

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра физики и методики преподавания физики

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Методические указания

Составители: Т.И. Пискарёва, И.Н. Анисина

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящих в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки»

2-е издание, стереотипное

Оренбург
2020

УДК 531.38(076.5)
ББК 22.213я7

В 81

Рецензент – кандидат физ.-мат. наук, доцент Ф.Г. Узенбаев

В 81 **Вращательное движение твёрдого тела:** методические указания / составители: Т.И. Пискарёва, И.Н. Анисина; Оренбургский гос. ун-т. 2-е издание, стереотипное. – Оренбург: ОГУ, 2020. – 18 с.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ по изучению законов вращательного движения твёрдого тела. Работа включает теоретическое изложение материала, описание методики проведения опыта и контрольные вопросы для самоподготовки.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Физика» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки».

УДК531.38(076.55)
ББК22.213я7

© Пискарёва Т.И.,
Анисина И.Н.,
составление, 2020
© ОГУ, 2020

Содержание

1 Лабораторная работа № 1. Определение момента инерции колеса методом вращения.....	4
1.1 Теоретические сведения.....	4
1.1.1 Примеры вычислений момента инерции различных тел.....	6
1.1.2 Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения.....	8
1.2 Экспериментальная часть.....	11
1.3 Контрольные вопросы.....	12
2 Лабораторная работа № 2. Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника.....	13
1.1 Теоретические сведения.....	13
1.2 Экспериментальная часть.....	15
1.3 Контрольные вопросы.....	17
Список использованных источников.....	18

1 Лабораторная работа № 1. Определение момента инерции колеса методом вращения

Цель работы

1. Познакомиться с экспериментальным методом определения момента инерции колеса.
2. Определить расчетным и опытным путем момент инерции колеса методом вращения.

1.1 Теоретические сведения

Вращательное движение абсолютного твердого тела относительно неподвижной оси описывается уравнением:

$$J \cdot \varepsilon = M \quad (1)$$

где J — момент инерции твердого тела относительно оси вращения,

ε — угловое ускорение тела, определяемое как вторая производная от угла поворота по времени,

M — момент внешних сил, приложенных к телу, называемый иначе вращательным моментом.

Уравнение (1) выражает основной закон динамики вращательного движения, как материальной точки, так и любого твердого тела вокруг неподвижной оси.

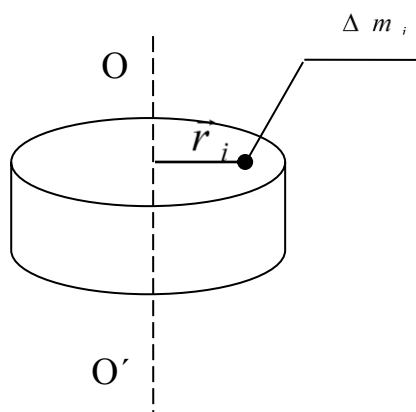


Рисунок 1

Таким образом, с физической точки зрения момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Его значение можно определить как теоретически, так и экспериментально.

Теоретическое определение сводится к тому, что тело мысленно разбивается на большое число n элементарных кусочков или материальных точек массой Δm_i . Определяется

момент инерции J_i каждого i – го кусочка относительно оси вращения тела,

затем находится момент инерции тела J , как сумма моментов инерции всех элементарных кусочков, т.е.

$$J = \sum_{i=1}^n J_i \quad (2)$$

Момент инерции i -ой материальной точки массой Δm_i относительно оси OO' – скалярная величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от точки до оси вращения OO' (см. рисунок 1):

$$J_i = \Delta m_i \cdot r_i^2. \quad (3)$$

Следовательно, момент инерции любого твердого тела согласно формуле (2) и (3) найдется так:

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2 \quad (4)$$

Величина $J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2$, равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно этой оси.

Если тело разбили на бесконечное число кусочков, то суммирование в выражении (4) превращается в интегрирование и выражение (4) принимает вид:

$$J = \int_0^m r^2 dm \quad (5)$$

Если вокруг оси вращается система тел с моментами инерции J_1, J_2, \dots, J_n , то общий момент инерции системы тел будет равен сумме моментов инерции отдельных тел системы:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_n$$

Момент инерции существует безотносительно к вращению. Всякое тело независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом

инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется или покоится.

Для некоторых тел простой формы, возможен прямой расчет момента инерции.

1.1.1 Примеры вычислений момента инерции различных тел

1. Полый цилиндр или обруч (вся масса сосредоточена на ободке).

