Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано к изданию ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Оренбургский государственный университет" в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника

Оренбург
2017

УДК 517.31(076.5)
ББК 22.161.1я7
С 17

Рецензент – доктор технических наук, профессор Ю.Г. Полкунов

Смирнова, Е.Н.
С 17 Дополнительные главы математики: учебное пособие / Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко; Оренбургский государственный университет. – Оренбург: ОГУ, 2017. – 171 с.
ISBN 978-5-7410-1677-0

В учебном пособии рассмотрены следующие разделы: теория поля, методы оптимизации, теория нечетких множеств.

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения по направлению подготовки 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника по магистерским программам «Автоматизированные энергетические системы и комплексы» и «Электромеханические комплексы и их исследование».

УДК 517.31(076.5)
ББК 22.161.1я7

Содержание

Введение

В XIX в. общие вопросы о месте и роли математики для технических направлений обсуждались с точки зрения того, нужна ли высшая математика инженерам. В 1870–1880 гг. многие считали сложные математические расчеты в технике лишними. Так, американский электротехник, изобретатель Т. Эдисон, основавший крупные электротехнические предприятия и компании говорил, что он не нуждается в математике и может придумать гораздо больше, чем расчёты. К концу XIX в. для создания системы образования инженеров электротехнических направлений встал вопрос о том, какие разделы математики, каким образом и в каком объеме необходимо включать в учебные программы. В начале XX в. появились курсы высшей математики для инженеров. Однако, еще в 1920–х гг. в электротехнической литературе наблюдались попытки «изложить законы электродинамики без высшей математики, как будто бы какая-либо заслуга заключалась в том, чтобы не пользоваться понятиями линейного интеграла, потока вектора через поверхность и т.д.». В 1930–х гг. общие вопросы взаимосвязи техники и математики в связи с постановкой преподавания последней в ВУЗах были рассмотрены в работах академика А.Н. Крылова.

В настоящее время, необходимость углубленной математической подготовки электриков, вопрос о значении математики для электротехники преобразовался в проблему математизации электротехнических наук. Концептуальный аппарат математической теории, результаты прикладных математических исследований оказывают огромное влияние на формулировку электротехнических проблем и характер теоретического описания исследуемых электротехниками процессов.

Для обследования и решения проблемных ситуаций в области электротехники, необходимо применять знания из математики.

В основную профессиональную образовательную программу, обеспечивающую подготовку бакалавра электроэнергетических направлений включены разделы математики, необходимые для освоения спецпредметов. После окончания бакалавриата многие выпускники продолжают обучение в магистратуре. Магистерские программы должны иметь сильный исследовательский компонент, в смысле обучения студентов навыкам сбора, анализа и использования информации для принятия решений.

В первом семестре студентами направления подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» по магистерским программам «Автоматизированные энергетические системы и комплексы» и «Электромеханические комплексы и их исследование» предусмотрено изучение учебной дисциплины «Дополнительные главы математики», в которую включены следующие разделы: теория поля, методы оптимизации и нечеткие множества, предполагающей получение, как теоретических знаний, так и практических умений и навыков, которые в дальнейшем необходимы при изучении специальных дисциплин.

1 Теория поля

При решении инженерных задач возникает потребность исследовать структуру физического поля и его воздействие на материальные объекты. В общем случае физическое поле представляет собой ту или иную характеристику физической среды, заполняющей область пространства, в которой происходят определенные процессы. Природа физической среды определяет размерность единиц измерения и констант, с помощью которых строятся количественные соотношения. Физические поля делятся на две основные группы – скалярные и векторные. Скалярным полям соответствуют одномерные величины, измеряемые по одной шкале. Примеры таких полей: поля температур и давлений в земной или иной атмосфере, поля гравитационного и электрического потенциала и т.п. Векторным полям отвечают многомерные величины. Таковы силовые поля (гравитационное, электрическое и прочие), поле скоростей жидкости или газа, поля градиентов температуры и концентрации химического компонента. Электромагнитное поле измеряется двумя векторными величинами: электрической и магнитной индукцией. Физической средой во всех случаях является вещество или вакуум, которые заполняют некоторую область пространства.

Основными инструментами исследования скалярного поля являются поверхности уровня, градиент и производная по направлению.

В механике известен принцип, по которому всякое сложное движение можно представить в виде суммы двух движений – поступательного и вращательного вокруг некоторого, в общем, подвижного мгновенного центра. Этот принцип имеет своеобразное отражение в теории векторного поля. Так, например, в поле линейных скоростей жидкости поступательное движение среды от источника или к стоку характеризуется дивергенцией линейной скорости жидких частиц (расходимостью линий тока), при этом дивергенция является скалярной величиной. Вращательное движение среды задается вектором угловой скорости жидкой частицы, который, будучи умножен на два, дает так называемый ротор поля. Понятия дивергенции и ротора связаны с прочими основными понятиями теории векторного поля, к которым, прежде всего, относятся работа силового поля, циркуляция вектора по замкнутому контуру и поток вектора через поверхность. Эта связь осуществляется посредством формул Гаусса – Остроградского и Стокса.

1.1 Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля

Пусть V – область в пространстве или на плоскости. Говорят, что в области V задано скалярное поле, если каждой точке M из V поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$. Если введены декартовы координаты, то скалярное поле можно представить в виде функции координат точки M: $u=u(x,y,z)$, $u=u(x,y)$. В этом случае понятие скалярного поля совпадает с понятием функции трех или двух переменных.

Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле имеет данное фиксированное значение C.

Уравнение поверхности уровня имеет вид $u(x,y,z)=C$.

Пример 1.1.

Найти поверхности уровня скалярного поля: $u = arctg\,\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

Решение:

Поверхности уровня определяются уравнением $arctg\,\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = C$. Отсюда находим $\dfrac{x^2+y^2}{z^2} = a^2$, где $a = tg\,C, -\dfrac{\pi}{2} < C < \dfrac{\pi}{2}$. Мы видим, что поверхностями уровня являются круговые конусы $x^2+y^2-a^2z^2 = 0$, ось симметрии которых совпадает с осью Oz.

Поверхности уровня называют еще *эквипоненциальными поверхностями* (*поверхностями одинакового потенциала*) или *изоповерхностями*.

Если поле задано в плоской области, то равенство $u(x,y)=C$ определяет некоторую линию. Эти линии называют *линиями уровня* или *изолиниями*.

Скалярные поля иногда обладают специальными свойствами симметрии. Если значение $u(M)$ зависит лишь от расстояния точки M от некоторой фиксированной точки M_0, то поле называют *сферическим*. Поверхности уровня сферического поля – *концентрические сферы*.

Если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле $u(M)$ переходит само в себя, т. е. существует такая декартова система координат, в которой поле можно задать функцией двух переменных $u=u(x,y)$, то это поле называют *плоскопараллельным* или *двумерным*. Поверхности уровня таких полей *цилиндрические*.

Если поле $u(M)$ переходит само в себя при повороте пространства на произвольный угол вокруг некоторой оси, иначе, если существует цилиндрическая система координат, в которой поле может быть задано функцией, зависящей лишь от $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ и z, то такое поле называют *осесимметрическим*. Поверхности уровня этого поля - поверхности вращения.

Если поверхностями уровня являются круговые цилиндры, то $u(M)$ называют *цилиндрическим*.

1.2 Градиент скалярного поля. Производная по направлению

Линейной формой $\varphi(\Delta r)$ относительно вектора Δr называют скалярное произведение вектора Δr на некоторый вектор g, не зависящий от Δr, где $r=r(x,y,z)$ – радиус–вектор точки M, Δr – вектор, соединяющий точки M и M_0.

Скалярное поле $u(M)$ называется *дифференцируемым в точке M_0 из области V*, если приращение поля Δu в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u=g\cdot\Delta r+o(\rho), \qquad (1.1)$$

где $\rho=\rho(M_0, M)$ – расстояние между точками M_0 и M,

$\Delta u = u(M) – u(M_0)$.

Градиентом дифференцируемого в точке M_0 скалярного поля называют вектор $g(M_0)$ из (1.1). Обозначение: $grad\ u(M_0)=g(M_0)$.

Если поле дифференцируемо в каждой точке области V, то оно *дифференцируемо в* V. В этом случае $grad\ u(M)=g(M)$.

При заданной декартовой системе координат

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k . \tag{1.2}$$

Величина $grad\ u$ определяется формулой:

$$|grad\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} . \tag{1.3}$$

Градиент скалярного поля, в заданной системе координат, представляющей рассматриваемое скалярное поле, есть вектор, указывающий направление наибольшего роста значений скалярного поля и величину этого роста. Этот вектор, вычисляемый в какой-либо системе координат, от выбора этой системы координат не зависит и характеризует свойства скалярного поля.

Свойства градиента:

1. $grad\ c=0$, c – $const$;
2. $grad\ (u + v)=grad\ u+grad\ v$, где u, v – дифференцируемые скалярные поля;
3. $grad\ (uv)=u\ grad\ v+v\ grad\ u$;
4. $grad\ (cu)=c\ grad\ u$, где $c=const$;
5. $grad(u/v)=(v\ grad\ u–u\ grad\ v)/v^2\ (v \neq 0)$;
6. $grad\ f(u)=f\ '(u)\ grad\ u$, где f – дифференцируемая функция;
7. $grad\ |r|=r/|r|$.

Дифференциалом скалярного поля $u(M)$ называют скалярное произведение $grad\ u \cdot \Delta r$:

$$du = grad\ u \cdot \Delta r . \tag{1.4}$$

Пример 1.1.

Найти угол между градиентами скалярных полей $u(M)=x^3+y^3+z^3+xyz+1$ и $v(x)=\dfrac{x^2}{2}+y^2+z^3$ в точке $M_0(0,1,1)$.

Решение:

Градиент скалярного поля $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ есть вектор, координаты которого определяются по формуле (1.2).

В нашей задаче имеем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=3x^2+yz\Big|_{M_0}=1;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=3y^2+xz\Big|_{M_0}=3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=3z^2+xy\Big|_{M_0}=3.$$

Таким образом, $\overline{a_1}=grad(u(M_0))=(1,3,3).$

Аналогично найдем $grad(v(M_0))$:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{M_0}=x\Big|_{M_0}=0;$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{M_0}=2y\Big|_{M_0}=2;$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{M_0}=3z\Big|_{M_0}=3.$$

Таким образом, $\overline{a_2}=grad(v(M_0))=(0,2,3).$

Косинус угла между векторами $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ равен: $\cos(\overline{a_1},\overline{a_2})=\dfrac{(\overline{a_1},\overline{a_2})}{\left|\overline{a_1}\right|\cdot\left|\overline{a_2}\right|}=\dfrac{15}{\sqrt{247}}.$

Тогда, $(\overline{a_1};\overline{a_2})=\arccos\dfrac{15}{\sqrt{247}}.$

Пусть l – единичный вектор, указывающий направление в точке M_0 области V, M – произвольная точка V, отличная от M_0 и такая, что вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору l.

Предел

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho}, \tag{1.5}$$

где $\Delta u = u(M) - u(M_0)$,

$\rho = \rho(M_0, M)$ – расстояние между точками M_0 и M, если он существует, называют *производной поля* $u(M)$ *в точке* M_0 *по направлению* l и обозначают символом: $\frac{\partial u}{\partial l}$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho}. \tag{1.6}$$

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{1.7}$$

где $l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – направляющие косинусы вектора l.

Также производную по направлению можно представить в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = grad\, u \cdot l = np_l grad\, u. \tag{1.8}$$

Если l имеет направление $grad\, u$, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\max} = |grad\, u|. \tag{1.9}$$

Производная скалярного поля в точке по заданному направлению характеризует скорость роста значений скалярного поля в заданном направлении. Эта характеристика не связана с выбором системы координат и отражает свойства самого скалярного поля.

Пример 1.2.

Найти производную скалярного поля $u(M)=4y^3–3x^3+z$ в точке $M_0(1,1,0)$ по направлению, идущему к точке $M(3,4,0)$.

Решение:

Искомая производная определяется по формуле (1.7).

Производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ в точке $M_0(1,1,0)$ имеют значения:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = -9x^2\Big|_{M_0} = -9;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -12y^2\Big|_{M_0} = -12;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 1.$$

Вектор $\overline{M_0M} = 2i + 3j$, поэтому $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$;

$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\alpha = 0$.

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial l} = -9\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} + 12\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + 1\cdot 0 = \frac{18}{\sqrt{13}}$.

$\frac{\partial u}{\partial l}>0$, это означает, что скалярное поле возрастает в данном направлении.

Пример 1.3.

Найти производную скалярного поля $u(M)=xy^2+yz^2+x^2z$ в точке M_0(l,l,l) по направлению вектора нормали к поверхности S: $x^2+y^2–3z^2+2=0$ в этой точке, образующего с осью Oz острый угол.

Решение:

Производная скалярного поля $u(M)=u(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ по направлению l вычисляется по формуле (1.7).

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.(y^2 + 2xz)\right|_{M_0} = 3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.(2xy + z^2)\right|_{M_0} = 3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.(2y + x^2)\right|_{M_0} = 3.$$

Вектор нормали к поверхности S в точке M_0 равен:

$\overline{N} = \left(\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}; \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}; \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} \right)$, если поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$.

$$\overline{N} = \left(2x|_{M_0}; 2y|_{M_0}; -6z|_{M_0} \right) = (2,2,-6).$$

$$\left|\overline{N}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{11}.$$

Вектор $\overline{N}$ образует тупой угол с осью Oz, т.к. его третья координата отрицательна. Поэтому единичный вектор нормали к данной поверхности в точке M_0, образующий по условию задачи с осью Oz острый угол будет равен:

$$\bar{l} = -\frac{\overline{N}}{\left|\overline{N}\right|} = \left(-\frac{2}{2\sqrt{11}}; -\frac{2}{2\sqrt{11}}; \frac{6}{2\sqrt{11}} \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{3}{\sqrt{11}} \right).$$

Значит $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{11}}; \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{11}}; \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{11}}$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{11}} \right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{11}} \right) + 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

1.3 Векторное поле. Векторные линии

Если каждой точке M области V поставлен в соответствие некоторый вектор $F(M)$, то говорят, что в V задано *векторное поле*.

В декартовой системе координат *F(M)* можно представить совокупностью трех скалярных функций, являющихся координатами вектора *F(M)*. Обозначим их *P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z),* тогда

$$F(M)=P(x,y,z)i+Q(x, y,z)j+R(x,y,z)k.$$

Иногда векторные поля обладают специальными свойствами симметрии.

Векторное поле *F(M)* называют *одномерным*, если существует декартова система координат такая, что координаты *F(M)* имеют вид *P(x)*,0,0.

Если существует такая цилиндрическая система координат, что *F(M)* зависит от ρ и z, но не зависит от φ, то поле *F(M)* называют *осесимметрическим*. Если *F(M)* зависит лишь от ρ, то поле называют *цилиндрическим*.

Векторное поле *F(M)* называют *плоскопараллельным*, если существует декартова система координат такая, что координаты *F(M)* можно задать функциями двух переменных *P(x,y), Q(x,y), R(x,y).*

Векторной линией (*силовой линией, линией тока*) векторного поля *F(M)* называется линия *L*, лежащая в *V*, если в каждой точке *L* направление касательной к ней совпадает с направлением вектора *F(M)* в этой точке.

Параметрическое дифференциальное уравнение векторной линии, проходящей через точку M_0, выражается формулами

$$r'(t)=\lambda F,\ r(t_0)=r_0, \tag{1.10}$$

где r_0 – радиус-вектор начальной точки M_0,

λ – произвольное число,

t_0 – начальное значение параметра,

$r=r(t)$ – уравнение векторной линии.

Тогда уравнение векторных линий можно определить из системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{1.11}$$

При непрерывно дифференцируемых функциях P,Q,R, ни в одной точке V не обращающихся одновременно в нуль, через каждую точку V пройдет единственная векторная линия.

Часть пространства, в котором задано векторное поле $F(M)$, ограниченное некоторой поверхностью σ, называется *векторной трубкой*, если в каждой точке поверхности нормаль к ней ортогональна вектору $F(M)$ в этой же точке, т.е. векторная трубка – часть пространства, состоящая из целых векторных линий, каждая из которых или целиком лежит внутри векторной трубки, или целиком находится вне ее.

Пример 1.4.

Найти векторные линии векторного поля: $F(M) = 2yi - 4xj$.

Решение:

Пусть векторное поле имеет вид: $F(M)=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$.

Тогда система дифференциальных уравнений векторных линий определяется по формулам (1.9).

$P(x, y, z) = 2y;\ Q(x, y, z) = -4x;\ R(x, y, z) = 0.$

Тогда имеем систему дифференциальных уравнений: $\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-4x} = \frac{dz}{0}$ или

$$\begin{cases} \frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-4x} \\ dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4xdx = 2ydy \\ dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xdx + ydy = 0 \\ dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int 2xdx + \int ydy = 0 \\ dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = C_1 \\ z = C_2, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Итак, векторными линиями данного векторного поля являются эллипсы, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости xOy, центры этих эллипсов лежат на оси Oz.

1.4 Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция. Теорема Остроградского

Потоком векторного поля F(M) через поверхность σ в сторону, определяемую единичным вектором n нормали к поверхности σ, называют интеграл:

$$\Pi = \iint_{\sigma} F \cdot n d\sigma = \iint_{\sigma} F_n d\sigma = \iint_{\sigma} F \cdot \vec{\sigma}. \tag{1.12}$$

В декартовой системе координат, если $n=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то

$$\Pi = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \tag{1.13}$$

Поверхность σ называется xyz – *проектируемой*, если она однозначно проектируется на каждую координатную плоскость прямоугольной системы координат $Oxyz$. Такую поверхность можно задать с помощью любого из уравнений: $z=z(x,y)$, $(x,y)\in G_1$; $x=x(y,z)$, $(y,z)\in G_2$; $y=y(z,x)$, $(z,x)\in G_3$.

Пусть $V(\sigma)$ – объем области V, ограниченной замкнутой поверхностью σ. В этом случае поток через внешнюю сторону поверхности σ записывают в виде: $\oiint_{\sigma} F_n d\sigma$.

Пример 1.5.

Вычислить поток векторного поля $F(M)=(x-z)i+(x+y+z)j+(x+y)k$ через треугольник, получаемый при пересечении плоскости $x+y+z=1$ с координатными плоскостями. Сторону треугольника выбрать так, чтобы нормаль к ней образовывала острые углы с осями координат.

Решение:

Данная поверхность $x+y+z=1$ является xyz – проектируемой, т.к. однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Уравнение поверхности однозначно разрешимо относительно каждого из аргументов. В этом случае поток векторного поля может быть вычислен по формуле:

$$П=\pm \iint\limits_{DyOz}(x-z)dydz \pm \iint\limits_{DxOz}(x+y+z)dxdz \pm \iint\limits_{DxOz}(x+y)dxdy,$$

где знак перед каждым из двойных интегралов берется соответственно таким, каков знак *cosα, cosβ, cosγ* на поверхность *S*.

По условию задачи нормаль образовывает острые углы с осями координат, поэтому все три интеграла берем со знаком плюс.

$$П= \iint\limits_{DyOz}(x-z)dydz + \iint\limits_{DxOz}(x+y+z)dxdz + \iint\limits_{DxOz}(x+y)dxdy.$$

а) Вычислим первый интеграл: $\iint\limits_{DyOz}(x-z)dydz$.

S: x+y+z–1=0 $\Rightarrow$ *x=1–y–z.*

На рисунке 1.1 изображена проекция поверхности *S* на плоскость *yOz*:

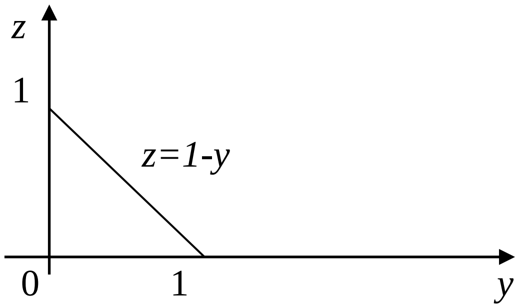


Рисунок 1.1 – Проекция поверхности *S* на плоскость *yOz*

Получаем:

$$\iint\limits_{DyOz}(x-z)dydz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y}(1-y-z-z)dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y}(1-y-2z)dz = \int\limits_0^1 (z-yz-z^2)\Big|_0^{1-y} dy = 0.$$

б) Вычислим второй интеграл: $\iint\limits_{DxOz}(x+y+z)dxdz$.

S: x+y+z =1 $\Rightarrow$ *y=1–x–z.*

На рисунке 1.2 изображена проекция поверхности *S* на плоскость *xOz*:

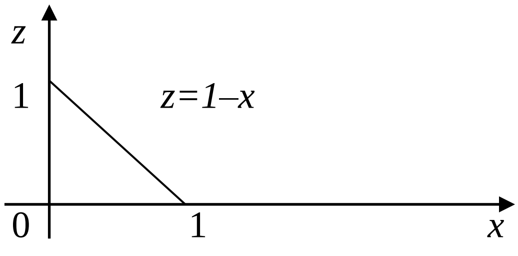


Рисунок 1.2 – Проекция поверхности S на плоскость xOz

Получаем:

$$\iint\limits_{DxOz}(x+y+z)dxdz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x+1-x-z+z)dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dz=\int\limits_0^1 z\Big|_0^{1-x}dx=(x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

в) Вычислим третий интеграл: $\iint\limits_{DxOy}(x+y)dxdy$.

На рисунке 1.3 изображена проекция поверхности S на плоскость xOy:

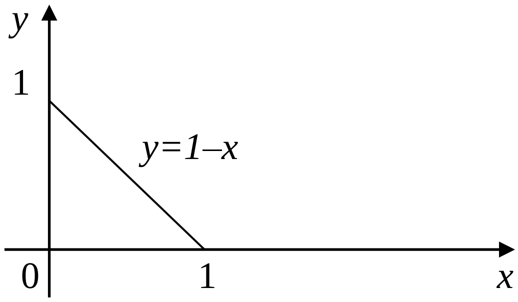


Рисунок 1.3 – Проекция поверхности S на плоскость xOy

Получаем:

$$\iint\limits_{DxOy}(x+y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x+y)dy=\int\limits_0^1(x-x^2+\frac{(1-x)^2}{2})dx=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{(1-x)^3}{6})\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Сложим все три полученных интеграла: $П=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

Таким образом, искомый поток равен $\frac{5}{6}$.

Дивергенцией (*расходимостью*) векторного поля *F(M)* в точке *M* области *V* называется предел:

$$\lim_{\sigma\to M}\frac{\iint\limits_{\sigma}F_n d\sigma}{V(\sigma)}, \tag{1.14}$$

если такой существует.

Следовательно,

$$divF(M)=\lim_{\sigma\to M}\frac{\iint\limits_{\sigma}F_n d\sigma}{V(\sigma)}=\lim_{\sigma\to M}\frac{\iint\limits_{\sigma}(F\cdot n)d\sigma}{V(\sigma)}.$$

Теорема 1.1. Если функции *P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)* непрерывны вместе со своими частными производными в области *V*, то дивергенция поля *F(M),* заданного координатами *P, Q, R,* существует во всех точках области *V* и в любой декартовой системе координат выражается формулой:

$$divF(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (1.15)$$

Если *div F(M)*>0, то у векторного поля *F(M)* есть источник в данной точке, если же *div F(M)*<0, то – сток.

Свойства дивергенции:

1. *div c*=0, *c* – постоянный вектор;

2. $div\,(F_1+F_2)=divF_1+divF_2$;

3. $div(uF)=u\,divF+F\cdot grad\,u$ – скалярное поле.

Пример 1.6.

Найти дивергенцию векторного поля $F(M)=x^2i+y^2j+z^2k$.

Решение:

У нас $\mathrm{P(x,y,z)}=x^2$, $\mathrm{Q(x,y,z)}=y^2$, $\mathrm{R(x,y,z)}=z^2$, поэтому дивергенция векторного поля равна: $divF(M)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)=2(x+y+z)$.

Таким образом, $divF(M)=2(x+y+z)$.

Пусть функции $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области *D* и $z_1(x,y)\le z_2(x,y)$. Область $G=\{(x,y,z)|(x,y)\in D,\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$ называется *z–цилиндрической*. Аналогично определяются *x–цилиндрическая* и *y–цилиндрическая* области. Область *G* называется *простой*, если ее можно разбить на конечное число как *x*–цилиндрических, так и *y*–цилиндрических и *z*–цилиндрических областей.

Теорема 1.2. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в простой замкнутой области V, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью σ. Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_\sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\,, \qquad (1.16)$$

где поверхностный интеграл берется на внешней стороне поверхности σ, которая служит границей V.

Формула (1.16) называется формулой Остроградского–Гаусса, в честь русского математика М.В. Остроградского и немецкого – К.Ф. Гаусса.

Формула Остроградского–Гаусса для векторного поля $F(M)$ имеет вид:

$$\oiint\limits_\sigma F_n d\sigma = \iiint\limits_v divFdV\,. \qquad (1.17)$$

Теперь теорему 1.2 можно сформулировать следующим образом: поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

Пример 1.7.

Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, вычислить поток векторного поля $F(M) = x^2 i + y^2 j + z^2 k$,

где σ – внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Решение:

По формуле Остроградского-Гаусса имеем: $\Pi = \iiint\limits_V (2x + 2y + 2z)dxdydz$,

где V – шар $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \le R^2$. Для вычисления интеграла перейдем к сферическим координатам:

$x=a+\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=b+\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=c+\rho\cos\theta,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi.$

Якобиан перехода равен $\rho^2 sin\theta$. Уравнение границы области σ имеет вид $\rho=R$. Следовательно,

$$\Pi = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^2 (a+b+c+\rho(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta))d\rho =$$

$$= \frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3.$$

Таким образом, искомый поток равен $\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$.

1.5 Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Теорема Стокса

Пусть в области D заданы непрерывное векторное поле $F(M)$ и гладкая линия L на которой определено направление обхода выбором начальной и конечной точек. На этой кривой в каждой точке M в соответствии с направлением обхода можно определить единичный вектор касательной $\tau(M)$, который является непрерывной функцией точки.

Криволинейный интеграл:

$$\int_L F\tau dl = \int_L F_\tau(M)dl, \qquad (1.18)$$

где L – гладкая или кусочно-гладкая линия,

dl – дифференциал длины дуги кривой L,

τ – единичный вектор касательной к линии L в точке M

называется *линейным интегралом* от векторного поля $F(M)$ вдоль линии L.

Линейный интеграл по замкнутой кривой называют *циркуляцией* векторного поля.

В декартовой системе координат:

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz, \qquad (1.19)$$

где P,Q,R – непрерывные составляющие поля F.

Если $F(M)=P(M)i+Q(M)j+R(M)k$ – силовое поле, то его циркуляция вдоль линии L представляет собой работу этого поля вдоль линии L.

Пример 1.8.

Найти циркуляцию векторного поля $F(M)=zi+xj-yk$ вдоль контура

L: $x=3cost$, $y=3sin\ t$, $z=sin\ t$, где $t\in[0,2\pi]$.

Решение:

Применим формулу (1.16): $Ц=\oint\limits_L zdx+xdy-ydz$.

Получаем:

$$Ц=\int\limits_0^{2\pi}\sin t\cdot(-3\sin t)dt+3\cos t\cdot 3\cos tdt-3\sin t\cos tdt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(6\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t+3)dt=(3\sin 2t-\frac{3}{4}\cos 2t+3t)\Big|_0^{2\pi}=6\pi.$$

Таким образом, циркуляция векторного поля, равна 6π.

Пример 1.9.

Найти модуль циркуляции векторного поля $F(M)=(x+z)i+zj+yk$ вдоль линии L:

$$\begin{cases}x^2+y^2=9\\ z=2+y.\end{cases}$$

Решение:

Линия L – является пересечением цилиндрической поверхности $x^2+y^2=9$ с плоскостью $z=2+y$. Очевидно, что это эллипс. Напишем его параметрическое уравнение:

$$\begin{cases}x=3\cos t;\\ y=3\sin t;\\ z=2+3\sin t.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=-3\sin t;\\ dy=3\cos t;\\ dz=3\cos t.\end{cases}$$

Т.к. L - эллипс $\Rightarrow$ $0\leq t\leq 2\pi$.

$$Ц=\oint\limits_L (x+z)dx+zdy+ydz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(3\cos t+2+3\sin t)\cdot(-3\sin t)dt+(2+3\sin t)\cdot 3\cos tdt+3\sin t\cdot 3\cos tdt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(9\cos t\sin t-6\sin t+6\cos t-9\sin^2 t)dt=\left(\frac{9}{2}\sin^2 t+6\cos t-6\sin t-9\left(\frac{\sin 2t}{8}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-9\pi.$$

Таким образом, |Ц|=9π.

Ротором (*вихрем*) поля *F(M)* в точке *M* называется предел:

$$rotF(M)=\lim_{\sigma\to M}\frac{\iint\limits_{\sigma}(n\times F)d\sigma}{V},$$ если он существует.

Если в любой точке области ротор векторного поля *F(M)* равен нулевому вектору, т.е. *rot F(M)=0,* то векторное поле называется *безвихревым векторным полем.*

Здесь V – область, ограниченная замкнутой гладкой или кусочно-гладкой поверхностью σ, V – объем области V, n – нормаль к поверхности σ в точке M.

Для декартовой системы координат с непрерывными вместе со своими частными производными функции P, Q, R ротор определяется следующим образом:

$$rotF(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k. \qquad (1.20)$$

В символической форме:

$$rotF(M)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (1.21)$$

Свойства ротора:

1. *rot c*=0 , *c* – const;

2. *rot F(M)*=0, если *F(M)*=*xi*+*yj*+*zk*;

3. $rot(F_1+F_2)=rot\ F_1+rot\ F_2$;

4. *rot* (*uF*(*M*))=*u rot F(M)+grad u.*

Пример 1.10.

Найти ротор векторного поля $F(M) = x^2 i + y^2 j - z^2 k$.

Решение.

Т.к. $R_y^{'} = Q_z^{'} = P_z^{'} = R_x^{'} = Q_x^{'} = P_y^{'} = 0$, то $rotF = 0$.

Пусть в области *G* определено векторное поле $F(M) = (P, Q, R)$; *L* – замкнутый контур, лежащий в области *G*; *σ* – произвольная поверхность, границей которой является контур *L*; $\sigma \subset G$ (говорят «поверхность *σ* натянута на контур *L*»); $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$–единичный вектор нормали на выбранной стороне поверхности *σ*.

Пусть *σ* – гладкая *xyz* – проектируемая ориентированная поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром *L* и расположенная внутри области *G*, в которой функции *P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)* имеет непрерывные частные производные первого порядка. Тогда справедлива формула Стокса:

$$\iint_\sigma ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma)ds = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz, \quad (1.22)$$

где ориентация контура *L* согласована с ориентацией поверхности *σ*. Левая часть формулы Стокса есть циркуляция векторного поля *F(M)* вдоль контура *L*, а правая часть представляет собой поток через поверхность *σ* векторного поля с координатами $\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right);\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right);\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Эта формула названа по имени английского физика и математика Д. Стокса. Её можно переписать также в следующем виде:

$$\iint_\sigma ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \quad (1.23)$$

Ориентированная поверхность, которую можно разбить на конечное число и плоского треугольников, называется *полиэдральной поверхностью* и представляет собой пример простейшей поверхности, к которой применима формула Стокса.

Формула Стокса в векторной форме имеет вид:

$$\oint_L F_\tau dl = \iint_\sigma (rotF)_n d\sigma, \tag{1.24}$$

т.е. циркуляция векторного поля F вдоль некоторого замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность, ограниченную этим контуром. Из последней формулы следует:

$$(rotF(M))_n = \lim_{\sigma\to M} \frac{\oint_L F_\tau dl}{S}, \tag{1.25}$$

где S – площадь поверхности σ,

$(rotF(M))_n$ – проекция ротора на нормаль.

Пример 1.11.

Вычислить циркуляцию векторного поля $F(M) = yi + xj + k$ вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$ в положительном направлении.

Решение:

В этом случае $P=y;$ $Q=x;$ $R=1$. Следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1-(-1); \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

По формуле Стокса

$$Ц = \iint_{(\Phi)} (1-(-1))dxdy = 2\iint_{(\Phi)} dxdy = 2\int_0^{2\pi} dx \int_0^1 \rho d\rho = 2\pi.$$

Таким образом, циркуляция векторного поля, равна 2π.

1.6 Потенциальное и соленоидальное поля

Пусть V – односвязная область, в которой задано поле $F(M)$.

Векторное поле $F(M)$ называется *потенциальным,* если его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля $u(M)$: $F(M) = grad\, u(M)$.

Функцию $u(M)$ называют *потенциалом* поля $F(M)$.

Поле *F(M)* потенциально в *V* тогда и только тогда, когда *rot F(M)*=0, т.е.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y};\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}.$$

Таким образом, потенциальное поле *F(M)* является безвихревым.

При непрерывных вместе со своими частными производными функциями *P, Q, R* задача о нахождении потенциала сводится к задаче восстановления функции по ее полному дифференциалу.

