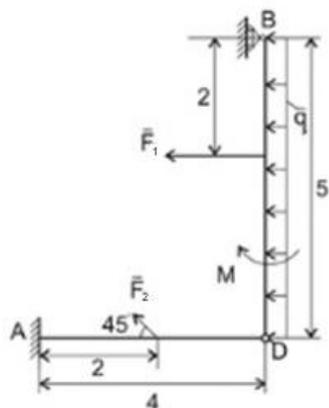
15



16



17



18

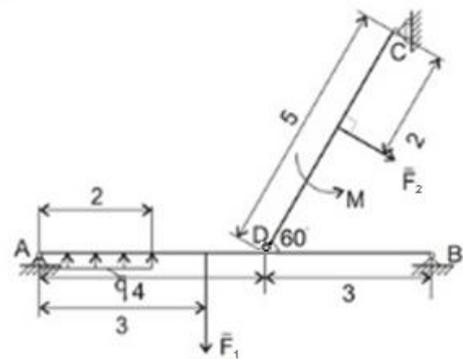
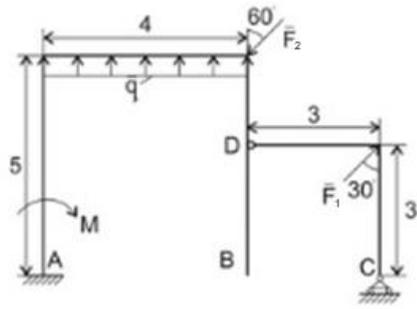
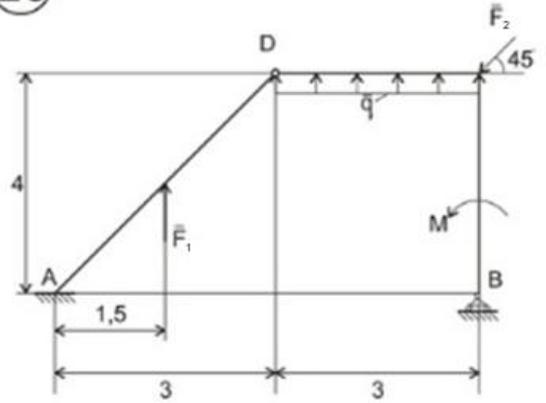


