Министерство образования и науки Российской Федерации

Университетский колледж

федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Предметно-цикловая комиссия информационных технологий

И. С. Ходырева

НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам среднего профессионального образования по специальностям 09.02.03 Программирование в компьютерных системах, 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы, 11.02.02 Техническое обслуживание и ремонт радиоэлектронной техники (по отраслям), 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям), 09.02.04 Информационные системы (по отраслям), 15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), 15.02.08 Технология машиностроения, 21.02.05 Земельно-имущественные отношения, 44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям), 24.02.01 Производство летательных аппаратов, 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения

Оренбург
2017

УДК 51(07)
ББК 22.1.я723
Х69

Рецензент – кандидат физико – математических наук, доцент Н.А. Павленко

Ходырева И. С.
Х69 Нахождение производной и ее приложение к исследованию функций: методические указания по выполнению самостоятельной работы / И.С. Ходырева; Оренбургский гос. ун-т .- Оренбург: Университетский колледж ГОУ , 2017.– 29с.

Данные методические указания предназначены для выполнения самостоятельной работы по разделу «Производная и ее применение» по дисциплине “Математика” для студентов 1 курса во 2 семестре для специальностей 09.02.03 Программирование в компьютерных системах, 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы, 11.02.02 Техническое обслуживание и ремонт радиоэлектронной техники (по отраслям), 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям), 09.02.04 Информационные системы (по отраслям), 15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), 15.02.08 Технология машиностроения, 21.02.05 Земельно-имущественные отношения, 44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям), 24.02.01 Производство летательных аппаратов, 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения, очной и заочной формы обучения.

Методические указания составлены с учетом федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлениям подготовки дипломированных специалистов.

УДК 51(07)
ББК 22.1.я723

Содержание

Введение

Данные методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов колледжей по дисциплине «Математика» (раздел «Производная и ее применение», изучаемый на 1 курсе во втором семестре).

Предмет «Математика» является фундаментальным предметом в курсе общеобразовательных дисциплин, устанавливающий базовый уровень знаний для освоения других общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Методические указания соответствуют федеральным государственных образовательным стандартам среднего профессионального образования по направлениям подготовки дипломированных специалистов: 09.02.03 Программирование в компьютерных системах, 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы, 11.02.02 Техническое обслуживание и ремонт радиоэлектронной техники (по отраслям), 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям), 09.02.04 Информационные системы (по отраслям), 15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), 15.02.08 Технология машиностроения, 21.02.05 Земельно-имущественные отношения, 44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям), 24.02.01 Производство летательных аппаратов, 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения.

Данная работа имеет следующую структуру:

1) справочные сведения теоретического характера по теме «Производная и ее применение», необходимые для выполнения индивидуальных заданий;

2) примеры решения типовых заданий;

3) индивидуальные задания (30 вариантов) по данной теме.

Методические указания могут применяться и студентами других направлений как очного, так и заочного отделений учебных заведений среднего профессионального образования.

1 Справочные материалы

1.1 Таблица производных

Таблица 1 – Таблица производных

Функция $y = f(x)$	Производная $y' = f'(x)$
C	0
x^a	ax^{a-1}
x	1
x^2	$2x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

1.2 Основные правила нахождения производных

1. Производная суммы равна сумме производных

$$(u+v)' = u' + v'.$$

2. Производная разности равна разности производных

$$(u-v)' = u' - v'.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак производной

$$(Cu)' = Cu.$$

4. Формула производной произведения

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

5. Формула производной частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

6. Формула для производной сложной функции

$$[f(u(x))]' = f'(u(x)) \cdot u'(x),$$

в компактной записи

$$[f(u)]' = f'(u) \cdot u'.$$

1.3 Схема исследования функции и построения ее графика

При исследовании данной функции $y = f(x)$ и построении ее графика целесообразно придерживаться следующей схемы.

1. Найти область определения функции $D(f)$ и точек разрыва.

Для нахождения $D(f)$ надо найти множество всех значений x, при которых формула, задающая данную функцию, имеет смысл.

Найдя $D(f)$, рекомендуется отметить ее на оси Ox:

1) если эта область – вся числовая ось, то никаких отметок можно не делать;

2) если эта область – промежуток числовой оси, то полезно провести вертикальные прямые через его концы (сплошной линией, если граничная точка принадлежит промежутку и пунктирной линией, если не принадлежит) и выделить штриховкой сам промежуток;

3) если отдельные точки не входят в область определения функции (например, корни знаменателя), то надо отметить их на оси Ox и провести через них вертикальные пунктирные прямые.