В потенциальном поле линейный интеграл не зависит от формы пути и определятся только начальной и конечной точками пути.

Верно и обратное: если линейный интеграл поля *F(M)* не зависит от пути, то поле *F(M)* потенциально. Потенциал поля определяется с точностью до постоянного слагаемого. Это означает, что если *u(M)* один из потенциалов поля *F(M)*, то выражения *F(M)+C* при любом постоянном *C* также являются потенциалами поля.

Если поле задано в декартовой координатной форме: $F(M)=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$, то потенциал принимает вид:

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz. \qquad (1.26)$$

Отметим, что потенциальность поля *F(M)* и равенство нулю циркуляции поля по искомому простому кусочно-гладкому замкнутому контуру являются эквивалентными свойствами.

Если поле *F(M)* потенциально в *произвольной* области, то в любой точке этой области $rotF(M)=0$. Это свойство потенциального поля является наиболее важным. Обратное, вообще говоря, неверно. Понятие потенциального и безвихревого полей оказываются эквивалентными только для поверхностно односвязных областей.

Пример 1.12.

Доказать, что поле *F(M)=(y+z)i+(z+x)j+(x+y)k* является потенциальным, и найти его потенциал.

Решение:

Поле *F(M)* определено во всем пространстве, т.е. в односвязной области, поэтому достаточно проверить, что *rot F(M)*=0. Имеем:

$$rot\ F(M)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=(1-1)i+(1-1)j+(1-1)k=0,$$

что и доказывает потенциальный характер поля *F(M)*.

Для нахождения потенциала воспользуемся формулой (1.26):

$$u(x,y,z)=\int_0^x P(x,0,0)dx+\int_0^y Q(x,y,0)dy+\int_0^z R(x,y,z)dz=\int_0^x 0dx+\int_0^y xdy+\int_0^z (x+y)dz=$$
$$=0+xy+(x+y)z=xy+yz+zx.$$

Векторное поле, дивергенция в каждой точке которого равна нулю, называется *соленоидальным* или *трубчатым*.

С понятием соленоидального поля связано понятие векторного потенциала. Если в области *V*, в которой определено поле *F(M)* существует такое векторное поле *A(M),* что в каждой точке области *V* $F(M)=rot\ A(M)$, то векторное поле *A(M)* называют *векторным потенциалом поля F(M)* в области *V*.

Для поля *F(M)*, обладающего векторным потенциалом в области *V*, поток через любую замкнутую поверхность, содержащуюся в области *V*, равен нулю.

Поле *F(M),* обладающее векторным потенциалом в области *V*, является в ней соленоидальным. Обратное, вообще говоря, неверно: для произвольно взятой области *V* соленоидальность поля *F(M)* еще не гарантирует существования во всей области *V* векторного потенциала поля *F(M)*. Однако, если ограничиться пространственно-односвязными областями, то соленоидальность поля и наличие у него векторного потенциала являются эквивалентными свойствами. Таким образом, в пространственно-односвязной области условие *div F(M)*=0 является необходимым и достаточным для существования векторного потенциала.

Из формулы Остроградского-Гаусса следует, что если соленоидальное поле задано в односвязной области, то поток вектора через любую замкнутую поверхность, принадлежащую этой области, равен нулю:

$$\Pi = \iint_{\sigma} F \cdot n d\sigma = \iiint_{V} divF(M)dV = 0 .$$

Пусть соленоидальное поле *F(M)* задано в односвязной области. Тогда поток вектора *F(M)* через любую поверхность *S*, натянутую на заданный контур *L*, не зависит от вида этой поверхности, а зависит только от контура *L*.

Возьмем в поле *F(M)* замкнутый контур *L* и проведем через его точки векторные линии. Образовавшаяся поверхность называется *векторной трубкой*. Любая другая векторная линия, не проходящая через точки контура *L*, либо целиком лежит в векторной трубке, либо находится вне ее.

Интенсивностью векторной трубки называется поток поля через поперечное сечение этой трубки. Для соленоидальных полей имеет место так называемый закон сохранения интенсивности векторной трубки.

Если соленоидальное поле *F(M)* определено в односвязной области *V*, то интенсивность векторной трубки постоянна вдоль всей трубки.

В соленоидальном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни кончаться внутри поля; они либо замкнуты, либо имеют концы на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).

1.7 Оператор Гамильтона. Операции второго порядка в векторном анализе. Оператор Лапласа

Оператор Гамильтона (*оператор набла*) – линейный дифференциальный оператор по определению записывают в виде

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \tag{1.27}$$

С учетом этого оператора основные операции теории поля можно записать так:

$grad\ u = \nabla u$;

$div\ F = \nabla \cdot F$;

$rot\ F = \nabla \times F$.

С помощью оператора набла удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа, причем эти формулы приобретают в такой записи большую наглядность и выразительность. При выполнении действий с оператором ∇ следует учитывать, что оператор дифференциальный и векторный, т.е. пользоваться правилами дифференциального исчисления и векторной алгебры. При этом следует помнить, что если ∇ действует на какое-либо произведение, то в первую очередь учитывают его дифференциальные свойства, а затем векторные. Входящие в состав формулы величины, которые подвергаются воздействию оператора набла, обозначают стрелкой, в окончательном результате они должны стоять слева от него.

Попарные комбинации операции градиента дивергенции и ротора называют *операциями второго порядка*. Применительно к скалярному полю имеют смысл две операции *rot grad u* и *div grad u*:

$$rot\ grad\ u = \nabla \times \nabla u \tag{1.28}$$

$$rot\ grad\ u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1.29}$$

Символ $\nabla \cdot \nabla$ называют *оператором Лапласа* и обозначают Δ:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.30}$$

Применительно к векторной величине $F=(P,Q,R)$:

$$\Delta F = \Delta Pi + \Delta Qj + \Delta Rk.$$

Операции второго порядка для векторного поля:

1. $div\ rot\ F = \nabla \cdot \nabla \times F = 0$ – поле, являющееся ротором некоторого поля F, соленоидального;

2. $rot\ rot\ F = \nabla \times \nabla \times F = \nabla(\nabla \cdot F) - (\nabla \cdot \nabla)F = grad\ div\ F$.

3. $$grad\ div\, u = \nabla(\nabla \cdot F) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right) i + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right) j +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}\right) k.$$

1.8 Контрольные вопросы для текущего контроля

1. Какое поле называется скалярным?
2. Какие бывают виды скалярных полей?
3. Что такое градиент скалярного поля?
4. Что показывает градиент скалярного поля?
5. Что такое производная по направлению скалярного поля?
6. Что характеризует производная по направлению скалярного поля?
7. Как находится производная по направлению скалярного поля?
8. Какое поле называется векторным?
9. Какие бывают виды векторных полей?
10. Какие линии называются векторными?
11. Какие линии называются силовыми?
12. Что называют потоком векторного поля?
13. Что называют дивергенцией векторного поля?
14. Сформулировать теорему Остроградского-Гаусса.
15. Что называют циркуляцией векторного поля?
16. Что называют ротором векторного поля?
17. Как найти ротор векторного поля?
18. Записать формулу Стокса.

19. Какое поле называется безвихревым?

20. Какое поле называется потенциальным?

21. Что называют потенциалом векторного поля?

22. Записать условие безвихревого поля.

23. Как находится потенциал векторного поля?

24. Какое поле называется соленоидальным?

1.9 Задания для самостоятельного решения

1. Найти линии и поверхности уровня скалярного поля:

а) $u(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$;

б) $u(x,y)=\dfrac{x}{y}$;

в) $u(x,y)=\sin(x^2-y^2)$;

г) $u(x,y,z)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$;

д) $u(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{z}$.

2. Найти градиент скалярного поля:

а) $u(x,y)=arctg\,\dfrac{y}{x}$;

б) $u(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-xy-4x+2y-4z$ в точке $M(0,0,0)$;

в) $u(x,y,z)=3x^2y-3y^3+z^4$ в точке $M(1,2,1)$.

3. Найти производную скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению, идущему к точке M.

а) $u(M)=x^2y-z^2$, $M_0(1,1,1)$, $M(2,1,1)$;

б) $u(M)=xy-\dfrac{x}{z}$, $M_0(1,2,1)$, $M(3,2,0)$;

в) $u(M)=x^2y^2z+x$, $M_0(1, -3,4)$, $M(2,1,1)$;

г) $u(M)=z^2+xy$, $M_0(1,2,-1)$, $M(3, -2,1)$;

д) $u(M)=x^2-3y^2+2z$, $M_0(1,3,2)$, $M(-2,1,1)$.

4. Найти производную скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению вектора нормали к поверхности S в этой точке, образующего с осью Oz острый угол.

а) $u(M)=xz^2-xy+y+2z$; $S:\ x^2-y^2-3z+12=0$; $M_0(2,2,4)$;

б) $u(M)=\ln(x^2+y^2+1)-x^2-z^2$; $S:\ x^2-6x+9y^2-4z-23=0$; $M_0(3,0,-4)$;

в) $u(M)=3xyz+2\ln(x^2+5)$; $S:\ x^2-2y^2-2z^2-3=0$; $M_0(1,1,2)$;

г) $u(M)=7\ln(x^2+y^2)-3xyz$; ; $S:\ 2x^2-y^2+z^2-7=0$; $M_0(1,1,1)$.

5. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(M)$ и $v(M)$ в точке M_0.

а) $u(M)=x^2+y^2+z^2-2xyz$; $v(M)=x^2yz^3$; $M_0(1,-1,1)$;

б) $u(M)=x^2yz^2+x+y$; $v(M)=\dfrac{xy}{z}$; $M_0(1,1,1)$;

в) $u(M)=x^3y^2z+xyz^2$; $v(M)=\dfrac{xz^2}{y}$; $M_0(-1,1,2)$;

г) $u(M)=x^2+9y^2+z^3$; $v(M)=\dfrac{1}{xyz}$; $M_0(-1,1,1)$;

6. Найти векторные линии поля $F(M)=\dfrac{1}{x}i+\dfrac{1}{y}j$.

7. Найти векторные линии поля $F(M)=\dfrac{1}{x^2}i-\dfrac{1}{y^2}j+\dfrac{1}{z^2}k$.

8. Найти уравнения семейства векторных линий поля: $F(M)=(x^2-y^2-z^2)i+2xyj+2xzk$.

9. Вычислить поток векторного поля $F(M)$ через треугольник, получаемый при пересечении плоскости S с координатными плоскостями, сторону треугольника выбрать так, чтобы нормаль к ней образовывала острые углы с осями координат.

а) $F(M)=-4zi+(y-x+z)j+(3x-7)k; S: 2x-y+2z+2=0$;

б) $F(M)=(x-z)i+(x+y)j+(y+z)k;\ S: x+y+2z-4=0;$

в) $F(M)=2xi-yj+zk;\ S: x+y+z=2;$

г) $F(M)=xi-2yj+zk;\ S: x+\frac{y}{2}+z=2.$

10. Найти циркуляцию векторного поля *F(M)* вдоль контура *l:*

а) $F(M)=xyi+j+zk;\ l:\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi]; \\ z=2. \end{cases}$

б) $F(M)=(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k;\ l:\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \qquad t\in[0,2\pi]; \\ z=1-\cos t. \end{cases}$

в) $F(M)=2zi-xj+yk;\ l:\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \qquad\qquad t\in[0,2\pi]. \\ z=1-\cos t-\sin t. \end{cases}$

11. Найти циркуляцию векторного поля *F(M)* вдоль контура *l:*

а) $F(M)=xzi+j+yk;\ l:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=5. \end{cases}$

б) $F(M)=yi-xj+zk;\ l:\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=3+y. \end{cases}$

в) $F(M)=zi+yj+2xk;\ l:\begin{cases} x^2+y^2-z^2=2, \\ z=\sqrt{2}. \end{cases}$

12. Применяя формулу Остроградского-Гаусса, преобразовать поверхностные интегралы в интегралы по объему:

а) $\iint\limits_{\sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds;$

б) $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)(dydz+dxdz+dxdy);$

в) $\iint\limits_{\sigma}x^2ydydz+y^3dxdz+zxdxdy;$

г) $\iint\limits_{\sigma} xydxdy + yzdydz + xzdzdx$.

13. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить следующие интегралы:

а) $\iint\limits_{\sigma} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds,$ где σ – поверхность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

б) $\iint\limits_{\sigma} (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)ds,$ где σ – поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

в) $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$ где σ – поверхность конуса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0\ (0 \le z \le b)$.

14. Найти дивергенцию вектора $F(M) = (x - y^2)i + x^2zj + xyk$.

15. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{\sigma} x^2zdxdy + y^2xdydz$, где σ – полная поверхность параболоида $z=x^2+y^2$, ограниченного плоскостью $z=1$.

16. Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, вычислить поверхностные интегралы по внешней стороне поверхности σ (если поверхность не замкнутая, дополните её до замкнутой).

а) $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где σ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

б) $\iint\limits_{\sigma} (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$, где σ часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ при $0 \le z \le h$;

в) $\iint\limits_{\sigma} yzdydz + zxdzdx + xydxdy$, где σ – граница тела $x^2 + y^2 \le a^2, 0 \le z \le h$;

г) $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy,$ где σ – часть поверхности $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \le z \le 1$;

д) $\iint\limits_{\sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy,$ где σ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = x$;

е) $\iint\limits_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$ где σ – поверхность куба $0 \le x \le a$; $0 \le y \le a$; $0 \le z \le a$.

17. Интеграл $\int\limits_{L} (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать с помощью формулы Стокса в интеграл по поверхности, «натянутой» на этот контур.

18. Вычислить интеграл $\int\limits_{L} x^2 y^2 dx + dy + zdz$, где контур L – окружность $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Интегрирование по окружности в плоскости xOy ведется в положительном направлении.

19. Вычислить ротор векторного поля:

а) $F(M) = \sin(2x - y - z)(2i - j + k)$;

б) $F(M) = xyz(xi - yj + zk)$;

в) $F(M) = arctg(x - y + z)(i - 3j - 2k)$;

20. Вычислить ротор векторного поля $F(M) = e^{x+2y+3z}(3xi + 2yj + zk)$ в точке $M_0(3, -3, 1)$.

21. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию векторного поля $F(M) = xyzi + (x + y + z)j - x^2 y^2 k$ вдоль контура квадрата $ABCD$ определяемого уравнениями: $-x+y=a$; $x+y=a$; $x-y=a$; $x+y=-a$; $z=0$.

22. Вычислить с помощью формулы Стокса циркуляцию векторного поля $F(M) = (x + z)i + (y - z)j + (y - x)k$ вдоль окружностей:

а) $(y+1)^2+(z-1)^2=1$, $x=5$ (вектор положительной нормали $n=i$);

б) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$, $z=0$ (вектор положительной нормали $n=k$).

23. Доказать, что векторное поле $F(M)$ потенциально, и найти его потенциал:

а) $F(M)=y^2 i+2xy\,j+z\,k$;

б) $F(M)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}i+\dfrac{x}{x^2+y^2}j+2k$;

в) $F(M)=(3yz+x^2)\,i+(2y^2+3xz)\,j+(z^2+3xy)\,k$.

24. Проверить, будет ли потенциальным поле $F(M)$. В случае потенциальности поля найти его потенциал $u(x,y,z)$.

а) $F(M)=(-2x-yz)i+(-2y-xz)j+(-2z-xy)k$;

б) $F(M)=(2x-yz)i+(2y-xz)j+(2z-xy)k$;

в) $F(M)=(2x+yz)i+(2y+xz)j+(2z+xy)k$;

г) $F(M)=(2x-4yz)i+(2y-4xz)j+(2z-4xy)k$;

д) $F(M)=(2x-3yz)i+(2y-3xz)j+(2z-3xy)k$.

2 Методы оптимизации

2.1 Понятие оптимизации

На протяжении веков людей интересовали решения различных экстремальных задач. Еще Евклид упоминает задачу о нахождении наибольшей и наименьшей длин отрезка прямой, проведенной из точки к окружности. Дошла до нас и знаменитая задача Дидона – среди плоских фигур с заданным периметром найти ту, которая имеет наибольшую площадь. По преданию, Финикийская царица Дидона, высадившись на берег северной Африки, попросила у местных вождей немного земли – столько, сколько можно охватить одной воловьей шкурой. Получив разрешение, она велела разрезать шкуру на тончайшие полоски и связать их между собой. Этой длинной полоской она отгородила круг, который и оказался искомой фигурой. Впоследствии здесь возник город Карфаген.

В наши дни жизнь общества существенно усложнилась и уже волнуют новые, ранее не встречавшиеся вопросы: Как лучше управлять производством? Как минимизировать потери при раскрое листов металла? Как управлять ракетой, чтобы она достигла цели в кратчайшее время? Как лучше организовать поиск месторождения нефти? И многое, многое другое.

На практике таких результатов можно достичь не одним, а многими различными способами. Естественно, что когда решений много, ищется наилучшее. Математически это сводится обычно к нахождению наибольшего или наименьшего значения некоторой функции, т.е. к задаче: найти $max\ (min)\ f(x)$ при условии, что переменная x (обычно говорят точка x) пробегает некоторое заранее данное множество X. Пишут так: $f(x)\to max\ (min),\ x\in X$.

В большинстве случаев точка x задается набором из нескольких чисел: $x=(x_1,x_2,\ \ldots\ ,\ x_n)$, т.е. является точкой n–мерного арифметического пространства R^n; соответственно множество X есть подмножество в R^n.

Множество X называется *допустимым множеством данной задачи*, а функция $f(x)$ – *целевой функцией*.

Оптимизационная задача – это экономико-математическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений.

Оптимизация – от латинского слова «оптимус» – наилучший – поиск наилучшего, поиск наилучшего проектного изделия.

Существует *2 вида задач оптимизации:*

- *максимизации;*
- *минимизации.*

При постановке задачи оптимизации необходимо:

1. Наличие объекта оптимизации и цели оптимизации. При этом формулировка каждой задачи оптимизации должна требовать экстремального значения лишь одной величины, т.е. одновременно системе не должно приписываться два и более критериев оптимизации, т.к. практически всегда экстремум одного критерия не соответствует экстремуму другого.

2. Наличие ресурсов оптимизации, под которыми понимают возможность выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта. Объект должен обладать определенными степенями свободы – управляющими воздействиями.

3. Возможность количественной оценки оптимизируемой величины, поскольку только в этом случае можно сравнивать эффекты от выбора тех или иных управляющих воздействий.

4. Учет ограничений. Обычно оптимизируемая величина связана с экономичностью работы рассматриваемого объекта. Оптимизируемый вариант работы объекта должен оцениваться какой-то количественной мерой – критерием оптимальности.

Критерием оптимальности называется количественная оценка оптимизируемого качества объекта.

На основании выбранного критерия оптимальности составляется целевая функция, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение. Вид критерия оптимальности или целевой функции определяется конкретной задачей оптимизации.

Для того чтобы решить задачу оптимизации, достаточно найти ее оптимальное решение, т.е. указать $x^*\in X$ такое, что $f(x^*)\geq f(x)$ при любом $x\in X$, или для случая минимизации – $f(x^*)\leq f(x)$ при любом $x\in X$.

Оптимизационная задача является *неразрешимой*, если она не имеет оптимального решения.

Для оптимизационного решения задачи требуется:

1. Сформулировать задачу;

2. Построить математическую модель (определить множество переменных);

3. Определить ограничения на возможные решения;

4. Определить целевую функцию;

5. Применить формальные математические методы, позволяющие найти решения.

Постановка задачи поиска минимума функций содержит:

- целевую функцию $f(x)$, где $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенную на n-мерном арифметическом пространстве R^n. Ее значения характеризуют степень достижения цели, во имя которой поставлена или решается задача;

- множество допустимых решений $X \subseteq R^n$, среди элементов которого осуществляется поиск.

Требуется найти такой вектор x^* из множества допустимых решений, которому соответствует минимальное значение целевой функции на этом множестве:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x). \tag{2.1}$$

Замечания:

1. Задача поиска максимума функции $f(x)$ сводится к задаче поиска минимума путем замены знака перед функцией на противоположный:

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X}[-f(x)]. \tag{2.2}$$

2. Задача поиска минимума и максимума целевой функции $f(x)$ называется задачей поиска *экстремума:* $f(x^*) = \underset{x \in X}{extr}\, f(x)$.

3. Если множество допустимых решений X задается ограничениями (условиями), накладываемыми на вектор x, то решается задача поиска *условного экстремума.* Ограничения могут быть представлены в виде равенств или неравенств. В первом случае решается задача нахождения условного экстремума при ограничениях типа равенств, а во втором – типа неравенств. Также можно рассматривать задачу нахождения условного экстремума со смешанными ограничениями, когда множество допустимых решений задается равенствами и

неравенствами. Если $X=R^n$, т.е. ограничения (условия) на вектор x отсутствуют, решается задача поиска *безусловного экстремума.*

4. Решением задачи поиска экстремума является пара (x^*, $f(x^*)$), включающая точку x^* и значение целевой функции в ней.

В зависимости от числа независимых переменных целевой функции различают следующие задачи:

– оптимизация при одной переменной – одномерная оптимизация,

– оптимизация при нескольких переменных – многомерная оптимизация,

В зависимости от критерия оптимизации различают задачи:

– с одним критерием оптимизации,

– со многими критериями. Для решения задач со многими критериями используются специальные методы оптимизации.

2.2 Методы одномерной оптимизации

Пусть требуется оптимизировать *f(x)* (формальная постановка)

$$\begin{cases} y = f(x) \to opt \\ \quad a \le x \le b \end{cases} \tag{2.3}$$

$f(x)$ – целевая функция – функция одной переменной;

$a, b, x, f(x) \in R.$

Найти x, при котором $f(x)$ принимает оптимальное значение.

Пусть функция определена в некоторой области S ($x \in S$), в случае одномерной оптимизации S – интервал $S = \{x \mid a \le x \le b\}$:

1. точка x^* называется *глобальным минимумом*, если для $\forall x \in S,\ f(x^*) \le f(x)$.

2. точка x^* называется строгим *глобальным минимумом*, если для $\forall x \in S,\ f(x^*) < f(x)$

3. точка x^* называется локальным минимумом, если для $\forall x$ из некоторой окрестности точки x^* выполняется неравенство: $f(x^*) \le f(x)$

4. точка x^* называется строгим локальным минимумом, если для $\forall x$ из некоторой окрестности точки x^* выполняется неравенство: $f(x^*) < f(x)$.

Следствие: любая точка глобального минимума является локальным минимумом, обратное не верно.

Рассмотрим два способа решения:

- аналитический
- численный

В аналитическом $f(x)$ задается в виде формулы, в численном $f(x)$ задается в виде черного ящика, на входе подается x, на выходе значение целевой функции в этой точке.

2.3 Аналитический способ нахождения локального минимума

Для нахождения глобального минимума необходимо найти все локальные минимумы и выбрать наименьшее значение.

В дальнейшем будем рассматривать задачу нахождения локального минимума.

Известно, что для того, чтобы точка x^* была точкой локального минимума дифференцируемой функции $f(x)$, необходимо, чтобы выполнялось равенство $f'(x^*) = 0$.

Точка x^*, удовлетворяющая этому равенству, называется *стационарной точкой*. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема, то для того, чтобы стационарная точка x^* была точкой строгого локального минимума, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f''(x^*) > 0$.

Если дважды дифференцируемая функция *f(x)* задана на отрезке *[a,b]*, то можно предложить следующий путь решения задачи нахождения глобального минимума:

1. Найти все стационарные точки на отрезке *[a,b]* из условия $f'(x^*)=0$, т.е. найти корни этого уравнения, принадлежащие отрезку *[a, b]*.

2. Найденные стационарные точки исследовать на выполнение условия $f''(x^*)>0$, т.е. из найденных стационарных точек выделить точки локальных минимумов, для которых выполняется это неравенство.

3. Сравнить между собой значения *f(x)* на концах отрезка *[a, b]* и в точках локальных минимумов. Наименьшему из этих значений соответствует точка глобального минимума *f(x)* на отрезке *[a, b]*.

Пусть функция *f(x)* определена на отрезке *[a, b]*. Функция *f(x) унимодальна* и имеет на промежутке *[a, b]* единственный *максимум*, если существует x_0, $a \le x_0 \le b$, такое, что *f(x)* или строго возрастает при $x \le x_0$ и строго убывает при $x > x_0$, или строго возрастает при $x < x_0$ и строго убывает при $x \ge x_0$.

Функция *f(x) унимодальна* и имеет на промежутке *[a, b]* единственный *минимум*, если существует x_0, $a \le x_0 \le b$, такое, что *f(x)* или строго убывает при $x \le x_0$ и строго возрастает при $x > x_0$, или строго убывает при $x < x_0$ и строго возрастает при $x \ge x_0$.

Свойство унимодальности позволяет сколь угодно точно определять положение точки экстремума.

Многие алгоритмы минимизации функции одной переменной построены в предположении, что функция унимодальная на некотором отрезке. Этот отрезок будем называть *отрезком локализации точки x**.

Из определения унимодальной функции вытекает следующее важное свойство. Пусть *f(x)* унимодальная функция на отрезке *[a, b]* и $a \le x_1 < x_2 \le b$. Тогда: если $f(x_1) \le f(x_2)$, то $x^* \in [a, x_2]$; если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x^* \in [x_1, b]$, где x^* – точка минимума *f(x)* на отрезке *[a, b]*.

Иллюстрация этого свойства представлена на рисунках 2.1 и 2.2.

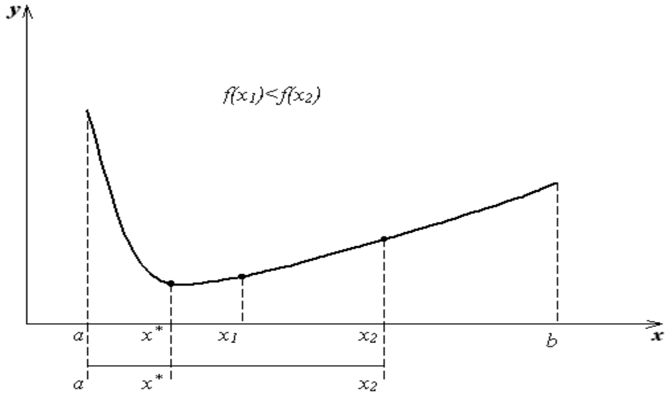


Рисунок 2.1 – Иллюстрация унимодальной функции

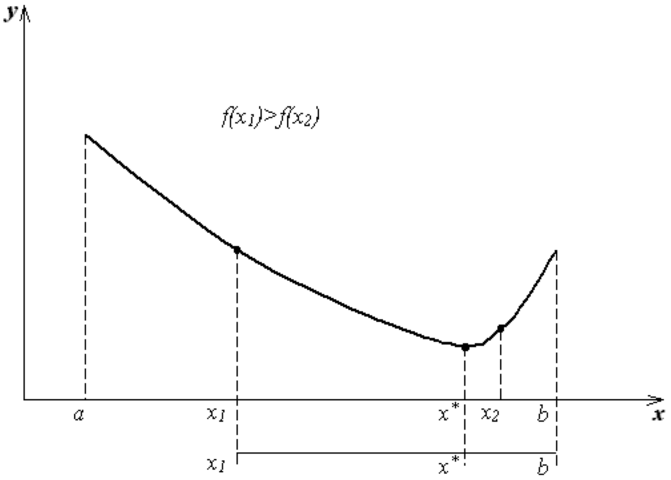


Рисунок 2.2 – Иллюстрация унимодальной функции

Аналитический метод нахождения минимума функции одной переменной требующий решения в явном виде уравнения $f\,'(x^*)=0$ и проверки условия $f\,''(x^*)>0$, зачастую весьма затруднителен. В таких случаях используются численные методы решения.

2.4 Численный способ нахождения локального минимума

Классический подход к проблеме поиска экстремумов привел к формулировке необходимых условий, которым должны удовлетворять координаты точек экстремумов. Однако в рамках этого подхода возникла и другая идея – поиск точки экстремума путем вычисления значений функции в нескольких точках и последующего сравнения этих значений. Хотя эта идея была применена первоначально лишь к функциям одной переменной, впоследствии она весьма плодотворно использовалась в численных методах современного математического программирования для функций нескольких переменных. Познакомимся с несколькими схемами реализации этой общей идеи.

Существует две различные стратегии выбора точек, в которых производится вычисление этой функции. Если все точки задаются заранее, до начала вычислений, то это *пассивная (параллельная)* стратегия. Если это точки выбираются последовательно в процессе поиска с учетом результатов предыдущих вычислений, то это *последовательная стратегия.*

Стратегия поиска включает в себя 3 этапа:

1. выбор начального интервала неопределенности. Границы a_0, b_0 интервала должны быть такими, чтобы функция $f(x)$ была унимодальной.

2. уменьшение интервала неопределенности.

3. проверка условия окончания: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности $[a_k, b_k]$ оказывается меньше установленной величины.

Ответом является множество точек, принадлежащих последнему интервалу неопределенности, среди которых каким-либо образом выбирается решение задачи x^*.

В некоторых методах заранее задается или находится количество N вычислений функции. В этом случае продолжительность поиска ограничена.

Для выбора начального интервала неопределенности можно применить *алгоритм Свенна:*

1. задать произвольно следующие параметры: x^0 – некоторую точку, t>0 – величину шага. Положить k=0;
2. вычислить значение функции в трех точках: x^0-t, x^0, x^0+t;
3. проверить условие окончания:

а) если $f(x^0-t) \geq f(x^0) \leq f(x^0+t)$, то начальный интервал неопределенности найден: $[a_0, b_0]=[x^0-t,\ x^0+t]$;

б) если $f(x^0-t) \leq f(x^0) \geq f(x^0+t)$, то функция не является унимодальной, а требуемый интервал неопределенности не может быть найден. Вычисления при этом прекращаются (рекомендуется задать другую начальную точку x^0;

в) если условие окончания не выполняется, то перейти к шагу 4;

4. определить величину Δ:

а) если $f(x^0-t) \geq f(x^0) \geq f(x^0+t)$, то $\Delta=t$; $a_0=x^0$; $x^1=x^0+t$; $k=1$;

б) если $f(x^0-t) \leq f(x^0) \leq f(x^0+t)$, то $\Delta=-t$; $b_0=x^0$; $x^1=x^0-t$; $k=1$;

5. найти следующую точку $x^{k+1}=x^k+2^k\Delta$;

6. проверить условие убывания функции

а) если $f(x^{k+1})< f(x^k)$ и $\Delta=t$, то $a_0=x^k$;

если $f(x^{k+1})< f(x^k)$ и $\Delta=-t$, то $b_0=x^k$;

в обоих случаях положить $k=k+1$;

б) если $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$, процедура завершается. При $\Delta=t$, положить $b_0=x^{k+1}$, а при $\Delta=-t$, положить $a_0=x^{k+1}$. В результате имеем $[a_0,b_0]$ – искомый интервал неопределенности.

Уменьшение интервала неопределенности, осуществляемое при использовании последовательной стратегии, производится на основании вычисления функции в двух точках текущего интервала. Свойство унимодальности позволяет определить, в каком из возможных подынтервалов точка минимума отсутствует.

Пример 2.1.

Найти начальный интервал неопределенности для поиска минимума функции $f(x)=(x-5)^2$.

Решение:

Воспользуемся алгоритмом Свенна.

Зададим $x^0=1$ и $t=1$. Положим $k=0$.

Вычислим значения функции в точках $x^0–t=1–1=0$, $x^0=1$, $x^0+t=1+1=2$: $f(0)=25$, $f(1)=16$, $f(2)=9$.

Условия окончания не выполняются. Т.к. $f(0)>f(1)>f(2)$, то $\Delta=1$; $a_0=1$; $x^1=x^0+t=2$; $k=1$.

Найдем следующую точку $x^2=x^1+2\Delta=2+2=4$. Т.к. $f(x^2)=f(4)=1<f(x^1)=f(2)=9$ и $\Delta=1$, то $a_0= x^1=2$, положим $k=2$ и найдем следующую точку $x^3=x^2+4\Delta=4+4=8$. Т.к. $f(x^3)=f(8)=9>f(x^2)=f(4)=1$ и $\Delta=1$, то поиск завершен и правая граница $b_0=x^3=8$. Поэтому начальный интервал неопределенности имеет вид $[a_0,b_0]=[2,8]$.

Подавляющее большинство численных методов оптимизации относится к классу итерационных, т.е. порождающих последовательность точек в соответствии с предписанным набором правил, включающим критерий окончания. При заданной начальной точке x^0 методы генерируют последовательность $x^0,x^1,x^2,\ldots$. Преобразование точки x^k в x^{k+1} представляет собой итерацию.

Для определенности рассмотрим задачу поиска безусловного локального минимума:

$$f(x^*) = \min_{x\in R^n} f(x). \tag{2.4}$$

Численное решение задачи (2.4), как правило, связано с построением последовательности $\{x^k\}$ точек, обладающих свойством

$$f(x^{k+1})< f(x^k),\ k=0,1,\ \ldots\ . \tag{2.5}$$

Общее правило построения последовательности $\{x^k\}$ имеет вид:

$$x^{k+1}=x^k+t_kd^k,\ \ k=0,1,\ \ldots\ . \tag{2.6}$$

где x^0 – начальная точка поиска;

d^k – приемлемое направление перехода из точки x^k в точку x^{k+1}, обеспечивающее выполнение условия (2.5) и называемое *направлением спуска*;

t_k – величина шага.