Рисунок 3 – Схемы рам к вариантам 13 – 18

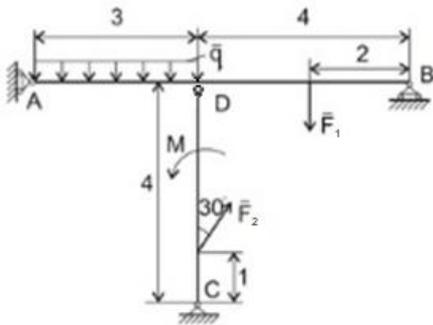
19



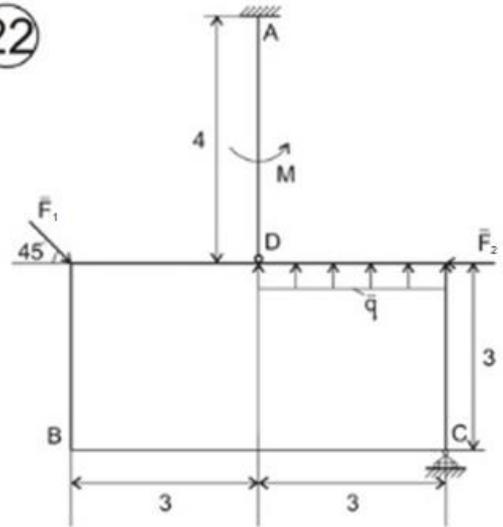
20



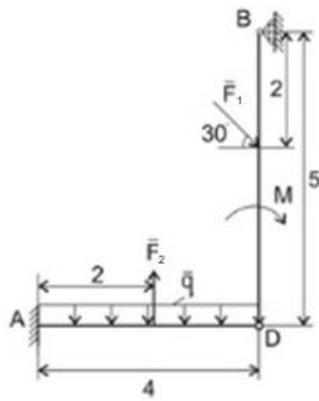
21



22



23



24

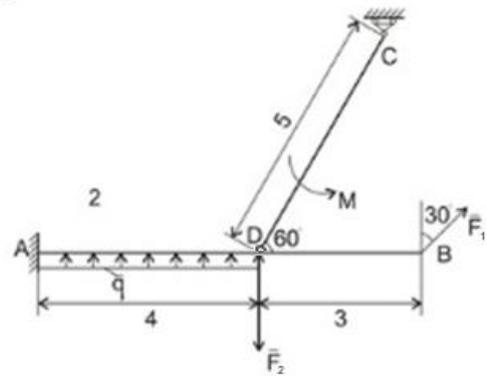
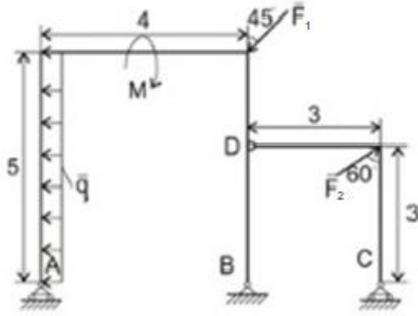
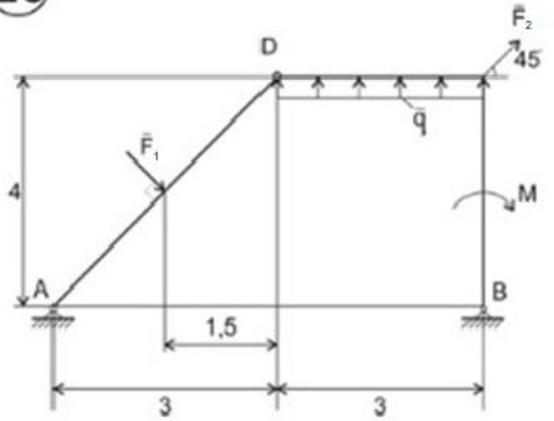


Рисунок 4 – Схемы рам к вариантам 19 – 24

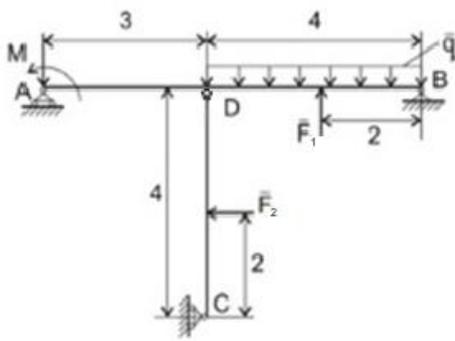
25



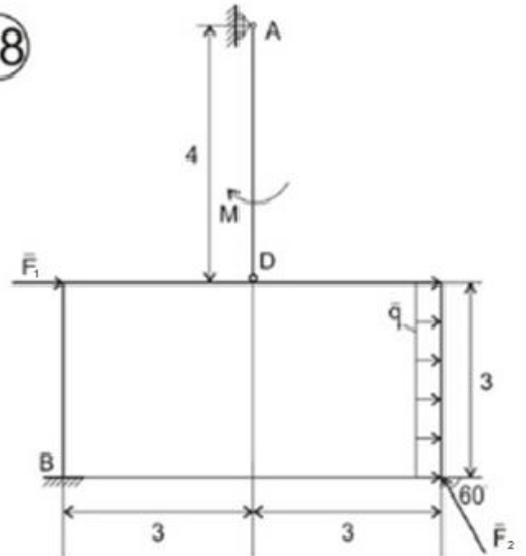
26



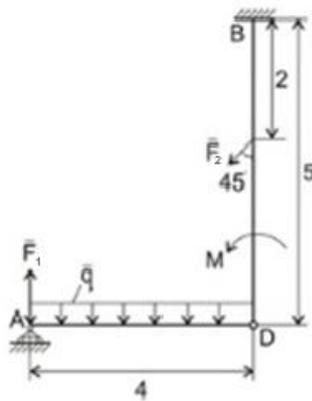
27



28



29



30

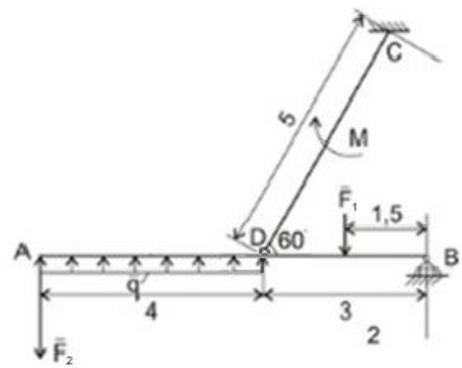


Рисунок 5 – Схемы рам к вариантам 25 – 30

3 Пример выполнения задачи

3.1 Исходные данные

На плоскую раму, изображенную на рисунке 6, закрепленную на двух опорах, действуют две постоянные силы $F_1=3 \text{ кН}$ и $F_2=4 \text{ кН}$, распределенная нагрузка $q=3 \text{ кН/м}$ и момента пар сил $M=3 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Необходимо определить реакции опор рамы, а также проверить правильность определения реакций опор с помощью методов статики.