2. Определить, является ли функция четной или нечетной или функцией общего вида.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется четной функцией, если:

1) $D(f)$ - симметричное множество относительно начала координат;

2) для всех $x \in D(f)$ выполняется $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется нечетной функцией, если:

1) $D(f)$ - симметричное множество относительно начала координат;

2) для всех $x \in D(f)$ выполняется $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно начала координат.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется функцией общего вида, если она не является ни четной, ни нечетной.

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции.

Для того чтобы найти абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox надо решить уравнение $f(x) = 0$.

Замечание. Количество точек пересечения графика функции с осью абсцисс может быть любым.

Для нахождения промежутков знакопостоянства удобно:

1) построить область определения функции на числовой оси;

2) отметить найденные решения уравнения $f(x)=0$;

3) на каждом из полученных промежутках определить знак функции, вычислив ее значение в любой внутренней точке каждого промежутка.

Замечание. Если корни уравнения $f(x)=0$ могут быть найдены только приближенно, то можно не находить точки пересечения графика функции с осью абсцисс и промежутки знакопостоянства функции.

Для того чтобы найти ординату точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью Oy надо вычислить $f(0)$.

Замечание. График функции с осью ординат может пересекаться не более чем в одной точке.

4. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремумов функции.

В данном пункте требуется найти производную и ее критические точки, то есть точки, в которых она равна нулю или не существует. Данные точки разбивают область определения функции на интервалы, в которых производная сохраняет знак.

Если на интервале производная положительна (отрицательна), то на этом интервале данная функция будет возрастать (убывать).

В случае, если в критической точке функция не имеет разрыва, а производная меняет свой знак с «-» на «+» (с «+» на «-»), то в этой точке имеется минимум (максимум). Вычислить значения данной функции в полученных точках экстремума.

При выполнении данного пункта удобно полученные данные записывать в таблицу (см. п. 2, задача 11).

5. Исследовать поведение функции на границах области определения в разрывах и при больших по модулю значениях x.

Если в точке $x=a$, имеются разрыв, где данная функция «обращается в бесконечность», то прямая $x=a$ будет являться вертикальной асимптотой (рисунок 1), которую следует построить на уточнения графика функции.

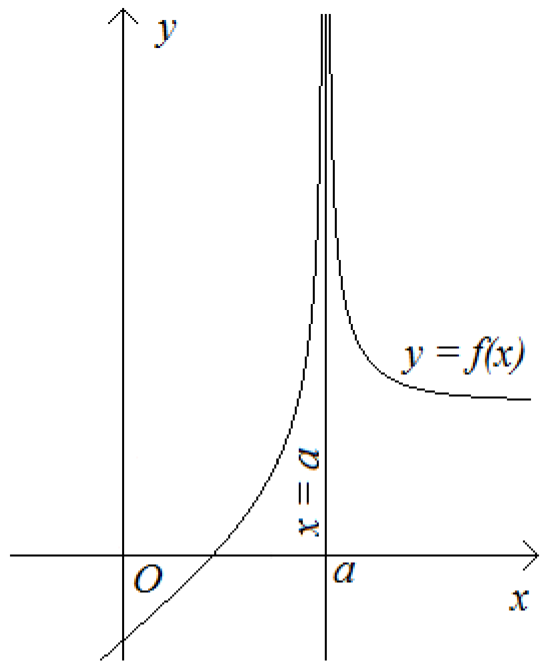

Рисунок 1

Если в область определения функции входит бесконечный промежуток, например $[a;+\infty)$, то следует выяснить поведение функции при $x \to +\infty$, а в случае вхождения в область определения промежутков вида $(-\infty;a]$, то при $x \to -\infty$. Если, например, при $x \to +\infty$ выполняется $f(x) \to c$, то прямая $y = c$ будет являться горизонтальной асимптотой (рисунок 2) при $x \to +\infty$.