Начальная точка поиска x^0 задается, исходя из физического содержания решаемой задачи и наличия априорной информации о положении точек экстремума.

Приемлемое направление спуска d^k должно удовлетворять условию:

$$(\nabla f(x^k),\ d^k)<0,\ k=0,1,\ \ldots\ . \tag{2.7}$$

обеспечивающему убывание функции $f(x)$. Примером приемлемого направления является направление вектора антиградиента: $d^k=-\nabla f(x^k)$.

Величина шага $t_k>0$ выбирается либо из условия (2.5) либо из условия минимума функции вдоль направления спуска:

$$f(x^k+t_k d^k)\to \min_{t_k} . \tag{2.8}$$

Выбор шага t_k из условия (2.8) делает спуск в направлении d^k *наискорейшим.*

В зависимости от наивысшего порядка частных производных функции нескольких переменных $f(x)$, где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, используемых для формирования d^k и t_k, численные методы решения задачи безусловной минимизации принято делить на три группы.

1. *Методы нулевого порядка,* использующие только информацию о значении функции $f(x)$.

2. *Методы первого порядка,* использующие информацию о первых производных функции $f(x)$.

3. *Методы второго порядка,* требующие для своей реализации знания вторых производных функции $f(x)$.

2.5 Методы нулевого порядка нахождения безусловного минимума функции одной переменной

2.5.1 Метод равномерного поиска

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^*\in R$, что $f(x^*)=min\ f(x)$.

Метод относится к пассивным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$ и количество вычислений функции N. Вычисления производятся в N равноотстоящих друг от друга точках (при этом интервал L_0 делится на N+1 равных интервалов). Путем сравнения величин $f(x_i)$, $i=1, \ldots , N$ находится точка x_k, в которой значение функции наименьшее. Искомая точка минимума x^* считается заключенной в интервале $[x_{k-1}, x_{k+1}]$.

Алгоритм:

Шаг 1: Задать начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$, N – количество вычислений функции.

Шаг 2: Вычислить точки $x_i=a_0+i\dfrac{(b_0-a_0)}{N+1}$, $i=1, \ldots , N$, равноотстоящие друг от друга.

Шаг 3. Вычислить значения функции в N найденных точках: $f(x_i)$, $i=1, \ldots , N$.

Шаг 4. Среди точек x_i, $i=1, \ldots , N$ найти такую, в которой функция принимает наименьшее значение: $f(x_k)=min\ f(x_i)$.

Шаг 5. Точка минимума x^* принадлежит интервалу: $x^*\in[x_{k-1}, x_{k+1}]=L_N$, на котором в качестве приближенного решения может быть выбрана точка $x^*=x_k$.

Пример 2.2.

Найти минимум функции $f(x)=2x^2-12x$ методом равномерного поиска.

Решение:

1. Найдем начальный интервал неопределенности методом Свенна.

Зададим x^0=5 и t=5. Положим k=0.

Вычислим значения функции в точках $x^0 – t=5–5=0$, $x^0=5$, $x^0+t=5+5=10$: $f(0)=0$, $f(5)= –10$, $f(10)=80$.

Т.к. $f(0)>f(5)<f(10)$, то начальный интервал неопределенности найден: $L_0=[a_0,b_0]=[0,10]$. Зададим $N=9$ так, чтобы L_0 содержал $N+1=10$ равных подынтервалов.

2. Определим точки вычисления функции: $x_i=0+i\frac{(10-0)}{10}=i$, $i=1, \ldots, 9$.

Вычислим значения функции в девяти точках: $f(1)=–10$, $f(2)=–16$, $f(3)=–18$, $f(4)=–16$, $f(5)=–10$, $f(6)=0$, $f(7)=14$, $f(8)=32$, $f(9)=54$. В точке $x_3=3$ функция принимает наименьшее значение: $f(x_3)=–18$. Искомая точка минимума после девяти вычислений принадлежит интервалу: $x^*\in[2,4]=L_9$, в котором выбирается точка $x^*=x_3=3$.

2.5.2 Метод деления интервала пополам

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^*\in R$, что $f(x^*)=min\ f(x)$.

Метод относится к последовательным стратегиям и позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации в точности половину текущего интервала неопределенности. Задается начальный интервал неопределенности, а алгоритм уменьшения интервала, являясь, как и в общем случае, «гарантирующим», основан на анализе величин функции в трех точках, равномерно распределенных на текущем интервале (делящих его на четыре равные части). Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказываете меньше установленной величины.

Алгоритм:

Шаг 1: Задать начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$, $l>0$ – требуемую точность.

Шаг 2: Положить $k=0$.

Шаг 3. Вычислить среднюю точку $x_k^c = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, $|L_{2k}| = b_k - a_k$, $f(x_k^c)$.

Шаг 4. Вычислить точки: $y_k = a_k + \dfrac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = b_k - \dfrac{|L_{2k}|}{4}$ и $f(y_k)$, $f(z_k)$. Заметим, что точки y_k, x_k^c, z_k делят интервал $[a_k, b_k]$ на четыре равные части.

Шаг 5. Сравнить значения $f(y_k)$ и $f(x_k^c)$:

а) если $f(y_k) < f(x_k^c)$, исключить интервал $(x_k^c, b_k]$, положив $b_{k+1} = x_k^c$, $a_{k+1} = a_k$. Средней точкой нового интервала становится точка y_k: $x_{k+1}^c = y_k$. Перейти к шагу 7.

б) если $f(y_k) \geq f(x_k^c)$, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Сравнить значения $f(z_k)$ и $f(x_k^c)$:

а) если $f(z_k) < f(x_k^c)$, исключить интервал $[a_k, x_k^c)$, положив $a_{k+1} = x_k^c$, $b_{k+1} = b_k$. Средней точкой нового интервала становится точка z_k: $x_{k+1}^c = z_k$. Перейти к шагу 7.

б) если $f(z_k) \geq f(x_k^c)$, исключить интервалы $[a_k, y_k)$, $(z_k, b_k]$, положив $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$. Средней точкой нового интервала становится точка x_k^c: $x_{k+1}^c = x_k^c$.

Шаг 7. Вычислить $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

а) если $|L_{2(k+1)}| \leq l$, процесс поиска завершается и $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала: $x^* = x_{k+1}^c$;

б) если $|L_{2(k+1)}| > l$, то положить $k = k+1$ и перейти к шагу 4.

Замечания:

1. Средняя точка последовательно получаемых интервалов всегда совпадает с одной из трех пробных точек, найденных на предыдущей итерации. Следовательно, на каждой итерации требуется два новых вычисления функции.

2. Текущие интервалы имеют четные номера L_0, L_2, L_4, ... , где индекс указывает на сделанное количество вычислений функции.

Пример 2.3.

Найти минимум функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом деления интервала пополам.

Решение:

Зададим начальный интервал неопределенности $L_0=[0,10]$, пусть $l=1$. Положим k=0.

Вычислим среднюю точку $x_0^c=\dfrac{0+10}{2}=5$, $|L_0|=10-0=10$, $f(x_0^c)=-10$.

Вычислим точки: $y_0=a_0+\dfrac{|L_0|}{4}=0+10/4=2,5$, $z_0=b_0-\dfrac{|L_0|}{4}=10-10/4=7,5;$

$f(y_0)=-17,5$, $f(z_0)=22,5$. Сравним значения $f(y_0)$ и $f(x_0^c)$:

т.к. $f(y_0)=-17,5<f(x_0^c)=-10$, то положим $a_1=a_0=0$, $b_1=x_0^c=5$, $x_1^c=y_0=2,5$. Положим $L_2=[0,5]$, $|L_2|=5>l=1$, $k=1$. Перейдем к шагу 4.

Вычислим точки: $y_1=a_1+\dfrac{|L_2|}{4}=0+5/4=1,25$, $z_1=b_1-\dfrac{|L_2|}{4}=5-5/4=3,75;$

$f(y_1)=-11,875$, $f(z_1)=-16,875$. Сравним значения $f(y_1)$ и $f(x_1^c)=f(y_0)=-17,5$: т.к. $f(y_1)=-11,875> f(x_1^c)=-17,5$, то положим $a_2=y_1=1,25$, $b_2=z_1=3,75$, $x_2^c= x_1^c=2,5$. Получим $L_4=[1,25;3,75]$, $|L_4|=3,75-1,25=2,5>l=1$, $k=2$. Перейдем к шагу 4.

Вычислим точки: $y_2=a_2+\dfrac{|L_4|}{4}=1,25+2,5/4=1,875,$

$z_2=b_2-\dfrac{|L_4|}{4}=3,75-2,5/4=3,125;$ $f(y_2)\approx-15,47$, $f(z_2)\approx-17,97$. Сравним значения $f(y_2)$ и $f(x_2^c)=f(x_1^c)=-17,5$: т.к. $f(y_2)=-15,47>f(x_2^c)=-17,5$, то перейдем к шагу 6.

Сравним значения $f(z_2)$ и $f(x_2^c)=-17,5$: т.к. $f(z_2)=-17,97<f(x_2^c)=-17,5$, то положим $a_3= x_2^c=2,5;$ $b_3=b_2=3,75;$ $x_3^c= z_2=3,125.$

Получим $L_6=[2,5;3,75]$, $|L_6|=3,75-2,5=1,25>l=1$, $k=3$. Перейдем к шагу 4.

Вычислим точки: $y_3=a_3+\dfrac{|L_6|}{4}=2,5+1,25/4=2,81,$

$z_3=b_3-\dfrac{|L_6|}{4}=3,75-1,25/4=3,43;$ $f(y_3)\approx-17,93$, $f(z_3)\approx-17,62$. Сравним значения $f(y_3)$ и $f(x_3^c)=f(z_2)=-17,97$: т.к. $f(y_3)=-17,93>f(x_3^c)=-17,97$, то перейдем к шагу 6.

Сравним значения $f(z_3)$ и $f(x_3^c)=-17,97$: т.к. $f(z_3)=-17,63>f(x_3^c)=-17,97$, то положим $a_4= y_3=2,81;$ $b_4=z_3=3,43;$ $x_4^c= x_3^c =3,125.$

Получим $L_8=[2,81;3,43]$, $|L_8|=3,43-2,81=0,62<l=1$, $x^*\in L_8$, $N=8$. В качестве решения можно взять среднюю точку последнего интервала $x^*=x_4^c=3,125$.

2.5.3 Метод «золотое сечение»

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм уменьшения интервала опирается на анализ значений функции в двух точках. В качестве точек вычисления функции выбираются точки золотого сечения.

Будем предполагать, что отношение длин двух последующих промежутков неопределенности постоянно, т. е.

$$\frac{L_{i-1}}{L_i}=\frac{L_i}{L_{i+1}}=\frac{L_{i+1}}{L_{i+2}}=\ldots=\alpha\,. \qquad (2.9)$$

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618034$ – отношение золотого сечения.

Промежуток неопределенности всякий раз делится на две части так, чтобы длина всего промежутка относилась к длине большей части так же, как длина большей части относится к длине меньшей части.

Именно такая пропорция еще в архитектуре Древней Греции считалась наиболее приятной для глаза. Отсюда и возникло название «Золотое сечение», впоследствии, через много столетий, присвоенное итерационной процедуре одномерного поиска.

На рисунке 2.3 точка C производит золотое сечение отрезка AD, а точка D – золотое сечение отрезка CB, при этом выполняется:

$$\frac{|AB|}{|CB|}=\frac{|CB|}{|AC|}=\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,. \qquad (2.10)$$

Рисунок 2.3 – Золотое сечение отрезка

Итак, если процедура «Золотое сечение» применяется n раз, то начальный промежуток неопределенности L_1 сократится в α^{n-1} раз.

Тогда с учетом свойств золотого сечения на каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм:

Шаг 1: Задать начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$, $l>0$ – точность.

Шаг 2: Положить k=0.

Шаг 3: Вычислить $y_0=a_0+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0-a_0)$; $z_0=a_0+b_0-y_0$, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}38196$.

Шаг 4: Вычислить $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 5: Сравнить $f(y_k)$ с $f(z_k)$:

а) если $f(y_k)\le f(z_k)$, положить $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=z_k$, $y_{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}-y_k$. $z_{k+1}=y_k$. Перейти к шагу 6.

б) если $f(y_k)>f(z_k)$, положить $a_{k+1}=y_k$, $b_{k+1}=b_k$, $y_{k+1}=z_k$,

$z_{k+1}= a_{k+1}+b_{k+1}-z_k$.

Шаг 6: Вычислить $\Delta=|a_{k+1}-b_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

а) если $\Delta\le l$, процесс поиска завершается и $x^*\in[a_{k+1},b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала: $x^*=\dfrac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$.

б) если $\Delta>l$, положить $k=k+1$ и перейти к шагу 4.

Пример 2.4.

Найти минимум функции $f(x)=2x^2-12x$ методом золотого сечения.

Решение:

Зададим начальный интервал неопределенности $L_0=[0,10]$, пусть $l=1$.

Положим $k=0$. Вычислим $y_0=a_0+0{,}382(b_0-a_0)=0+0{,}382\cdot 10=3{,}82$;

$z_0=a_0+b_0-y_0=0+10-3{,}82=6{,}18$. Вычислим $f(y_0)=-16{,}65$, $f(z_0)=2{,}22$. Сравним $f(y_0)$ с $f(z_0)$: т.к. $f(y_0)<f(z_0)$, положим $a_1=a_0=0$, $b_1=z_0=6{,}18$,

$y_1=a_1+b_1-y_0=0+6{,}18-3{,}82=2{,}36$. $z_1=y_0=3{,}82$. Получим $L_2=[0;6{,}18]$, $|L_2|=6{,}18>l=1$. Положим $k=1$ и перейдем к шагу 4.

Вычислим $f(y_1)=-17{,}18$, $f(z_1)=f(y_0)=-16{,}65$. т.к. $f(y_1)<f(z_1)$, положим $a_2=a_1=0$, $b_2=z_1=3{,}82$, $y_2=a_2+b_2-y_1=0+3{,}82-2{,}36=1{,}46$. $z_2=y_1=2{,}36$. Получим $L_3=[0;3{,}82]$, $|L_3|=3{,}82>l=1$. Положим $k=2$ и перейдем к шагу 4.

Вычислим $f(y_2)=-13{,}25$, $f(z_2)=f(y_1)=-17{,}18$. т.к. $f(y_2)>f(z_2)$, то $a_3=y_2=1{,}46$; $b_3=b_2=3{,}82$; $y_3=z_2=2{,}36$; $z_3=a_3+b_3-z_2=1{,}46+3{,}2-2{,}362=2{,}92$. Получим $L_4=[1{,}46;3{,}82]$, $|L_4|=3{,}82-1{,}46=2{,}36>l=1$. Положим $k=3$ и перейдем к шагу 4.

Вычислим $f(y_3)=f(z_2)=-17{,}18$, $f(z_3)=-17{,}99$. т.к. $f(y_3)>f(z_3)$, то $a_4=y_3=2{,}36$; $b_4=b_3=3{,}82$; $y_4=z_3=2{,}92$; $z_4=a_4+b_4-z_3=2{,}36+3{,}82-2{,}92=3{,}26$. Получим $L_5=[2{,}36;3{,}82]$, $|L_5|=3{,}82-2{,}36=1{,}46>l=1$. Положим $k=4$ и перейдем к шагу 4.

Вычислим $f(y_4)=f(z_3)=-17{,}99$, $f(z_4)=-17{,}86$. т.к. $f(y_4)<f(z_4)$, то $a_5=a_4=2{,}36$; $b_5=z_4=3{,}26$; $z_5=y_4=2{,}92$; $y_5=a_5+b_5-y_4=2{,}36+3{,}26-2{,}92=2{,}7$. Получим $L_6=[2{,}36;3{,}26]$, $|L_6|=3{,}26-2{,}36=0{,}9<l=1$.

$x^*\in L_6=[2{,}36;3{,}26]$, $N=6$, $x^*=\dfrac{3{,}26+2{,}36}{2}=2{,}81$.

2.6 Методы нулевого порядка нахождения безусловного минимума функции многих переменных

2.6.1 Метод конфигураций

Требуется найти безусловный минимум функции *f(x)* нескольких переменных, т.е. такую точку $x^*\in R^n$, что $f(x^*) = \min\limits_{x\in R^n} f(x)$.

Метод конфигураций (метод Хука-Дживса) представляет собой комбинацию исследующего поиска с циклическим изменением переменных и ускоряющего поиска по образцу. Исследующий поиск ориентирован на выявление локального поведения целевой функции и определение направления се убывания. Полученная информация используется при поиске по образцу.

Исследующий поиск начинается в некоторой начальной точке x^0, называемой *старым базисом*. В качестве множества направлений поиска выбирается множество координатных направлений. Задается величина шага, которая может быть различной для разных координатных направлений и переменной в процессе поиска. Фиксируется первое координатное направление и делается шаг в сторону увеличения соответствующей переменной. Если значение функции в пробной точке меньше значения функции в исходной точке, шаг считается удачным. В противном случае необходимо вернуться в предыдущую точку и сделать шаг в противоположном направлении с последующей проверкой поведения функции. После перебора всех координат исследующий поиск завершается. Полученная точка называется *новым базисом*. Если исследующий поиск с данной величиной шага неудачен, то она уменьшается и процедура продолжается. Поиск заканчивается, когда текущая величина шага станет меньше некоторой величины.

Поиск по образцу заключается в движении по направлению от старого базиса к новому. Величина ускоряющего шага задается ускоряющим множителем λ. Успех поиска по образцу определяется с помощью исследующего поиска из полученной точки. Если при этом значение в наилучшей точке меньше, чем в точке предыдущего базиса, то поиск по образцу удачен. Если поиск по образцу неудачен, происходит возврат в новый базис, где продолжается исследующий поиск с уменьшенным шагом.

Обозначим через $d_1, \dots, d_n$ - координатные направления.

$$d_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, d_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, d_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

При поиске по направлению d_i меняется только переменная x_i, а остальные переменные остаются зафиксированными.

Алгоритм:

Шаг 1. Задать начальную точку x^0, число $\varepsilon>0$ для остановки алгоритма, начальные величины шагов по координатным направлениям $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \geq \varepsilon$, ускоряющий множитель $\lambda>0$, коэффициент уменьшения шага $\alpha>1$. Положить $y^1=x^0$, $i=1$, $k=0$.

Шаг 2. Осуществить исследующий поиск по выбранному координатному направлению:

а) если $f(y^i+\Delta_i d_i)< f(y^i)$, т.е. $f(y_1^i,\dots,y_i^i+\Delta_i,\dots,y_n^i)<f(y_1^i,\dots,y_i^i,\dots,y_n^i)$, шаг считается удачным. В этом случае следует положить $y^{i+1}=y^i+\Delta_i d_i$ и перейти к шагу 3;

б) если в пункте а) шаг неудачен, то делается шаг в противоположном направлении. Если $f(y^i-\Delta_i d_i)< f(y^i)$, т.е. $f(y_1^i,\dots,y_i^i-\Delta_i,\dots,y_n^i)<f(y_1^i,\dots,y_i^i,\dots,y_n^i)$, шаг считается удачным. В этом случае следует положить $y^{i+1}=y^i-\Delta_i d_i$, и перейти к шагу 3;

в) если в пунктах а) и б) шаги неудачны, положить $y^{i+1}=y^i$.

Шаг 3. Проверить условия:

а) если $i<n$, то положить $i=i+1$ и перейти к шагу 2 (продолжить исследующий поиск по оставшимся направлениям);

б) если $i=n$, проверить успешность исследующего поиска:

- если $f(y^{n+1}) < f(x^k)$, перейти к шагу 4;

- если $f(y^{n+1}) \geq f(x^k)$ перейти к шагу 5.

Шаг 4. Провести поиск по образцу. Положить $x^{k+1} = y^{n+1}$, $y^1 = x^{k+1} + \lambda(x^{k+1} - x^k)$, $i=1$, $k=k+1$ и перейти к шагу 2.

Шаг 5. Проверить условие окончания:

а) если все $\Delta_i \leq \varepsilon$, то поиск закончить: $x^* = x^k$;

б) для тех i, для которых $\Delta_i > \varepsilon$, уменьшить величину шага: $\Delta_i = \dfrac{\Delta_i}{\alpha}$. Положить $y^1 = x^k$, $x^{k+1} = x^k$, $k=k+1$, $i=1$ и перейти к шагу 2.

***Замечания*:**

1. В алгоритме можно использовать одинаковую величину шага по координатным направлениям, т.е. вместо $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, применять Δ.

2. Существует модификация метода, где при исследующем поиске и поиске по образцу используется одномерная минимизация.

Пример 2.5.

Найти минимум функции $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ методом конфигураций.

Решение:

1^0. Положим $x^0=(0{,}5;1)^T$ – старый базис; $\Delta_1=0{,}2$; $\Delta_2=0{,}4$; $\varepsilon=0{,}1$; $\alpha=4$; $\lambda=1{,}5$. Положим $k=0$, $i=1$, $y^1=x^0=(0{,}5;1)^T$.

2^0. Так как $f(y^1+\Delta_1 d_1)=f(0{,}7;\ 1)=2{,}68>f(y^1)=2$, то шаг неудачен.

Так как $f(y^1-\Delta_1 d_1)=f(0{,}3;\ 1)=1{,}48<f(y^1)=2$, то шаг удачный: $y^2 = y^1 - \Delta_1 d_1=(0{,}3;1)^T$.

3^0. Поскольку $i=1<2=n$, то $i=i+1=2$ и переходим к шагу 2.

2^1. Так как $f(y^2+\Delta_2 d_2)=f(0{,}3;1{,}4)=2{,}56>f(y^2)=1{,}48$, то шаг неудачен. Так как $f(y^2-\Delta_2 d_2)=f(0{,}3;0{,}6)=0{,}72<f(y^2)=1{,}48$, то шаг удачный: $y^3 = y^2 - \Delta_2 d_2=(0{,}3;0{,}6)^T$.

3^1. Поскольку i=2=n=2 и $f(y^3)$=0,72< $f(x^0)$=2, перейдем к шагу 4.

4^0. Положим $y^3=x^1=(0,3;0,6)^T$ – новый базис, i=1, k=k+1=1, найдем $y^1=x^1+1,5\cdot(x^1-x^0)=(0,3;0,6)^T+1,5\cdot[(0,3;0,6)^T-(0,5;1)^T]=(0;0)^T$. Выполнен поиск по образцу. Перейдем к шагу 2.

2^2. $f(y^1+\Delta_1 d_1)=f(0,2;\ 0)=0,08>f(y^1)=0$, то шаг неудачен.

Так как $f(y^1-\Delta_1 d_1)=f(-0,2;\ 1)=0,08>f(y^1)=0$, то шаг не удачный:

$y^2=y^1=(0;0)^T$.

3^2. Поскольку i=1<2=n, то i=i+1=2 и переходим к шагу 2.

2^3. Так как $f(y^2+\Delta_2 d_2)=f(0;0,4)=0,16>f(y^2)=0$ и

$f(y^2-\Delta_2 d_2)=f(0;-0,4)=0,16>f(y^2)=0$, то шаги неудачные и $y^3=y^2=(0;0)^T$.

3^3. Поскольку i=2=n=2 и $f(y^3)=0<f(x^0)=2$, то поиск по образцу удачен. Перейдем к шагу 4.

4^1. Положим $x^2=y^3=(0;0)^T$, i=1, k=k+1=2,

$y^1=x^2+1,5\cdot(x^2-x^1)=(0;0)^T+1,5\cdot[(0;0)^T-(0,3;0,6)^T]=(-0,45;\ -0,9)^T$ и перейдем к шагу 2.

2^4. Так как $f(y^1+\Delta_1 d_1)=f(-0,25;\ -0,9)=1,16<f(y^1)=1,62$, то шаг удачен:

$y^2=y^2+\Delta_2 d_2=(-0,25;\ -0,5)^T$.

3^4. Поскольку i=1<2=n, то i=i+1=2 и перейдем к шагу 2.

2^5. Так как $f(y^2+\Delta_2 d_2)=f(-0,25;\ -0,5)=0,5>f(y^2)=1,16$, то шаг удачен:

$y^3=y^2+\Delta_2 d_2=(-0,25;\ -0,5)^T$.

3^5. Поскольку i=2=n=2 и $f(y^3)=0,5>f(x^2)=0$, то поиск по образцу неудачен. Осуществляется возврат в точку x^2. Перейдем к шагу 5.

5^0. Так как $\Delta_1=0,2>\varepsilon=0,1$; $\Delta_2=0,4>\varepsilon$, то уменьшим шаг: $\Delta_1=\frac{\Delta_1}{4}=0,05$;

$\Delta_2=\frac{\Delta_2}{4}=0,1$.

Положим $y^1=x^2=(0;0)^T$; $x^3=x^2=(0;0)^T$; i=1, k=k+1=3 и перейдем к шагу 2.

2^6. Так как $f(y^1+\Delta_1 d_1)=f(0,05;\ 0)=5\cdot10^{-3}>f(y^1)=0$ и

$f(y^1-\Delta_1 d_1)=f(-0{,}05;\ 0)=5\cdot 10^{-3}>f(y^1)=0$, то шаги неудачны: $y^3=y^2=(0;0)^T$.

3^6. Поскольку $i=1<2=n$, то $i=i+1=2$ и перейдем к шагу 2.

2^7. Так как $f(y^2+\Delta_2 d_2)=f(0;0{,}1)=0{,}01>f(y^2)=0$ и $f(y^2-\Delta_2 d_2)=f(0;-0{,}1)=0{,}01>f(y^2)=0$, то шаги неудачны: $y^3=y^2=(0;0)^T$.

3^7. Поскольку $i=2=n$ и $f(y^3)=f(x^3)=0$, то исследующий поиск неудачен. Перейдем к шагу 5.

5^1. Так как $\Delta_1=0{,}05<\varepsilon=0{,}1$; $\Delta_2=0{,}1\le\varepsilon=0{,}1$, то, то поиск закончен $x^*=x^3=(0;0)^T$.

2.6.2 Метод сопряженных направлений

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ нескольких переменных, т.е. такую точку $x^*\in R^n$, что $f(x^*)=\min\limits_{x\in R^n} f(x)$.

Пусть H – симметрическая матрица размера $n\times n$. Векторы $d_1, d_2, ..., d_n$ называются *H–сопряженными* или *просто* сопряженными, если $d_i^T H d_j=0$ при всех $i\neq j$.

Матрица составленная из частных производных второго порядка функции $f(x)$:

$$H(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей Гессе*.

В методе сопряженных направлений (методе Пауэлла) используется факт, что минимум квадратичной функции может быть найден не более чем за n шагов при условии, что поиск ведется вдоль сопряженных относительно матрицы Гессе направлений. Так как достаточно большой класс целевых функций может быть представлен в окрестности точки минимума своей квадратичной аппроксимацией, описанная идея применяется и для неквадратичных функций. Задается начальная точка и направления $d_1, d_2, ..., d_n$, совпадающие с координатными. Находится минимум $f(x)$ при последовательном движении по (n+1) направлениям с помощью одного из методов одномерной минимизации. При этом полученная ранее точка минимума берется в качестве исходной для поиска по следующему направлению, а направление d_n используется как при первом ($d_0=d_n$), так и последнем поиске. Находится новое направление поиска, сопряженное с d_n. Оно проходит через точки, полученные при первом и последнем поиске. Заменяется d_1 на d_2, d_2 на d_3 и т.д. Направление d_n заменяется сопряженным направлением, после чего повторяется поиск по (n+1) направлениям, уже не содержащим старого направления d_1. Для квадратичных функций последовательность n^2 одномерных поисков приводит к точке минимума (если все операции выполнены точно).

Алгоритм:

Шаг 1. Задать начальную точку x^0, число $\varepsilon>0$ для окончания алгоритма, начальные направления поиска: $d_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $d_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, ... , $d_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

Положим $d_0=d_n$, $i=0$, $y^0=x^0$, $k=0$.

Шаг 2. Найти $y^{i+1}=y^i+t_i d_i$, где шаг t_i, находится в результате поиска минимума функции $f(y^i+t_i d_i)$ по t_i, одним из методов одномерной минимизации.

Шаг 3. Проверить выполнение условий:

а) если $i<n-1$, положить $i=i+1$ и перейти к шагу 2;

б) если $i=n-1$, проверить успешность поиска по n первым направлениям Если $y^n=y^0$, то поиск завершить: $x^*=y^n$, иначе положить $i=i-1$ и перейти к шагу 2;

в) если $i=n$, проверить успешность поиска по n последним направлениям. Если $y^{n+1}=y^1$, поиск завершить: $x^*=y^{n+1}$, иначе перейти к шагу 4 для построения сопряженного направления.

Шаг 4. Положить $x^{k+1} = y^{n+1}$ и проверить условие окончания:

а) если $\|x^{k+1}-x^k\|<\varepsilon$, то поиск завершить: $x^*=x^{n+1}$;

б) иначе положить: $\bar{d}_0 = \bar{d}_n = y^{n+1} - y^1$ (новое направление);

$\bar{d}_i = d_{i+1}$, $i=1, \ldots, n-1$ (исключается старое направление).

Если при этом rang $(\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_n)=n$**,** то новая система направлений линейно независима. В этом случае положить: $\bar{d}_i = d_i$, $i=0,1,\ldots,n$; $k=k+1$, $i=0$, $y^0=x^{k+1}$ и перейти к шагу 2.

Если rang $(\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_n)<n$**,** то новая система направлений линейно зависима. Тогда следует продолжать поиск в старых направлениях. Для этого положить: $d_i = d_i$, $i=0,1,\ldots,n$; $y^0=x^{k+1}$, $i=0$, $k=k+1$ и перейти к шагу 2.

Пример 2.6.

Найти минимум функции $f(x)=4(x_1-5)^2+(x_2-6)^2$ методом сопряженных направлений.

1^0. Зададим начальную точку $x^0=(8,9)^T$, $d_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $d_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\varepsilon=0{,}1$. Положим $d_0=d_n=d_2$, $y^0=x^0$, $k=0$, $i=0$.

2^0. Получаем $y^1=y^0+t_0d_0=(8,9)^T+t_0(0,1)^T=(8,9+t_0)^T$. Найдем минимум функции $f(8,9+t_0)=36+(3+t_0)^2$ по t_0. Очевидно, он достигается при $t_0=-3$, а $y^1=(8,6)^T$.

3^0. Имеем $i=0<2=n$, поэтому $i=i+1=1$ и перейдем к шагу 2.

2^1. Получаем $y^2=y^1+t_1d_1=(8,6)^T+t_1(1,0)^T=(8+t_1,6)^T$. Найдем минимум функции $f(8+t_1,6)=4(3+t_1)^2$ по t_1. Очевидно, он достигается при $t_1=-3$, а $y^2=(5,6)^T$.

3^1. Имеем $i=1=n-1$, поэтому $i=i+1=2$ и переходим к шагу 2.

2^2. Получаем $y^3=y^2+t_2d_2=(5,6)^T+t_2(0,1)^T=(5,6+t_2)^T$. Найдем минимум функции $f(5,6+t_0)=t_2^2$ по t_2. Очевидно, он достигается при $t_2=-3$, а $y^3=y^2=(5,6)^T$.

3^2. Имеем i=2=n, $y^3 \neq y^1$ и перейдем к шагу 4.

4^0. Находим $x^1=y^3=(5,6)^T$, $\|x^1-x^0\|=\sqrt{(8-5)^2+(9-6)^2}$ =4,21>ε. Положим: $\overline{d}_0=\overline{d}_n=\overline{d}_2=y^3-y^1=(5,6)^T-(8,6)^T=(-3,0)^T$.

$\overline{d}_1=d_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, т.к. rang $\begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$=2=$n$**,** то новая система направлений линейно независима. В этом случае положим: $d_2=\overline{d}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$, $d_1=\overline{d}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $d_0=\overline{d}_0=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$; $k=k+1$, i=0, $y^0=x^1=(5,6)^T$ и перейдем к шагу 2.

2^3. Получаем $y^1=y^0+t_0d_0=(5,6)^T+t_0(-3,0)^T=(5-3t_0,6)^T$. Найдем минимум функции $f(5-3t_0,6)=36t_0^2$ по t_0. Очевидно, он достигается при t_0=0, а $y^1=(5,6)^T=y^0$.

3^3. Имеем $i=0<n-1=1$, поэтому $i=i+1=1$ и перейдем к шагу 2.

2^4. Получаем $y^2=y^1+t_1d_1=(5,6)^T+t_1(0,1)^T=(5,6+t_1)^T$. Найдем минимум функции $f(5,6+t_1)=t_1^2$ по t_1. Очевидно, он достигается при t_1=0, а $y^2=(5,6)^T=y^1=y^0$.

