Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 01.03.04 Прикладная математика, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 24.03.04 Авиастроение, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 08.03.01 Строительство

Оренбург
2018

УДК 510.2:517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7
Д 21

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук И.К. Зубова
Авторы: Н.А. Гамова, Н.В. Кулиш, Е.В. Спиридонова, И.П. Томина

Д 21 Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных: учебное пособие / Н.А. Гамова, Н.В. Кулиш, Е.В. Спиридонова, И.П. Томина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 118 с.
ISBN 978-5-7410-2152-1

Учебное пособие дает возможность использовать его в процессе аудиторной и самостоятельной работы, подготовиться по изучаемому разделу.

Учебное пособие содержит необходимые теоретические сведения, примеры решения задач, вопросы для самопроверки, теоретические упражнения и 25 вариантов индивидуальных заданий.

Данное учебное пособие может быть использовано обучающимися по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 01.03.04 Прикладная математика, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 24.03.04 Авиастроение, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 08.03.01 Строительство

.

УДК 510.2:517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7

Содержание

Введение 5
1 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных 6
1.1 Краткий теоретический материал 6
1.1.1 Частные производные, градиент, дифференциал 8
1.1.2 Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности 10
1.1.3 Дифференцирование неявной функции 14
1.1.4 Дифференцирование сложной функции нескольких переменных 17
1.1.5 Экстремум функции нескольких переменных 21
1.2 Примеры решения задач 23
1.3 Вопросы для самопроверки 30
1.4 Теоретические упражнения 30
1.5 Индивидуальные задания для самостоятельной работы 32
2 Интегральное исчисление функции нескольких переменных 49
2.1 Краткий теоретический материал 49
2.1.1 Двойной интеграл в декартовых координатах 49
2.1.2 Замена переменной в двойном интеграле. 57
2.1.3 Двойной интеграл в полярных координатах. 58
2.2 Примеры решения задач 59
2.3 Приложение двойного интеграла к задачам механики 75
3 Криволинейный интеграл по плоской кривой 79
3.1 Вычисление криволинейных интегралов 80
3.2 Криволинейные интегралы второго рода (криволинейные интегралы по координатам) 84
3.3 Составной криволинейный интеграл 88
3.4 Вычисление криволинейных интегралов по координатам 89
3.5 Связь криволинейных интегралов первого и второго рода 91
3. 6 Формула Грина 93

3.7 Формула Стокса 94
3.8 Вопросы для самопроверки.. 95
3.9 Теоретические упражнения.. 96
3.10 Индивидуальные задания для самостоятельной работы................................... 97
Список использованныхисточников 118

Введение

Учебное пособие составлено в соответствии с программой изучения дисциплины «Математический анализ» для студентов второго курса дневного и заочного отделения и предназначено в помощь студентам при изучении разделов «Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных».

Учебное пособие содержит теоретический материал по основным понятиям теории функций многих переменных и позволяет познакомить студентов с основными понятиями теории дифференциально-интегрального исчисления функций многих переменных, сформировать правильный научный подход к решению различных задач по дифференциальному и интегральному исчислению функции многих переменных.

Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных позволяет студентам овладеть фундаментальными понятиями и методами современной математики, без знания которых невозможна дальнейшая профессиональная подготовка. При освоении данного курса у студентов формируются навыки грамотной постановки научных задач, решения задач с применением математического аппарата, систематизации полученных знаний.

1 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

1.1 Краткий теоретический материал

Если каждому набору n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторого множества X соответствует вполне определенное значение переменной z, то говорят, что задана *функция нескольких переменных* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множество X называется *областью определения функции* и обозначается D. Если $n=2$ и $x_1 = x$, а $x_2 = y$, то $z = f(x, y)$ – это функция двух переменных.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ есть множество точек трехмерного пространства (x, y, z) и представляет собой некоторую поверхность. Поэтому $z = f(x, y)$ – это уравнение поверхности, являющейся графиком функции $z = f(x, y)$.