Разобьем тело на элементарные части и запишем для тела момент инерции

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = J; \quad J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Так как для обруча $r_1 = r_2 = r_3 = \dots$ - радиус обруча, то

$$J = r^2 (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \quad \text{или} \quad J = m r^2 \quad (6)$$

где $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i$ масса всего обруча (полого цилиндра).

2. Сплошной цилиндр или диск радиуса R . Ось совпадает с осью вращения. Тогда момент инерции

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r h dr = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \pi \rho h \frac{R^4}{2}$$

Величина $\pi R^2 h$ – объем диска, значит $\rho \pi R^2 h$ – масса диска m .

Следовательно,

$$J = \frac{m R^2}{2} \quad (7)$$

3. Момент инерции шара $J = \frac{2}{5} m R^2$, (8)

где R – радиус шара.

4. Стержень из однородного материала, ось вращения проходит через середину стержня. Разобьем стержень на элементы массы Δm и запишем момент инерции для i -го элемента

$$J_i = \Delta m x_i^2 \quad (9)$$

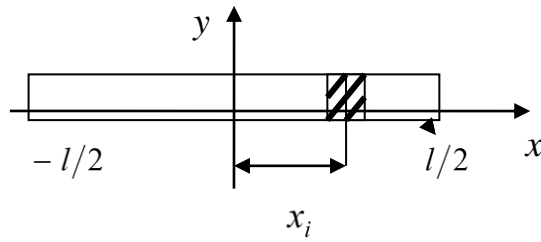


Рисунок 2

Вычислим момент инерции всего стержня учитывая, что линейная плотность массы τ равна:

$$\tau = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx} \quad (\text{здесь } m \text{ и } l \text{ - масса и длина стержня})$$

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \tau dx = \tau \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \tau \left(\frac{l^3}{8 \cdot 3} + \frac{l^3}{8 \cdot 3} \right) = \tau \frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} ml^2$$

т.е. $J = \frac{1}{12} ml^2$ (10)

5 Велосипедное колесо. Разобьем обод колеса на N отдельных фрагментов, размеры которых Δl много меньше радиуса колеса. Тогда каждый такой фрагмент можно считать материальной точкой, и момент инерции для него запишется как

$$\Delta J_i = \Delta m_i R^2.$$

Момент инерции всего колеса определится как сумма моментов инерции отдельных фрагментов.

$$J = \sum_{i=1}^N \Delta J_i = \sum_{i=1}^N \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^N \Delta m_i = MR^2. \quad (11)$$

Вклад ступицы в момент инерции колеса можно не учитывать, так как вклад отдельных фрагментов ступицы в момент инерции колеса много меньше вкладов от фрагментов обода колеса, поскольку радиус ступицы много меньше радиуса обода колеса.

Момент инерции рассмотренных тел даны относительно осей, проходящих через центры инерции (центры масс) этих тел. Чтобы найти J относительно произвольной оси, надо к моменту инерции J_0 (относительно оси через центр масс) прибавить произведение m тела на a^2 :

$$J = J_0 + ma^2 \text{ (теорема Штейнера),} \quad (12)$$

где a – расстояние от этой оси до параллельной ей оси, проходящей через центр масс.

При сложной форме тела и неравномерном распределении его плотности аналитический расчет величины момента инерции может стать достаточно сложной задачей.

В данной работе рассматриваются способ экспериментального определения момента инерции с помощью изучения вращательного движения велосипедного колеса.

1.1.2 Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения

Рассмотрим, как и в предыдущем случае, тело A , закрепленное на оси O , проходящей через центр масс (рисунок 3). Соосно с телом закреплен цилиндр C , на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом B .

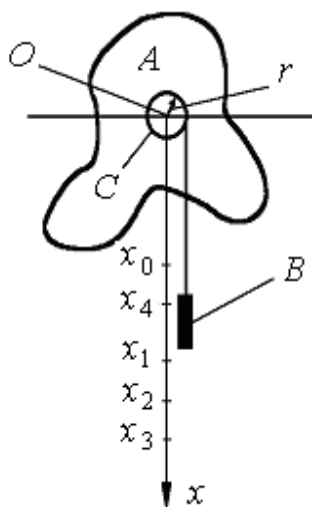


Рисунок 3

Под действием силы тяжести груз будет опускаться, приводя исследуемое тело A во вращение. Уравнение движения груза B , уравнение вращательного движения тела A и уравнение кинематической связи имеют вид

$$ma = mg - T, \quad (13)$$

$$J\varepsilon = Tr - M_{\text{тр}}, \quad (14)$$

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (15)$$

где m – масса груза B ,

J – момент инерции исследуемого тела вместе с цилиндром C ,

g – ускорение силы тяжести,

T – натяжение нити,

r – радиус цилиндра, на который намотана нить,

$M_{\text{тр}}$ – момент сил трения,

a – ускорение тела B .