3^4. Имеем $i=1=n-1$, $y^2=y^0$, поэтому поиск завершается, $x^*=y^2=(5,6)^T$; $f(x^*)=0$.

2.7 Методы первого порядка нахождения безусловного минимума функции многих переменных

2.7.1 Метод градиентного спуска с постоянным шагом

Пусть дана функция $f(x)$, ограниченная снизу на множестве R^n и имеющая непрерывные частные производные во всех его точках.

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ нескольких переменных, т.е. такую точку $x^*\in R^n$, что $f(x^*)=\min\limits_{x\in R^n} f(x)$.

Стратегия решения задачи состоит в построении последовательности точек $\{x^k\}$ $k=0,1,\ \ldots$, таких, что $f(x^{k+1})<f(x^k)$, $k=0,1,\ \ldots$. Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу

$$x^{k+1}=x^k-t_k\nabla f(x^k),\ \ k=0,1,\ \ldots \qquad (2.11)$$

где x^0 задается пользователем;

$\nabla f(x^k)$ – градиент функции $f(x)$, вычисленный в точке x^k;

t_k – величина шага задается пользователем и остается постоянной до тех пор, пока функция убывает в точках последовательности, что контролируется путем проверки выполнения условия $f(x^{k+1})-f(x^k)<0$. Построение последовательности $\{x^k\}$ заканчивается в точке x^k, для которой $\|\nabla f(x^k)\|<\varepsilon_1$, где ε_1 – заданное малое положительное число, или $k\geq M$, где M – предельное число итераций, или при двукратном одновременном выполнении двух неравенств

$$\|x^{k+1}-x^k\|<\varepsilon_2, \text{ или } |f(x^{k+1})-f(x^k)|<\varepsilon_2, \tag{2.12}$$

где ε_2 – малое положительное число.

Вопрос о том, может ли точка x^k рассматриваться как найденное приближение искомой точки минимума, решается путем проведения дополнительного исследования, которое описано ниже.

Алгоритм:

Шаг 1. Задать x^0, $0<\varepsilon<1$, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, M – предельное число итераций. Найти градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$.

Шаг 2. Положить $k=0$.

Шаг 3. Вычислить $\nabla f(x^k)$.

Шаг 4. Проверить выполнение критерия окончания $\|\nabla f(x^k)\|<\varepsilon_1$:

а) если критерий выполнен, расчет закончен, $x^*=x^k$;

б) если критерий не выполнен, то перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $k\geq M$:

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен: $x^*=x^k$;

б) если нет, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Задать величину шага t_k.

Шаг 7. Вычислить $x^{k+1}=x^k-t_k\nabla f(x^k)$.

Шаг 8. Проверить выполнение условия $f(x^{k+1})-f(x^k)<0$:

а) если условие выполнено, то перейти к шагу 9;

б) если условие не выполнено, положить $t_k = \frac{t_k}{2}$ перейти к шагу 7.

Шаг 9. Проверить выполнение условий $\|x^{k+1}-x^k\|<\varepsilon_2$, $|f(x^{k+1})-f(x^k)|<\varepsilon_2$,

а) если оба условия выполнены при текущем значении k и $k=k-1$, то расчет окончен, $x^*=x^k$;

б) если хотя бы одно из условий не выполнено, положить $k=k+1$ и перейти к шагу 3.

Процедура решения задачи:

1. Используя алгоритм градиентного спуска с постоянным шагом, найти точку x^k, в которой выполнен по крайней мере один из критериев окончания расчетов.

2. Провести анализ точки x^k с целью установить, является ли точка x^k найденным приближением решения задачи. Процедура анализа определяется наличием у функции $f(x)$ непрерывных вторых производных. Если $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция (мы ограничимся именно этим классом задач), то следует провести проверку выполнения достаточных условий минимума: $H(x^*)>0$. Если $H(x^k)>0$, то точка x^k есть найденное приближение искомой точки x^*.

Пример 2.7.

Найти локальный минимум функции $f(x)= 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Решение:

I. Определение точки x^*, в которой выполнен по крайней мере один из критериев окончания расчетов.

1. Зададим x^0, ε_1, ε_2, M: $x^0=(0,5;1)^T$, $\varepsilon_1=0,1$; $\varepsilon_2=0,15$; $M=10$. Найдем градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x^k)=(4x_1+x_2; x_1+2x_2)^T$.

2. Положим $k=0$.

3^0. Вычислим $\nabla f(x^0)$: $\nabla f(x^0)= (3;2,5)^T$.

4^0. Вычислим $\|\nabla f(x^0)\|$: $\|\nabla f(x^0)\|=3,9>0,1$. Переходим к шагу 5.

5^0. Проверим условие $k\geq M$: $k=0<10=M$. Переходим к шагу 6.

6^0. Зададим $t_0 = 0,5$.

7^0 Вычислим x^1: x^1=(0,5;1)^T-0,5·(3;2,5)^T=(-1;-0,25)^T; $f(x^1)$=2,31.

8^0. Сравним $f(x^1)$ с $f(x^0)$=2. Имеем $f(x^1)>f(x^0)$. Вывод: условие $f(x^{k+1})<f(x^k)$ для k=0 не выполняется. Зададим t^0 = 0,25, переходим к повторению шагов 7, 8.

7^{01}. Вычислим x^1: x^1=(0,5; 1)^T- 0,25·(3;2,5)^T=(-0,25;0,375)^T; $f(x^1)$ = 0,171.

8^{01}. Сравним $f(x^1)$ с $f(x^0)$. Вывод: $f(x^1)<f(x^0)$. Переходим к шагу 9.

9^0. Вычислим $|x^1-x^0|$, $|f(x^1)-f(x^0)|$:

$|x^1-x^0|$=0,976>0,15; $|f(x^1)-f(x^0)|$=1,829>0,15. Вывод: полагаем k=1 и переходим к шагу 3.

3^1. Вычислим $\nabla f(x^1)$: $\nabla f(x^1)$=(-0,625;0,51)^T.

4^1. Вычислим $||\nabla f(x^1)||$: $||\nabla f(x^1)||$=0,81. Переходим к шагу 5.

5^1. Проверим условие $k \geq M$: k=1<10=M. Переходим к шагу 6.

6^1. Зададим t_0=0,25.

7^1. Вычислим x^2: x^2=(-0,25;0,375)-0,25·(-0,625;0,5)^T=(-0,094; 0,25)^T; $f(x^2)$=0,056.

8^1. Сравним $f(x^2)$ с $f(x^1)$. Вывод: $f(x^2)<f(x^1)$. Переходим к шагу 9.

9^1. Вычислим $|x^2-x^1|$, $|f(x^2)-f(x^1)|$:

$|x^2-x^1|$=0,2>0,15; $|f(x^2)-f(x^1)|$=0,115<0,15. Вывод: полагаем k=2 и переходим к шагу 3.

3^2. Вычислим $\nabla f(x^2)$: $\nabla f(x^2)$=(-0,126;0,406)^T.

4^2. Вычислим $||\nabla f(x^2)||$: $||\nabla f(x^2)||$=0,425>0,1. Переходим к шагу 5.

5^2. Проверим условие $k \geq M$: k=2<10=M, переходим к шагу 6.

6 . Зададим t_2=0,25.

7^2. Вычислим x^3: x^3=(-0,094; 0,25)^T-0,25·(-0,126; 0,406)^T=(-0,063;0,15)^T; $f(x^3)$=0,021.

8^2. Сравним $f(x^3)$ с $f(x^2)$. Вывод: $f(x^3)<f(x^2)$. Переходим к шагу 9.

9^2. Вычислим $|x^3-x^2|$, $|f(x^3)-f(x^2)|$:

$|x^3-x^2|$=0,105<0,15; $|f(x^3)-f(x^2)|$=0,035<0,15. Вывод: полагаем k=3 и переходим к шагу 3.

3^3. Вычислим $\nabla f(x^3)$: $\nabla f(x^3)$=(-0,102;0,237)^T.

4^3. Вычислим $||\nabla f(x^3)||$: $||\nabla f(x^3)||$=0,257>0,1. Переходим к шагу 5.

5^3. Проверим условие $k \geq M$: k=3<10=M, переходим к шагу 6.

6^3. Зададим t_3=0,25.

7^3. Вычислим x^4: x^4=(-0,063;0,15)^T-0,25·(-0,102; 0,237)^T=(-0,038;0,091)^T: $f(x^4) = 0,0076$.

8^3. Сравним $f(x^4)$ с $f(x^3)$. Вывод: $f(x^4)<f(x^3)$. Переходим к шагу 9.

9^3. Вычислим $|x^4-x^3|$, $|f(x^4)-f(x^3)|$:

$|x^4-x^3|$=0,064<0,15; $|f(x^4)-f(x^3)|$=0,015<0,15.

Условия $||x^{k+1}-x^k||<\varepsilon_2$, $|f(x^{k+1})-f(x^k)|<\varepsilon_2$, выполнены при k=2,3. Расчет окончен. Найдена точка x^4=(-0,038; 0,091)^T; $f(x^4)$=0,0076.

II. Анализ точки x^4.

Функция $f(x)=2x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ является дважды дифференцируемой, поэтому проведем проверку достаточных условий минимума в точке x^4. Для этого проанализируем матрицу Гессе H=$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Матрица постоянна и является положительно определенной (т.е. H>0) , так как оба ее угловых минора Δ_1=4 и Δ_2=7 положительны. Следовательно, точка x^4=(-0,038;0,091)^T есть найденное приближение точки локального минимума x^*=(0,0)^T, а значение $f(x)$=0,0076 есть найденное приближение значения $f(x^*)$=0. Заметим, что условие H>0, есть одновременно условие строгой выпуклости функции $f(x)=2x_1^2+x_1x_2+x_2^2$. Следовательно, x^4=(-0,038;0,091)^T, $f(x)$=0,0076 есть найденные приближения точки глобального минимума $f(x)$ и ее наименьшего значения на R^2.

2.7.2 Метод наискорейшего градиентного спуска

Пусть дана функция $f(x)$, ограниченная снизу на множестве R^n и имеющая непрерывные частные производные во всех его точках.

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ нескольких переменных, т.е. такую точку $x^*\in R^n$, что $f(x^*) = \min\limits_{x\in R^n} f(x)$.

Стратегия решения задачи состоит в построении последовательности точек $\{x^k\}$ $k=0,1, \ldots$, таких, что $f(x^{k+1})<f(x^k)$, $k=0,1, \ldots$. Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу

$$x^{k+1}=x^k-t_k\nabla f(x^k), \quad k=0,1, \ldots . \tag{2.13}$$

где x^0 задается пользователем;

t_k - величина шага определяется для каждого значения k из условия

$$\varphi(t_k)=f(x^k-t_k\nabla f(x^k))\to \min_{t_k} . \tag{2.14}$$

Решение задачи (2.14) может осуществляться с использованием необходимого условия минимума $\dfrac{d\varphi}{dt_k}=0$ с последующей проверкой достаточного условия $\dfrac{d^2\varphi}{dt_k^2}>0$. Такой путь может быть использован либо при достаточно простой минимизируемой функции $\varphi(t_k)$, либо при предварительной аппроксимации достаточно сложной функции $\varphi(t_k)=f(x^k-t_k\nabla f(x^k))$ полиномом $P(t_k)$ (как правило, второй или третьей степени), и тогда условие $\dfrac{d\varphi}{dt_k}=0$ замещается условием $\dfrac{dP}{dt_k}=0$, а условие $\dfrac{d^2\varphi}{dt_k^2}>0$ – условием $\dfrac{d^2P}{dt_k^2}>0$.

Построение последовательности $\{x^k\}$, $k=0,1, \ldots$, заканчивается в точке x^k, для которой $\|\nabla f(x^k)\|<\varepsilon_1$, где ε_1 – заданное число, или, если $k\geq M$, M – предельное число итераций, или при двукратном одновременном выполнении неравенств $\|x^{k+1}-x^k\|<\varepsilon_2$, $|f(x^{k+1})-f(x^k)|<\varepsilon_2$, где ε_2 – малое положительное число. Вопрос о том, может ли точка x^k рассматриваться как найденное приближение искомой точки локального минимума x^*, решается путем дополнительного исследования.

Алгоритм:

Шаг 1. Задать x^0, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, M – предельное число итераций. Найти градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x)=\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$.

Шаг 2. Положить k=0.

Шаг 3. Вычислить $\nabla f(x^k)$.

Шаг 4. Проверить выполнение критерия окончания $\|\nabla f(x^k)\|<\varepsilon_1$:

а) если критерий выполнен, расчет закончен, $x^*= x^k$;

б) если критерий не выполнен, то перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $k\geq M$:

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен: $x^*= x^k$;

б) если нет, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить величину шага t_k* из условия: $\varphi(t_k)=f(x^k-t_k\nabla f(x^k))\to\min\limits_{t_k}$.

Шаг 7. Вычислить $x^{k+1}=x^k-t_k^*\nabla f(x^k)$.

Шаг 8. Проверить выполнение условий $\|x^{k+1}-x^k\|<\varepsilon_2$, $|f(x^{k+1})-f(x^k)|<\varepsilon_2$,

а) если оба условия выполнены при текущем значении k и $k=k-1$, то расчет окончен, $x^*=x^{k+1}$;

б) если хотя бы одно из условий не выполнено, положить $k=k+1$ и перейти к шагу 3.

Пример 2.8.

Найти локальный минимум функции $f(x)= 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Решение:

I. Определение точки x^*, в которой выполнен по крайней мере один из критериев окончания расчетов.

1. Зададим x^0, ε_1, ε_2, M: $x^0=(0,5;1)^T$, $\varepsilon_1=0,1$; $\varepsilon_2=0,15$; $M=10$. Найдем градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x^k)=(4x_1+x_2;\, x_1+2x_2)^T$.

3. Положим k=0.

3^0. Вычислим $\nabla f(x^0)$: $\nabla f(x^0)=(3;2,5)^T$.

4^0. Вычислим $\|\nabla f(x^0)\|$: $\|\nabla f(x^0)\|=3,9>0,1$. Переходим к шагу 5.

5^0. Проверим условие $k\geq M$: $k=0<10=M$. Переходим к шагу 6.

6^0. Найдем точку $x^1=x^0-t_0\nabla f(x^0)=(0,5;1)^T-t_0\cdot(3;2,5)^T=(0,5-3t_0;\, 1-2,5t_0)^T$.

Подставим полученные выражения x_1^1=0,5-3t_0, x_2^1=1-2,5t_0 для координат в $f(x)$: $\varphi(t_0)=2\cdot(0{,}5-3t_0)^2+(0{,}5-3t_0)(1-2{,}5t_0)+(1-2{,}5t_0)^2$. Найдем минимум функции $\varphi(t_0)$ по t_0 с помощью необходимых условий безусловного экстремума:

$$\frac{d\varphi(t_0)}{dt_0}=4\cdot(0{,}5-3t_0)\cdot(-3)+(-3)\cdot(1-2{,}5t_0)+(-2{,}5)\cdot(0{,}5-3t_0)+2\cdot(1-2{,}5t_0)\cdot(-2{,}5)=-15{,}25+$$

$+63{,}25t_0=0$.

Отсюда t_0*=0,24. Так как $\frac{d^2\varphi(t_0)}{dt_0^2}=63{,}25>0$, найденное значение шага обеспечивает минимум функции $\varphi(t_0)$ по t_0.

7^0 Вычислим $x^1=x^0-t_0^*\nabla f(x^0)=(0{,}5;1)^T-2{,}4\cdot(3;2{,}5)^T=(-0{,}22;\ 0{,}4)^T$.

8^0. Вычислим $\|x^1-x^0\|=0{,}937>0{,}15$. Вычислим $|f(x^1)-f(x^0)|=1{,}83>0{,}15$. Вывод: полагаем k=1 и переходим к шагу 3.

3^1. Вычислим $\nabla f(x^1)$: $\nabla f(x^1)=(-0{,}48;0{,}58)^T$.

4^1. Вычислим $\|\nabla f(x^1)\|$: $\|\nabla f(x^1)\|=0{,}752>0{,}1$.

5^1. Проверим условие $k\geq M$: $k=1<10=M$.

6^1. Определим t_1^*: $t_1^*=0{,}546$ (см. п. 6^0).

7^1. Найдем точку $x^2=x^1-t_1^*\nabla f(x^1)=(-0{,}22;0{,}4)^T-0{,}546\cdot(-0{,}48;0{,}58)^T=(0{,}04;\ 0{,}08)^T$.

8^1. Вычислим $\|x^2-x^1\|=0{,}41>0{,}15$; $|f(x^2)-f(x^1)|=0{,}156>0{,}15$. Вывод: полагаем k=2 и переходим к шагу 3.

3^2. Вычислим $\nabla f(x^2)$: $\nabla f(x^2)=(0{,}24;0{,}2)^T$.

4^2. Вычислим $\|\nabla f(x^2)\|$: $\|\nabla f(x^2)\|=0{,}312>0{,}1$.

5^2. Проверим условие $k\geq M$: $k=2<10=M$.

6^2. Определим t_2^*: $t_2^*=0{,}24$ (см. п. 6^0).

7^2. Найдем точку $x^3=x^2-t_2^*\nabla f(x^2)=(0{,}04;0{,}08)^T-0{,}24\cdot(0{,}24;0{,}2)^T=(-0{,}0176;\ 0{,}032)^T$.

8^2. Вычислим $\|x^3-x^2\|=0{,}0749<0{,}15$; $|f(x^3)-f(x^2)|=0{,}0116<0{,}15$. Вывод: полагаем k=3 и переходим к шагу 3.

3^3. Вычислим $\nabla f(x^3)$: $\nabla f(x^3)=(-0{,}012;-0{,}0816)^T$.

4^3. Вычислим $\|\nabla f(x^3)\|$: $\|\nabla f(x^3)\|=0{,}082<0{,}1$.

Расчет окончен. Найдена точка x^3=(-0,0176; 0,032)^T; $f(x^3)$=0,00127.

II. Анализ точки x^3.

В примере 2.6 было показано, что функция *f(x)* является строго выпуклой и, следовательно, точка x^3 является найденным приближением точки глобального минимума x^*.

2.8 Методы второго порядка нахождения безусловного минимума функции многих переменных

2.8.1 Метод Ньютона

Пусть дана функция *f(x)*, ограниченная снизу на множестве R^n и имеющая непрерывные частные производные во всех точках.

Найдем локальный минимум функции *f(x)* на множестве допустимых решений $X=R^n$.

Метод Ньютона состоит в построении последовательности точек $\{x_k\}$, k=0,1, …, таких, что $f(x^{k+1})<f(x^k)$. Точки последовательности вычисляются по правилу:

$$x^{k+1}=x^k+d^k,\ k=0,1,\ \dots, \qquad (2.13)$$

где x_0 – заданная точка,

d^k – направление, которое определяется для каждого значения k по формуле:

$$d^k=-H^{-1}(x^k)\nabla f(x^k), \qquad (2.14)$$

где *H(x)* – матрица Гессе, составленная из частных производных второго порядка функции *f(x)*;

$\nabla f(x_k)$ – градиент функции *f(x)* в точке x^k.

Выбор d^k по этой формуле гарантирует выполнение требования $f(x^{k+1})< f(x^k)$ при условии, что $H(x^k)>0$.

Построение последовательности точек $\{x^k\}$ заканчивается в точке x^k, для которой $\left\|\nabla f(x^k)\right\|<\varepsilon_1$, ε_1 – заданное положительное число, или при $k \geq M$ (*M* -

предельное число итераций), или при двукратном одновременном выполнении двух неравенств $\left\|x^{k+1}-x^{k}\right\|<\varepsilon_2$, $\left|f(x^{k+1})-f(x^{k})\right|<\varepsilon_2$, ε_2 – заданное положительное число. Вопрос о том, может ли точка x^k рассматриваться как найденное приближение искомой точки минимума, решается путем проведения дополнительного исследования.

Алгоритм:

Шаг 1: Задать x^0, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, M - предельное число итераций. Найти градиент $\nabla f(x)$ и матрицу Гессе $H(x)$, составленную из частных производных второго порядка функции $f(x)$.

Шаг 2: Положить $k=0$.

Шаг 3: Вычислить $\nabla f(x^k)$.

Шаг 4: Проверить выполнение условия окончания: $\left\|\nabla f(x^k)\right\|<\varepsilon_1$.

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен и $x^*= x^k$.

б) в противном случае перейти к шагу 5.

Шаг 5: Проверить выполнение условия окончания: $k\geq M$:

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен и $x^*= x^k$.

б) в противном случае перейти к шагу 6.

Шаг 6: Вычислить матрицу $H(x^k)$.

Шаг 7: Вычислить матрицу $H^{-1}(x^k)$.

Шаг 8: Проверить выполнение условия $H^{-1}(x^k)>0$.

а) если $H^{-1}(x^k)>0$, то перейти к шагу 9;

б) в противном случае перейти к шагу 10, положив $d^k=-\nabla f(x^k)$.

Шаг 9: Определить $d^k=-H^{-1}(x^k)\nabla f(x^k)$.

Шаг 10: Найти точку $x^{k+1}=x^k+t_k d^k$,

положив $t_k=1$, если $d^k=-H^{-1}(x^k)\nabla f(x^k)$,

или выбрав t_k из условия $f(x^{k+1})< f(x^k)$, если $d^k=-\nabla f(x^k)$.

Шаг 11: Проверить выполнение условия окончания: $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon_2$, $\left| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right| < \varepsilon_2$,

а) если оба неравенства выполнены при текущем значении k и $k=k-1$, то расчет окончен и $x^* = x^{k+1}$.

б) в противном случае положить $k=k+1$ перейти к шагу 3.

Нахождение минимума функции происходит в 2 этапа:

1 этап: Используя алгоритм Ньютона, находят точку x^k, в которой выполняется, по крайней мере один критерий окончания расчета.

2 этап: Проверить выполнение достаточного условия минимума $H(x^k)>0$. Если условие выполнено, то точка x^k может рассматриваться как найденное приближение точки минимума x^*.

Пример 2.9.

Найти локальный минимум функции $f(x_1, x_2)=2x_1^2+x_1x_2+x_2^2$.

Решение:

1 этап: Определение точки x^k, в которой выполняется по крайней мере один критерий окончания расчета.

1. Зададим $x^0=(0,5;1)$, $\varepsilon_1=0,1$; $\varepsilon_2=0,15$; $M=10$. Найдем градиент $\nabla f(x)=(4x_1+x_2; x_1+2x_2)$ и матрицу Гессе $H(x)= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Положим $k=0$.

3^0. Вычислим $\nabla f(x^0)$: $\nabla f(x^0)=(3; 2,5)$.

4^0. Проверим выполнение условия окончания: $\left\| \nabla f(x^k) \right\| < \varepsilon_1$. $\left\| \nabla f(x^0) \right\|=3,9>0,1$. Перейдем к шагу 5.

5^0. Проверим выполнение условия окончания: $k \geq M$: $k=0<10$, перейдем к шагу 6.

6^0. Вычислим матрицу $H(x^0)$: $H(x^0)= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7^0. Вычислим матрицу $H^{-1}(x^0)$: $H^{-1}(x^0)=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

8^0. Проверим выполнение условия $H^{-1}(x_0)>0$. Условие выполняется, т.к. $\left|H^{-1}(x_0)\right|>0$.

9^0. Определим $d_0=-H^{-1}(x^0)\nabla f(x^0)=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

10^0. Найдем точку $x^1=(\frac{1}{2},1)+(-\frac{1}{2},-1)=(0,0)$.

11^0. Проверим выполнение условия окончания: $\left\|x^1-x^0\right\|\le\varepsilon_2$, $\left|f(x^1)-f(x^0)\right|<\varepsilon_2$, $\left\|x^1-x^0\right\|=1{,}12>0{,}15$, $\left|f(x^1)-f(x^0)\right|=2>0{,}15$.

Положим $k=1$ перейдем к шагу 3.

3^1. Вычислим $\nabla f(x^1)$: $\nabla f(x^1)=(0;\ 0)$.

4^1. Проверим выполнение условия окончания: $\left\|\nabla f(x^1)\right\|\le\varepsilon_1$, $\left\|\nabla f(x^1)\right\|=0<0{,}1$. Неравенство выполнено, то расчет окончен. Заметим, что в точке $x_1=(0;0)$ выполняется необходимое условие, поэтому она является стационарной точкой.

2 этап: Анализ точки x^1.

Функция $f(x_1, x_2)=2x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ имеет в точке $x^1=(0;\ 0)$ локальный минимум, т.к. $H(x)=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}>0$.

2.9 Контрольные вопросы для текущего контроля

1. Какая функция называется целевой?
2. Какие бывают ограничения?
3. Сформулировать задачу оптимизации общего вида.

4. Что называют критерием оптимизации?
5. Как можно классифицировать задачи оптимизации?
6. Какая функция называется унимодальной?
7. Записать алгоритм Свенна.
8. В чем заключается метод деления интервала пополам?
9. В чем заключается метод золотого сечения?
10. В чем заключается метод конфигураций?
11. В чем заключается метод сопряженных направлений?
12. В чем заключается метод градиентного спуска с постоянным шагом?
13. В чем заключается метод наискорейшего градиентного спуска?
14. В чем заключается метод Ньютона?

2.10 Задания для самостоятельного решения

1. Методом Свенна найти начальный интервал неопределённости для задачи $f(x)=x^2-6x+14 \to \min$:

а) $x^0=0$, $t=1$;

б) $x^0=4$, $t=1$;

в) $x^0=-1$, $t=2$.

2. Методом Свенна найти начальный интервал неопределённости для задачи $f(x)=x^2+6x+12 \to \min$:

а) $x^0=-10$, $t=2$;

б) $x^0=1$, $t=2$;

в) $x^0=1$, $t=1$;

г) $x^0=0$, $t=1$.

3. Методом Свенна найти начальный интервал неопределённости при $x^0=1$, $t=1$ для задачи:

а) $f(x)=x^2-2x+1 \to \min$;

б) $f(x)=x^2+5x-2 \to \min$;

в) $f(x)=x^2+3x+5 \to \min$;

г) $f(x)=x^2-8x+3 \to \min$.

4. Методом деления интервала пополам решить задачи:

а) $f(x)=x^2-6x+14 \to \min$, L_0=[-2,4], $l=1$;

б) $f(x)=x^2+x-1 \to \min$, L_0=[-1,2] , l=0,8;

в) $f(x)=x^2+2x+3 \to \min$, L_0=[-3,0] , $l=1$;

г) $f(x)=x^2-4x+1 \to \min$, L_0=[-1,3] , l=0,9.

5. Методом деления интервала пополам решить задачи, начальный интервал неопределенности определить по алгоритму Свенна:

а) $f(x)=x^2-5x+14 \to \min$, x^0=-1, t=1;

б) $f(x)=x^2+6x-1 \to \min$, x^0=10, t=1.

6. Методом золотого сечения решить задачи:

а) $f(x)=(x-2)(x+1) \to \min$, L_0=[-1,4], $l=1$;

б) $f(x)=(x+2)(x+3) \to \min$, L_0=[-4,0] , l=0,8;

в) $f(x)=x^2+x+3 \to \min$, L_0=[-3,0] , l=1.

7. Методом деления интервала пополам решить задачи, начальный интервал неопределенности определить по алгоритму Свенна:

а) $f(x)=x^2-7x+1 \to \min$, x^0=-1, t=1;

б) $f(x)=(2x+1)(x-3) \to \min$, x^0=8, t=1.

8. Решить задачи методом конфигураций:

а) $f(x)= 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + 3 \to \min$, $x^0=(0,5;1)^T$; Δ_1=0,6; Δ_2=0,5; ε=0,2; α=4; λ=1,5.

б) $f(x)= x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2 \to \min$, $x^0=(-0,5;1)^T$; Δ_1=0,5; Δ_2=0,8; ε=0,3; α=2; λ=2.

в) $f(x)= x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 4x_1 + 3 \to \min$, $x^0=(0,5;1)^T$; Δ_1=0,2; Δ_2=0,4; ε=0,1; α=4; λ=1,5.

г) $f(x)=4(x_1-2)^2+(x_2-5)^2+(x_3+2)^2 \to \min$, $x^0=(1;6;-1)^T$; Δ_1=0,4; Δ_2=0,6; Δ_3=0,8; ε=0,6; α=2; λ=2,5.

9. Решить задачи методом сопряженных направлений:

а) $f(x)=2x_1^2+4x_2^2-3x_1x_2-3x_1+2x_2+1\to\min$, $x^0=(0;1)^T$; $\varepsilon=0{,}8$.

б) $f(x)=10x_1^2+2x_2^2-4x_1x_2-2x_1-2x_2+1\to\min$, $x^0=(0{,}5;0{,}5)^T$; $\varepsilon=0{,}2$.

в) $f(x)=(x_1^2+x_2-11)^2+(x_2^2+x_1-7)^2\to\min$, $x^0=(4;1)^T$; $\varepsilon=0{,}6$.

9. Решить задачи методом градиентного спуска с постоянным шагом:

а) $f(x)=x_1^3+x_2^2-x_1x_2-2x_1+3x_2-4\to\min$, $x^0=(0;0)^T$; $\varepsilon_1=0{,}1$; $\varepsilon_2=0{,}3$; $M=3$.

б) $f(x)=(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2\to\min$, $x^0=(0;0)^T$; $\varepsilon_1=0{,}2$; $\varepsilon_2=0{,}4$; $M=4$.

10. Решить задачу методом градиентного спуска с постоянным шагом:

$f(x)=((x_2+1)^2+x_1^2)(x_1^2+(x_2-1)^2)\to\min$, из точек $x^0=(0{,}5;0)^T$ и $x^0=(-0{,}1;-0{,}5)^T$, $\varepsilon_1=0{,}5$; $\varepsilon_2=0{,}6$; $M=5$.

11. Решить задачу методом наискорейшего градиентного спуска:

$f(x)=(x_1^2+x_2^2-1)^2-(x_1+x_2-1)^2\to\min$, из точек $x^0=(0;3)^T$ и $x^0=(3{,}0)^T$, $\varepsilon_1=0{,}5$; $\varepsilon_2=0{,}6$.

12. Решить задачу методом наискорейшего градиентного спуска:

$f(x)=(x_1^2+x_2-11)-(x_1+x_2^2-7)\to\min$, $x^0=(0{,}0)^T$, $\varepsilon_1=0{,}1$; $\varepsilon_2=0{,}2$.

13. Будет ли удачной точка $x^0=(1;2;1;1)^T$ для решения задачи $f(x)=(x_1^2+x_2)^2+(x_3-x_4)^2\to\min$, по методу Ньютона?

14. Будет ли удачной минимизация функции $f(x)=x_1^3+x_2^2x_1^2+x_1x_2-3x_1$ методом Ньютона из точки $x^0=(2;2)^T$?

15. В задаче $f(x)=100x_1^2+x_2^2\to\min$, $x^0=(0;10)^T$ определите координаты точки x^1 с помощью метода Ньютона.

16. В задаче $f(x)=100(x_2-x_1^2)+(1-x_1)^2\to\min$ сделать 12 итераций из точки $x^0=(2{,}3)^T$ методом Ньютона.

17. Решить задачи методом Ньютона:

а) $f(x)=3(x_1-1)^2+(x_2-2)^2\to\min$, $x^0=(0;-1)^T$; $\varepsilon_1=0{,}2$; $\varepsilon_2=0{,}3$; $M=3$.

б) $f(x)=9x_1^2+x_2^2-2x_1x_2-x_1+2x_2+3\to\min$, $x^0=(0{,}5;0{,}5)^T$; $\varepsilon_1=0{,}5$; $\varepsilon_2=0{,}6$; $M=5$.

3 Нечеткие множества

В эпоху повсеместного проникновения в нашу жизнь компьютеров, казалось бы, не должно остаться областей деятельности, в которых человека не мог бы заменить компьютер. В то же время всегда находятся проблемы, в решении которых человеческий интеллект оказывается сильнее компьютерного. По-прежнему наиболее ответственные решения принимает все-таки человек.

Наиболее поразительным свойством человеческого интеллекта является способность принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Традиционные компьютерные вычисления оказываются «слишком точными» для реального мира.

Человек принимает решения на основе суждений. Для человеческих суждений и его поведения весьма характерна нечеткость.

Например, высокий человек; богатый человек; «если Борис любезен с тобой, то ты должен быть добр к нему»; «если y велико, то немного уменьшить x» и т.д.

Появлением таких понятий, как нечеткое множество, нечеткая система мы обязаны профессору Калифорнийского университета Л. Заде (Lotfi Zadeh). Основная идея Заде состояла в том, что человеческий способ рассуждений, опирающийся на естественный язык, не может быть описан в рамках традиционных математических формализмов. Более того, он считал, что по своей сути обычные количественные методы анализа систем не пригодны для гуманистических систем и вообще любых систем, сравнимых по сложности с гуманистическими системами. В основе этого тезиса лежит то, что можно было бы назвать *принципом несовместимости.* Суть этого принципа можно выразить примерно так: чем сложнее система, тем менее мы способны дать точные и в то же время имеющие практическое значение суждения о ее поведении. Для систем, сложность которых превосходит некоторый пороговый уровень, точность и практический смысл становятся почти исключающими друг друга характеристиками.