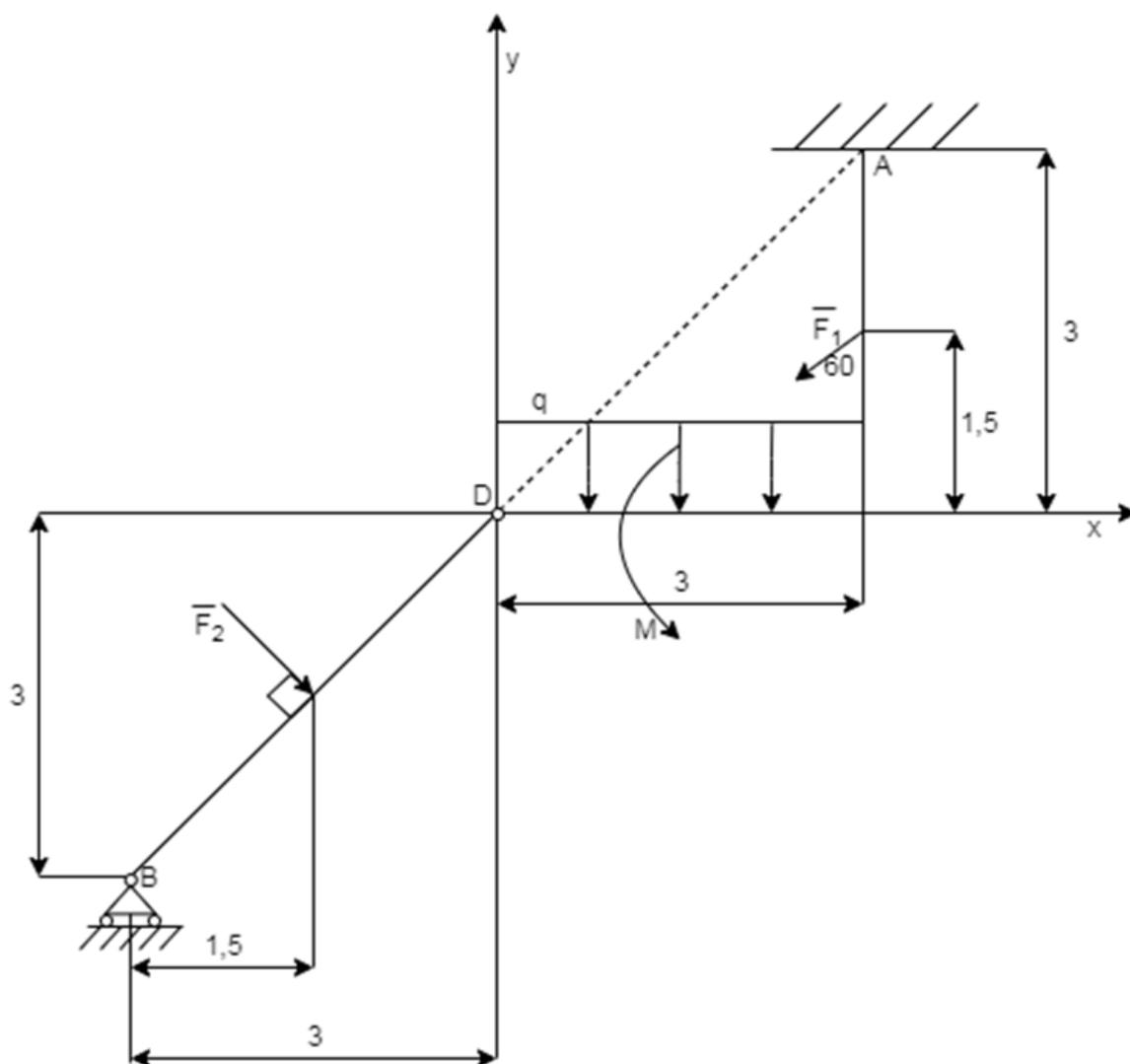


Рисунок 6 – Плоская рама

3.2 Решение

3.2.1 Определение реакций опор рамы

Заменяем распределенную нагрузку сосредоточенной силой:

$$Q = q \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН.}$$

Определим R_B . Заменяем опору в точке B реакцией связи (рисунок 6).