Из уравнений (13)–(15) получаем

$$J = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{M_{\text{тр}} r}{a}. \quad (16)$$

Таким образом, если известно ускорение груза B и момент сил трения в оси, то по формуле (16) мы можем определить момент инерции исследуемого тела.

Предположим, что груз начинает опускаться с отметки $x_0 = 0$, а мы измеряем время Δt прохождения его между двумя точками x_1 и x_2 .

Движение груза на участке $x_1 - x_2$ является равноускоренным, и можно записать

$$x_1 = x_0 + \frac{a t_1^2}{2}, \quad (17)$$

$$x_2 = x_0 + \frac{a \left(t_1 + \Delta t \right)^2}{2}, \quad (18)$$

где t_1 – время прохождения участка $x_1 - x_0$, Δt – время прохождения участка $x_2 - x_1$.

Из (17) и (18) следует:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0} \right) \quad (19)$$

Решая это уравнение относительно ускорения a , находим

$$a = 2 \frac{\left(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0} \right)^2}{\Delta t^2} \quad (20)$$

Таким образом, для определения a нам нужно знать x_0, x_1, x_2 и время Δt прохождения грузика между точками с координатами x_1 и x_2 .

Рассмотрим соотношения, позволяющие определить момент сил трения.

При опускании груза с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_3 его потенциальная энергия переходит в кинетическую и в некоторое количество тепловой энергии, по величине равное работе сил трения,

$$mg(x_3 - x_0) = E_k + \Phi \cdot M_{\text{тр}} \quad (21)$$

где Φ – полный угол поворота тела при его опускании,

E_k – кинетическая энергия системы в нижней точке.

Предполагается, что момент силы трения при движении остается постоянным, т.е. не зависит от скорости.

После того, как груз опустится на полную длину нити до отметки x_3 , тело будет продолжать вращаться, и нить начнет наматываться на цилиндр. В результате груз поднимется до отметки x_4 .

Очевидно,

$$E_k = mg(x_3 - x_4) + \Phi_1 \cdot M_{\text{тр}}, \quad (22)$$

где Φ_1 – полный угол поворота тела при подъеме груза.

Учитывая, что $(x_3 - x_0) = r \cdot \Phi$ и $(x_3 - x_4) = r \cdot \Phi_1$, получаем величину момента силы трения

$$M_{\text{тр}} = mgr \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4} \quad (23)$$

1.2 Экспериментальная часть

Работа выполняется на установке, представляющей собой велосипедное колесо (рисунок 3), закрепленное на горизонтальной оси. Колесо имеет соосный с ним цилиндр, на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом. На внутренней стороне обода колеса симметрично по диаметру расположены два устройства для крепления груза из легких и коротких трубок. Помещая груз в устройство для его крепления, получаем физический маятник, который может колебаться около положения равновесия. Угол отклонения может быть определен по угломерной шкале. В том случае, когда груз освобожден под действием силы тяжести он начнет опускаться, приводя колесо во вращение. Для измерения временных интервалов используется секундомер.

1. Освободить груз и измерить время Δt прохождения груза между отметками x_1 и x_2 . Измерения провести не менее 7 раз для фиксированных значений x_0, x_2 и разных x_1 , каждый раз занося данные в табл. 1.

2. Измерить координату x_3 точки, до которой опускается груз при полностью размотанной нити и координату x_4 точки, до которой поднимается груз при дальнейшем наматывании нити на цилиндр, пока колесо продолжает свободно вращаться.

3. Несколько раз (в разных направлениях) измерить радиус r цилиндра, на который наматывается нить.

Таблица 1

	x_1	x_2	Δt	a_n	$\langle a \rangle$	S_a	x_0	x_3	x_4	$M_{тр}$	$\langle M_{тр} \rangle$	$S_{M_{тр}}$
1												
2												
3												
.....												

4. По формулам $a = 2 \frac{\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}}{\Delta t^2}$ и $M_{\text{тр}} = mgr \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}$

определить ускорения a_n и моменты сил трения $M_{\text{тр}}$ для каждого измерения.

Результаты измерений заносятся в табл. 1.

5. Поскольку a_n , $M_{\text{тр}}$ определяются для различных значений x_1 , то будем считать полученные значения ускорений и моментов сил трения независимыми. Найти выборочные средние значения ускорения и момента сил трения и выборочные стандартные отклонения этих величин. Результаты вычислений занести в таблице 1.