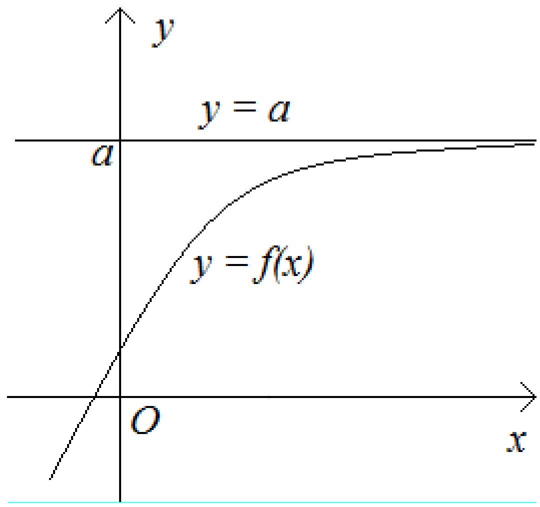

Рисунок 2

6. Найти дополнительные точки графика для его уточнения (при необходимости).

7. Построить график исследуемой функции.

8. По построенному графику определить область значений $E(f)$ данной функции.

2 Примеры решений типовых заданий

Задача 1. Найдите производную функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Решение.

Исходную функцию можно представить в виде $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$.

Воспользуемся табличной производной $\left(x^{a}\right)'=ax^{a-1}$. В данном случае $a=\dfrac{1}{3}$, тогда получим

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}.$$

Ответ: $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}$.

Задача 2. Найдите производную функции $f(x)=\sin x-e^{x}$.

Решение.

Используем, то производная разности двух функций равна разности производных

$$(u-v)'=u'-v'.$$

Тогда получим

$$f'(x)=\left(\sin x-e^{x}\right)'=(\sin x)'+\left(e^{x}\right)'=\cos x-e^{x}.$$

Ответ: $f'(x)=\cos x-e^{x}$.

Задача 3. Найдите производную функции $f(x)=x^{5}\cos x$.

Решение.

Применим формулу для производной произведения

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Тогда получим

$$f'(x)=\left(x^5\cos x\right)'=\left(x^5\right)'\cos x+x^5(\cos x)'=5x^4\cos x+x^5(-\sin x)=$$

$$=5x^4\cos x-x^5\sin x=x^4(5\cos x-x\sin x).$$

Ответ: $f'(x)=x^4(5\cos x-x\sin x)$

Задача 4. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{2^x}{\log_2 x}$.

Решение.

Применим формулу производной частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Тогда получим

$$f'(x)=\left(\frac{2^x}{\log_2 x}\right)'=\frac{\left(2^x\right)'\log_2 x-2^x(\log_2 x)'}{(\log_2 x)^2}=\frac{2^x\ln 2\cdot\log_2 x-2^x\cdot\dfrac{1}{x\ln 2}}{\log_2^2 x}=$$

$$=\frac{2^x\left(\ln 2\cdot\log_2 x-\dfrac{1}{x\ln 2}\right)}{\log_2^2 x}.$$

Ответ: $f'(x)=\dfrac{2^x\left(\ln 2\cdot\log_2 x-\dfrac{1}{x\ln 2}\right)}{\log_2^2 x}$.

Задача 5. Найдите производную функции $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Решение.

Воспользуемся формулой для производной сложной функции

$$[f(u)]'=f'(u)\cdot u'.$$

В данном случае $f(u)=\operatorname{tg}u$, $u(x)=\sqrt{x}$.

Тогда, используя табличную производную

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x},$$

будем иметь

$$(\operatorname{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'=\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

Ответ: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

Замечание. Для того чтобы выяснить какое правило для нахождения производной надо применить в данном конкретном случае, следует определить какое математическое действие в данном выражении выполняется последним.

Например, пусть нам требуется найти производную

$$\left(\cos^2\sqrt[3]{x}-\operatorname{tg}3^{\sqrt{x}}\right)'.$$

Рассмотрим выражение в скобках. В нем последним математическим действием является вычитание, поэтому используем формулу для производной разности

$$(u-v)'=u'-v',$$

где

$$u=\cos^2\sqrt[3]{x},\ v=\operatorname{tg}3^{\sqrt{x}}.$$

При нахождении производной

$$\left(\sin\sqrt[5]{\log_3 x-2}\right)',$$

заметим, что в выражении в скобках последним математическим действием является нахождение синуса, то есть нахождение функции, и тогда будем использовать формулу для производной сложной функции

$$[f(u)]' = f'(u)\cdot u',$$

где

$$f(u) = \sin u,\ u = \sqrt[5]{\log_3 x - 2}.$$

Задача 6. Найдите производную функции $f(x) = \sqrt{(2x^3 - 1)(x^2 - x + 3)}$.

Решение.

В данном случае мы должны найти производною от квадратного корня некоторого выражения, поэтому используем формулу для производной сложной функции

$$[f(u)]' = f'(u)\cdot u'.$$

В данном случае $f(u) = \sqrt{u}$, $u = (2x^3 - 1)(x^2 - x + 3)$.