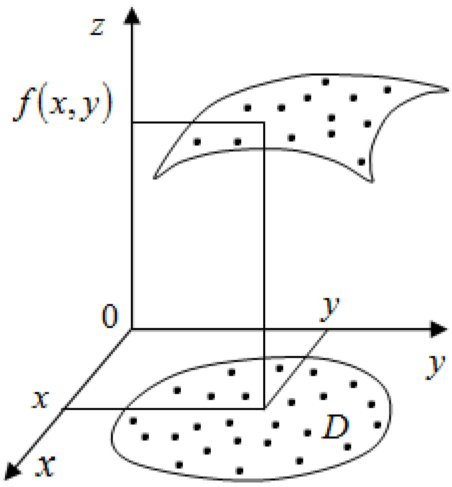

Рисунок 1

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости таких, что во всех точках значение функции принимает одно и то же значение равное C, т.е. $f(x, y) = C$. Число C в этом случае называется уровнем.

Область определения называется замкнутой, если она включает в себя граничные точки, и – незамкнутой, если граничные точки не включены в область.

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, определенная в области D. Точка $M_0(x_0, y_0)$ – это произвольно взятая точка в области D. Тогда δ– окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ будем называть множество точек $M(x, y)$ круга радиуса δ с центром точке $M_0(x_0, y_0)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta,$$

и являются точками окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

В случае функции трех переменных $f(x, y, z)$ δ – окрестностью точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будем называть внутренность шара радиуса δ с центром в точке M_0. Следовательно, точки $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta$, являются точками окрестности точки M_0.

Число A называется пределом функции $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при $M(x_1, x_2, ..., x_n) \to M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для как угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такую δ-окрестность точки M_0, что для всех M из этой окрестности выполняется неравенство

$$\left| f(x_1, x_2, ..., x_n) - A \right| < \varepsilon .$$

Из данного определения следует, что предел A не зависит от пути стремления точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ к точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. По всем направлениям к точке M_0 пределы функции существуют, конечны и равны друг другу.

Например, пусть дана функция двух переменных $z = \frac{x}{x+y}$. Найдем предел при $x \to 0$ и $y \to 0$, т.е. при $M(x, y) \to M_0(0,0)$ по прямой $y = x$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y} = \frac{1}{2}$. Теперь пусть по прямой $y = 2x$. В этом случае $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$. Если при изменении пути, по которому точка M стремится к точке M_0, получаются разне значения предела, то предел функции в данной точке M_0 не существует.

Функция $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется непрерывной в области *D*, если в каждой точке $M_0\ \ x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\ \ \in D$ выполняются следующие два условия:

1) значение $f\ \ x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ определено как некоторое конечное число;

2) в точке $M_0\ \ x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ существует конечный предел и он равен значению функции в ней, т.е. $\lim\limits_{M \to M_0} f\ \ M\ \ = f\ \ M_0$.

1.1.1 Частные производные, градиент, дифференциал

Частными производными $z = f(x, y)$ по *x* и по *y* называются пределы вида:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x};$$
$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Величины $f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называются частыми приращениями функции $z = f(x, y)$.

Полным приращением функции называется величина $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращение независимых переменных

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y,$$

или, учитывая, что $dx = \Delta x, dy = \Delta y$,

$$dz = z'_x dx + z'_y dy\ .$$

Производной z_l' *по направлению* $\overline{l}=(l_x,l_y)$ функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последней к нулю, т.е.

$$z_l' = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Производная по направлению может быть выражена через частные производные по формуле

$$z_l' = z_x' \cos\alpha + z_y' \cos\beta,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – значения косинусов направлющих углов вектора $\overline{l}=(l_x,l_y)$, $\cos\alpha = \frac{l_x}{|l|}$, $\cos\beta = \frac{l_y}{|l|}$.

Градиентом функции $z=f(x,y)$ называется вектор с координатами (z_x', z_y'), т.е. $grad\, z = z_x'\overline{i} + z_y'\overline{j}$.

Градиент функции в точке $M \; x,y$ – это отличный от нуля вектор, направленнй по нормали к линии уровня, проходящей через точку $M \; x,y$.

Из физического смысла производной следует, что:

1. Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ определяют скорость изменения функции $z=f(x,y)$ в направлении соответсвенно оси $\overrightarrow{OX}$ и оси $\overrightarrow{OY}$.

2. Скорость изменения функции в любом выбранном направлении $\overline{l}=(l_x,l_y)$ определяется производной по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$.

3. Направление наибольего изменения функции $z=f(x,y)$ определяется градиентом функции $grad\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\overline{j}$.

Градиент направлен по нормали к линии уроввня, определяемой уравнением $f(x,y)=C$.