6. Вычислить выборочное среднее значение радиуса цилиндра $\langle r \rangle$ и среднеквадратичную ошибку этой величины.

7. По формуле $J = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{M_{\text{тр}} r}{a}$ определить значение момента

инерции колеса.

1.3 Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.

2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?

3. Чему равны моменты инерции следующих тел: обруч, диск, цилиндр, шар, однородный стержень? Выведите формулы для определения момента инерции различных тел.

4. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.

2 Лабораторная работа № 2. Определение ускорения свободного падения при помощи обратного маятника

Цель работы:

Измерение ускорения свободного падения g .

1.1 Теоретические сведения

Измерение периода колебаний любого физического маятника позволяет в принципе определить ускорение свободного падения g в любой точке земного шара. Эти методы определения g известны и используются в гравиметрии. Маятниковые гравиметрические приборы удобны для определения вариаций g , т.е. нахождения отношений значений g в различных точках поля тяготения, однако их точность уступает другим типам гравиметров. Часто маятниковые приборы используются для решения более сложной задачи - определения абсолютного значения g . В этом случае измерения проводятся таким образом, чтобы исключать из окончательных формул величину момента инерции маятника.

Если амплитуда колебаний маятника мала, например, не более $3-4^\circ$, то период колебаний определяется формулой

$$T = 2\pi * \frac{J}{mga} \quad (1)$$

где J – момент инерции физического маятника относительно оси подвеса, m – масса маятника, a – расстояние между осью подвеса и центром масс маятника.

Используя теорему Гюйгенса-Штейнера

$$J = J_0 * m a^2 \quad (2)$$

где J_0 – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной оси подвеса.

Представим выражение (1) для периода колебаний маятника в следующем виде:

$$T = 2\pi * \frac{\overline{J_0 + ma^2}}{mga} \quad (3)$$

Предположим, что мы определили периоды колебаний маятника, подвесив его в двух разных точках, находящихся на расстояниях a_1 и a_2 от центра масс. Из уравнений

$$T_1 = 2\pi \frac{\overline{J_0 + ma_1^2}}{mga_1},$$

$$T_2 = 2\pi \frac{\overline{J_0 + ma_2^2}}{mga_2} \quad (4)$$

Получаем

$$T_1^2 ga_1 - T_2^2 ga_2 = 4\pi^2(a_1^2 - a_2^2) \quad (5)$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2} \quad (6)$$

Используя несложные преобразования, для величины g можно также получить формулу, данную Бесселем:

$$g = \frac{8\pi^2 l}{T_1^2 + T_2^2} \frac{1}{1 + \frac{T_1^2 - T_2^2}{(T_1^2 + T_2^2)(a_1 - a_2)} l} \quad (7)$$

где $l = a_1 + a_2$.

Если периоды равны между собой ($T_1 = T_2 = T$), то

$$g = 4\pi^2 \frac{l_{\text{пр}}}{T^2} \quad (8)$$

$l_{\text{пр}}$ называется *приведенной длиной маятника*.

1.2 Экспериментальная часть

В данной работе используется оборотный маятник, изображенный на рисунке 1. На металлическом стержне опорные призмы B_1 и B_2 жестко закреплены и не перемещаются. Расстояние между ними l фиксировано и его значение либо задано, либо измеряется в начале эксперимента.

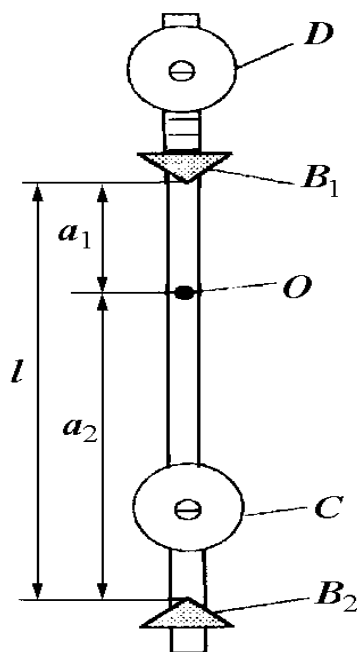


Рисунок 1 - Устройство оборотного маятника

Также фиксировано и положение чечевицы C . Вторая чечевица D находится на конце стержня (не между призмами) и может перемещаться по нему, причем ее положение определяется по шкале сквозь прозрачный глазок на чечевице (расстояние между рисками шкалы на стержне 10 мм). Центр масс маятника на схеме обозначен точкой O .

1. Подвесьте маятник на призме B_1 (прямое положение маятника) и закрепите чечевицу D в ближайшем к призме B_1 положении, соответствующем совмещению риски глазка чечевицы с одной из поперечных рисок на стержне.