Таким образом, традиционные методы анализа для таких систем оказываются недостаточно пригодными. Для гуманистических систем нужны подходы, при которых точность, строгость и математический формализм не являются чем-то абсолютно необходимым и в которых используется методологическая схема, допускающая нечеткости и частичные истины.

Именно таким подходом является подход на основе теории нечетких множеств. Этот подход опирается на предпосылку о том, что элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов, для которых переход от «принадлежности к классу» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен.

В философском плане теория нечетких множеств примечательна тем, что открывает новый подход к решению проблемы абстракции и образования понятий, обладающих богатством всевозможных оттенков.

При разработке интеллектуальных систем знания о конкретной области, для которой создается система, редко бывают полными и абсолютно достоверными. При обработке знаний с применением жестких механизмов формальной логики возникает противоречие между нечеткими знаниями и четкими методами логического вывода. Разрешить эти противоречия можно с использованием специальных методов представления и обработки знаний в условиях неопределенности. Теория нечетких множеств как раз и является одним из таких методов.

3.1 Определение множества в канторовской теории множеств и традиционная двухзначная логика

Понятие множества в математике вводится на основе представления о совокупностях, образованных из конечного или бесконечного числа предметов, которые по какому-либо признаку сведены в единое целое. Предметы, собранные в множества, называются элементами множества. При этом элементы эти берут из некоторой области рассуждений. Множество считается заданным, если заданы его элементы.

Множество может быть задано различными способами.

Например, перечислением элементов: A={0,2,4,6,8}, или описанием его свойств: $A=\{x \mid x$ – четное число больше 0 и меньше 9}, или с помощью диаграммы Венна, или другим каким-либо способом, Наконец, множество может быть задано с помощью характеристической функции.

Пусть U есть область рассуждений *(универсальное множество, универсум). Характеристическая функция* χ_A, определяющая множество A в универсуме U, есть отображение, для которого U является областью определения, а двухэлементное множество {0,1} есть область значений:

$$\chi_A\colon U \to \{0,1\},$$

$$\forall x \in U,\ \chi_A(x) = \begin{cases} 0,\ x \notin A, \\ 1, x \in A. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Таким образом, $\chi_A(x)=1$, если x удовлетворяет свойствам A, и $\chi_A(x)=0$, если x не удовлетворяет свойствам A.

Точная логика (четкая логика, двузначная булева алгебра) функционирует в двузначном мире «да» и «нет» или «истина» и «ложь». Относительно любых событий R этом мире всегда можно сказать, что оно или истинно или ложно. Если значение «истина» представлять числом 1, а значение «ложь» – числом 0, то мы получаем связь с обычными четкими) множествами.

В точной логике при формулировке выводов если выполняется причина, то обязательно выполняется и следствие.

3.2 Определение нечеткого множества

Рассмотрим снова формулу (3.1) определяющую характеристическую функцию $\chi_A(x)$ четкого множества A в универсуме U . Она могла принимать только два значения 1 и 0. Л. Заде в 1965 г. опубликовал статью «Fuzzy sets», в которой он расширил двузначную оценку 0 или 1 до ограниченной многозначной оценки выше 0 и ниже 1, в [0,1], и впервые ввел понятие «нечеткое множество». Заде вместо термина «характеристическая функция» использовал термин «функция принадлежности». *Нечеткое множество* в универсуме U определяется через функцию принадлежности следующим образом:

$$\chi_A\colon U \to [0,1],$$
$$x \mapsto \mu_A(x). \tag{3.2}$$

Чаще всего определение нечеткого множества интерпретируют следующим образом: «величина $\mu_A(x)$ означает субъективную оценку степени принадлежности x множеству A. Например, $\mu_A(x)$=0,7 означает, что x принадлежит A со степенью принадлежности 0,7 (на 70%).

Следует обратить внимание на связь четкого и нечеткого множеств. Так, для обычного множества функция принадлежности имеет вид $\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x \in Y; \\ 1, & x \notin Y \end{cases}$ и принимает в качестве значений только 0 и 1. Нечёткие множества отличаются от обычных множеств тем, что допускают промежуточные степени принадлежности, например, $\mu_A(x)$=0,5. Следовательно, обычное (четкое) множество является частным случаем нечеткого множества.

Заметим, что нечеткое множество строго определяется с помощью функции принадлежности. Таким образом, логика определения понятия нечеткого множества не содержит какой-либо нечеткости.

Нечеткое множество, описывает некоторые понятия в функциональном виде, т. е. такие понятия как "примерно равно 5", "скорость чуть больше 300 км/ч" и т. д., как видно эти понятия невозможно представить одним числом, хотя в реальности люди очень часто пользуются ими.

Подводя итог сказанному выше, сформулируем следующее определение.

Нечетким множеством A на универсуме U будем называть совокупность упорядоченных пар:

$$A=\{(x,\mu_A(x))\setminus x\in U,\ \mu_A(x):U\to[0,1]\},\qquad(3.3)$$

составленных из элементов x универсума U и соответствующих степеней принадлежности $\mu_A(x)$.

Пример 3.1.

$A=\{(x_1,0{,}3), (x_2,0{,}5), (x_3, 0{,}8), (x_4,1), (x_5,0{,}5)\}$.

Пример 3.2.

Нечеткое множество *несколько* на универсуме U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} можно записать в виде

несколько={(0, 0),(1, 0),(2, 0), (3, 0,5), (4, 0,8), (5,1),(6,1),(7, 0,8),(8, 0,5),(9, 0),(10, 0)}.

Пример 3.3.

Нечеткое множество *молодой* на универсуме U=[0,200] можно представить функцией принадлежности вида:

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,25],\\ \left(1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & x\in[25,200].\end{cases}$$

Пример 3.4.

Рассмотрим множество X всех чисел от 0 до 10. Определим подмножество A множества X всех действительных чисел от 5 до 8. A = [5,8].

Рассмотрим функцию принадлежности множества A, она ставит в соответствие число 1 или 0 каждому элементу в X, в зависимости от того, принадлежит данный элемент подмножеству A или нет. Функция принадлежности представлена на рисунке 3.1.

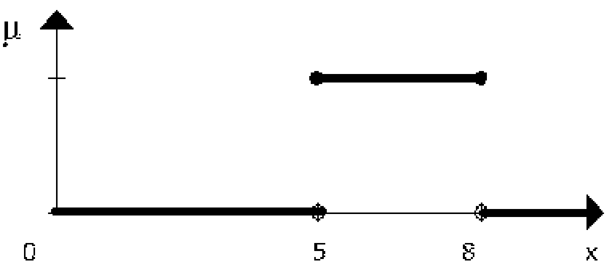


Рисунок 3.1 - Функция принадлежности

Можно интерпретировать элементы, соответствующие 1, как элементы, принадлежащие множеству *A*, а элементы, соответствующие 0, как элементы, не принадлежащие множеству *A*. Равенство $\mu_A(x)$=1 означает, что *x* точно принадлежит множеству *A*; равенство $\mu_A(x)$=0 говорит о том, что *x* точно не принадлежит множеству *A*.

Эта концепция используется в многих областях. Но существуют ситуации, в которых данной концепции будет не хватать гибкости.

Поскольку функция принадлежности является исчерпывающей характеристикой нечеткого множества *A*, то обычно нечеткое множество отождествляется с его функцией принадлежности $\mu_A(x)$.

При построении функции принадлежности нечетких множеств используют два метода: прямой и косвенный.

При прямых методах эксперт либо просто задает для каждого *x* значение $\mu_A(x)$, либо определяет функцию совместимости. Как правило, прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых понятий, таких как скорость, время, расстояние, давление, температура и т.д., или когда выделяются полярные значения.

Во многих задачах при характеристике объекта можно выделить набор признаков и для каждого из них определить полярные значения, соответствующие значениям функции принадлежности, 0 или 1.

В прямых методах используются также групповые прямые методы, когда, например, группе экспертов предъявляют конкретное лицо, и каждый должен дать один из двух ответов: «этот человек лысый» или «этот человек не лысый», тогда количество утвердительных ответов, деленное на общее число экспертов, дает значение $\mu_{\text{лысый}}$ (данного лица). (В этом примере можно действовать через функцию совместимости, но тогда придется считать число волосинок на голове у каждого из предъявленных эксперту лиц.)

Косвенные методы определения значений функции принадлежности используются в случаях, когда нет элементарных измеримых свойств, через которые определяется интересующее нас нечеткое множество. Как правило, это методы попарных сравнений. Если бы значения функций принадлежности были нам известны, например, $\mu_A(x_i)=\omega_i$, $i=1,2,..., n$, то попарные сравнения можно представить матрицей отношений $A=\{a_{ij}\}$, где $a_{ij}= \omega_i/\omega_j$ (операция деления).

На практике эксперт сам формирует матрицу A, при этом предполагается, что диагональные элементы равны 1, а для элементов симметричных относительно диагонали $a_{ij}=1/a_{ij}$, т.е. если один элемент оценивается в α раз сильнее, чем другой, то этот последний должен быть в $1/\alpha$ раз сильнее, чем первый. В общем случае задача сводится к поиску вектора ω, удовлетворяющего уравнению вида $Aw=\lambda_{max}w$, где λ_{max} – наибольшее собственное значение матрицы A. Поскольку матрица A положительна по построению, решение данной задачи существует и является положительным.

3.3 Основные характеристики нечетких множеств

Носителем нечеткого множества A называется обычное подмножество таких точек из универсума U, для которых величина $\mu_A(x)$ положительна. Носитель обозначается через supp A, $S(A)$ и Γ_A:

$$\operatorname{supp} A=\{x\in U \setminus \mu_A(x)>0\}. \tag{3.4}$$

Высотой нечеткого множества A называется величина

$$h(A)=\sup_{x\in U}\mu_A(x). \tag{3.5}$$

Нечеткое множество A называется *нормальным*, если хотя бы один его элемент имеет степень принадлежности 1. Нечеткое множество A называется *субнормальным,* если его высота равна единице, но степени принадлежности всех элементов меньше 1. В случае, когда $h(A)<1$, нечеткое множество называется *анормальным.*

Нечеткое множество A называется пустым, если $\mu_A(x)=0,\ \forall x\in U$.

Очевидно, в данном универсуме U существует единственное пустое нечеткое множество.

Множеством a–уровня (a–срезом, или *a–сечением)* нечеткого множества A называется обычное (четкое) подмножество A_a универсального множества U, определяемое формулой:

$$A_a = \{x \in U \setminus \mu_A(x) \geq a\},\ a \in [0{,}1]. \tag{3.6}$$

Множество *строгого a–уровня* определяется формулой

$$A_a^s = \{x \in U \setminus \mu_A(x) > a\},\ a \in [0{,}1]. \tag{3.7}$$

Носитель нечеткого множества является частным случаем множества строгого a-уровня: supp $A = A_0^s$.

Элементы множества U, для которых степень принадлежности $\mu_A(x)$=0,5, называются *точками перехода*.

Нечеткое множество A в универсуме (пространстве) $U=R^n$ называется *выпуклым* нечетким множеством тогда и только тогда, когда его функция принадлежности выпукла, т.е для каждой пары точек $x,\ y \in U$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)) \tag{3.8}$$

для всех $\lambda \in [0{,}1]$.

Пример 3.5.

Для нечеткого множества

несколько={(0, 0),(1, 0),(2, 0), (3, 0,5), (4, 0,8), (5,1),(6,1),(7, 0,8),(8, 0,5),(9, 0),(10, 0)}:

supp A={3,4,5,6,7,8};

$h(A)$=1;

Нечеткое множество *несколько* является нормальным.

Точки перехода: 3,8.

3.4 Операции над нечеткими множествами. Принцип обобщения

Пусть A и B – нечеткие множества на универсуме U.

Говорят, что A и B равны, и пишут A=B, если $\mu_A(x) = \mu_B(x), \ \forall x \in U$.

Говорят, что A содержится в B (нечетное множество A является *нечетким подмножеством* нечеткого множества B), и пишут $A \subseteq B$, если

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \ \forall x \in U. \tag{3.9}$$

Строгое включение (собственное подмножество) $A \subset B$ имеет место, когда хотя бы одно из неравенств (3.9) является строгим.

Дополнением нечеткого множества A в U называют нечеткое множество $\overline{A}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \ \forall x \in U. \tag{3.10}$$

Объединением $A \cup B$ нечетких множеств A и B в U называют наименьшее нечеткое множество, включающее как A, так и B, с функцией принадлежности вида

$$\mu_{A \cup B} \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \ \forall x \in U. \tag{3.11}$$

Пересечением $A \cap B$ нечетких множеств А и B в U называют наибольшее нечеткое множество, содержащееся одновременно в A и B:

$$\mu_{A \cap B} \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \ \forall x \in U. \tag{3.12}$$

Пример 3.6.

Рассмотрим два нечетких множества:

A ={(a, 0,3), (b, 0,5), (c, 0,8), (e,1), (g,0,5)} и

B ={(a, 0,8), (c, 0,7), (d, 0,1), (g, 0,2), (f, 0,5), (h, 0,5)}.

$A \cup B$ ={(a, 0,8), (b, 0,5), (c, 0,8), (d, 0,1), (e,1), (g, 0,5), (f, 0,5), (h, 0,5)}.

$A \cap B$ ={(a, 0,3), (c, 0,7), (g, 0,2)}.

Пример 3.7.

Пусть A – нечёткое множество «от 3 до 7» (рисунок 3.2) и B – нечёткое множество «около 8» (рисунок 3.3), заданные своими функциями принадлежности:

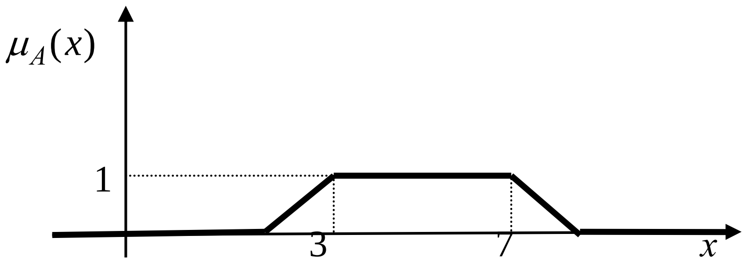


Рисунок 3.2 – Нечёткое множество «от 3 до 7»

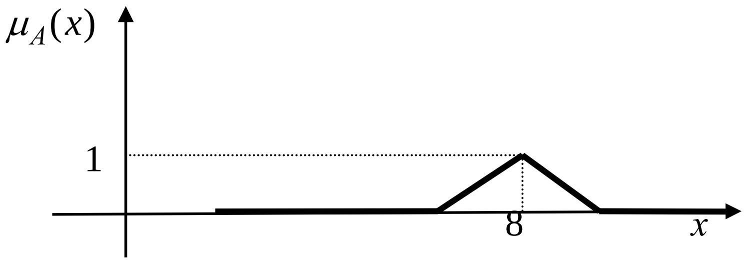


Рисунок 3.3 – Нечёткое множество «около 8»

Тогда, используя максиминные операции, получим множества, изображенные на рисунках 3.4 – 3.6.

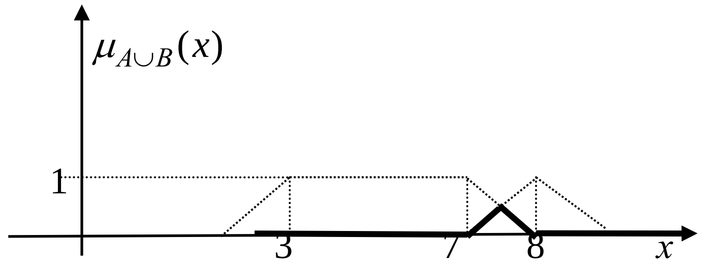


Рисунок 3.4 – Объединение нечетких множеств *A* и *B*

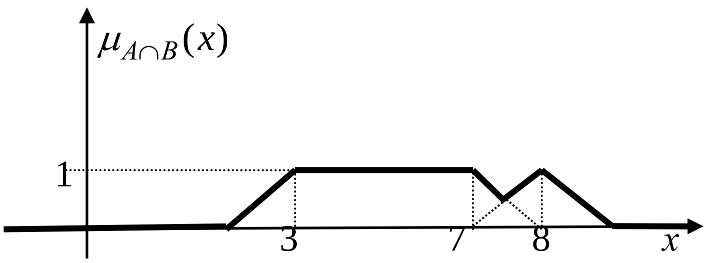


Рисунок 3.5 – Пересечение нечетких множеств *A* и *B*

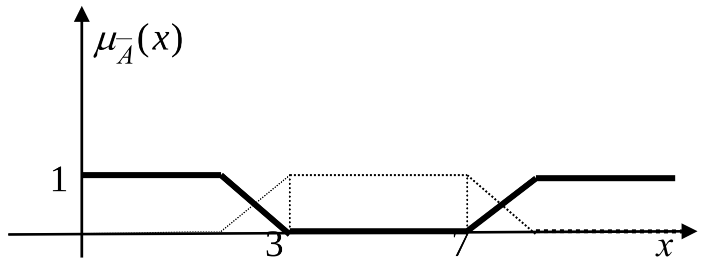


Рисунок 3.6 – Дополнение нечеткого множества *A*

Наряду с максиминными определением операций объединения и пересечения нечетких множеств (называемых также суммой и произведением) и теории нечетких множеств используются другие виды определения этих операций. Наибольшее распространение получили алгебраическое, граничное (ограниченное) и драстическое (англ. drastic – решительный, радикальный) определения. Например, алгебраическое определение состоит в следующем.

Алгебраическое объединение (сумма):

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x),\ \forall x \in U. \tag{3.13}$$

Алгебраическое пересечение (произведение):

$$\mu_{A\cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x),\ \forall x \in U. \tag{3.14}$$

Разность нечетких множеств A и B также определяется по-разному. Вот некоторые варианты

$$\mu_{A-B}(x) = \max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0),\ \forall x \in U.$$

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A\cap\bar{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)),\ \forall x \in U. \tag{3.15}$$

$$\mu_{A-B}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)|,\ \forall x \in U.$$

Граничное объединение и пересечение или сумма и произведение определяются следующим образом:

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1),\ \forall x \in U.$$

$$\mu_{A\otimes B}(x) = \max(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0),\ \forall x \in U.$$

Драстическое объединение и пересечение или сумма и произведение определяются следующим образом:

$$\mu_{A\nabla B}(x) = \begin{cases} \mu_B(x), \textit{если } \mu_A(x) = 0, \\ \mu_A(x), \textit{если } \mu_B(x) = 0, \\ 1, \textit{иначе.} \end{cases} \qquad \mu_{A\Delta B}(x) = \begin{cases} \mu_B(x), \textit{если } \mu_A(x) = 1, \\ \mu_A(x), \textit{если } \mu_B(x) = 1, \\ 0, \textit{иначе.} \end{cases}$$

Для максиминных операций объединения и пересечения нечетких множеств справедливы следующие свойства:

1. коммутативность: $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$;

2. ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ и $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

3. идемпотентность: $A \cup A = A$ и $A \cap A = A$;

4. дистрибутивность: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

5. $A \cup U = U$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cap U = A$; $A \cup \emptyset = \emptyset$.

6. законы Деморгана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7. инволюция: $\overline{\overline{A}} = A$.

8. В отличие от обычных множеств в общем случае не выполняются законы противоречия и исключения третьего: $A \cup \overline{A} \neq U$; $A \bigcap \overline{A} \neq \emptyset$.

Для алгебраических операций объединения и пересечения (суммы и произведения) нечетких множеств справедливы следующие свойства:

1. коммутативность: $A + B = B + A$ и $A \cdot B = B \cdot A$;

2. ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

3. идемпотентность не выполняется: $A + A \neq A$ и $A \cdot A \neq A$;

4. дистрибутивность не выполняется: $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ и $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$;

5. $A + U = U$; $A + \emptyset = A$; $A \cdot U = A$; $A \cdot \emptyset = \emptyset$.

6. законы Деморгана: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

7. не выполняются законы противоречия и исключения третьего: $A + \overline{A} \neq U$; $A \cdot \overline{A} \neq \emptyset$.

Кроме основных операций имеются и другие операции:

операция концентрирования: $\mu_{con} A(x) = (\mu_A(x))^2$, $\forall x \in U$ (уменьшение степени принадлежности).

Операция растяжения: $\mu_{dil} A(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$, $\forall x \in U$ (увеличение степени принадлежности).

Пусть $\varphi : U \to V$ заданное отображение. A – нечеткое множество, заданное в u, тогда образ нечеткого множества A при отображении φ есть нечеткое множество B заданное в V для которого

$$\mu_B(x) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x),\ \forall y \in V, \qquad (3.16)$$

где $\varphi^{-1}(y)$ - прообраз элемента y при φ.

Пример 3.8.

Рассмотрим нечеткое множество *несколько* на универсуме u={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, f – операция возведение в квадрат.

несколько^2 на универсуме U={0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100} имеет вид:
несколько^2={(0;0),(1;0),(4;0),(9;0,5),(16;0,8),(25;1),(36;1),(49;0,8),(64;0,5),(81;0),(100;0)}.

Рассмотрим принцип обобщения.

Любое нечеткое множество можно разложить по множествам уровня, представив его в виде:

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha, \qquad (3.17)$$

где нечеткое множество αA_α определяется следующим образом:

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha,\ \mu_A(\alpha) \ge \alpha; \\ 0,\ \mu_A(\alpha) < \alpha. \end{cases} \qquad (3.18)$$

Данное разложение позволяет выразить принцип обобщения в форме:

$$f(A) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha f(A_\alpha). \qquad (3.19)$$

3.5 Декартово произведение нечетких множеств

Пусть X – нечеткое множество на U и Y – нечеткое множество на V. Тогда *декартово произведение* нечетких множеств X и Y, обозначаемое $X \times Y$, определяется как нечеткое множество на декартово произведение $U \times V$, для которого:

$$\mu_{X \times Y}(x, y) = \min(\mu_X(x), \mu_Y(y)). \qquad (3.20)$$

Пример 3.9.

A ={(x_1,0,5), (x_2,0,3), (x_3, 1)}.

B ={(y_1,1), (y_2,0,8)}.

A×B={((x_1, y_1);0,5), ((x_1, y_2);0,5), ((x_2, y_1);0,5), ((x_2, y_2);0,3), ((x_3, y_1);1), ((x_3, y_2);0,8)}.

Пусть X – нечеткое множество на U и Y – нечеткое множество на V. Тогда *декартово копроизведение* нечетких множеств X и Y, обозначаемое $X+Y$, определяется как нечеткое множество на декартово произведение $U \times V$, т.е.

$$\mu_{X+Y}(x,y) = \max(\mu_X(x), \mu_Y(y)). \tag{3.21}$$

Понятия декартова произведения и копроизведения могут быть приведены для n нечетких множеств.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – нечеткие множества, заданные на $U_1, U_2, \ldots, U_n$ соответственно. Тогда *декартово произведение* нечетких множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, обозначаемое $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, определяется как нечеткое множество на декартово произведение $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, т.е.

$$\mu_{X_1 \times X_2 \times .. \times X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min_{i=1,\ldots n}(\mu_{X_i}(x_i)). \tag{3.22}$$

3.6 Определение нечеткого отношения. Операции над нечеткими отношениями. Свойства нечетких отношений

Пусть $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Нечетким отношением на множествах $U_1, U_2, \ldots, U_n$ называется нечеткое множество R на декартово произведение универсумов $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$:

$$\mu_R : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \to [0,1]. \tag{3.23}$$

Очевидно, что с декартовым произведением нечетких множеств естественным образом связано нечеткое отношение, таким образом, любое декартово произведение индуцирует естественное связанное с ним нечеткое отношение.

Если множества X и Y – конечные, то нечеткое отношение R между множествами X и Y можно представить с помощью его матрицы отношения, строкам и столбцам которой ставят в соответствие элементы множеств *X* и *Y*, а на пересечении строки *X* и столбца *Y* помещается элемент $\mu_R(x, y)$.

Пример 3.10.

Составим матрицу отношения, связанного с декартовым произведением примера 3.9.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,3 \\ 1 & 0,8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}$$

Пусть на множестве *X*×*Y* заданы два нечетких отношения *R* и *S*. Тогда *объединение* нечетких отношений $R \cup S$ определяется выражением:

$$\mu_{R\cup S} \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)),\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y. \tag{3.24}$$

Пересечение $R \cap S$ нечетких отношений *R* и *S* определяется выражением:

$$\mu_{R\cap S} \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)),\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y. \tag{3.25}$$

Нечеткое отношение *S* *включает в себя* нечеткое отношение *R* (или содержит) $R \subseteq S$, если для них выполняется:

$$\mu_R(x, y) \le \mu_S(x, y),\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y. \tag{3.26}$$

Множество всех нечетких отношений по отношению к операциям объединения и пересечения удовлетворяют следующими свойствами:

1. коммутативность: $R \cup S = S \cup R$ и $R \cap S = S \cap R$;

2. ассоциативность: $(R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T)$ и $(R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$;

3. идемпотентность: $R \cup R = R$ и $R \cap R = R$;

4. дистрибутивность: $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$ и $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$;

5. поглощение: $R \cap (S \cup R) = R$; $R \cup (S \cap R) = R$;

6. монотонность: $S \subseteq T \Rightarrow R \cup S \subseteq R \cup T$ и $R \cap S \subseteq R \cap T$.

Так как, нечеткое отношение является нечетким множеством, определенном на декартовом произведении универсумов, то для нечетких отношений можно определить все понятия, которые были определены для нечетких множеств.

Композицией нечетких отношений $R\colon X \times Y$ и $S\colon Y \times Z$ называется нечеткое отношение $R \circ S$, определяемое на декартовом произведении $X \times Z$, определенное функцией принадлежности вида:

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \max_{y \in Y} \min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)),\ \forall x \in X, \forall z \in Z. \tag{3.27}$$

Если множества X,Y,Z – конечны, то матрица нечетких отношений $R \circ S$ равна максиминному произведению между соотношениями R и S.

Пример 3.11.

Для нечетких отношений R и S с матрицами отношений:

$R = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}$ и $S = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ определить матрицу отношений $R \circ S$.

Решение:

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \max(\min(0{,}3;0{,}5), \min(0{,}7;0{,}2)) & \max(\min(0{,}3;0{,}8), \min(0{,}7;0{,}9)) \\ \max(\min(0{,}6;0{,}5), \min(1;0{,}2)) & \max(\min(0{,}6;0{,}8), \min(1;0{,}9)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \max(0{,}3;0{,}2) & \max(0{,}3;0{,}7) \\ \max(0{,}5;0{,}2) & \max(0{,}6;0{,}9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Кроме введенной операции максиминной композиции используют и другие варианты.

Рассмотрим нечеткое отношение E, такое, что:

$$\mu_E(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Нечеткое отношение E играет по отношению к операции максиминной композиции роль нейтрального элемента: $R \circ E = E \circ R = R$.

Для любого нечеткого отношения $R: X\times Y$ определяется *обратное* ему отношение $R^{-1}: Y\times X$ и вычисляется следующим образом:

$$\mu_{R^{-1}}(y,x)=\mu_R(x,y),\ \forall x\in X\ ,\ \forall y\in Y\ . \tag{3.29}$$

Пусть задано нечеткое отношение $R: X\times X$ с функцией $\mu_R : X\times X\rightarrow[0,1]$.

Нечеткое отношение $R: X\times X$ называется *рефлексивным* на X, если $\mu_R(x,x)=1$, $\forall x\in X$.

Это свойство можно выразить в форме: $E\subseteq R$.

В теории нечетких отношений используются и другие виды рефлексивности, в частности:

слабая рефлексивность - $\mu_R(x,y)\leq\mu_R(x,x)$, $\forall x,y\in X$;

сильная рефлексивность - $\mu_R(x,y)<1$, $\forall x,y\in X$, $x\neq y$.

Нечеткое отношение $R: X\times X$ называется *антирефлексивным* на X, если

$$\mu_R(x,x)=0,\ \forall x\in X$$

или $R\cap E=\emptyset$.

Аналогично нечеткой рефлективности, для нечеткой антирефлексивности можно определить слабую и сильную антирефлексивность:

слабая антирефлексивность - $\mu_R(x,x)\leq\mu_R(x,y)$, $\forall x,y\in X$;

сильная антирефлексивность - $\mu_R(x,y)>0$, $\forall x,y\in X$, $x\neq y$.

Нечеткое отношение $R: X\times X$ называется *симметричным* на X, если

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x),\ \forall x,y\in X \tag{3.30}$$

или $R=R^{-1}$.

Нечеткое отношение $R: X\times X$ называется *антисимметричным* на X, если

$$min(\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x))=0,\ \forall x,y\in X\ ,\ x\neq y \tag{3.31}$$

или $R\cap R^{-1}\subseteq E$.

Нечеткое отношение $R: X\times X$ называется *асимметричным* на X, если

$$min(\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x))=0,\ \forall x,y\in X \tag{3.32}$$

или $R\cap R^{-1}=\emptyset$.

Нечеткое отношение *R:* $X \times X$ называется *слабополным*, если

$$max(\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x))>0,\ \forall x, y \in X\ . \quad (3.33)$$

Нечеткое отношение *R:* $X \times X$ называется *сильнополным*, если

$$max(\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x))=1,\ \forall x, y \in X\ . \quad (3.34)$$

Сильная полнота может быть выражена в форме: $R \cup R^{-1} = U$.

Нечеткое отношение *R:* $X \times X$ называется *транзитивным*, если

$$\mu_R(x,z) \geq min(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)),\ \forall x, y, z \in X \quad (3.35)$$

или $R \supseteq R \circ R$.

Возможны и другие определения транзитивности нечетких отношений.

Транзитивным замыканием нечеткого отношения *R* на *X* будем называть нечеткое отношение $\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$.

Все типы нечетких отношений в зависимости от свойств, которыми они обладают, могут быть разделены на три больших класса:

1. симметричные отношения, которые обычно характеризуют сходство или различие между объектами множества *X;*

2. антисимметричные отношения, которые задают на множестве *X* отношения упорядоченности, доминирования, подчиненности и т.п.;

3. все остальные отношения.

Отношения каждого из этих классов в свою очередь, могут быть разделены на подклассы в зависимости от выполнения рефлексивности и антирефлексивности.

Рефлексивные симметричные отношения обычно называются *отношениями сходства, толерантности, безразличия* или *неразличимости.*

Антирефлексивные симметричные отношения обычно называются *отношениями различия.*

Отношения сходства и отношения различия двойственны друг другу.

Антисимметричные отношения называются *порядком* или *предпорядком*, и, в зависимости от выполнения условия рефлексивности и антирефлексивности, делятся на нестрогие и строгие порядки.

Из отношений 3 класса выделяют лишь рефлексивные отношения, которые называют *слабыми порядками.*

На следующем уровне классификации из каждого класса отношений могут быть выделены отношения специального вида. Определяющим условием для них является условие транзитивности. Оно устанавливает связь между силой отношения для различных пар объектов из *X.* Эта связь может быть очень слабой, а может накладывать достаточно сильные ограничения на возможные значения силы отношения между объектами из *X.* Число отличающих друг от друга условий транзитивности зависит от типа отношения, для которого они формулируются.

Условия транзитивности зависят от вида операций, с помощью которой они определяются.

3.7 Нечеткие числа и операции над ними

Нечетким числом A на вещественной прямой *R* называется нечеткое множество, характеризующееся функцией принадлежности:

$$\mu_A : R \to [0,1].$$

Пример 3.12.

Нечеткое число $\underline{2}$, которое означает «около 2» может задаваться функцией принадлежности:

$$\mu_{\underline{2}}(x) = \begin{cases} x-1, \textit{ если } x \in [1,2], \\ 3-x, \textit{ если } x \in [2,3], \\ 0, \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Графически это число изображено на рисунке 3.7.

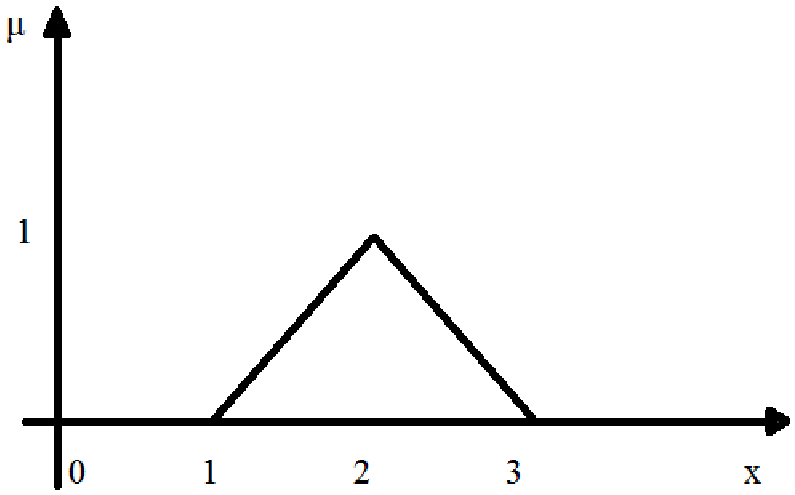


Рисунок 3.7 – Изображение нечеткого числа $\underline{2}$

Для того чтобы применение теории в приложениях оказалось полезным, необходимо иметь содержательную интерпретацию нечётких множеств и нечётких чисел. Пусть A – нечёткое число и $\mu_A(x)$ – её функция принадлежности. Тогда значение $\mu_A(x)$ показывает правдоподобность того, что действительное значение величины A равно x. Л. Заде показал, что такая трактовка неопределённости, связанной с нечётким числом, не является вероятностной. Возникает новая теория, работающая с неопределённостью, которую Заде назвал *теорией возможностей*. Таким образом, $\mu_A(x)$ показывает возможность того, что нечёткая величина A принимает значение x. Чтобы продемонстрировать различия между теорией вероятности и теорией возможности, приведём пример из работы Заде. Некто Ганс на завтрак ест яичницу из нескольких яиц. Обозначим через A количество яиц, которое Ганс ест утром. Мы можем интерпретировать A как нечёткое число и связать с ним функцию принадлежности $\mu_A(x)$. С другой стороны, можно считать A случайной величиной, тогда $p_A(x)$ обозначает вероятность того, что за завтраком будет съедено x яиц. Распределения возможностей и вероятностей образуют таблицу 3.1.