Тогда, используя табличную производную

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

будем иметь

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{(2x^3 - 1)(x^2 - x + 3)}}\cdot\left[(2x^3 - 1)(x^2 - x + 3)\right]' =$$

Теперь нам осталось найти производную от произведения двух функций. Для этого используем формулу

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(2x^3 - 1)(x^2 - x + 3)}}\cdot\left[(2x^3 - 1)'(x^2 - x + 3) + (2x^3 - 1)(x^2 - x + 3)'\right] =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\left(2x^3-1\right)\left(x^2-x+3\right)}}\cdot\left[2\cdot 3x^2\left(x^2-x+3\right)+\left(2x^3-1\right)\left(2x-1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\left(2x^3-1\right)\left(x^2-x+3\right)}}\cdot\left[6x^2\left(x^2-x+3\right)+4x^4-2x^3-2x+1\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\left(2x^3-1\right)\left(x^2-x+3\right)}}\cdot\left(6x^4-6x^3+18x^2+4x^4-2x^3-2x+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\left(2x^3-1\right)\left(x^2-x+3\right)}}\cdot\left(10x^4-8x^3+18x^2-2x+1\right)=\frac{10x^4-8x^3+18x^2-2x+1}{2\sqrt{\left(2x^3-1\right)\left(x^2-x+3\right)}}.$$

Ответ: $f'(x)=\dfrac{10x^4-8x^3+18x^2-2x+1}{2\sqrt{\left(2x^3-1\right)\left(x^2-x+3\right)}}$.

Задача 7. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-3}$.

Решение.

Применим формулу производной частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Тогда получим

$$f'(x)=\left(\frac{3x+1}{x^2-3}\right)'=\frac{(3x+1)'\left(x^2-3\right)-(3x+1)\left(x^2-3\right)'}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{3\left(x^2-3\right)-(3x+1)\cdot 2x}{\left(x^2-3\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^2-9-6x^2-2x}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{-3x^2-9-2x}{\left(x^2-3\right)^2}=-\frac{3x^2+2x+9}{\left(x^2-3\right)^2}.$$

Ответ: $f'(x) = -\dfrac{3x^2 + 2x + 9}{\left(x^2 - 3\right)^2}$

Задача 8. Найдите производную функции $f(x) = x^2 e^{3x}$.

Решение.

Применим формулу для производной произведения

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Тогда получим

$$f(x) = \left(x^2\right)' e^{3x} + x^2\left(e^{3x}\right)' = 2x \cdot e^{3x} + x^2 e^{3x}(3x)' = 2x \cdot e^{3x} + x^2 e^{3x} 3 = xe^{3x}(2 + 3x).$$

Ответ: $f'(x) = xe^{3x}(2 + 3x)$

Задача 9. Найдите производную функции $f(x) = \left(-3x^2 + 7x - 2\right)^4$.

Решение.

В данном случае мы должны найти производною от степенной функции некоторого выражения, поэтому используем формулу для производной сложной функции

$$[f(u)]' = f'(u) \cdot u'.$$

В данном случае $f(u) = u^4,\ u = -3x^2 + 7x - 2$.

Тогда, используя, что

$$\left(x^4\right)' = 4x^3,$$

будем иметь

$$\left(u^4\right)' = 4u^3 \cdot u' = 4\left(-3x^2 + 7x - 2\right)^3\left(-3x^2 + 7x - 2\right)' =$$

$$= 4\left(-3x^2 + 7x - 2\right)^3(-6x + 7) = 4\left(3x^2 - 7x + 2\right)^3(6x - 7).$$

Ответ: $f'(x)=4\left(3x^2-7x+2\right)^3(6x-7)$.

Задача 10. Найдите производную функции $f(x)=2\sin^4\left(\dfrac{\pi}{8}+2x\right)$.

Решение.

В данном случае последовательно применяем:

1) вынесение постоянного множителя за знак производной;

2) формулу для производной сложной функции;

3) производную суммы.

$$f'(x)=2\left[\sin^4\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)\right]'=2\cdot 4\sin^3\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)\right]'=$$

$$=8\sin^3\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)'=8\sin^3\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)\cdot(0+2)=$$

$$=16\sin^3\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+2x\right).$$

Ответ: $f'(x)=16\sin^3\left(\dfrac{\pi}{8}+2x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+2x\right)$.

Задача 11. Исследуйте функцию $f(x)=x^3+4{,}5x^2+6x$ и постройте ее график.