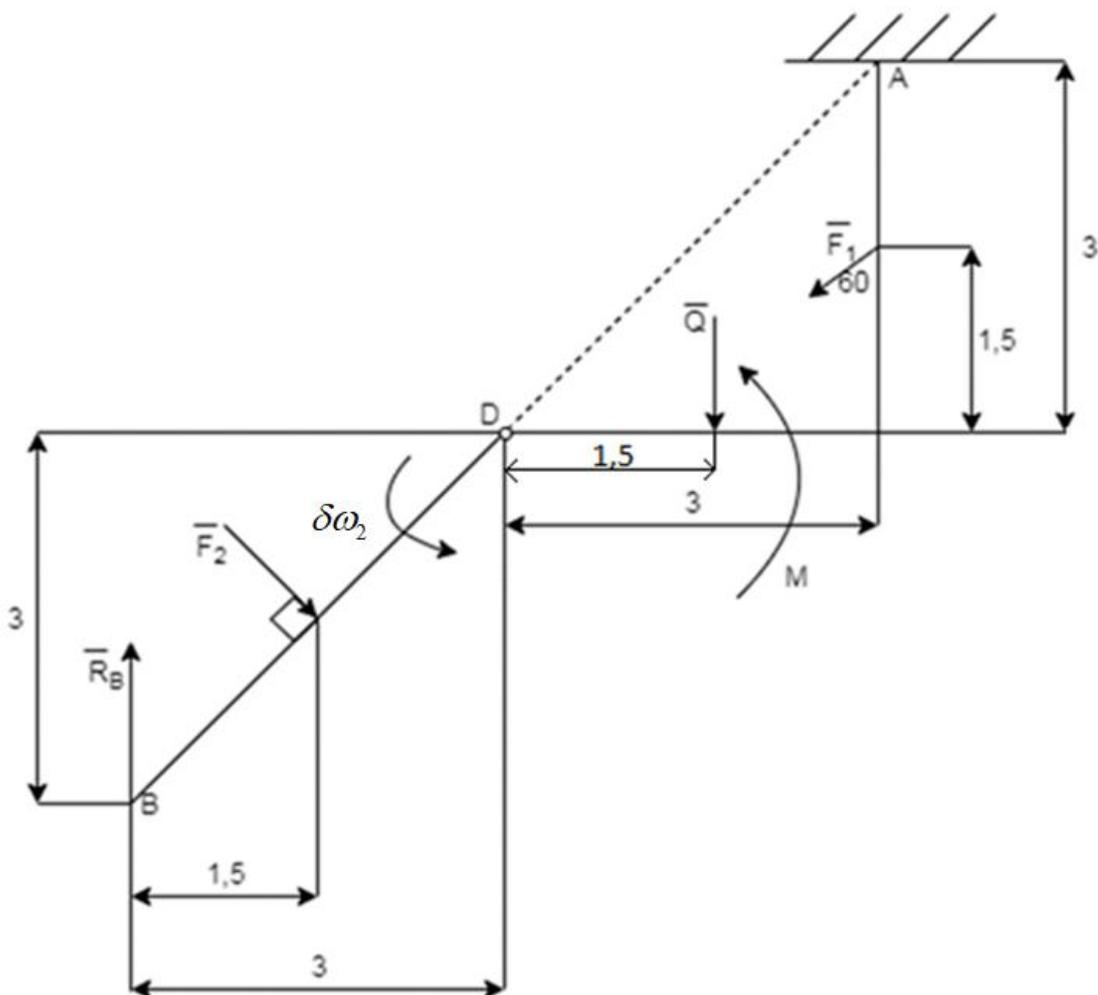


Рисунок 6 – Возможные перемещения частей рамы при определении R_B

В результате получим механизм, состоящий из двух звеньев, соединенных шарниром D . Звено AD – неподвижно, звено BD – вращается вокруг точки D с возможной угловой скоростью $\delta\omega_2$.

Составим уравнение возможных мощностей:

$$F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \delta\omega_2 - R_B \cdot 3 \cdot \delta\omega_2 = 0.$$

Разделим каждый член уравнения на $\delta\omega_2$:

$$F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} - R_B \cdot 3 = 0,$$

откуда:

$$R_B = \frac{F_2 \sqrt{2}}{2} = \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2} = 14,14 \text{ кН}.$$

Определим M_A . Заменяем жесткую заделку в точке А неподвижным цилиндрическим шарниром, покажем M_A (рисунок 7).