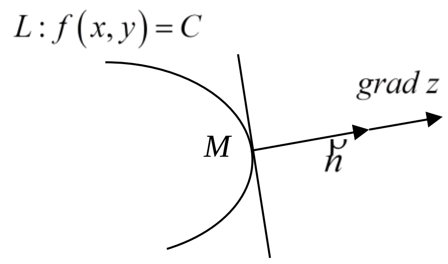

Рисунок 2

1.1.2 Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

Пусть дана функция двух перерменных $z = f(x, y)$, определенная в некоторой области *D*.

Графиком этой функции является некоторая поверхность. Поэтому $z = f(x, y)$ – это уравнение поверхности. Изобразим ее. На этой поверхности возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Требуется составить уравнение качательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

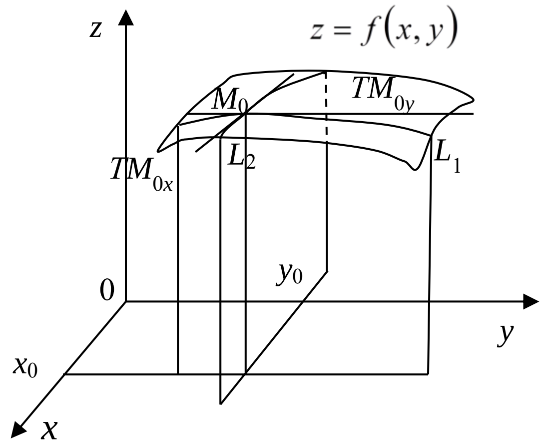

Рисунок 3

Воспользуемся определением касательной плоскости.

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и содержащая в себе все касательные, построенные в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ко всевозможным кривым, расположенным на поверхности и проходим через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Из данного определения следует, что для решения задачи надо на поверхности построить любые кривые, проходщие через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, провести к ним касательные прямые, т.е. найти уравнение касательных. Тогда плоскость, проходящая через эти касательные прямые и точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будет касательной плоскостью. Поэтому:

1. Пересечем поверхность двумя плоскостями $x = x_0,\ y = y_0$. Результатом пересечения будут кривые

$$L_1 : \begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x, y) \end{cases}, \quad L_2 : \begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x, y) \end{cases}.$$

2. В точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ провведем к этим кривым касательные прямые TM_{0x} и TM_{0y}. Эти касательные прямые образуют две пересекающиеся прямые, через которые проходит касательная плоскость. Запишем уравнение этих касательных прямых

$$TM_{Ox} : \begin{cases} y = y_0 \\ z - z_0 = f'_x(x - x_0) \end{cases}, \quad TM_{Oy} : \begin{cases} x = x_0 \\ z - z_0 = f'_y(y - y_0) \end{cases}.$$

3. Запишем уравнение плоскости, проходщей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0). \tag{1}$$

Чтобы эта плоскость была касательной плоскостью надо,чтобы прямые TM_{0x} и TM_{0y} лежали в ней. А это означает, что координаты точек касательных прямых TM_{0x} и TM_{0y} удовлетворяли уравнению (1), т.е. при $x = x_0 \Rightarrow z - z_0 = B(y - y_0)$ и $z - z_0 = f'_y(y - y_0)$ или $B = f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, а при $y = y_0 \Rightarrow z - z_0 = A(x - x_0)$ и $z - z_0 = f'_x(x - x_0)$ или $A = f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Теперь при найденных значениях коэффициентов А и В плоскость (1) является касательной плоскостью в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности $z = f(x, y)$ и ее уравнение имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Чтобы составить уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, нужно заметить, что нормаль – это в первую очередь прямая. Поэтому ее уравнение в общем виде является каноническим уравнением прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где m, n, p – это проекции направляющего вектора $\vec{s} = \{m, n, p\}$. Во-вторых, нормаль – это перпендикулярная прямая к касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