Решение.

1. Так как данная функция является многочленом, то она определена на всей числовой оси: $D(f)=R=(-\infty;+\infty)$ и не имеет точек разрыва.

2. Определим, будет ли данная функция четной или нечетной или функцией общего вида:

1) $D(f) = R$ - симметричное множество относительно начала координат;

2) так как $f(-x) = (-x)^3 + 4{,}5(-x)^2 + 6(-x) = -x^3 + 4{,}5x^2 - 6x$ не совпадает ни с $f(x)$, ни с $-f(x)$, то данная функция является функцией общего вида.

3. Найдем точки пересечения графика данной функции с осью Ox. Для этого решим уравнение $f(x) = 0$:

$$x^3 + 4{,}5x^2 + 6x = 0, \; x\left(x^2 + 4{,}5x + 6\right) = 0, \; \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 + 4{,}5x + 6 = 0. \end{array}\right.$$

Так как полученное квадратное уравнение не имеет действительных корней, то тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.

Тогда точка $O(0;0)$ является единственной точкой пересечения графика функции с осью абсцисс. Эта же точка будет являться точкой пересечения графика с осью ординат.

Определим промежутки знакопостоянства функции $f(x) = x\left(x^2 + 4{,}5x + 6\right)$. Так как квадратный трехчлен $x^2 + 4{,}5x + 6$ всегда положителен, то при $x < 0$ данная функция принимает отрицательные значения, а при $x > 0$ - положительные значения.

4. Найдем производную

$$f'(x) = \left(x^3 + 4{,}5x^2 + 6x\right)' = 3x^2 + 9x + 6 = 3\left(x^2 + 3x + 2\right) = 3(x+1)(x+2).$$

Найдем критические точки. Так как производная определена на всей числовой оси, то нет точек, где производная не существует. Она обращается в 0 в точках $x = -2$ и $x = -1$. Таким образом, имеем две критические точки. Они обе будут также являться и стационарными точками.

Полученные точки разбивают числовую ось на 3 интервала: $(-\infty;-2)$, $(-2;-1)$ и $(-1;+\infty)$. Определим знак производной на каждом из интервалов:

1) $f(-3) = 3(-3+1)(-3+2) = 6 > 0$, тогда на промежутке $(-\infty;-2)$ производная положительна и функция возрастает;

2) $f(-1{,}5)=3(-1{,}5+1)(-1{,}5+2)=-0{,}75<0$, тогда на промежутке $(-2;-1)$ производная отрицательна и функция убывает;

3) $f(0)=3(0+1)(0+2)=6>0$, тогда на промежутке $(-1;+\infty)$ производная положительна и функция возрастает.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

В точке $x=-2$ данная функция имеет максимум. Определим значение функции в этой точке:

$$f(-2)=(-2)^3+4{,}5(-2)^2+6(-2)=-2.$$

Получили, что график данной функции имеет точку максимума $(-2;-2)$.

В точке $x=-1$ данная функция имеет минимум. Определим значение функции в этой точке:

$$f(-1)=(-1)^3+4{,}5(-1)^2+6(-1)=-2{,}5.$$

Получили, что график данной функции имеет точку минимума $(-1;-2{,}5)$.

5. Найдем дополнительные точки графика функции для его уточнения.

x	-3	1
y	-4,5	11,5

6. Используя полученные данные, построим график исследуемой функции (рисунок 3).