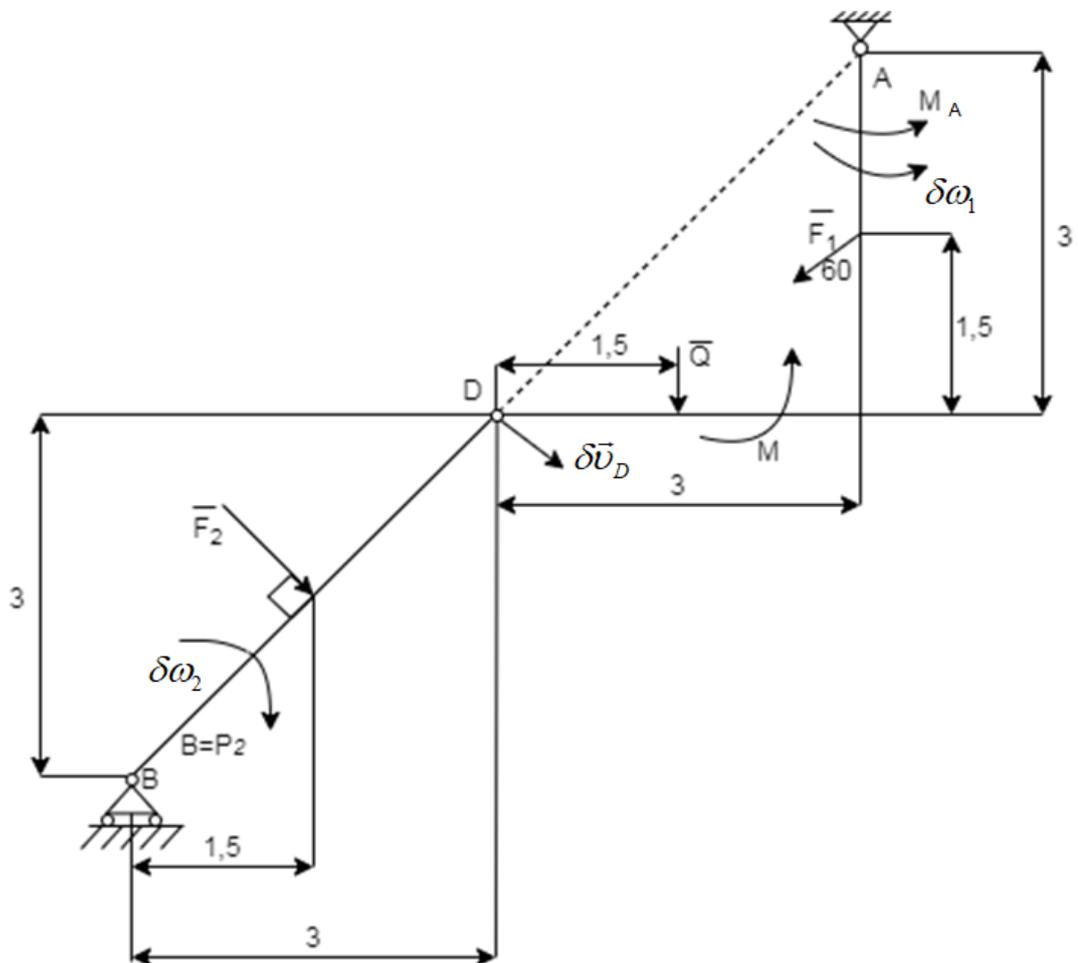


Рисунок 7 – Возможные перемещения частей рамы при определении M_A

Так как звено AD закреплено в точке A на неподвижном шарнире, значит оно может вращаться вокруг точки A с возможной угловой скоростью $\delta\omega_1$. Тогда возможная скорость точки D будет δv_D .

Звено BD будет совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек D и B к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке B, следовательно, эта точка совпадает с МЦС, и мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью $\delta\omega_2$.

Составим уравнение возможных мощностей:

$$M \cdot \delta\omega_1 + M_A \cdot \delta\omega_1 - F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,5 \cdot \delta\omega_1 + Q \cdot 1,5 \cdot \delta\omega_1 + F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \delta\omega_2 = 0.$$

Найдем соотношение между возможными угловыми скоростями. Возможная скорость точки D при вращении со звеном AD:

$$\delta v_D = \delta\omega_1 \cdot AD.$$

Возможная скорость точки D при вращении со звеном BD:

$$\delta v_D = \delta\omega_2 \cdot BD.$$

Так как AD=BD, следовательно $\delta\omega_1 = \delta\omega_2$.

Разделим каждый член уравнения возможных мощностей на $\delta\omega_1$:

$$M + M_A - F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,5 + Q \cdot 1,5 + F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} = 0.$$

Откуда:

$$M_A = -M + F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,5 - Q \cdot 1,5 - F_2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} =$$

$$-5 + 10 \cdot 0,87 \cdot 1,5 - 6 \cdot 1,5 - 20 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2} = -43,37 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим y_A . Заменяем жесткую заделку в точке А скользящей заделкой, покажем y_A (рисунок 8).