2. Отклоните маятник от положения равновесия на $5, 10^\circ$ (нижний конец стержня – на 5, 10 см от вертикали) и измерьте время T_n , за которое происходят $n=20$ периодов колебаний. Проведите измерения времени 2 раза и результаты занесите в таблицу 1.

3. Изменяя шесть раз положение чечевицы D с шагом 10 мм, повторите измерения по п. 2.

4. Перевернув маятник и подвесив его на призме B_2 (обратное положение маятника), повторите измерения по п. 2 и п. 3. Результаты также занесите в таблицу 1.

5. По экспериментальным данным рассчитайте значения T_1 и T_2 для всех рассмотренных случаев по формуле (4):

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_1^2}{mga_1}}, T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_2^2}{mga_2}}$$

Таблица 1

Положение чечевицы D , мм	Прямое положение маятника (на призме B_1)				Обратное положение маятника (на призме B_2)			
	n	T_n , с	T_n , с	T_1 , с	n	T_n , с	T_n , с	T_2 , с
0								
10								
20								
30								
40								
50								

6. Постройте графики зависимости периодов T_1 и T_2 от координаты чечевицы D . Типичный вид этой зависимости показан на рисунке 2.

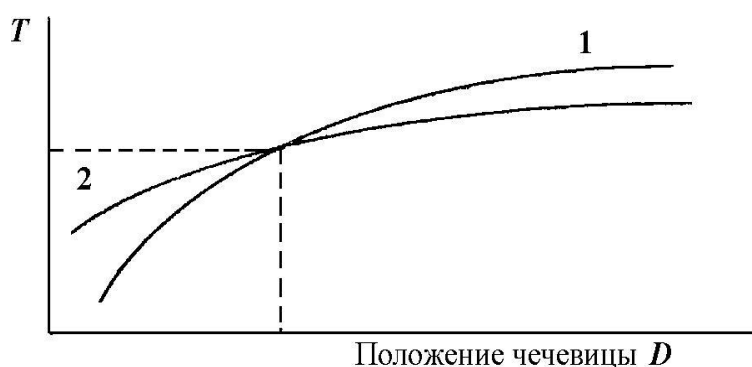


Рисунок 2 - Зависимость периода колебаний физического маятника от положения чечевицы D при прямом (1) и обратном (2) положениях маятника

7. На графике рисунок 2 определите абсциссу точки пересечения кривых 1 и 2, указывающую положение чечевицы D , которое соответствует приближенному равенству периодов T_1 и T_2 , и окончательно закрепите чечевицу D в этом положении.

8. По графику определите ординату пересечения кривых 1 и 2, соответствующую искомому значению величины T , вычислите значение g по формуле (8):

$$g = 4\pi^2 \frac{l_{\text{пр}}}{T^2}$$

9. Оцените погрешность проведенных косвенных измерений величины g , вычисленной по формуле (8):

$$\delta_g = g \sqrt{\frac{\Delta l}{l}^2 + 4 \frac{\Delta T}{T}^2},$$

где абсолютную погрешность Δl примите равной 0,5 мм (половине цены деления используемой миллиметровой линейки), абсолютную погрешность ΔT примите равной 0,01 с.

10. Сравните полученный в п. 8 результат с табличным (справочным) значением g . Определите величину g по формуле (7), используя данные из пп. 7 и 8.

11. Сравните результат вычислений по формуле (7) с результатом, полученным по упрощенной формуле (8).

1.3 Контрольные вопросы

1. Что называется физическим маятником? Математическим маятником? От чего зависит период колебания математического маятника?

2. При каких условиях физический маятник совершает гармонические колебания? Каким уравнением они описываются? Что называется смещением колеблющейся точки, амплитудой, периодом, фазой?

3. В каких положениях колеблющегося маятника максимальна его скорость? Ускорение?

4. Что называется приведенной длиной физического маятника?
Напишите формулу для приведенной длины.
5. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.
6. Дайте вывод упрощенной формулы (7) для расчета ускорения свободного падения.

Список использованных источников

1. Алешкевич, В.А. Механика твердого тела: лекции: Университетский курс общей физики / В.А. Алешкевич, Л.Г. Деденко, В.А. Караваев. – Изд-во физического факультета МГУ, 1998. – 12 с.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3т. – Т.1:Механика. Молекулярная физика / И.В.Савельев. – М.: Наука,1988. – 496 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика / Д.В.Сивухин. М.: Наука, 1989. – 700с.
4. Трофимова, Т.И. Курс физики : учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Высш.шк., 2001. – 542 с.