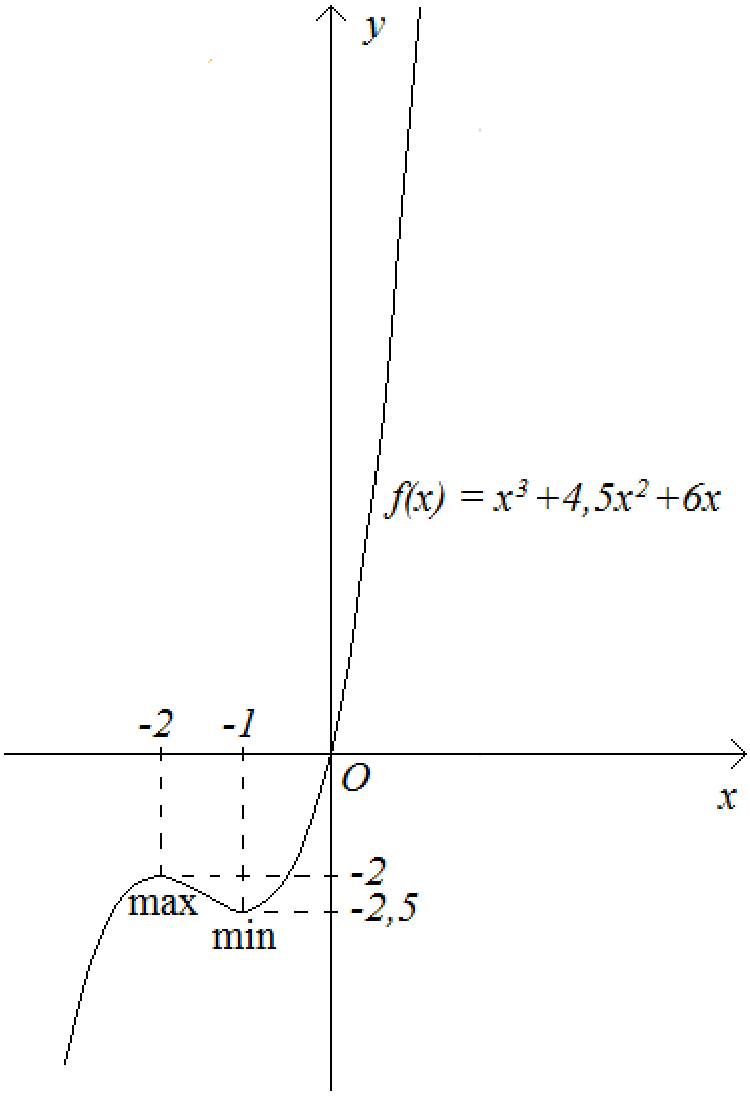

Рисунок 3

7. По построенному графику определим область значений данной функции: $E(f)=(-\infty;+\infty)$.

3 Варианты самостоятельной работы

3.1 Задание 1. Практическое нахождение производных

1. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{\frac{3}{x^2}-x^4}$; 2) $y=\frac{x}{\sin 2x}$; 3) $y=xe^{5x}$;

4) $y=\left(x^2-x^7+3\right)^{12}$; 5) $y=3x+\cos^3 2x$.

2. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{1-2\cos x}$; 2) $y=\frac{4x-3x^2}{x^3-1}$; 3) $y=\frac{3^x}{2^x+5^x}$;

4) $y=\left(2x-\frac{1}{6}x^{-3}\right)^8$; 5) $y=-\cos^4 10x^2$.

3. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{\frac{1}{x}+5x^2}$; 2) $y=\frac{3x^9-4x^4}{5+8x^2}$; 3) $y=x^3\ln 3x$;

4) $y=\left(4x-\frac{x^{-3}}{3}\right)^7$; 5) $y=-\sin^6\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{\sin x-0{,}5}$; 2) $y=\frac{3x^9-2x^5}{13-2x^2}$; 3) $y=5x^2\ln(x+1)$;

4) $y=\left(4x-2x^{-5}+7x^2\right)^5$; 5) $y=\sin^{10}2x-5x$.

5. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{4x^3+5x}$; 2) $y=\dfrac{21+17x^2}{3x^5-9x^8}$; 3) $y=x\ln^2 x$;

4) $y=\left(12x+3x^2-2x^{-3}\right)^{10}$; 5) $y=\dfrac{1}{3}\cos^9\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{3x}{2}\right)$.

6. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{1-4x^2}$; 2) $y=\dfrac{2x^{15}-5x^3}{7+2x^4}$; 3) $y=(x-1)\ln(5+3x)$;

4) $y=\left(x^3-27x^2-5x^{-6}\right)^9$; 5) $y=2\cos^2 2x$.

7. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{2x^5-7}$; 2) $y=\dfrac{2+7x^2}{3x-9x^8}$; 3) $y=7^{x/2}\ln(x-1)$;

4) $y=\left(14x^6-\dfrac{x^{-4}}{13}\right)^5$; 5) $y=2x+\cos^8(4x-\pi)$.

8. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{x^2+7x+12}$; 2) $y=\dfrac{3x^9-2}{x^2}$; 3) $y=2^{-x}\ln(x+3)$;

4) $y=\left(4x^{23}-2x^{-3}+17x^2\right)^{-5}$; 5) $y=\sin 2x-5x^3$.

9. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{x-\dfrac{4}{x-3}}$; 2) $y=\dfrac{3x^5-4x^6}{5x+8x^2}$; 3) $y=x^4e^{\sqrt{x}}$;

4) $y=\left(12x^3+23x^2-8x^{-3}\right)^{-10}$; 5) $y=\operatorname{tg}3x+\operatorname{ctg}2x$.

10. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{\dfrac{3}{x^2-4}}$; 2) $y=\dfrac{2x^5-5x}{7+12x^4}$; 3) $y=6^{-2x}\ln(5x^4+3x)$;

4) $y=\left(8x^3-7x^2-4x^{-16}\right)^{-9}$; 5) $y=x^4+\operatorname{tg}2x$.

11. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{\dfrac{8}{x^2-1}}$; 2) $y=\dfrac{1-9x^2}{x^4-5x^5}$; 3) $y=(x^4+3x)e^{\sqrt{x}}$;

4) $y=\left(\dfrac{1}{2}x^4-8x^{-2}\right)^{10}$; 5) $y=x^3\sin^4 2x$.

12. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{(x-2)(x-4)}$; 2) $y=\dfrac{2x-5x^2}{10+3x^3}$; 3) $y=\left(3x^6-6\right)e^{-\frac{x}{2}}$;

4) $y=\left(-5x^4-8x^2+9x^{-1}\right)^9$; 5) $y=\sin^2 x+5\cos^2 x$.

13. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{(x+3)(x-4)}$; 2) $y=\dfrac{3-5x^3}{2+8x^7}$; 3) $y=\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{x}{3}}\ln(x^5-1)$;

4) $y=\left(3x^5+2x^{12}-17x\right)^8$; 5) $y=\cos 2x\sin^3 x$.

14. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{x^2-7x+6}$; 2) $y=\dfrac{x^2-3x^3}{2+x^4}$; 3) $y=4e^{\cos 3x}$;

4) $y=\left(9+8x^2-x^4\right)^5$; 5) $y=\sin 2x\cos^4 x$.

15. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{\dfrac{1}{3x+x^2}}$; 2) $y=\dfrac{x^2+x^3}{3x^7+4}$; 3) $y=2^x\ln(x-1)$;

4) $y=\left(5+12x^5-x^3\right)^6$; 5) $y=\cos^2\dfrac{x}{4}$.

16. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{x^3-2x^2}$; 2) $y=\dfrac{2x^5+3}{8x-2x^4}$; 3) $y=e^{3x}\ln x$;

4) $y=\left(\dfrac{x^4}{4}+8x^9-5\right)^7$; 5) $y=\sin^2\dfrac{x}{4}$.

17. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{(1-x^2)(5-2x)}$; 2) $y=\dfrac{x^4-12x^2}{5x^6-1}$; 3) $y=2xe^{-x^2}$;

4) $y=\left(1+1{,}5x-3x^2-2{,}5x^3\right)^5$; 5) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(2x-\pi)$.

18. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{(x-1)(x^2-x)}$; 2) $y=\dfrac{2x^4-x^8}{x+1}$; 3) $y=x^2e^{3-2x}$;

4) $y=\left(x^3-3x^6+2\right)^7$; 5) $y=3\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

19. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{x\quad+5x+4}$; 2) $y=\dfrac{x^2-5x}{2-x^3}$; 3) $y=(x^2+1)\ln(5+3x)$;

4) $y=\left(-\dfrac{2x^3}{3}+x^6+\dfrac{2}{3}\right)^4$; 5) $y=2\operatorname{tg}x-2\sin^4 3x$.

20. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{x^2-2x-3}$; 2) $y=\dfrac{5x-2x^6}{1-x^3}$; 3) $y=x\ln(1+5x)$;

4) $y=\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{16}+\dfrac{1}{4}\right)^3$; 5) $y=x^3+5\sin^{-4}2x$.

21. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{9x-x^3}$; 2) $y=\dfrac{x^3-3x^4}{1+4x^5}$; 3) $y=x^2\ln(2+3x)$;

4) $y=\left(-\dfrac{x^3}{3}-7x\right)^9$; 5) $y=\sin^{-2}x+5\cos^{-6}x$.

22. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{16x-x^3}$; 2) $y=\dfrac{x^2}{3-4x^3}$; 3) $y=\dfrac{e^{-x}}{8x^2+2x^{-10}}$;

4) $y=\left(\dfrac{x^5}{5}-6x^7+1\right)^4$; 5) $y=6\cos 2x-\sin^3 x$.

23. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{x^2-\dfrac{8}{x}}$; 2) $y=\dfrac{2x^4-3x^2}{8-5x^5}$; 3) $y=\dfrac{x^6}{4^{3x}+5x}$;

4) $y=\left(4-3x^2-2x^{13}\right)^3$; 5) $y=2\cos^4(9x-\pi)$.

24. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{1-\dfrac{27}{x^3}}$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2x^3+1}$; 3) $y=e^{x^2}\cos 2x$;

4) $y=\left(-9x^4-3x^2+7x\right)^{10}$; 5) $y=-4\sin^6(-5x-\pi)$.

25. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{(3-x)(x+2)}$; 2) $y=\dfrac{1-2x^4}{3x-5x^3}$; 3) $y=2^{-x}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$;

4) $y=\left(x^3-2x^2-5x^9\right)^3$; 5) $y=-7\operatorname{ctg}(3x-\dfrac{\pi}{2})$.

26. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{x(5x^2-4)}$; 2) $y=\dfrac{1}{(6x-1)^6}$; 3) $y=7^{x/2}\operatorname{tg}3x$;

4) $y=\left(-x^2-5x^9-7x\right)^7$; 5) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4}+5x)$.

27. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{6x^3-5x+4}$; 2) $y=\dfrac{1}{(5x+1)^3}$; 3) $y=e^{x^2}-\sin\dfrac{x}{2}$;

4) $y=\left(x^3-2x^2+5x\right)^4$; 5) $y=8\sin(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{x}{8})$.

28. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{x^4-2x^3}$; 2) $y=\dfrac{4}{x^2-1}$; 3) $y=x^4-0{,}5^{2x}$;

4) $y=\left(5x^7-3x^3\right)^8$; 5) $y=-5\sin^8\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

29. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{(x^2-2x)(2x^4-3)}$; 2) $y=\dfrac{x-1}{x^2+3}$; 3) $y=x^4e^{-x}$;

4) $y=\left(3x^2-5x^8-2\right)^5$; 5) $y=3\cos^5\left(\dfrac{\pi}{6}+3x\right)$.

30. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt{(2x-x^3)(8+4x^2)}$; 2) $y=\dfrac{\cos 3x}{x}$; 3) $y=7x^2-2^{-x}$;

4) $y=\left(x^5+2x^8-1\right)^4$; 5) $y=-4x+\sin^2 3x$.

3.2 Задание 2. Исследование функции и построение ее графика

Исследуйте данную функцию и постройте ее график.

1. $f(x)=2x^3-9x^2+12x-8$.

2. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$.

3. $f(x)=x^3-3x^2-18x+7$.

4. $f(x)=x^3-6x^2+4$.

5. $f(x)=x^3-3x^2+11$.

6. $f(x)=2x^3+9x^2+12x-2$.

7. $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-2$.

8. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x+5$.

9. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+4$.

10. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+8x-4$.

11. $f(x)=x^3-12x^2+145$.

12. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+\dfrac{1}{3}$.

13. $f(x)=x^3-12x+4$.

14. $f(x)=-x^3+3x^2$.

15. $f(x)=-x^3+3x^2-4$.

16. $f(x)=x^3-3x+2$.

17. $f(x)=3-3x+x^3$.

18. $f(x)=\frac{1}{3}-4x+2{,}5x^2-\frac{1}{3}x^3$.

19. $f(x)=\frac{1}{6}x^3-2x$.

20. $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3{,}5x^2-10x-\frac{1}{3}$.

21. $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2$.

22. $f(x)=-2x^3+1{,}5x^2-36x+20$.

23. $f(x)=-x^3+9x^2-24x+10$.

24. $f(x)=x^3+6x^2+2x-6$.

25. $f(x)=-x^3+6x^2-2x-3$.

26. $f(x)=-2x^3+9x^2-12x+8$.

27. $f(x)=-x^3+3x^2$.

28. $f(x)=x^3+6x^2$.

29. $f(x)=-x^3+3x^2-3x$.

30. $f(x)=-2x^3+3x^2$.

Список использованных источников

1 Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала анализа 10-11 кл.: учебник /А. Н. Колмогоров. – М.: Просвещение, 2011. – 384 с.

2 Мордкович, А. И. Алгебра и начала анализа 10-11 кл. В 2 ч.: учебник / А. Н. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2009. – 375 с.

3 Богомолов, Н. В. Сборник задач по математике: учебник / Н. В. Богомолов. – М.: Просвещение, 2010. – 480 с.

4 Алимов, Ш. А. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 кл. / Ш. А. Алимов и др. – М.: Просвещение, 2002. – 384 с.

5 Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 кл. / М. И. Башмаков. – М.: Просвещение, 2008. – 352 с.