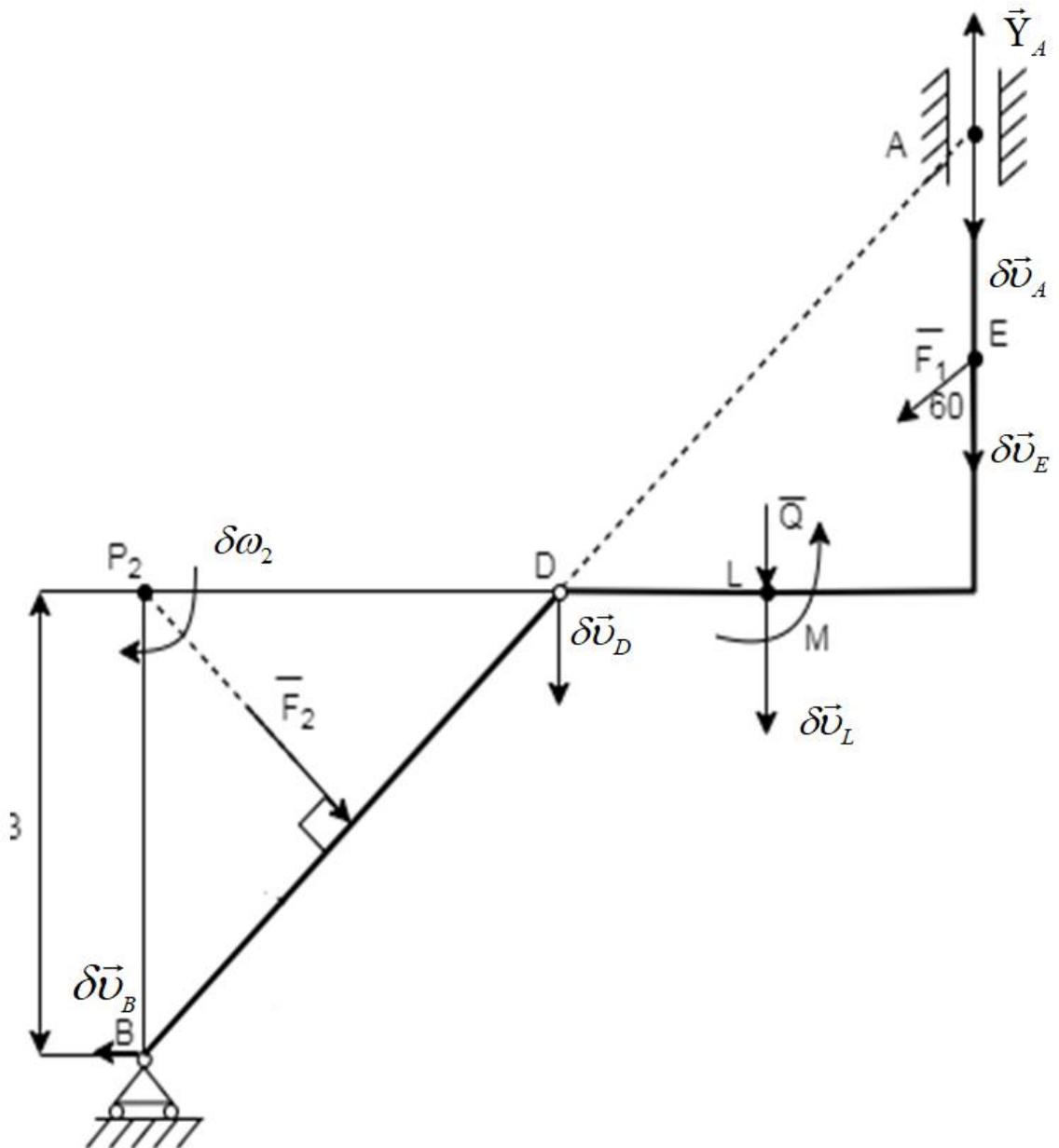


Рисунок 8 – Возможные перемещения частей рамы при определении y_A

Часть AD совершает поступательное движение. Тогда возможная скорость точки D будет δv_D .

Звено BD будет совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) данного звена. Проведем перпендикуляры из точек D и B к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры пересекутся в точке P_2 , следовательно, эта точка будет являться МЦС, и мгновенное вращение звена будет происходить вокруг данной точки с возможной угловой скоростью $\delta \omega_2$.

Составим уравнение возможных мощностей:

$$-y_A \cdot \delta v_A + F_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot \delta v_E + Q \cdot \delta v_L = 0.$$

Так звено AD совершает поступательное движение, то скорости всех его точек будут равны:

$$\delta v_A = \delta v_E = \delta v_L.$$

Упростим уравнение возможных мощностей:

$$-y_A + F_1 \cdot \cos 60^\circ + Q = 0.$$

Тогда:

$$y_A = F_1 \cdot \cos 60^\circ + Q = 10 \cdot 0,5 + 6 = 11 \text{ кН}.$$

Определим x_A . Заменим жесткую заделку в точке A скользящей заделкой, покажем x_A (рисунок 9).