Таблица 3.1. – Распределения возможностей и вероятностей

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu_A(x)$	1	1	1	1	0,8	0,6	0,4	0,2
$p_A(x)$	0,1	0,8	0,1	0	0	0	0	0

Из таблицы видно, что высокий уровень возможности не означает высокую вероятность события, однако, если событие невозможно, то оно невероятно. Пример показывает, что теория возможностей более грубо оценивает ситуацию. Поэтому она более устойчиво работает в тех случаях, когда информации о том, что происходит, немного.

Нечеткое число A называется *нормальным*, если:

$$\max_{x \in R} \mu_A(x) = 1.$$

Нечеткое число A называется *унимодальным,* если условие μ_A=1 справедливо только для одной точки действительной оси.

Нечеткое число A называется *выпуклым*, если для любых действительных чисел $x,y,z \in R$ таких, что $x \leq y \leq z$ выполняется

$$\mu_A(y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(z)) \tag{3.36}$$

Часто в литературе под нечеткими числами понимаются только нормальные выпуклые нечеткие числа.

Множество а –уровня нечеткого числа A определяется как

$$A_\alpha = \{x \in R \setminus \mu_\alpha(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]. \tag{3.37}$$

Можно показать, что $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \supseteq A_{\alpha_2}$.

Если два нечетких числа A и B равны, т.е. если $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для всех $x \in$ R, то можно получить A_a=B_a для любых α, и обратно. Если нечеткое число A выпуклое, то

A_a является выпуклым множеством (т.е. интервалом) на R, и обратно. Нечеткое число можно разложить по его множествам уровня: $A=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha A_\alpha$.

Понятие множества уровня является расширением понятия интервала. Оно представляет собой объединение не более чем счетного числа интервалов. Соответственно, алгебра интервалов есть частный случай алгебры множеств уровня.

Носитель supp A нечеткого числа A определяется как специальный случай множества уровня:

$$\operatorname{supp} A=\{x\in R\setminus \mu_A(x)>0\}. \tag{3.38}$$

В более строгой математической литературе по нечетким числам под носителем нечеткого числа понимается топологическое замыкание: $\{x\in R\setminus \mu_A(x)>0\}$.

Пусть A и B – нечеткие числа в R, и пусть * – бинарная операция, определенная на R. Операция * может быть распространена на нечеткие числа *A и B* с помощью *принципа распространения (принципа обобщения).*

$$\mu_{A*B}(z)=\sup_{x*y=z}\min(\mu_A(x),\mu_B(y))\;\forall z\in R. \tag{3.39}$$

Согласно этому принципу четыре арифметические операции (+, -, $\cdot$, /) над нечеткими числами A и B можно интерпретировать как:

$$\mu_{A+B}(z)=\sup_{x+y=z}\min(\mu_A(x),\mu_B(y))\;\forall z\in R; \tag{3.40}$$

$$\mu_{A-B}(z)=\sup_{x-y=z}\min(\mu_A(x),\mu_B(y))\;\forall z\in R; \tag{3.41}$$

$$\mu_{A\cdot B}(z)=\sup_{x\cdot y=z}\min(\mu_A(x),\mu_B(y))\;\forall z\in R; \tag{3.42}$$

$$\mu_{A/B}(z)=\sup_{x/y=z}\min(\mu_A(x),\mu_B(y))\;\forall z\in R. \tag{3.43}$$

Если A и B являются выпуклыми нечеткими числами, то множества α-уровня A_a и B_a есть интервалы R. Тогда можно получить:

$$(A+B)_\alpha=A_\alpha+B_\alpha; \tag{3.44}$$

$$(A-B)_\alpha = A_\alpha - B_\alpha; \tag{3.45}$$

$$(A\cdot B)_\alpha = A_\alpha \cdot B_\alpha; \tag{3.46}$$

$$(A/B)_\alpha = A_\alpha / B_\alpha. \tag{3.47}$$

И соответствующие разложения по множествам α – уровня:

$$A+B=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha(A_\alpha + B_\alpha);$$

$$A-B=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha(A_\alpha - B_\alpha);$$

$$A\cdot B=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha(A_\alpha \cdot B_\alpha);$$

$$\frac{A}{B}=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha(\frac{A_\alpha}{B_\alpha}).$$

Если A–выпуклое нечетное число, то $A_\alpha = [\delta_A(\alpha), \gamma_A(\alpha)]$, где $\delta_A(\alpha)=\mu^{-1}_{A\uparrow}(\alpha)$, $\gamma_A(\alpha)=\mu^{-1}_{A\downarrow}(\alpha)$; здесь $\mu^{-1}_{A\uparrow}(\alpha)$, $\mu^{-1}_{A\downarrow}(\alpha)$ являются обратными функциями для возрастающей и убывающей частей $\mu_A(x)$ соответственно. Таким образом, операции с нечеткими числами можно свести к интервальным операциям с параметризованными интервалами.

Пример 3.13.

Найдем для нечеткого числа $\underline{2}$, из примера 3.12, нечеткое число $\underline{2}+\underline{2}$.

Решение:

Возьмем *α=x-1*, тогда *x=α+1*, если *α=3-x*, тогда *x=3-α.*

$A_\alpha = \underline{2}_\alpha = [\alpha+1,\ 3-\alpha]+[\alpha+1,\ 3-\alpha]=[2\alpha+2,\ 6-2\alpha]$.

Перейдем к переменной *x.*

$x=2\alpha+2$, тогда $\alpha=\frac{x}{2}-1$; если $\alpha=0$, то $x=2$; если $\alpha=1$, то $x=4$. Таким образом, получили интервал [2,4].

x=6-2α, тогда α=-$\frac{x}{2}$+3; если $\alpha=0$, то $x=6$; если $\alpha=1$, то $x=4$. Таким образом, получили интервал [4,6].

Тогда получаем:

$$\mu_{\underline{2}+\underline{2}}(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}-1,\ если\ x\in[2,4],\\ -\frac{x}{2}+3,\ если\ x\in[4,6],\\ 0,\ в\ остальных\ случаях.\end{cases}$$

3.8 Алгебраические свойства нечетких чисел

Если A и B – выпуклые нечеткие числа на вещественной прямой R, то $A+B$, $A–B$ и $A\cdot B$ также являются выпуклыми нечеткими числами.

Нечеткое число A называется *положительным*, если $0<\alpha_1\le\alpha_2$ для носителя $\Gamma_A=[a_1,a_2]$, т.е. Γ_A находится на положительной вещественной прямой. Аналогично, A называется *отрицательным*, если $\alpha_1\le\alpha_2<0$, и *нулевым*, если $\alpha_1\le 0\le\alpha_2$.

Если B – нулевое выпуклое нечеткое число, то $\frac{1}{B}$ не является выпуклым нечетким числом. Нечеткое число $\frac{1}{B}$ согласно (3.43) определяется функцией принадлежности: $\mu_{\frac{1}{B}}(x)=\mu_B(\frac{1}{B}),\ \forall x\in R.$

Можно доказать следующие утверждения:

1. если A и B – выпуклые нечеткие числа, то $\frac{A}{B}$ в общем случае не является выпуклым нечетким числом;

2. если B – ненулевое нечеткое число (положительное или отрицательное), то выпуклость $\frac{A}{B}$ сохраняется;

3. если A – выпуклое нечеткое число, а B положительное (или отрицательное) выпуклое нечеткое число, то A/B является выпуклым нечетким числом;

4. если A и B – нормальные нечеткие числа, то $A+B$, A-B, $A \cdot B$ и $\frac{A}{B}$ также являются нормальными нечеткими числами.

Теперь мы будем исследовать алгебраические свойства нечетких чисел относительно операций +, -, ·, /. Как хорошо известно, множество всех действительных чисел R образует поле относительно обычных операций + и ·. Однако для выпуклых нечетких чисел в общем случае не существует обратных и не выполняется закон дистрибутивности. Таким образом, множество всех выпуклых нечетких чисел (не имеет смысла говорить о произвольных нечетких числах) не образуют таких алгебраических структур, как кольцо или поле. Но для положительных нечетких чисел, определенных на положительной вещественной прямой, выполняется закон дистрибутивности, и, таким образом, множество всех положительных нечетких чисел образует коммутативное полукольцо.

Для любых нечетких чисел A, B и C выполняются следующие свойства:

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
3. $A+B=B+A$;
4. $A \cdot B = B \cdot A$;
5. $A+0=A$;
6. $A \cdot 1=A$,

где 0 и 1 – нуль и единица, соответственно, в обычном смысле.

В общем случае для произвольного нечеткого числа A не существует обратных нечетких чисел A' и A'' относительно операций + и ·, соответственно, таких что: $A+A'=0$, $A \cdot A''=1$, где 0 и 1 - нуль и единица, соответственно, в обычном смысле.

Замечание. Если A сводится к вещественному числу, то $-A$ и $1/A$ являются обратными к A по отношению + и ·, соответственно.

Следствие. Для нечеткого числа A в общем случае имеем:

$$A+(-A)\neq 0, \qquad (3.48)$$

$$A\cdot(1/A)\neq 1. \qquad (3.49)$$

Когда A, B и C – произвольные нечеткие числа. то в общем случае не выполняется:

$$A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C). \qquad (3.50)$$

То же самое верно для случая, когда A, B и C – нормальные выпуклые нечеткие числа.

Закон дистрибутивности (3.50) выполняется для любых положительных выпуклых нечетких чисел A, B и C.

Когда множество α–уровня является пустым множеством ∅, то имеет место следующее: $A_\alpha+\emptyset=\emptyset$, $A_\alpha\cdot\emptyset=\emptyset$.

3.9 Нечеткие треугольные числа

На практике часто используется альтернативное определение нечеткого числа.

Треугольным нечетким числом A называется тройка $(\underline{a}, a, \overline{a})$ действительных чисел, $\underline{a}\le a\le\overline{a}$, через которые его функция принадлежности определяется как:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\underline{a}}{a-\underline{a}}, \text{ если } x\in[\underline{a},a];\\ \dfrac{\overline{a}-x}{\overline{a}-a}, \text{ если } x\in[a,\overline{a}];\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

a обычно называют *модой* или *четким значением* нечеткого треугольного числа. Числа $\underline{a}$ и $\overline{a}$ характеризуют степень размытости.

Пример 3.14.

Нечеткое число, которое лингвистически можно представить как «около 3» или «приблизительно 3», можно изобразить нечетким треугольным числом A=(1,3,4).

В общем случае при определении нечеткого треугольного числа не обязательно использовать линейные функции. Часто в различных приложениях используются две функции, из которых одна монотонно возрастает на интервале $[\underline{a}, a]$, а другая монотонно убывает на интервале $[a, \overline{a}]$.

При таком определении нечеткого треугольного числа операции над нечеткими треугольными числами сводятся к интервальным операциям. В силу этого и свойств интервальной арифметики, проблемы противоположного, обратного элементов и дистрибутивности остаются нерешенными.

Еще одним существенным недостатком такого подхода к определению нечеткого числа является то, что размытость произведения зависит не только от размытости сомножителей, но и от того, какое место данные нечеткие числа занимают на числовой оси.

Пример 3.15.

Рассмотрим треугольные числа: A_1=(1,2,3), B_1=(2,3,4), A_2=(9,10,11), B_2=(10,11,12). Тогда $A_1 \cdot B_1$=(2,6,12), $A_2 \cdot B_2$=(90,110,132). Число $A_2 \cdot B_2$ получается гораздо более размытое, чем $A_1 \cdot B_1$.

3.10 Четкие арифметики нечетких треугольных чисел

Здесь мы будем рассматривать нечеткие треугольные числа вида (a,α,β). Мы будем строить арифметику, определяя операции сложения и умножения нечетких треугольных чисел, в которой для каждого элемента будут существовать противоположные и обратные элементы.

Можно доказать, что невозможно построить арифметику нечетких треугольных чисел, изоморфную арифметике действительных (четких) чисел (R,+,·), если размытости суммы и произведения нечетких треугольных чисел вычисляются по одному алгоритму. Поэтому имеет смысл рассматривать только случай, когда размытости суммы и произведения определяются по разным алгоритмам.

Пусть $(a_1,\alpha_1,\beta_1)+(a_2,\alpha_2,\beta_2)=(a_1+a_2,\alpha_1\oplus\alpha_2,\beta_1\oplus\beta_2)$, $(a_1,\alpha_1,\beta_1)\cdot(a_2,\alpha_2,\beta_2)=(a_1\cdot a_2,\alpha_1\otimes\alpha_2,\beta_1\otimes\beta_2)$.

Будем искать алгебраическую систему (R_+,⊕,⊗), которая удовлетворяет свойствам коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, существования нейтрального и единичного элементов, существования противоположного и обратного элементов, т.е. систему, образующую ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и делением.

Рассмотрим поле действительных чисел (R,+,·) и некоторое взаимно однозначное отображение f: $R\rightarrow R_+$. Определим операции ⊕ и ⊗ таким образом, чтобы f являлось изоморфизмом соответствующих систем. Тогда должны выполняться следующие равенства: $\alpha\oplus\beta=f(f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta))$, $\alpha\beta=f(f^{-1}(\alpha)\cdot f^{-1}(\beta))$.

Например, если в качестве f взять $f(x)=e^x$, то получим:

$\alpha\oplus\beta=e^{\ln\alpha+\ln\beta}=\alpha\beta$ и $\alpha\otimes\beta=e^{\ln\alpha\ln\beta}$.

Нетрудно убедиться, что при таком задании операций размытости построенная арифметика будет коммутативной, ассоциативной и дистрибутивной. Роль нулевого элемента будет выполнять нечеткое треугольное число (0,1,1), роль единичного элемента – (*1,e,e*). Для произвольного нечеткого треугольного числа (*a,α,β*) противоположным будет $(-a\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})$, а обратным $(-\frac{1}{a},e^{\frac{1}{\ln\alpha}},e^{\frac{1}{\ln\beta}})$.

3.11 Нечеткие арифметики нечетких треугольных чисел

Четкие арифметики нечетких треугольных чисел обладают рядом недостатков, не позволяющим всегда адекватно интерпретировать действия с лингвистическими переменными.

Рассмотрим другой подход к построению арифметики нечетких чисел, который сглаживает эти недостатки. При этом подходе нечеткость рассуждений увеличивается, что не всегда является минусом.

Основная идея данного подхода заключается в том, что понятие нечеткости накладывается на арифметические операции. Таким образом, результатом сложения (или умножения) двух нечетких треугольных чисел является не одно конкретное нечеткое треугольное число, а нечеткое множество, определенное на множестве нечетких треугольных чисел.

Пусть нам дана некоторая четкая арифметика нечетких треугольных чисел $(R,+,\cdot)$. На базе этой арифметики будем строить нечеткую арифметику нечетких треугольных чисел $(R,\tilde{+},\tilde{\cdot})$.

Пусть нам даны нечеткие треугольные числа $A=(a,\alpha_A,\beta_A)$ и $B=(b,\alpha_B,\beta_B)$. Множество $A\tilde{*}B$ является нечетким подмножеством множества R с функцией приоритета $\mu_{A\tilde{*}B}$, которая для любого нечеткого треугольного числа $C=(c,\alpha_C,\beta_C)$ удовлетворяет условию:

$$\mu_{A\tilde{*}B}(C)=\begin{cases}0, & \text{если } c\neq a*b;\\ \dfrac{1}{\max(\alpha^*,\beta^*)+1}, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\alpha^*=|\alpha_C-\alpha_A*\alpha_B|,\ \beta^*=|\beta_C-\beta_A*\beta_B|$.

Обозначим $\mu_{A\tilde{*}B}(C)=\gamma$. Тогда, если $\gamma>0$, то будем записывать $A\tilde{*}B=_\gamma C$, а если $\gamma=0$, то будем писать $A\tilde{*}B\neq C$. Число $C^k=A\tilde{*}B=(a*b,\alpha_A*\alpha_B,\beta_A*\beta_B)$ назовем *каноническим представителем* $A\tilde{*}B=_{\gamma 1} C \Leftrightarrow C=C^k$.

Для всех остальных нечетких треугольных чисел, чья мода равна $a*b$, значение функции принадлежности уменьшается с увеличением «удаленности» данного числа от канонического представителя.

Для построенной таким образом нечеткой арифметики можно ввести понятия сильной и слабой коммутативности.

В построенной арифметике элемент $N \in R$ называется *нулевым*, если для любого $A \in R$ найдутся такие числа $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$, что

$$A \tilde{+} N =_{\gamma 1} A \text{ и } N \tilde{+} A =_{\gamma 2} A.$$

Аналогично, $E \in R$ называется *единичным*, если для любого $A \in R$ найдутся такие числа $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$, что $A \tilde{*} E =_{\gamma 1} A$ и $E \tilde{*} A =_{\gamma 2} A$.

Нетрудно убедиться, что в этой арифметике все нечеткие треугольные числа, мода которых равна нулю, являются нулевыми, и нечеткие треугольные числа, мода которых равна единице, являются единичными.

Проблема противоположного и обратного элементов в этой арифметике решается в сильном и слабом вариантах.

3.12 Контрольные вопросы для текущего контроля

1. Сформулируйте определение нечеткого множества?
2. Что такое функция принадлежности нечеткого множества?
3. Сформулируйте принцип обобщения теории нечетких множеств.
4. Дайте развернутое определение операции объединения нечетких множеств.
5. Дайте развернутое определение операции пересечения нечетких множеств.
6. Что такое носитель нечеткого множества?
7. Когда нечеткое множество называется нормальным?
8. Что такое множество α–уровня для нечеткого множества?
9. Сформулируйте определение нечеткого отношения.
10. Дайте определение композиции двух нечетких отношений.

11. Перечислите основные свойства нечетких отношений.

12. Перечислите основные классы нечетких отношений.

13. Сформулируйте определение нечеткого числа?

14. Что такое унимодальное нечеткое число?

15. Как обычно обозначается множество всех нечетких действительных чисел?

16. Что называется нечетким нулем?

17. Когда нечеткое число называется положительным, а когда отрицательным?

18. Дайте развернутое определение операции сложения нечетких чисел.

19. Дайте развернутое определение операции умножения нечетких чисел.

20. Является ли сложение нечетких чисел ассоциативным?

21. Является ли умножение нечетких чисел коммутативным?

22. Выполняется ли для нечетких чисел закон дистрибутивности операций сложения и умножения?

23. Образует ли группу множество всех нечетких чисел относительно операции сложения?

24. Приведите пример четкой арифметики для нечетких треугольных чисел.

3.13 Задания для самостоятельного решения

1. Дано нечеткое множество A={(яблоко;0,9), (груша;0,8), (вишня;0,5), (слива;0,4), (апельсин;0,7), (мандарин;0,6), (манго;0,75), (киви;0,2)}.

Определить: а) носитель нечеткого множества A; б) высоту нечеткого множества A; в) множество α–уровня для α=0,7; г) точки перехода множества A.

2. Определить четкое множество A^*, ближайшее к нечетному множеству задания 1.

3. Для универсального множества $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ и нечетких множеств:

$A = \{(a;0,15),(b;0,35),(c;0,65), (d;0,85), (e;0,45), (f;0,6), (g;1)\}$,

$B = \{(a;0,3),(b;0,7),(c;0,4), (d;0,4), (e;1), (f;0), (g;0,5)\}$,

$C = \{(a;1),(b;0{,}5),(c;0{,}5), (d;0{,}2), (e;0), (f;0{,}2), (g;0{,}9)\}$.

Найти:

$A\cap B$; $B\cup C$; $A\cap\overline{C}$; $(A\cup B)\cap C$; $(\overline{A\cap B})\cup C$; $A-B$; $A+B$; $A*C$; $B\oplus C$; $B\nabla C$; $A\otimes B$; $A\Delta C$; $A*(B\oplus C)$; $A\cap(\overline{B+C})$; $(A\oplus B)\cap(A\cup B)$.

4. Для универсального множества $U=\{a,b,c,d,e\}$ и нечетких множеств

$A = \{(a;0{,}1),(b;0{,}4),(c;0), (d;0), (e;0{,}5)\}$,

$B = \{(a;0),(b;0{,}7),(c;0{,}4), (d;0{,}85), (e;0{,}5)\}$,

$C = \{(a;1),(b;0),(c;0{,}2), (e;0)\}$

найти $(A\cap B)\otimes(B\cup C)\oplus(A\nabla C)\oplus(A\cdot B\cdot C)$.

5. Доказать, что для $\forall A,B,C$:

а) $A\cap(A\cup B)=A$;

б) $A\cup(A\cap B)=A$;

в) $\emptyset\subseteq A\cap\overline{A}\subseteq A\cup\overline{A}\subseteq U$.

6. Доказать: а) $A\cdot A\subset A$; б) $A+A\supset A$; в) $A\cdot B+A\cdot C\supseteq A(B+C)$.

7. Для произвольных нечетких отношений A, B,C упростить выражение: $\left(A\cap\left((B\cup C)\cup(\overline{A}\cap\overline{C})\right)\right)\cup\overline{C}$.

8. Для нечетких отношений

$$R_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix} \end{array},\quad R_2 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix} \end{array},\quad R_3 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

Найти: а) $R_1\cup R_2$; б) $R_2\cap R_3$; в) $R_1\cup R_2\cup R_3$; г) $(R_1\cap R_2)\cup R_3$; д) $R_2\cap(R_2\cup R_3)$; е) $R_1\cap R_2\cap R_3$; ж) $R_1\cup(R_2\cap R_3)$; з) $(R_1\cup R_2)\cap R_3$.

9. Для нечетких отношений

$$R_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$R_2 = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad R_3 = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}9 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Найти: а) $R_2 \circ R_3$; б) $R_1 \circ R_2 \circ R_3$; в) $R_3 \circ R_2 \circ R_1$; г) $R_1 \circ R_2$; д) R_1^{-1}.

10. Для нечетких отношений:

$$R_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & \alpha \\ \beta & 0.4 & \gamma \\ 0.8 & \beta & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array}; \; R_2 = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 0.9 \\ 0.5 & \gamma \end{pmatrix} \end{array}; \; R_3 = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \end{array};$$

найти $R_1 \circ R_2 \circ R_3$.

11. Для нечетких отношений:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}; \; R_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}2 & 1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 1 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}; \; R_3 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 1 & 1 & 0{,}1 \end{pmatrix};$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}; R_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}74 & 0 \\ 1 & 1 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}7 & 1 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}3 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}; \; R_6 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

выяснить какие из них являются рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными и т. д.

12. Для нечетких чисел *A* и *B* вычислить *A+B, A-B*, если

$$\text{а)} \;\; \mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} + 1, \; \textit{если} \; x \in [-a, 0]; \\ 1 - \dfrac{x}{b}, \; \textit{если} \; x \in [0, b]; \\ 0, \; \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}x-c+1, \text{ если } x\in[c-1,c];\\ \dfrac{c-x}{2}+1, \text{ если } x\in[c,c+2];\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

13. Для нечетких чисел A и B вычислить $A+B$, A-B:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}x+1, \text{ если } x\in[-1,0];\\ 1-x, \text{ если } x\in[0,1];\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}x-1, \text{ если } x\in[1,2];\\ 3-x, \text{ если } x\in[2,3];\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

14. Для нечетких чисел A и B вычислить $A+B$, A-B:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}x+1, \text{ если } x\in[-1,0];\\ 1-\dfrac{x}{2}, \text{ если } x\in[0,2];\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, \text{ если } x\in[0,2];\\ 3-x, \text{ если } x\in[2,3];\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

15. Для нечетких чисел A и B вычислить $A+B$, A-B:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1-x, \text{ если } x\in[0,1];\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}x-1, \text{ если } x\in[1,2];\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

16. Для нечетких чисел A и B вычислить $A+B$, A-B:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}x+1, \text{ если } x\in[-1,0];\\ 1-x, \text{ если } x\in[0,1];\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} e^{x-2}, \text{ если } x \le 2; \\ e^{2-x}, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

4 Вопросы к экзамену

1. Основные понятия теории поля.
2. Поверхности и линии уровня.
3. Производная по направлению.
4. Градиент скалярного поля и его свойства.
5. Векторные линии поля. Поток поля.
6. Дивергенция. Формула Остроградского-Гаусса.
7. Циркуляция поля. Ротор поля.
8. Формула Стокса.
9. Оператор Гамильтона (оператор «набла»).
10. Соленоидальное поле.
11. Потенциальное поле.
12. Задача оптимизации общего вида.
13. Критерии оптимизации.
14. Алгоритм Свенна.
15. Метод золотого сечения.
16. Метод деления интервала пополам.
17. Метод Ньютона.
18. Метод конфигураций.
19. Метод сопряженных направлений.
20. Метод градиентного спуска с постоянным шагом.
21. Метод наискорейшего градиентного спуска.
22. Основные характеристики нечетких множеств.
23. Операции над нечеткими множествами.

24. Принцип обобщения.
25. Нечеткие операторы.
26. Показатели размытости нечетких множеств.
27. Декартовы произведения нечетких множеств.
28. Определение нечетких отношений.
29. Операции над нечеткими отношениями.
30. Свойства нечетких отношений.
31. Классификация нечетких отношений.
32. Понятие нечеткого числа.
33. Операции над нечеткими числами.
34. Алгебраические свойства нечетких чисел.
35. Нечеткие треугольные числа.
36. Четкие арифметики нечетких треугольных чисел.
37. Нечеткие арифметики нечетких треугольных чисел.

5 Тестовые задания

1.1 Линия, для которой в каждой ее точке M вектор направлен по касательной к данной линии, называется:

- векторной линией;
- градиентом скалярного поля;
- линией уровня;
- дивергенцией векторного поля.

1.2 Если значение $u(M)$ зависит лишь от расстояния точки M от некоторой фиксированной точки M_0, то скалярное поле называют

- сферическим;
- потенциальным;
- соленоидальным;
- плоскопараллельным;

- осесимметрическим.

1.3 Поверхностями уровня сферического поля являются:

- концентрические сферы;
- цилиндрические поверхности;
- эллиптические поверхности;
- гиперболические поверхности;
- плоскости.

1.4 Если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле *u(M)* переходит само в себя, то скалярное поле называют:

- сферическим;
- потенциальным;
- соленоидальным;
- плоскопараллельным;
- осесимметрическим.

1.5 Поверхностями уровня плоскопараллельного поля являются:

- концентрические сферы;
- цилиндрические поверхности;
- эллиптические поверхности;
- гиперболические поверхности;
- плоскости.

1.6 Если поле *u(M)* переходит само в себя при повороте пространства на произвольный угол вокруг некоторой оси, то скалярное поле называют:

- сферическим;
- потенциальным;
- соленоидальным;
- плоскопараллельным;
- осесимметрическим.

1.7 Поверхностями уровня осесимметрического поля являются:

- концентрические сферы;

- цилиндрические поверхности;
- эллиптические поверхности;
- гиперболические поверхности;
- поверхности вращения.

1.8 Скалярное поле называется сферическим, если:

- значение *u(M)* зависит лишь от расстояния точки *M* от некоторой фиксированной точки M_0;
- в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле *u(M)* переходит само в себя;
- поле *u(M)* переходит само в себя при повороте пространства на произвольный угол вокруг некоторой оси;
- поверхностями уровня являются круговые цилиндры;

1.9 Скалярное поле называется плоскопараллельным, если:

- значение *u(M)* зависит лишь от расстояния точки *M* от некоторой фиксированной точки M_0;
- в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле *u(M)* переходит само в себя;
- поле *u(M)* переходит само в себя при повороте пространства на произвольный угол вокруг некоторой оси;
- поверхностями уровня являются круговые цилиндры;

1.10 Скалярное поле называется осесимметрическим, если:

- значение *u(M)* зависит лишь от расстояния точки *M* от некоторой фиксированной точки M_0;
- в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле *u(M)* переходит само в себя;
- поле *u(M)* переходит само в себя при повороте пространства на произвольный угол вокруг некоторой оси;
- поверхностями уровня являются круговые цилиндры;

1.11 Цилиндрические поверхности являются линиями уровня:

- плоскопараллельного поля;
- осесимметрического поля;
- сферического поля;
- потенциального поля;
- соленоидального поля.

1.12 Поверхности вращения являются линиями уровня:

- плоскопараллельного поля:
- осесимметрического поля;
- сферического поля;
- потенциального поля;

соленоидального поля.

1.13 Концентрические сферы являются линиями уровня:

- плоскопараллельного поля:
- осесимметрического поля;
- сферического поля;
- потенциального поля;

соленоидального поля.

1.14 Вектор, указывающий направление наибольшего роста значений скалярного поля и величину этого роста, называется:

- градиентом скалярного поля;
- производной скалярного поля по направлению;
- дифференциалом скалярного поля.

1.15 Формула $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$ определяет:

- величину градиента скалярного поля;
- производную скалярного поля по направлению;
- дифференциал скалярного поля;
- поверхность уровня скалярного поля.

1.16 Какое из свойств градиента не является верным:

- $grad\ c=c$, c – $const$;
- $grad\ (u+v)=grad\ u+grad\ v$, где u, v – дифференцируемые скалярные поля;
- $grad\ (uv)=u\ grad\ v+v\ grad\ u$;
- $grad\ (cu)=c\ grad\ u$, *где* $c=const$;
- $grad(u/v)=(v\ grad\ u-u\ grad\ v)/v^2$ $(v\neq 0)$.

1.17 Какое из свойств градиента не является верным:

- $grad\ c=c$, c – $const$;
- $grad\ (u+v)=grad\ u+grad\ v$, где u, v – дифференцируемые скалярные поля;
- $grad\ (uv)=u\ grad\ v+v\ grad\ u$;
- $grad\ (cu)=c\ grad\ u$, *где* $c=const$;
- $grad(u/v)=(v\ grad\ u-u\ grad\ v)/v^2$ $(v\neq 0)$.

1.18 Какое из свойств градиента не является верным:

- $grad\ c=c$, c – $const$;
- $grad\ (u+v)=grad\ u+grad\ v$, где u, v – дифференцируемые скалярные поля;
- $grad\ (uv)=u\ grad\ v+v\ grad\ u$;
- $grad\ (cu)=c\ grad\ u$, *где* $c=const$;
- $grad(u/v)=(v\ grad\ u-u\ grad\ v)/v^2$ $(v\neq 0)$.

1.19 Градиентом скалярного поля $u(M)=x^3+y^3+z^3+xyz+1$ в точке $M_0(0,1,1)$ является вектор:

- (1,3,3);
- (3,1,1);
- (4,4,4);
- (0,1,1);
- (1,1,1).

1.20 Градиентом скалярного поля $u(M)=x^3+y^3+z^3+xyz+1$ в точке $M_0(1,1,1)$ является вектор:

- (1,3,3);
- (3,1,1);

- (4,4,4);
- (0,1,1);
- (1,1,1).

1.21 Формула $\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ определяет:

- величину градиента скалярного поля;
- производную скалярного поля по направлению;
- дифференциал скалярного поля;
- поверхность уровня скалярного поля.

1.22 Скорость роста значений скалярного поля в заданном направлении характеризует:

- градиент скалярного поля;
- производная скалярного поля по направлению;
- дифференциал скалярного поля.

1.23 Производная скалярного поля в точке по заданному направлению характеризует:

- скорость роста значений скалярного поля в заданном направлении;
- величину градиента скалярного поля;
- направление наибольшего роста значений скалярного поля и величину этого роста;
- дифференциал скалярного поля.

1.24 Производная скалярногополя $u(M)=4y^3-3x^3+z$ в точке $M_0(1,1,0)$ по направлению, идущему к точке $M(3,4,0)$ равна:

- $\frac{18}{\sqrt{13}}$;
- 1;
- 0;
- $\frac{1}{\sqrt{13}}$;

- $\frac{13}{\sqrt{13}}$.

1.25 Если существует декартова система координат такая, что координаты векторного поля *F(M)* имеют вид *P(x)*, 0, 0, то поле называют:

- потенциальным;
- соленоидальным;
- одномерным;
- осесимметрическим;
- цилиндрическим;
- плоскопараллельным.