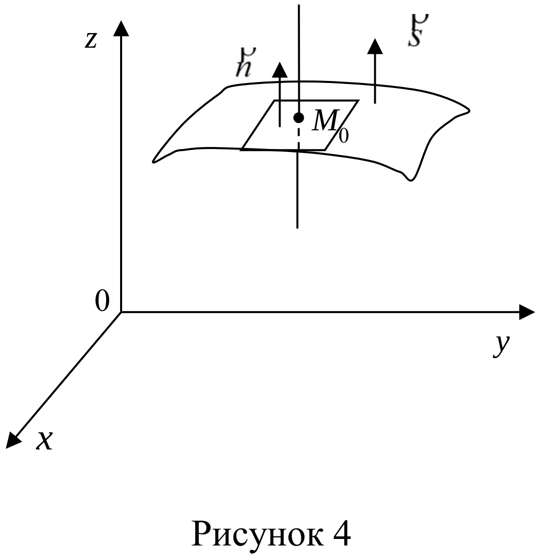

Рисунок 4

Значит, ее направляющий вектор $\vec{s}$ и нормальный вектор касательной плоскости $\vec{n} = \{f'_x, f'_y, -1\}$ параллельны. Поэтому за вектор $\vec{s} = \{m, n, p\}$ можно взять вектор $\vec{n} = \{f'_x, f'_y, -1\}$, и тогда $m = f'_x$, $n = f'_y$, $p = -1$ и уравнение нормали принимает вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x\ \ x_0, y_0} = \frac{y-y_0}{f'_y\ \ x_0, y_0} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Например, составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности шара $x^2+y^2+z^2=14$ в точке $M_0(1,2,3)$.

Решение:

1. Запишем уравнение сферической поверхности в виде $z=\sqrt{14-x^2-y^2}$, так как точка $M_0(1,2,3)$ принадлежит полупространству $z>0$.

2. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1\cdot\ -2x}{2\sqrt{14-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{14-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1\cdot\ -2y}{2\sqrt{14-x^2-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{14-x^2-y^2}}.$$

3. Вычисляем их числовые значения в точке $M_0(1,2,3)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = \frac{-1}{\sqrt{14-1-4}} = -\frac{1}{3},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = \frac{-2}{\sqrt{14-1-4}} = -\frac{2}{3}.$$

4. Составим уравнение касательной плоскости

$$z-3=-\frac{1}{3}\ x-1\ -\frac{2}{3}\ y-2\ \Rightarrow\ x-1\ +2\ y-2\ +3\ z-3\ =0.$$

5. Составим уравнение нормали

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{3}} = \frac{y-2}{-\frac{2}{3}} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow 3\ x-1\ = \frac{3\ y-2}{2} = z-3 \Rightarrow 6\ x-1\ = 3\ y-2\ = 2\ z-3\ .$$

1.1.3 Дифференцирование неявной функции

Теорема. Пусть функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывна в некоторой области D переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, задана в неявном виде, т.е. определена уравнением:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, z) = 0. \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n, z)$, $(i = \overline{1,n})$ и $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_1, x_2, ..., x_n, z)$ непрерывные функции в области G, содержащей точку $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z^0\right)$, координаты которой удовлетворют уравнению (2), кроме того в этой точке $\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z^0\right) \neq 0$, то тогда функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, …, $\dfrac{\partial z}{\partial x_n} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Доказательство. Пусть значениям $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ соответствует значение z^0, при этом

$$F\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z^0\right) = 0. \tag{2′}$$

Дадим аргументам $x_1, x_2, ..., x_n$ приращени $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ в точке $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$. Тогда функция z получит приращение Δz, т.е. иметь значение $z_0 + \Delta z$ и соотношение (2′) принимает следующий вид

$$F\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_n^0 + \Delta x_n, z^0 + \Delta z\right) = 0. \tag{3}$$

Вычтем из (3) (2′)

$$F\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_n^0 + \Delta x_n, z^0 + \Delta z\right) - F\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z^0\right) = 0. \tag{4}$$

Левую часть (4), являющуюся полным приращением функции $n+1$ переменных можно записать так:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z + \gamma_1 \Delta x_1 + \gamma_2 \Delta x_2 + \ldots + \gamma_n \Delta x_n + \gamma_{n+1}\Delta z = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta x_i + \gamma_{n+1}\Delta z = 0\,, \tag{5}$$

где γ_i, $(i = \overline{1,n})$ и Δz – беконечно малые при $\Delta x_i \to 0$ $(i = \overline{1,n})$ и $\Delta z \to 0$.

Главную часть полного приращения функции $F(x_1, x_2, ..., x_n, z)$ составляет олный дифференциал этой функции, который равен нулю.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0\,, \tag{6}$$

где $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, …, $dx_n = \Delta x_n$, $dz = \Delta z$.