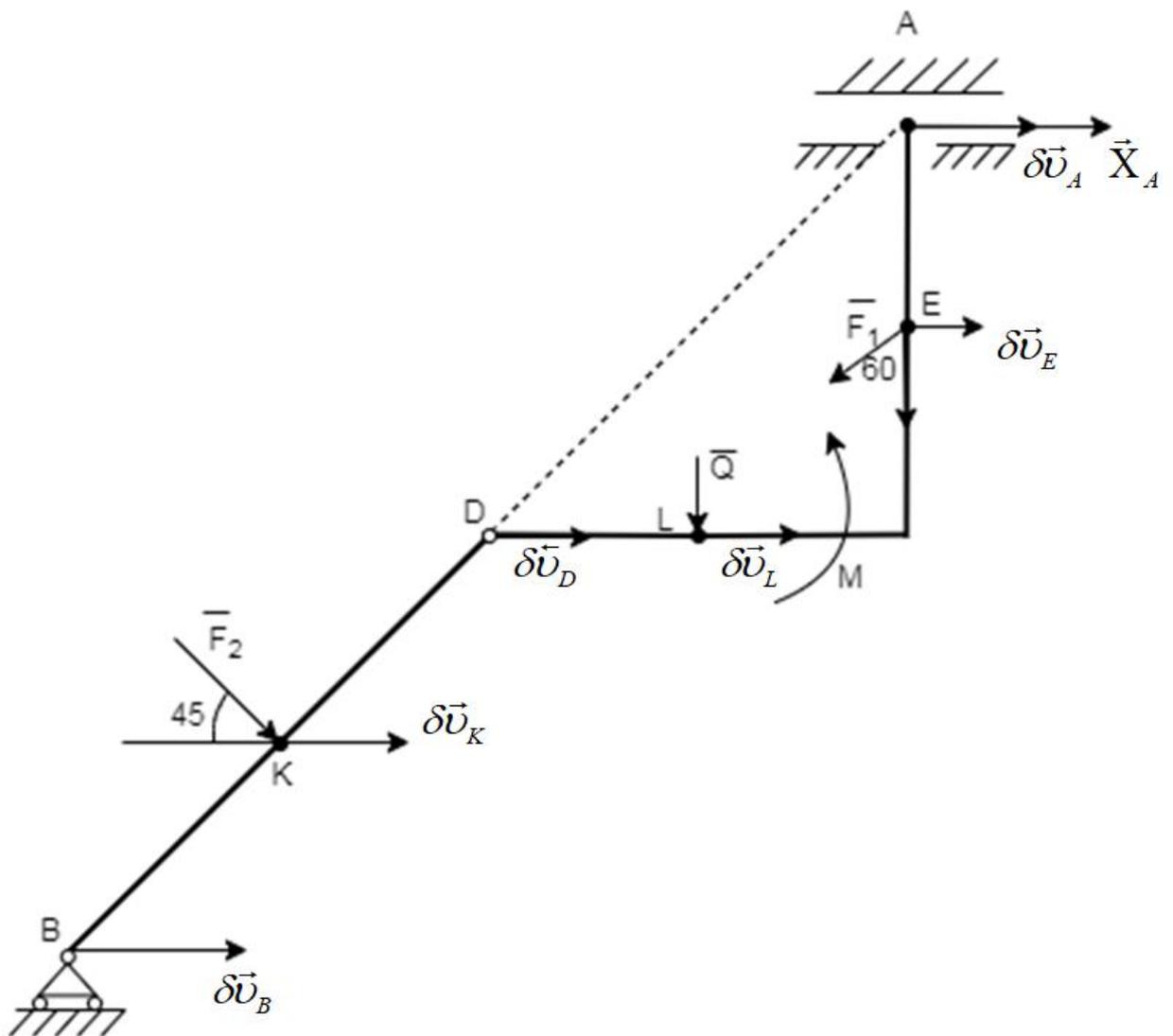


Рисунок 9 – Возможные перемещения частей рамы при определении x_A

Часть AD совершает поступательное движение. Тогда возможная скорость точки D будет δv_D .

Определим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) звена BD. Проведем перпендикуляры из точек D и B к направлениям возможных скоростей данных точек. Данные перпендикуляры будут параллельны, следовательно звено BD также совершает поступательное движение.

Составим уравнение возможных мощностей:

$$x_A \cdot \delta v_A - F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \delta v_E + F_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta v_K = 0.$$

Так как вся рама совершает поступательное движение, то скорости ее точек будут равны:

$$\delta v_A = \delta v_E = \delta v_K = 0.$$

Тогда уравнение возможных мощностей примет вид:

$$x_A - F_1 \cdot \sin 60^\circ + F_2 \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

Определим x_A :

$$x_A = F_1 \cdot \sin 60^\circ - F_2 \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot 0,87 - 20 \cdot 0,71 = -5,5 \text{ кН}.$$

3.2.2 Проверка правильности полученных реакций

Для проверки изобразим раму, покажем все реакции опор (рисунок 10) и составим уравнения статики:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2 \cdot \cos 45^\circ - F_1 \cdot \sin 60^\circ + x_A = 0; \\ y_A - F_1 \cdot \cos 60^\circ - Q - F_2 \cdot \cos 45^\circ + R_B = 0; \\ M + M_A - F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,5 + Q \cdot 1,5 + F_2 \cdot 4,5 \cdot \sqrt{2} - R_B \cdot 6 = 0. \end{cases}$$