1.26 Если существует такая цилиндрическая система координат, что векторное поле *F(M)* зависит от ρ и z, но не зависит от φ, то поле *F(M)* называют:

- соленоидальным;
- одномерным;
- осесимметрическим;
- цилиндрическим;
- плоскопараллельным.

1.27 Если векторное поле *F(M)* зависит лишь от ρ, то поле называют:

- соленоидальным;
- одномерным;
- осесимметрическим;
- цилиндрическим;
- плоскопараллельным.

1.28 Если существует декартова система координат такая, что координаты векторного поля *F(M)* можно задать функциями двух переменных *P(x,y), Q(x,y), R(x,y)*, то поле называют:

- соленоидальным;
- одномерным;
- осесимметрическим;

- цилиндрическим;
- плоскопараллельным.

1.29 Решение системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$ определяет:

- векторную линию;
- градиент скалярного поля;
- линию уровня;
- циркуляцию векторного поля;
- дивергенцию векторного поля.

1.30 Векторные линии векторного поля: $F(M) = 2yi - 4xj$ являются:

- эллипсы, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости *xOy*, центры этих эллипсов лежат на оси *Oz*;
- эллипсы, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости *xOz*, центры этих эллипсов лежат на оси *Oy*;
- эллипсы, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости *yOz*, центры этих эллипсов лежат на оси *Ox*;
- окружности, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости *xOy*, центры лежат на оси *Oz*;

1.31 Интеграл $\iint_{\sigma} F \cdot n d\sigma$ определяет:

- поток векторного поля *F(M)* через поверхность σ в сторону, определяемую единичным вектором *n* нормали к поверхности σ;
- дивергенцию векторного поля *F(M)* в точке *M* области *V*;
- циркуляцию векторного поля *F(M)* вдоль линии *L*;
- ротор векторного поля *F(M)* в точке *M;*
- потенциал поля *F(M).*

1.32 Поток векторного поля *F(M)* через поверхность *σ* в сторону, определяемую единичным вектором *n* нормали к поверхности *σ* определяется по формуле:

- $\iint\limits_{\sigma} F \cdot n d\sigma$;
- $\lim\limits_{\sigma \to M} \dfrac{\iint\limits_{\sigma} F_n d\sigma}{V(\sigma)}$;
- $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$;
- $\int\limits_{L} F_\tau dl = \int\limits_{L} F \cdot \vec{\tau} dl$;
- $\lim\limits_{\sigma \to M} \dfrac{\iint\limits_{\sigma} (n \times F) d\sigma}{V}$.

1.33 Предел $\lim\limits_{\sigma \to M} \dfrac{\iint\limits_{\sigma} F_n d\sigma}{V(\sigma)}$ определяет:

- поток векторного поля *F(M)* через поверхность *σ* в сторону, определяемую единичным вектором n нормали к поверхности *σ*;
- дивергенцию векторного поля *F(M)* в точке *M* области *V*;
- циркуляцию векторного поля *F(M)* вдоль линии *L*;
- ротор векторного поля *F(M)* в точке *M;*
- потенциал поля *F(M).*

1.34 По формуле $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ вычисляют:

- поток векторного поля *F(M)* через поверхность *σ* в сторону, определяемую единичным вектором n нормали к поверхности *σ*;
- дивергенцию векторного поля *F(M)* в точке *M* области *V*;
- циркуляцию векторного поля *F(M)* вдоль линии *L*;

- ротор векторного поля *F(M)* в точке *M;*

- потенциал поля *F(M).*

1.35 Дивергенция векторного поля *F(M)* в точке *M* области *V* определяется по формуле:

- $\iint\limits_{\sigma} F \cdot n d\sigma$;

- $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$;

- $\oiint\limits_{\sigma} F_n d\sigma = \iiint\limits_{v} divF dV$;

- $\int\limits_{L} F_\tau dl = \int\limits_{L} F \cdot \vec{\tau} dl$;

- $\lim\limits_{\sigma \to M} \frac{\iint\limits_{\sigma} (n \times F) d\sigma}{V}$.

1.36 Какое из свойств дивергенции не является верным:

- *div c=c,* c – постоянный вектор;

- $div\,(F_1+F_2)=divF_1+divF_2$;

- $div(uF)=u\,divF+F\cdot grad\;u$, *u* – скалярное поле.

1.37 Дивергенция векторного поля $F(M) = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ определяется уравнением:

- $2(x+y+z)$;

- $2x$;

- $x^2 + y^2 + z^2$;

- $2y$;

- $2z$.

1.38 Формула $\oiint\limits_{\sigma} F_n d\sigma = \iiint\limits_{v} divF dV$ называется:

- формулой Остроградского-Гаусса;

- формулой Стокса;

- формулой Гаусса.

1.39 Формула Остроградского-Гаусса имеет вид:

- $\iint\limits_{\sigma} F \cdot n d\sigma$;

- $\lim\limits_{\sigma \to M} \dfrac{\iint\limits_{\sigma} F_n d\sigma}{V(\sigma)}$;

- $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$;

- $\int\limits_{L} F_\tau dl = \int\limits_{L} F \cdot \vec{\tau} dl$;

- $\oiint\limits_{\sigma} F_n d\sigma = \iiint\limits_{V} divF dV$.

1.39 Криволинейный интеграл $\int\limits_{L} F_\tau dl = \int\limits_{L} F \cdot \vec{\tau} dl$ определяет:

- поток векторного поля *F(M)* через поверхность *σ* в сторону, определяемую единичным вектором *n* нормали к поверхности *σ*;

- дивергенцию векторного поля *F(M)* в точке *M* области *V*;

- циркуляцию векторного поля *F(M)* вдоль линии *L*;

- ротор векторного поля *F(M)* в точке *M;*

- потенциал поля *F(M).*

1.40 Циркуляция векторного поля $F(M) = zi + xj - yk$ вдоль контура *l*: $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 3\sin t; \\ z = \sin t. \end{cases}$

где $t \in [0, 2\pi]$ равна:

- 6π;

- π;

- 6;

- 2π;

- 0.

1.41 Предел $\lim\limits_{\sigma \to M} \dfrac{\iint\limits_{\sigma} (n \times F) d\sigma}{V}$ определяет:

- поток векторного поля *F(M)* через поверхность *σ* в сторону, определяемую единичным вектором n нормали к поверхности *σ*;
- дивергенцию векторного поля *F(M)* в точке *M* области *V*;
- потенциал поля *F(M);*
- циркуляцию векторного поля *F(M)* вдоль линии *L*;
- ротор векторного поля *F(M)* в точке *M.*

1.42 Ротор поля *F(M)* в точке *M* определяется по формуле:

- $\iint\limits_{\sigma} F \cdot n d\sigma$;
- $\lim\limits_{\sigma \to M} \dfrac{\iint\limits_{\sigma} F_n d\sigma}{V(\sigma)}$;
- $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$;
- $\int\limits_{L} F_{\tau} dl = \int\limits_{L} F \cdot \vec{\tau} dl$;
- $\lim\limits_{\sigma \to M} \dfrac{\iint\limits_{\sigma} (n \times F) d\sigma}{V}$.

1.43 По формуле $\left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) k.$ определяется:

- поток векторного поля *F(M)* через поверхность *σ* в сторону, определяемую единичным вектором *n* нормали к поверхности *σ*;

- дивергенцию векторного поля *F(M)* в точке *M* области *V*;
- потенциал поля *F(M);*
- циркуляцию векторного поля *F(M)* вдоль линии *L*;
- ротор векторного поля *F(M)* в точке *M.*

1.44 Какое из свойств не является верным:

- $rot\ c=c$, c – const;
- $rot\ \overline{r} = 0$, если $\overline{r}=xi+yj+zk$;
- $rot(F_1+F_2)=rotF_1+rotF_2$;
- $rot(uF)=u\ rotF+grad\ u$.

1.45 Ротор векторного поля $F(M)=x^2i+y^2j-z^2k$ равен:

- 0;
- 1;
- 2;
- 5;
- 10.

1.46 Укажите верную формулу:

- $rotF(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$;
- $rotF(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$;
- $rotF(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$
- $rotF(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$;
- $rotF(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial z}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)k$.

1.47 Формула $\oint\limits_L F_\tau dl = \iint\limits_\sigma (rotF)_n d\sigma$ называется:

- формулой Остроградского-Гаусса;
- формулой Стокса;
- формулой Гаусса.

1.48 Вычислить циркуляцию вектора $F(M) = yi + xj + k$ вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$ в положительном направлении:

- 6π;
- π;
- 6;
- 2π;
- 0.

1.49 Векторное поле *F(M)* называется потенциальным, если:

- его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля *u(M)*;
- дивергенция в каждой точке которого равна нулю;
- поток через любую замкнутую поверхность, содержащуюся в области *V*, равен нулю;
- *div F(M)*=0.

1.50 Поле *F(M)* потенциально в *V* тогда и только тогда, когда

- *rot F(M)*=0;
- *div F(M)*=0;
- *П=0;*
- *Ц=0.*

1.51 Потенциальное поле *F(M)* является:

- безвихревым;
- трубчатым;
- соленоидальным;
- вихревым;

- скалярным.

1.52 Векторное поле, дивергенция в каждой точке которого равна нулю, называется:

- соленоидальным;
- безвихревым;
- вихревым;
- скалярным.

1.53 Если в области *V*, в которой определено поле *F(M)* существует такое векторное поле $\vec{A}(M)$, что в каждой точке области *V* $F(M) = rot\,\vec{A}(M)$, то векторное поле $\vec{A}(M)$ называют:

- векторным потенциалом поля *F(M)* в области *V*;
- безвихревым;
- вихревым;
- скалярным.

1.54 Для поля *F(M)*, обладающего векторным потенциалом в области *V*, поток через любую замкнутую поверхность, содержащуюся в области *V*, равен:

- 0;
- 1;
- 2;
- 0,5;
- нельзя сказать.

1.55 Поле *F(M),* обладающее векторным потенциалом в области *V*, является в ней:

- безвихревым;
- соленоидальным;
- вихревым;
- скалярным.

1.56 Интенсивностью векторной трубки называется:

- поток поля через поперечное сечение этой трубки;
- дивергенция векторного поля *F(M)* в точке *M* области *V*;
- потенциал поля *F(M);*
- циркуляция векторного поля *F(M)* вдоль линии *L*;
- ротор векторного поля *F(M)* в точке *M.*

1.57 Необходимым и достаточным для существования векторного потенциала является:

- $rot\ F(M)=0$;
- $div\ F(M)=0$;
- $П=0;$
- $Ц=0.$

1.58 Если соленоидальное поле задано в односвязной области, то:

- $rot\ F(M)=0$;
- $div\ F(M)=0$;
- $П=0;$
- $Ц=0.$

1.59 Линейный дифференциальный оператор, называется оператором:

- Лапласа;
- Гамильтона;
- Фурье;
- Стокса;
- Остроградского-Гаусса.

1.60 Выбрать верное утверждение:

- для того чтобы векторное поле *F(M)* было потенциальным в односвязной области *V*, необходимо и достаточно, чтобы *grad F(M)=0*;
- для того чтобы векторное поле *F(M)* было потенциальным в односвязной области *V*, необходимо и достаточно, чтобы *rot F(M)*=0;
- для того чтобы векторное поле *F(M)* было потенциальным в односвязной области *V*, необходимо и достаточно, чтобы *div F(M)*=0;
- для того чтобы векторное поле *F(M)* было потенциальным в односвязной области *V*, необходимо и достаточно, чтобы *Ц*=0.

1.61 Производная функции $a=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $P(1,1,1)$ по направлению вектора (2,1,0) равна:

- 1;
- 0;
- $\frac{\sqrt{15}}{5}$;
- $\frac{\sqrt{14}}{5}$;
- 5.

1.62 Выбрать верное утверждение:

- если векторное поле *F(M)* соленоидальное, то поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю;
- векторное поле *F(M)* соленоидальное тогда и только тогда, когда поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю;
- если векторное поле *F(M)* соленоидальное, то поток вектора через любую поверхность равен нулю.

2.1 Выбрать верное утверждение:

- оптимизационная задача – это экономико-математическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений;

- оптимизационная задача – это математическая задача, которая состоит в нахождении минимального значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений;
- оптимизационная задача – это экономико-математическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции;
- оптимизационная задача – это экономическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений.

2.2 Какие виды задач оптимизации существуют:

- максимизации;
- минимизации;
- максимизации и минимизации;
- максиминимизации.

2.3 Критерием оптимальности называется:

- количественная оценка оптимизируемого качества объекта;
- качественная оценка оптимизируемого качества объекта;
- минимальная оценка оптимизируемого качества объекта;
- максимальная оценка оптимизируемого качества объекта.

2.4 Целевая функция составляется на основании:

- выбранного критерия оптимальности;
- оптимизируемой величины;
- наличия ресурсов оптимизации;
- возможности количественной оценки оптимизируемой величины.

2.5 Выбрать верное утверждение:

- для того чтобы решить задачу оптимизации, необходимо найти ее оптимальное решение;
- для того чтобы решить задачу оптимизации, нужно найти ее оптимальное решение;
- для того чтобы решить задачу оптимизации, достаточно найти ее оптимальное решение;
- для того чтобы решить задачу оптимизации, необходимо и достаточно найти ее оптимальное решение.

2.6 Оптимизационная задача является неразрешимой,

- если она не имеет оптимального решения;
- если она имеет оптимального решения;
- если она не имеет минимального решения;
- если она не имеет максимального решения.

2.7 Постановка задачи поиска минимума функций должна содержать:

- целевую функцию;
- множество допустимых решений;
- наличие ресурсов оптимизации;
- целевую функцию и множество допустимых решений;
- ограничения на возможные решения.

2.8 Вид критерия оптимальности или целевой функции определяется:

- конкретной задачей оптимизации;
- оптимальным решением;
- математической моделью;
- целевой функцией.

2.9 В какой последовательности строится оптимизационное решение задачи:

1. сформулировать задачу;
2. построить математическую модель (определить множество переменных);
3. определить ограничения на возможные решения;

4. определить целевую функцию;

5. применить формальные математические методы, позволяющие найти решения.

2.10 Если множество допустимых решений X задается ограничениями (условиями), накладываемыми на вектор x, то решается задача поиска:

- условного экстремума;
- безусловного экстремума;
- минимального значения;
- максимального значения.

2.11 Если на множество допустимых решений X не налагаются ограничения, то решается задача поиска:

- условного экстремума;
- безусловного экстремума;
- минимального значения;
- максимального значения.

2.12 В зависимости от числа независимых переменных целевой функции различают следующие задачи:

- одномерная оптимизация;
- многомерная оптимизация;
- одномерная и многомерная оптимизация;
- минимальная оптимизация;
- максимальная оптимизация.

2.13 Способы решения оптимизационных задач:

- аналитический;
- численный;
- аналитический и численный;
- условный;
- безусловный.

2.14 Какие из перечисленных утверждений верны:

- матрица Гессе симметрическая.
- матрица Гессе диагональная.
- определитель матрицы Гессе не может быть равен нулю.

2.15 Оптимальный план задачи – это допустимое решение, доставляющее целевой функции ... значение.

- оптимальное;
- минимальное;
- максимальное;
- условное.

2.16 Линиями уровня функции $f(x)$ называется множество точек x, удовлетворяющих уравнению $f(x) = \ldots$.

- C, C=const;
- 0;
- x;
- $f'(x)$.

2.17 Численные методы безусловной оптимизации определяются для функций ... .

- одной переменной;
- двух переменных;
- трех переменных;
- все ответы верны.

2.18 К численным методам безусловной оптимизации функции одной переменной относится метод ... .

- равномерного поиска;
- золотого сечения;
- Ньютона;
- все ответы верны.

2.19 В методах безусловной оптимизации функций ε – это … (длина интервала неопределенности).

2.20 При нахождении минимума функции *f(x)* на отрезке [*a*, *b*] покрытие сеткой узлов с одинаковым шагом *h* производится в методе … (равномерного поиска).

2.21 В методе золотого сечения используются следующие константы …

- 0,382 и 0,618;
- 0,382 и 0,816;
- 0,281 и 0,618;
- 0,319 и 0,618;
- 0,382 и 0,187.

2.22 К численным методам безусловной оптимизации функции многих переменных относится метод ... .

- покоординатного спуска;
- конфигураций;
- золотого сечения;
- Фибоначчи;
- все ответы верны.

2.23 Метод покоординатного спуска может остановиться в неоптимальной точке, если функция *f(x)* ... .

- не является дифференцируемой в некоторых точках;
- не является непрерывной в некоторых точках;
- не определена в точках;
- имеет разрыв 1 рода в точках;
- имеет разрыв 2 рода в точках.

2.24 Метод конфигураций осуществляет два типа поиска – это исследующий поиск и … (поиск по образцу).

2.25 В методе наискорейшего спуска поиск максимального значения функции f(x) осуществляется в направлении ... (градиента).

2.26 В методе наискорейшего спуска поиск минимального значения функции *f(x)* осуществляется в направлении ... (градиента).

2.27 Необходимым условием нахождения – точек локального минимума для дважды дифференцируемой функции является определение таких точек *x*, в которых все первые частные производные 1-го порядка равны … (0).

2.28 Достаточным условием нахождения – точек локального минимума для дважды дифференцируемой функции является … .

- проверка положительной определенности матрицы Гессе в таких точках;
- определение таких точек *x*, в которых все первые частные производные 1-го порядка равны 0;
- определение таких точек *x*, в которых все вторые частные производные равны 0;
- определение таких точек *x*, в которых все первые частные производные непрерывны.

2.29 Нахождение минимума функции *f* многих переменных в направлениях параллельных осям координат происходит в методе:

- конфигураций;
- золотого сечения;
- Ньютона;
- Фибоначчи;
- все ответы верны.

2.30 Нахождение минимума функции *f* многих переменных в направлении
($-$ *grad* $f(x_0)$) происходит в методе … .

- сопряженных направлений;
- конфигураций;
- наискорейшего градиентного спуска;
- золотого сечения;
- Фибоначчи;
- все ответы верны.

2.31 Направлением наибольшего возрастания функции *f* многих переменных в точке x_0 является … (градиент).

2.32 Недостатком метода Ньютона среди методов безусловной оптимизации является … .

- необходимость многократного обращения матрицы Гессе;
- равенство 0 вторых производных;
- невозможность определения частных производных 1-го порядка;
- невозможность определения частных производных 2-го порядка;
- нет правильного ответа.

2.33 Суть метода Ньютона для функции f(x) состоит в том, что ... .

- функция *f(x)* аппроксимируется многочленами второй степени, для которых находятся точки минимума;
- функция *f(x)* аппроксимируется многочленами первой степени, для которых находятся точки минимума;
- функция *f(x)* аппроксимируется многочленами третьей степени, для которых находятся точки минимума;
- определяется интервал неопределенности;
- нет правильного ответа.

2.34 Методы нулевого порядка:

- наискорейшего градиентного спуска;
- золотого сечения;
- метод Ньютона;
- сопряженных направлений;
- конфигураций.

2.35 Метод конфигураций осуществляет два типа поиска: … поиск и поиск по образцу. (исследующий)

2.36 Сходимость метода конфигураций обеспечивается при тех же условиях, что и метод … .

- сопряженных направлений;
- конфигураций;
- наискорейшего градиентного спуска;

- золотого сечения;
- Фибоначчи;
- все ответы верны.

2.37 Любой локальный минимум (максимум) задачи выпуклого программирования является … (Глобальным).

2.38 Если в критической точке функции одной переменной вторая производная отрицательная, то

- эта точка является точкой максимума;
- эта точка является точкой минимума;
- в этой точке функция имеет разрыв 1 рода;
- в этой точке функция имеет разрыв 2 рода;
- нет ответа.

2.39 Интервалом неопределенности называется:

- интервал, достоверно содержащий точку максимума (минимума) исследуемой функции;
- произвольный интервал, длина которого точно неизвестна;
- интервал, внутри которого содержатся все критические точки исследуемой функции;
- интервал, внутри которого содержатся все точки исследуемой функции;
- интервал, внутри которого содержатся все точки в которых производная первого порядка исследуемой функции равна 0.

2.40 Найти четырнадцатое число в последовательности чисел Фибоначчи

- 611;
- 377;
- 233;
- 587;
- 168.

2.41 Чему будет равна длина интервала неопределенности при использовании метода золотого сечения, если реализовано 9 замеров, а длина исходного интервала равна 14?

- 0,298;
- 0,184;
- 0,114;
- 0,78;
- 0,482.

2.42 В каких точках интервала [0,12] следует выполнить измерения для отыскания экстремума унимодальной функции в соответствии с минимаксной стратегией пассивного поиска по 5 точкам?

- в точках 2; 4; 6; 8; 10;
- в точках 0; 3; 6; 9; 12;
- в точках 1; 4; 6; 8; 10;
- в любых пяти точках, выбранных на заданном интервале случайным образом.

2.43 Методы первого порядка:

- наискорейшего градиентного спуска;
- золотого сечения;
- метод Ньютона;
- сопряженных направлений;
- конфигураций.

2.44 Методы второго порядка:

- наискорейшего градиентного спуска;
- золотого сечения;
- метод Ньютона;
- сопряженных направлений;
- конфигураций.

2.45 Свойство непрерывной функции, характеризующее наличие у нее одной точки минимума на отрезке … (унимодальность).

2.46 Последовательность этапов в методах исключения интервала в порядке их выполнения:

- задать точность ε;
- вычислить x_1 и x_2;
- вычислить $e=f(x_1)-f(x_2)$;
- выбрать следующий отрезок;
- проверить условие окончания.

2.47 Порядок производной функции в необходимом условии оптимальности при решении задачи безусловной оптимизации … (1).

2.48 Точка x^* является глобальным решение задачи оптимизации, если выполняются условия:

- $f(x^*)\geq f(x^*)$;
- $f(x^*)\leq f(x^*)$;
- $f(x^*)<f(x^*)$;
- $f(x^*)<f(x^*)$.

2.49 Верно утверждение:

- метод наискорейшего градиентного спуска относится к алгоритмам нулевого уровня;
- методы исключения интервалов являются алгоритмами нулевого порядка;
- метод Фибоначчи является алгоритмом первого порядка;
- к алгоритмам первого порядка относят алгоритмы, использующие информацию о значениях целевой функции и ее первых и вторых производных.

2.50 Верны утверждения:

- алгоритмы нулевого порядка используют информацию о значениях целевой функции и ее вторых производных;
- алгоритмы первого порядка используют информацию о значениях целевой функции;
- алгоритмы нулевого порядка используют информацию о значениях целевой функции и ее первых производных;

- алгоритмы первого порядка используют информацию о значениях целевой функции и ее первых производных;

- алгоритмы второго порядка используют информацию о значениях целевой функции.

2.51 Достаточное условие оптимальности в задаче безусловной оптимальности связано с производной функции … порядка (2).

2.52 Условия оптимальности бывают:

- глобальные;
- локальные;
- необходимые;
- достаточные;
- качественные.

2.53 Необходимым условием оптимальности в задаче безусловной оптимизации является равенство нулю … функции (производной).

2.54 Какой порядок записи математической модели задачи линейного программирования является правильным:

- формирование критерия оптимальности – ввод переменных – формирование ограничений;
- ввод переменных – формирование критерия оптимальности – формирование ограничений;
- формирование ограничений – ввод переменных – формирование критерия оптимальности;
- ввод переменных – формирование ограничений – формирование критерия оптимальности.

2.55 Общая задача линейного программирования может включать в себя.

- систему ограничений в виде неравенств;
- систему ограничений в виде равенств;
- требования оптимизации нелинейной целевой функции;
- требования оптимизации линейной целевой функции.

2.56 Какой метод прямого поиска называется пассивным?

- все N точек x_k, в которых будут вычислены значения функции, выбирают заранее;
- N+1 точка x_k, в которых будут вычислены значения функции, выбирают заранее;
- все N точек x_k, в которых будут вычислены значения функции, выбирают по ходу решения задачи;
- N-1 точка x_k, в которых будут вычислены значения функции, выбирают заранее.

2.57 По какому выражению при применении метода наискорейшего градиентного спуска определяют величину шага?

- $\varphi(t_k)= f(x^k-t_k \mathrm{d}^k)\to \min\limits_{t_k}$;
- $\varphi(t_k)=f(x^k-t_k\nabla f(x^k))\to\min\limits_{t_k}$;
- $\varphi(t_k)=f(x^k-t_k\nabla f(x^k))\to\max\limits_{t_k}$;
- $\varphi(t_k)=f(x^k+t_k\nabla f(x^k))\to\max\limits_{t_k}$;
- $\varphi(t_k)=f(x^k+t_k\nabla f(x^k))\to\min\limits_{t_k}$.

2.58 Как называются выбор очередной точки x_k и вычисление значения $f(x_k)$?

- шагом последовательности поиска;
- шагом;
- стратегия поиска;
- решение оптимизационной задачи.

2.59 Чем является величина $D(f)$ в выражении $f(x^*)=\min\limits_{x\in R^n} f(x)$, $x\in D(f)\subset R$.

- область определения функции;
- область решения задачи;
- область допустимых решений;
- область значений функции.

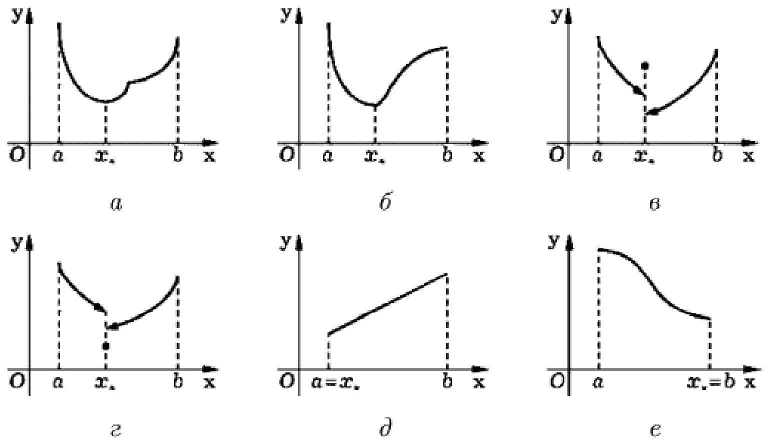
2.60 В каком случае деление отрезка на две неравные части называют золотым сечением?

- отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части;
- отношение длины всего отрезка к длине его меньшей части равно отношению длины большей части к длине большей части;
- отношение длины большей части отрезка к длине его меньшей части равно отношению длины отрезка к длине меньшей части;
- отношение длины меньшей части отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине всего отрезка.

2.61 Как называют число α в выражении $\frac{L_{i-1}}{L_i} = \frac{L_i}{L_{i+1}} = \frac{L_{i+1}}{L_{i+2}} = \cdots = \alpha$?

- отношение золотого сечения;
- точка золотого сечения;
- величина интервала неопределенности;
- величина золотого сечения;
- шаг золотого сечения.

2.62 Какая из представленных на рисунке функций не является строго унимодальной?



Г)

2.63 Как называют методы непосредственного решения задач условной оптимизации, основанные на движении из одной допустимой точки, где выполняются все ограничения к другой допустимой точки с лучшим значением целевой функции?

- методы возможных направлений;
- методы произвольных направлений;
- методы нулевого порядка;
- методы первого порядка;
- методы второго порядка.

2.64 Какая функция $f(x)$ называется унимодальной функцией на отрезке $[a, b]$?

- функция, для которой существует такая точка $x^* \in [a, b]$, что функция $f(x)$ в полуинтервале $[a, x^*)$ убывает, а в полуинтервале $(x^*, b]$ возрастает;
- функция, для которой существует такая точка $x^* \in [a, b]$, что функция $f(x)$ в полуинтервале $[a, x^*)$ не убывает, а в полуинтервале $(x^*, b]$ возрастает;
- функция, для которой существует такая точка $x^* \in [a, b]$, что функция $f(x)$ в полуинтервале $[a, x^*)$ убывает, а в полуинтервале $(x^*, b]$ не возрастает;
- функция, для которой существует такая точка $x^* \in [a, b]$, что функция $f(x)$ в полуинтервале $[a, x^*)$ не убывает, а в полуинтервале $(x^*, b]$ не возрастает.

2.65 Что называется интервалом неопределенности?

- интервал, в котором гарантированно находится точка x_k, соответствующая значению $f(x_k)$;
- интервал, в котором может находиться точка x_k, соответствующая значению $f(x_k)$;
- интервал, в котором находятся критические точки 1-го порядка;
- интервал, в котором находятся критические точки 2-го порядка.

2.66 Решение задачи $f(x)=x^3-2x^2-4x \rightarrow \min$, согласно необходимым и достаточным условиям оптимальности – точка $x=\ldots$:

- -2/3;
- 0;
- 2

- 2/3;
- -2.

2.67 Какой должна быть заданная точность ε нахождения точки x^*?

- больше абсолютной погрешности;
- меньше абсолютной погрешности;
- больше заданной величины;
- меньше заданной величины;
- произвольной.

3.1 Кто заложил основы теории нечетких множеств?

- Л. Заде;
- И. Мамдани;
- М.Блэк;
- Б. Коско;
- нет правильного ответа.

3.2 Функция принадлежности может принимать значения:

- [0,∞];
- [-∞, +∞];
- [0,1];
- [1,∞];
- нет правильного ответа.

3.3 Множество точек, для которых значение функция принадлежности равно 1, называется:

- носителем;
- ядром;
- α-срезом;
- нет правильного ответа.

3.4 Какая формула определяет объединение нечетких множеств A и B?

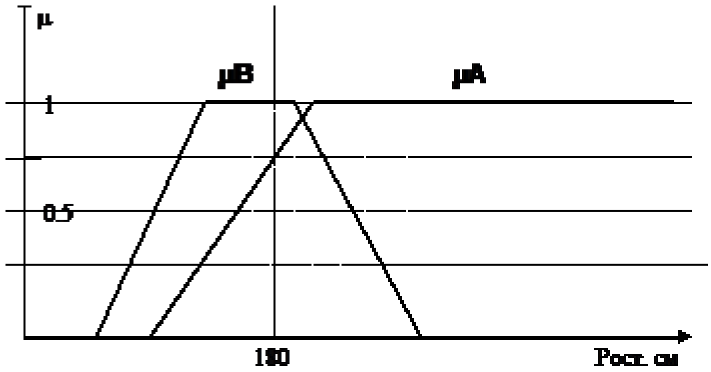
- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;
- $\max\{0, \mu_A(x)+ \mu_B(x)-1\}$;

- max$\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;

- min$\{1, \mu_A(x)+ \mu_B(x)\}$;

- min$\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

3.5 На рисунке показаны графики функции принадлежности нечетких множеств μ_A – «Высокий рост» и μ_B – «Средний рост». Определить степень принадлежности человека ростом 180 см к первому (μ_A/180) и второму (μ_B/180) множествам:



- μ_A/180=μ_B/180=min{0,75;1};

- μ_A/180=μ_B/180=max{0,75; 1};

- μ_A/180=μ_B/180=0,5*(μ_A/180+μ_B/180)=0,875;

- μ_A/180=0,75, μ_B/180=1;

- нет правильного ответа.

3.6 Пусть $\mu_A(u), \mu_B(u)$ – функции принадлежности нечетких множества *A* и *B* на универсальном множестве *U*. Пусть также *C* – нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_C(u)$, которое является объединением *A* и *B*. Определить значение принадлежности нечеткому множеству *C*, если $\mu_A(u)$=0,5 и $\mu_B(u)$=0:

- $\mu_C(u)$=max$\{\mu_B(u), \mu_A(u)\}$=0.5;

- $\mu_C(u)$= min$\{\mu_B(u), \mu_A(u)\}$=0;

- $\mu_C(u)$ =1-min$\{\mu_B(u), \mu_A(u)\}$=1;

- нет правильного ответа.

3.7 Принцип: чем сложнее система, тем менее мы способны дать точные и в то же время имеющие практическое значение суждения о ее поведении, называется:

- принципом несовместимости;
- принципом совместимости;
- принципом сложности;
- принципом точности.

3.8 Функция определяющая множество *A* в универсуме *U*, есть отображение, для которого *U* является областью определения, а двухэлементное множество {0,1} есть область значений называется:

- функцией однозначности;
- функцией односвязности;
- функцией принадлежности;
- функцией нечеткости.

3.9 Нечеткое множество в универсуме *U* определяется через:

- функцию принадлежности;
- перечисление элементов множества;
- описанием множества;
- область определения;
- график.

3.10 Что означает: $\mu_A(x)$ =0,7?

- что *x* принадлежит *A* со степенью принадлежности на 70%;
- что *x* принадлежит *A* со степенью принадлежности на 30%;
- что *x* определяет множество *A* с вероятностью 0,7;
- что *x* относится к множеству *A* с вероятностью 0,7.

3.11 Совокупность упорядоченных пар: $A = \{(x, \mu_A(x)) \setminus x \in U,\ \mu_A(x) : U \to [0,1]\}$, называется:

- нечетким множеством;
- нечетким отношением;

- функцией принадлежности;
- носителем нечеткого множества *A*.

3.12 Подмножество таких точек из универсума *U*, для которых величина $\mu_A(x)$ положительна, называется:

- носителем нечеткого множества *A;*
- высотой нечеткого множества A;
- множеством α уровня;
- выпуклым нечетким множеством.

3.13 Носителем нечеткого множества *A* называется обычное подмножество таких точек из универсума *U*, для которых величина $\mu_A(x)$:

- положительна;
- равна 0;
- равна 1;
- равна 0,5;
- больше 0,5.

3.14 Какая формула определяет пересечение нечетких множеств A и B?

- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;
- $\max\{0, \mu_A(x)+ \mu_B(x)-1\}$;
- $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;
- $\min\{1, \mu_A(x)+ \mu_B(x)\}$;
- $\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

3.15 Высотой нечеткого множества *A* называется величина:

- supp $\mu_A(x)$;
- $\mu_A(x)$=0,5;
- $\mu_A(x)$=0;
- $\mu_A(x)$=1.

3.16 Supp $\mu_A(x)$ называется:

- носителем нечеткого множества *A;*

- высотой нечеткого множества А;

- множеством α уровня;

- выпуклым нечетким множеством.

3.17 Нечеткое множество *A* называется нормальным, если:

- хотя бы один его элемент имеет степень принадлежности 1;

- если его высота равна единице, но степени принадлежности всех элементов меньше 1;

- хотя бы один его элемент имеет степень принадлежности 0,5;

- $h(A)<1$;

- все его элементы имеют степень принадлежности больше 0,5.

3.18 Нечеткое множество *A* называется субнормальным:

- если его высота равна единице, но степени принадлежности всех элементов меньше 1;

- если его высота равна единице;

- если степени принадлежности всех элементов меньше 1;

- хотя бы один его элемент имеет степень принадлежности 1;

- хотя бы один его элемент имеет степень принадлежности 0,5;

- $h(A)<1$.

3.19 В случае, когда $h(A)<1$, нечеткое множество называется:

- анормальным;

- нормальным;

- выпуклым;

- субнормальным;

- пустым.

3.20 Нечеткое множество *A* называется пустым, если

- $supp\ \mu_A(x)$;

- $\mu_A(x)=0,5$;

- $\mu_A(x)=0$;

- $\mu_A(x)=1$.

3.21 Множеством α уровня нечеткого множества *A* называется обычное (четкое) подмножество A_a универсального множества *U*, определяемое формулой:

- $A_a = \{x \in U \setminus \mu_A(x) \geq a\}, a \in [0,1]$;
- $A_a = \{x \in U \setminus \mu_A(x) \leq a\}, a \in [0,1]$;
- $A_a = \{x \in U \setminus \mu_A(x) > a\}, a \in [0,1]$;
- $A_a = \{x \in U \setminus \mu_A(x) = a\}, a \in [0,1]$.

3.22 Множество строгого а-уровня определяется формулой

- $A_a = \{x \in U \setminus \mu_A(x) \geq a\}, a \in [0,1]$;
- $A_a = \{x \in U \setminus \mu_A(x) \leq a\}, a \in [0,1]$;
- $A_a = \{x \in U \setminus \mu_A(x) > a\}, a \in [0,1]$;
- $A_a = \{x \in U \setminus \mu_A(x) = a\}, a \in [0,1]$.

3.23 Если хотя бы один элемент нечеткого множества имеет степень принадлежности 1, то множество называется:

- анормальным;
- нормальным;
- субнормальным;
- выпуклым;
- пустым.

3.24 Если высота нечеткого множества равна единице, но степени принадлежности всех элементов меньше 1, то множество называется:

- анормальным;
- нормальным;
- выпуклым;
- субнормальным;
- пустым.

3.25 Нечеткое множество *A* называется анормальным:

- если его высота равна единице, но степени принадлежности всех элементов меньше 1;

- если его высота равна единице;

- если степени принадлежности всех элементов меньше 1;

- хотя бы один его элемент имеет степень принадлежности 1;

- $h(A)<1$.

3.26 Если $\mu_A(x)=0$, то множество называется:

- анормальным;
- нормальным;
- выпуклым;
- субнормальным;
- пустым.

3.27 Если для каждой пары точек $x,\ y \in U$ удовлетворяет неравенству $\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$ для всех $\lambda \in [0,1]$. то множество называется:

- анормальным;
- нормальным;
- субнормальным;
- выпуклым;
- пустым.

3.28 Для нечеткого множества *несколько*={(0,0),(1,0),(2,0), (3, 0,5), (4, 0,8), (5,1),(6,1),(7, 0,8),(8, 0,5),(9, 0),(10, 0)} высота равна:

- 1;
- 0,8;
- 0,5;
- 0.

3.29 Носители нечеткого множества *несколько*={(0, 0),(1, 0),(2, 0,1), (3, 0,5), (4, 0,75), (5,1),(6,1),(7, 0,8),(8, 0,5),(9, 0,1),(10, 0)}:

- 2,3,4,5,6,7,8,9;
- 3,4,5,7,8;
- 2,3,4,5,8;
- 4,5,6,7,8,9;

- 3,4,6,8.

3.30 Нечеткое множество *несколько*={(0,0),(1,0),(2,0), (3, 0,5), (4, 0,8), (5,1),(6,1),(7, 0,8),(8, 0,5),(9, 0),(10, 0)} является:

- анормальным;
- нормальным;
- субнормальным;
- выпуклым;
- пустым.

3.31 Строгое включение $A \subset B$ имеет место, когда

- $\mu_A(x) < \mu_B(x)$;
- $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$;
- $\mu_A(x) > \mu_B(x)$;
- $\mu_A(x) \ge \mu_B(x)$;
- $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

3.32 Дополнением нечеткого множества A в U называют нечеткое множество $\overline{A}$ с функцией принадлежности:

- $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in U$;
- $\mu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x),\ \forall x \in U$;
- $\mu_{\overline{A}}(x) = 0{,}5 - \mu_A(x),\ \forall x \in U$;
- $\mu_{\overline{A}}(x) = 1,\ \forall x \in U$.

3.33 Объединением $A \cup B$ нечетких множеств A и B в U называют нечеткое множество, с функцией принадлежности вида:

- $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$;
- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;
- $\max\{0, \mu_A(x)+ \mu_B(x)-1\}$;
- $\min\{1, \mu_A(x)+ \mu_B(x)\}$.

3.34 Пересечением $A \cap B$ нечетких множеств А и B в U называют нечеткое множество, с функцией принадлежности вида:

- $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$;
- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;
- $\max\{0, \mu_A(x)+ \mu_B(x)-1\}$;
- $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

3.35 Для нечеткого множества A={(2,0), (3, 0,6), (4, 0,7), (5, 0,3),(6, 0,1)} высота равна:

- 0,1;
- 0,7;
- 0,6;
- 0.

3.36 Носители нечеткого множества A={(2,0), (3, 0,6), (4, 0,7), (5, 0,3),(6, 0,1)}:

- 2,3,4,5,6;
- 3,4;
- 2,3,4;
- 5,6;
- 3,4,5,6.

3.37 Нечеткое множество A={(2,0), (3, 0,6), (4, 0,7), (5, 0,3),(6, 0,1)} является:

- анормальным;
- нормальным;
- субнормальным;
- выпуклым;
- пустым.

3.38 Для нечеткого множества A={(1, 0,3), (3, 0), (4, 0), (5, 0,15), (6, 0,01)} высота равна:

- 0,01;
- 0,3;
- 0,15;

- 0.

3.39 Носители нечеткого множества A={(1, 0,3), (3, 0), (4, 0), (5, 0,15), (6, 0,01)}:

- 1,3,4,5,6;
- 3,4;
- 4;
- 5,6;
- 1,5,6.

3.40 Нечеткое множество A={(1, 0,3), (3, 0), (4, 0), (5, 0,15), (6, 0,01)}является:

- анормальным;
- нормальным;
- субнормальным;
- выпуклым;
- пустым.

3.41 Нечеткое множество, с функцией принадлежности вида $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ определяет:

- пересечением нечетких множеств;
- объединением нечетких множеств;
- дополнением нечетких множеств;
- включением нечетких множеств.

3.42 Нечеткое множество, с функцией принадлежности вида $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$. определяет:

- пересечением нечетких множеств;
- объединением нечетких множеств;
- дополнением нечетких множеств;
- включением нечетких множеств.

3.43 Для двух нечетких множества: A={(a, 0,1), (b, 0,6), (c, 0,9), (e,0,5)} и B={(a, 1), (b, 0,9), (d, 0,3), (e, 0,7), (f, 0,25)} $A \cup B$ равно:

- {(a, 0,1), (b, 0,6), (c, 0,9), (d, 0,3), (e,5), (f, 0,25)};

- {(a, 1), (b, 0,9), (c, 0,9), (d, 0,3), (e, 0,7), (f, 0,25)};

- {(a, 0,1), (b, 0,6), (e, 0,5)};

- {(a, 1), (b, 0,9), (e, 0,7)};

- {(d, 0,3), (c, 0,9), (f, 0,25)}.

3.44 Для двух нечетких множества: A={(a, 0,1), (b, 0,6), (c, 0,9), (e,0,5)} и B={(a, 1), (b, 0,9), (d, 0,3), (e, 0,7), (f, 0,25)} $A \cap B$ равно:

- {(a, 0,1), (b, 0,6), (c, 0,9), (d, 0,3), (e,5), (f, 0,25)};

- {(a, 1), (b, 0,9), (c, 0,9), (d, 0,3), (e, 0,7), (f, 0,25)};

- {(a, 0,1), (b, 0,6), (e, 0,5)};

- {(a, 1), (b, 0,9), (e, 0,7)};

- {(d, 0,3), (c, 0,9), (f, 0,25)}.

3.45 Для двух нечетких множества: A={(a, 0,7), (b, 0,3), (d, 1), (e,0,25), (f, 0)} и B={((b, 0,1), (d, 0,4), (f, 0,9)} $A \cup B$ равно:

- {(a, 0,7), (b, 0,1), (d, 0,4), (e,25), (f, 0)};

- {(a, 0,7), (b, 0,3), (d, 1), (e, 0,25), (f, 0,9)};

- {(b, 0,1), (d, 0,4), (f, 0)};

- {(b, 0,3), (d, 1), (f, 0,9)};

- {(a, 0,7), (d, 0,4), (e, 0,25)}.

3.46 Для двух нечетких множества: A={(a, 0,7), (b, 0,3), (d, 1), (e,0,25), (f, 0)} и B={((b, 0,1), (d, 0,4), (f, 0,9)} $A \cap B$ равно:

- {(a, 0,7), (b, 0,1), (d, 0,4), (e,25), (f, 0)};

- {(a, 0,7), (b, 0,3), (d, 1), (e, 0,25), (f, 0,9)};

- {(b, 0,1), (d, 0,4), (f, 0)};

- {(b, 0,3), (d, 1), (f, 0,9)};

- {(a, 0,7), (d, 0,4), (e, 0,25)}.

3.47 Выражение $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$ называется:

- алгебраическим объединением;

- алгебраическим пересечением;

- граничным объединением;

- граничным пересечением;
- разностью нечетких множеств;
- драстическим объединением;
- драстическим пересечением.

3.48 Выражение $\mu_A(x)\mu_B(x)$ называется:

- алгебраическим объединением;
- алгебраическим пересечением;
- граничным объединением;
- граничным пересечением;
- драстическим объединением;
- разностью нечетких множеств;
- драстическим пересечением.

3.49 Выражение $\min(\mu_A(x)+\mu_B(x),1)$ называется:

- алгебраическим объединением;
- алгебраическим пересечением;
- граничным объединением;
- граничным пересечением;
- разностью нечетких множеств;
- драстическим объединением;
- драстическим пересечением.

3.50 Выражение $\max(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0)$ называется:

- алгебраическим объединением;
- алгебраическим пересечением;
- граничным объединением;
- разностью нечетких множеств;
- граничным пересечением;
- драстическим объединением;
- драстическим пересечением.

3.51 Выражение $\begin{cases} \mu_B(x), \text{\textit{если}}\ \mu_A(x) = 0, \\ \mu_A(x), \text{\textit{если}}\ \mu_B(x) = 0, \\ 1, \text{\textit{иначе.}} \end{cases}$ называется:

- алгебраическим объединением;
- алгебраическим пересечением;
- разностью нечетких множеств;
- граничным объединением;
- граничным пересечением;
- драстическим объединением;
- драстическим пересечением.

3.52 Выражение $\begin{cases} \mu_B(x), \text{\textit{если}}\ \mu_A(x) = 1, \\ \mu_A(x), \text{\textit{если}}\ \mu_B(x) = 1, \\ 0, \text{\textit{иначе.}} \end{cases}$ называется:

- алгебраическим объединением;
- алгебраическим пересечением;
- граничным объединением;
- граничным пересечением;
- разностью нечетких множеств;
- драстическим объединением;
- драстическим пересечением.

3.53 Выражение $\max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0)$ называется:

- алгебраическим объединением;
- алгебраическим пересечением;
- граничным объединением;
- граничным пересечением;
- разностью нечетких множеств;
- драстическим объединением;
- драстическим пересечением.

3.54 Разность нечетких множеств А и В определяется по формуле:

- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;

- $\mu_A(x)\mu_B(x)$;

- $\max(\mu_A(x)-\mu_B(x),0)$;

- $\min(\mu_A(x)+\mu_B(x),1)$;

- $\max(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0)$;

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{\textit{если} } \mu_A(x)=0,\\ \mu_A(x), \text{\textit{если} } \mu_B(x)=0,\\ 1, \text{\textit{иначе}}.\end{cases}$

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{\textit{если} } \mu_A(x)=1,\\ \mu_A(x), \text{\textit{если} } \mu_B(x)=1,\\ 0, \text{\textit{иначе}}.\end{cases}$

3.55 Алгебраическое объединение нечетких множеств A и B определяется по формуле:

- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;

- $\mu_A(x)\mu_B(x)$;

- $\min(\mu_A(x)+\mu_B(x),1)$;

- $\max(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0)$;

- $\max(\mu_A(x)-\mu_B(x),0)$;

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{\textit{если} } \mu_A(x)=0,\\ \mu_A(x), \text{\textit{если} } \mu_B(x)=0,\\ 1, \text{\textit{иначе}}.\end{cases}$

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{\textit{если} } \mu_A(x)=1,\\ \mu_A(x), \text{\textit{если} } \mu_B(x)=1,\\ 0, \text{\textit{иначе}}.\end{cases}$

3.56 Алгебраическое объединение нечетких множеств *A* и *B* определяется по формуле:

- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;

- $\mu_A(x)\mu_B(x)$;

- $\min(\mu_A(x)+\mu_B(x),1)$;

- $\max(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0)$;

- $\max(\mu_A(x)-\mu_B(x),0)$;

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{если } \mu_A(x)=0,\\ \mu_A(x), \text{если } \mu_B(x)=0,\\ 1, \text{иначе.}\end{cases}$

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{если } \mu_A(x)=1,\\ \mu_A(x), \text{если } \mu_B(x)=1,\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$

3.57 Граничное объединение нечетких множеств *A* и *B* определяется по формуле:

- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;

- $\mu_A(x)\mu_B(x)$

- $\min(\mu_A(x)+\mu_B(x),1)$;

- $\max(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0)$;

- $\max(\mu_A(x)-\mu_B(x),0)$;

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{если } \mu_A(x)=0,\\ \mu_A(x), \text{если } \mu_B(x)=0,\\ 1, \text{иначе.}\end{cases}$

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{если } \mu_A(x)=1,\\ \mu_A(x), \text{если } \mu_B(x)=1,\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$

3.58 Граничное пересечение нечетких множеств А и В определяется по формуле:

- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;

- $\mu_A(x)\mu_B(x)$

- $\min(\mu_A(x)+\mu_B(x),1)$;

- $\max(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0)$;

- $\max(\mu_A(x)-\mu_B(x),0)$;

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{если } \mu_A(x)=0,\\ \mu_A(x), \text{если } \mu_B(x)=0,\\ 1, \text{иначе.}\end{cases}$

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{если } \mu_A(x)=1,\\ \mu_A(x), \text{если } \mu_B(x)=1,\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$

3.59 Драстическое пересечение нечетких множеств А и В определяется по формуле:

- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;
- $\mu_A(x)\mu_B(x)$
- $\min(\mu_A(x)+\mu_B(x),1)$;
- $\max(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0)$;
- $\max(\mu_A(x)-\mu_B(x),0)$;

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{если } \mu_A(x)=0,\\ \mu_A(x), \text{если } \mu_B(x)=0,\\ 1, \text{иначе.}\end{cases}$

- $\begin{cases}\mu_B(x), \text{если } \mu_A(x)=1,\\ \mu_A(x), \text{если } \mu_B(x)=1,\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$

3.60 Драстическое объединение нечетких множеств А и В определяется по формуле:

- $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$;
- $\mu_A(x)\mu_B(x)$
- $\min(\mu_A(x)+\mu_B(x),1)$;
- $\max(\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0)$;
- $\max(\mu_A(x)-\mu_B(x),0)$;

- $\begin{cases} \mu_B(x), \textit{если } \mu_A(x) = 0, \\ \mu_A(x), \textit{если } \mu_B(x) = 0, \\ 1, \textit{иначе.} \end{cases}$

- $\begin{cases} \mu_B(x), \textit{если } \mu_A(x) = 1, \\ \mu_A(x), \textit{если } \mu_B(x) = 1, \\ 0, \textit{иначе.} \end{cases}$

3.61 Закон Деморгана имеет вид:

- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cup A = A$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap U = A$;
- $\overline{\overline{A}} = A$;
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3.62 Закон инволюция имеет вид:

- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cup A = A$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap U = A$;
- $\overline{\overline{A}} = A$;
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3.63 Какое свойство неверно для нечетких множеств:

- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cup A = A$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap U = A$;
- $A \cup \overline{A} = U$;
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3.64 Какое свойство неверно для нечетких множеств:

- $A \cup B = B \cup A$;

- $A \cup A = A$;

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

- $A \cap U = A$;

- $A \bigcap \overline{A} = \emptyset$;

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3.65 Декартово произведение нечетких множеств *X* и *Y* определяется по формуле:

- $\min(\mu_X(x), \mu_Y(y))$;

- $\max(\mu_X(x), \mu_Y(y))$;

- $\max(\mu_X(x), \mu_Y(y), 1)$;

- $\min(\mu_X(x), \mu_Y(y), 1)$;

- $\max(1 - \mu_X(x), 1 - \mu_Y(y), 1)$.

3.66 Декартово копроизведение нечетких множеств *X* и *Y* определяется по формуле:

- $\min(\mu_X(x), \mu_Y(y))$;

- $\max(\mu_X(x), \mu_Y(y))$;

- $\max(\mu_X(x), \mu_Y(y), 1)$;

- $\min(\mu_X(x), \mu_Y(y), 1)$;

- $\max(1 - \mu_X(x), 1 - \mu_Y(y), 1)$.

3.67 Композицией нечетких отношений *R: X×Y* и *S: Y×Z* называется нечеткое отношение $R \circ S$, определяемое на декартовом произведении $X \times Z$, определенное функцией принадлежности вида:

- $\max\limits_{y \in Y} \min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))$;

- $\min\limits_{y \in Y} \min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))$;

- $\min\limits_{y \in Y} \max(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))$;

- $\max\limits_{y \in Y} \max(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))$;

- $\max\limits_{y\in Y}\min(1-\mu_R(x,y),1-\mu_S(y,z))$.

3.68 Для нечетких отношений R и S с матрицами отношений: $R=\begin{pmatrix}0,7 & 0,1\\ 0,6 & 0,2\end{pmatrix}$ и $S=\begin{pmatrix}0,5 & 0,9\\ 0,2 & 0,1\end{pmatrix}$ матрица отношений $R\circ S$ имеет вид:

- $\begin{pmatrix}0,5 & 0,7\\ 0,5 & 0,6\end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix}0,7 & 0,9\\ 0,6 & 0,2\end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix}0,5 & 0,1\\ 0,2 & 0,2\end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix}0,4 & 0,9\\ 0,8 & 0,9\end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix}0,35 & 0,09\\ 0,12 & 0,02\end{pmatrix}$.

3.69 Для нечетких отношений R и S с матрицами отношений: $R=\begin{pmatrix}0,3 & 0,8\\ 0,1 & 0,5\end{pmatrix}$ и $S=\begin{pmatrix}0,6 & 0,2\\ 1 & 0,3\end{pmatrix}$ матрица отношений $R\circ S$ имеет вид:

- $\begin{pmatrix}0,8 & 0,3\\ 0,5 & 0,3\end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix}0,3 & 0,2\\ 0,1 & 0,3\end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix}0,6 & 0,8\\ 1 & 0,5\end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix}0,3 & 0,2\\ 0,1 & 0,3\end{pmatrix}$;

- $\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}16 \\ 0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}$.

3.70 Если множества X,Y,Z – конечны, то матрица нечетких отношений $R \circ S$ равна:

- максиминному произведению между соотношениями R и S;
- миниминному произведению между соотношениями R и S;
- минимаксному произведению между соотношениями R и S;
- максиминному произведению между соотношениями S и R.

3.71 Нечеткое отношение R: $X \times X$ называется рефлексивным на X, если:

- $\mu_R(x,x)=1$;
- $\mu_R(x,y) \le \mu_R(x,x)$;
- $\mu_R(x,y)<1,\ \forall x, y \in X$, $x \ne y$;
- $\mu_R(x,x)=0$;
- $\mu_R(x,x) \le \mu_R(x,y),\ \forall x, y \in X$;
- $\mu_R(x,y)>0,\ \forall x, y \in X$, $x \ne y$;
- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.72 Нечеткое отношение R: $X \times X$ называется слабо рефлексивным на X, если:

- $\mu_R(x,x)=1$;
- $\mu_R(x,y) \le \mu_R(x,x)$;
- $\mu_R(x,y)<1,\ \forall x, y \in X$, $x \ne y$;
- $\mu_R(x,x)=0$;
- $\mu_R(x,x) \le \mu_R(x,y),\ \forall x, y \in X$;
- $\mu_R(x,y)>0,\ \forall x, y \in X$, $x \ne y$;
- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.73 Нечеткое отношение R: $X \times X$ называется сильно рефлексивным на X, если:

- $\mu_R(x,x)=1$;
- $\mu_R(x,y) \le \mu_R(x,x)$;
- $\mu_R(x,y)<1,\ \forall x, y \in X$, $x \ne y$;

- $\mu_R(x,x)=0$;

- $\mu_R(x,x)\leq\mu_R(x,y),\ \forall x,y\in X$;

- $\mu_R(x,y)>0,\ \forall x,y\in X,\ x\neq y$;

- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.74 Нечеткое отношение R: $X\times X$ называется антирефлексивным на X, если:

- $\mu_R(x,x)=1$;

- $\mu_R(x,y)\leq\mu_R(x,x)$;

- $\mu_R(x,y)<1,\ \forall x,y\in X,\ x\neq y$;

- $\mu_R(x,x)=0$;

- $\mu_R(x,x)\leq\mu_R(x,y),\ \forall x,y\in X$;

- $\mu_R(x,y)>0,\ \forall x,y\in X,\ x\neq y$;

- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.75 Нечеткое отношение R: $X\times X$ называется слабо антирефлексивным на X, если:

- $\mu_R(x,x)=1$;

- $\mu_R(x,y)\leq\mu_R(x,x)$;

- $\mu_R(x,y)<1,\ \forall x,y\in X,\ x\neq y$;

- $\mu_R(x,x)=0$;

- $\mu_R(x,x)\leq\mu_R(x,y),\ \forall x,y\in X$;

- $\mu_R(x,y)>0,\ \forall x,y\in X,\ x\neq y$;

- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.76 Нечеткое отношение R: $X\times X$ называется сильно антирефлексивным на X, если:

- $\mu_R(x,x)=1$;

- $\mu_R(x,y)\leq\mu_R(x,x)$;

- $\mu_R(x,y)<1,\ \forall x,y\in X,\ x\neq y$;

- $\mu_R(x,x)=0$;

- $\mu_R(x,x)\leq\mu_R(x,y),\ \forall x,y\in X$;

- $\mu_R(x,y)>0,\ \forall x,y\in X$, $x\neq y$;

- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.77 Нечеткое отношение R: $X\times X$ называется симметричным на X, если:

- $\mu_R(x,x)=1$;

- $\mu_R(x,y)\leq\mu_R(x,x)$;

- $\mu_R(x,y)<1,\ \forall x,y\in X$, $x\neq y$;

- $\mu_R(x,x)=0$;

- $\mu_R(x,x)\leq\mu_R(x,y),\ \forall x,y\in X$;

- $\mu_R(x,y)>0,\ \forall x,y\in X$, $x\neq y$;

- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.78 Если $\mu_R(x,x)=1,\ \forall x\in X$, то нечеткое отношение R: $X\times X$ называется:

- рефлексивным на X;

- слабо рефлексивным на X;

- сильно рефлексивным на X;

- антирефлексивным на X;

- слабо антирефлексивным на X;

- сильно антирефлексивным на X;

- симметричным на X.

3.79 Если $\mu_R(x,y)\leq\mu_R(x,x),\ \forall x,y\in X$, то нечеткое отношение R: $X\times X$ называется:

- рефлексивным на X;

- слабо рефлексивным на X;

- сильно рефлексивным на X;

- антирефлексивным на X;

- слабо антирефлексивным на X;

- сильно антирефлексивным на X;

- симметричным на X.

3.80 Если $\mu_R(x,y)<1,\ \forall x,y\in X$, $x\neq y$, то нечеткое отношение R: $X\times X$ называется:

- рефлексивным на X;

- слабо рефлексивным на X;

- сильно рефлексивным на X;

- антирефлексивным на X;

- слабо антирефлексивным на X;

- сильно антирефлексивным на X;

- симметричным на X.

3.81 Если $\mu_R(x,x)=0,\ \forall x \in X$, то нечеткое отношение $R\colon X\times X$ называется:

- рефлексивным на X;

- слабо рефлексивным на X;

- сильно рефлексивным на X;

- антирефлексивным на X;

- слабо антирефлексивным на X;

- сильно антирефлексивным на X;

- симметричным на X.

3.82 Если $\mu_R(x,x)\leq\mu_R(x,y),\ \forall x, y \in X$, то нечеткое отношение $R\colon X\times X$ называется:

- рефлексивным на X;

- слабо рефлексивным на X;

- сильно рефлексивным на X;

- антирефлексивным на X;

- слабо антирефлексивным на X;

- сильно антирефлексивным на X;

- симметричным на X.

3.83 Если $\mu_R(x,y)>0,\ \forall x, y \in X$, $x\neq y$, то нечеткое отношение $R\colon X\times X$ называется:

- рефлексивным на X;

- слабо рефлексивным на X;

- сильно рефлексивным на X;

- антирефлексивным на X;

- слабо антирефлексивным на X;

- сильно антирефлексивным на X;

- симметричным на X.

3.84 Если $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$, $\forall x, y \in X$, то нечеткое отношение R: $X\times X$ называется:

- рефлексивным на X;

- слабо рефлексивным на X;

- сильно рефлексивным на X;

- антирефлексивным на X;

- слабо антирефлексивным на X;

- сильно антирефлексивным на X;

- симметричным на X.

3.85 Нечеткое отношение R: $X\times X$ называется сильнополным, если:

- max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)>0, $\forall x, y \in X$;

- max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=1, $\forall x, y \in X$;

- $\mu_R(x,z)\geq\min(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z))$, $\forall x, y, z \in X$;

- $\mu_R(x,x)\leq\mu_R(x,y)$, $\forall x, y \in X$;

- min($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=0, $\forall x, y \in X$;

- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.86 Нечеткое отношение R: $X\times X$ называется слабополным, если:

- max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)>0, $\forall x, y \in X$;

- max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=1, $\forall x, y \in X$;

- $\mu_R(x,z)\geq\min(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z))$, $\forall x, y, z \in X$;

- min($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=0, $\forall x, y \in X$;

- $\mu_R(x,y)>0$, $\forall x, y \in X$, $x\neq y$;

- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.87 Нечеткое отношение R: $X\times X$ называется транзитивным, если:

- max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)>0, $\forall x, y \in X$;

- max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=1, $\forall x,y\in X$;

- $\mu_R(x,z)\geq\min(\mu_R(x,y),\mu_R(y,z))$, $\forall x,y,z\in X$;

- min($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=0, $\forall x,y\in X$;

- $\mu_R(x,y)>0$, $\forall x,y\in X$, $x\neq y$;

- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.88 Нечеткое отношение *R: X×X* называется асимметричным, если:

- max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)>0, $\forall x,y\in X$;

- max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=1, $\forall x,y\in X$;

- $\mu_R(x,z)\geq\min(\mu_R(x,y),\mu_R(y,z))$, $\forall x,y,z\in X$;

- min($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=0, $\forall x,y\in X$;

- $\mu_R(x,y)>0$, $\forall x,y\in X$, $x\neq y$;

- $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$.

3.89 Если max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=1, $\forall x,y\in X$, то нечеткое отношение *R: X×X* называется:

- сильнополным на *X*;
- слабополным на *X*;
- транзитивным на *X*;
- асимметричным на *X*;
- слабо антирефлексивным на *X*;
- сильно антирефлексивным на *X*;
- симметричным на *X*.

3.90 Если max($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$)=1, $\forall x,y\in X$, то нечеткое отношение *R: X×X* называется:

- сильнополным на *X*;
- слабополным на *X*;
- транзитивным на *X*;
- асимметричным на *X*;

- слабо антирефлексивным на *X*;

- сильно антирефлексивным на *X*;

- симметричным на *X*.

3.91 Если $\mu_R(x,z) \geq min(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z))$, $\forall x,y,z \in X$, то нечеткое отношение *R: X*×*X* называется:

- сильнополным на *X*;

- слабополным на *X*;

- транзитивным на *X*;

- асимметричным на *X*;

- слабо антирефлексивным на *X*;

- сильно антирефлексивным на *X*;

- симметричным на *X*.

3.92 Если $min(\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x))=0$, $\forall x,y \in X$, то нечеткое отношение *R: X*×*X* называется:

- сильнополным на *X*;

- слабополным на *X*;

- транзитивным на *X*;

- асимметричным на *X*;

- слабо антирефлексивным на *X*;

- сильно антирефлексивным на *X*;

- симметричным на *X*.

3.93 Нечеткое число *A* называется *унимодальным*, если:

- $\max\limits_{x \in R} \mu_A(x) = 1$;

- μ_A=1 справедливо только для одной точки действительной оси;

- если для любых действительных чисел $x,y,z \in R$ таких, что $x \leq y \leq z$ выполняется $\mu_A(y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$;

- нет правильного ответа.

3.94 Нечеткое число *A* называется *нормальным*, если:

- $\max\limits_{x \in R} \mu_A(x) = 1$;

- μ_A=1 справедливо только для одной точки действительной оси;

- если для любых действительных чисел $x,y,z \in R$ таких, что $x \le y \le z$ выполняется $\mu_A(y) \ge \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$;;

- нет правильного ответа.

3.95 Нечеткое число *A* называется *выпуклым*, если:

- $\max\limits_{x \in R} \mu_A(x) = 1$;

- μ_A=1 справедливо только для одной точки действительной оси;

- если для любых действительных чисел $x,y,z \in R$ таких, что $x \le y \le z$ выполняется $\mu_A(y) \ge \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$;;

- нет правильного ответа.

Список использованных источников

1. Аверкин, А.Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун [и др.]. – М.: Наука, 1986. – 312 с. – ISBN 978–5–458–25284–3.

2. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – 11–е изд. – СПб.: Лань, 2005. – 736 с. – ISBN 581–1404–999.

3. Бугров, Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

4. Гаврилов, В.Р. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учебник для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 492 с. – ISBN 5–7038–1270–4.

5. Заде, Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. – М.: Мир, 1976. – 167 с.

6. Ильин, В.А. Основы математического анализа: В 2–х ч. учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – 7–е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, – 2009. – Ч.2. – 464 с. – ISBN 978–5–9221–0537–8.

7. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

8. Лесин, В. В. Основы методов оптимизации: учеб. пособие / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. – 3–е изд., испр. – СПб.: Лань, 2011. – 342 с. – Библиогр.: с. 340–341. – ISBN 978–5–8114–1217–4.

9. Летова, Т.А. Методы оптимизации. Практический курс: учебное пособие / Т.А. Летова, А.В. Пантелеев. – М.: Логос, 2011. – 424 с. – (Новая университетская библиотека). – ISBN 978–5–98704–540–4.

10. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие: в 2 т. / Н.С. Пискунов. – 13–е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1985. – Т.2. – 432 с.

11. Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие: в 4 ч. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под ред. А.П. Рябушко. – 6–е изд. – Минск: Вышэйшая школа, 2013. – Ч. 3. Ряды. – 368 с. – ISBN 978–985–06–2222–8.

Учебное пособие

Елена Николаевна Смирнова
Наталья Викторовна Максименко

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

ISBN 978-5-7410-1677-0
9 785741 016770