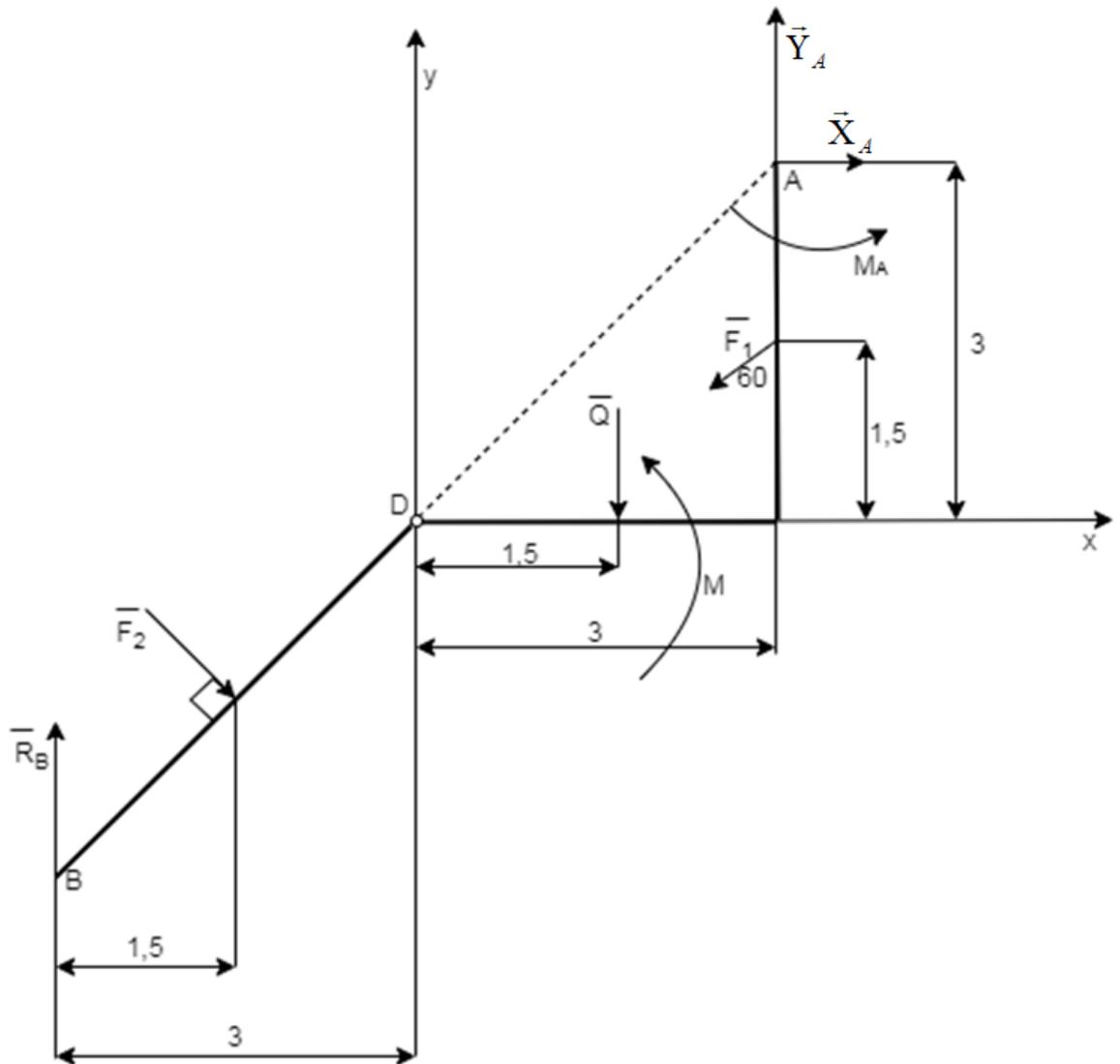


Рисунок 10 – Реакции опор рамы

$$\begin{cases} 20 \cdot 0,71 - 10 \cdot 0,87 - 5,5 = 0; \\ 11 - 10 \cdot 0,5 - 6 - 20 \cdot 0,71 + 14,14 \approx 0; \\ 5 - 43,37 - 10 \cdot 0,87 \cdot 1,5 + 6 \cdot 1,5 + 20 \cdot 4,5 \cdot 1,41 - 14,14 \cdot 6 \approx 0. \end{cases}$$

Так как в результате подстановок полученных реакций были получены уравнения, следовательно, реакции опор рамы были определены верно.

Список использованных источников

1. Смолин, И. Ю. Аналитическая динамика и теория колебаний: учеб. пособие / И. Ю. Смолин, В. В. Каракулов. – Томск : Томский государственный университет, 2012. – 172 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.
4. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
5. Диевский, В. А. Теоретическая механика: учебное пособие / В. А. Диевский. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 336 с.
6. Кирсанов, М. Н. Решебник: Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов; под ред. А. И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.