Определим из (6) dz

$$dz = \left(\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \right) dx_1 + \left(\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \right) dx_n\,, \tag{7}$$

где $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Но полный дифференциал функции $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определется соотношением вида

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n\,. \tag{8}$$

Сравним выражения (7) и (8), получаем искомые производные функции z аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\ \ldots;\ \frac{\partial z}{\partial x_n}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{9}$$

Замечаем, что если непрерывная функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$ и функция $F(x,y)$ удовлетворяеет уловиям рассмотренной теоремы, то в этом случае получаем формулу дифференцирования неявной функции одной независимой переменной

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{10}$$

Например. Найти проивзодную неявной функции $y=f(x)$, заданную уравнением $2y(x+1)^3-tg\,xy=0$.

Решение.

1. Устанавливаем, что $F\ \ x,y\ \ =2y(x+1)^3-tg\,xy$.

2. Находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\ \ 2y(x+1)^3-\operatorname{tg}xy\ \ =6y(x+1)^2-\frac{y}{\cos^2 xy},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\ \ 2y(x+1)^3-\operatorname{tg}xy\ \ =2(x+1)^3-\frac{x}{\cos^2 xy}.$$

3. Согласно формуле (10), записываем

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{6y(x+1)^2-\frac{y}{\cos^2 xy}}{2(x+1)^3-\frac{x}{\cos^2 xy}}=\frac{6y(x+1)^2\cos^2 xy-y}{2(x+1)^3\cos^2 xy-x}.$$

Если непрерывная функция двух переменных $z=f(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, и функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям рассмотренной теоремы, то в этом случае получаем формулы вычисления частных производных неявной функции двух независимых переменных

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{11}$$

Например. Найти частные производные неявной функции $z=f(x,y)$, заданную уравнением $x+2y+3z-e^z=0$.

Решение.

1. Устанавливаем, что $F(x,y,z)=x+2y+3z-e^z$.

2. Находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x+2y+3z-e^z\right)=1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x+2y+3z-e^z\right)=2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(x+2y+3z-e^z\right)=3-e^z.$$

3. Согласно формуле (11) записываем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{3-e^z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2}{3-e^z}.$$

4. Замечаем, что из $x+2y+3z-e^z=0$ можно определить, что $e^z-3=x+2y+3z-3$. Тогда получим, что:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x+2y+3z-3},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2}{x+2y+3z-3}.$$

1.1.4 Дифференцирование сложной функции нескольких переменных

Рассмотрим вначале дифференцирование сложной функции двух переменных.

Пусть дана функция $z = f(x,y)$, определенная в области D, при этом $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ являются функциями от переменного t, определенного на множестве T. В этом случае $z = f(x,y)$ называется сложной функцией:

$$z = f(\varphi(t),\psi(t)) = \Phi\ t\ . \tag{12}$$

Пусть существуют непрерывные частные производные f'_x и f'_y и производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Требуется найти проивзодную $\frac{\partial z}{\partial t} = z'_t$.

Дадим аргументу t приращение Δt. Тогда $y=\psi(t)$ получит приращение Δy, а $x=\varphi(t)$ получит приращение Δx. Функция $z = f(x,y)$, как функция двух переменных, получит полное приращение Δz, определяемое формулой

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y .$$

Найдем:

$$\begin{aligned} z'_t &= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \\ &+ \lim_{\Delta t \to 0}\gamma_1 \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\gamma_2 \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + 0\cdot\frac{dx}{dt} + 0\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \end{aligned} \tag{13}$$

Выражение (13) является формулой вычисления производной.

Например, $z = f(x,y)$, $x=\ln t$, $y=\sin t$. Тогда $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\ \ln t\ ' + \frac{\partial f}{\partial y}\ \sin t\ ' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cos t$

.

Теперь рассмотрим случай, когда в $z = f(x,y)$ $x=\varphi(u,v)$ и $y=\psi(u,v)$, т.е. x и y также являются функциями двух переменных u и v. В этом случае функция z есть сложная функция от пременных u и v. Требуется найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$. Можно z выразить непосредственно через u и v, т.е. $z = f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$.

Например, $z = x^3 y + x + 1$, $x = u^2 + v^2$, $y = e^{u+v+1}$.

Тогда $z = \; u^2 + v^2 \;^3 \, e^{u+v+1} + u^2 + v^2 + 1$ и нахождение частных проивзодных будет проходить по обычным правилам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3 \; u^2 + v^2 \;^2 \, 2u \cdot e^{u+v+1} + \; u^2 + v^2 \;^3 \cdot e^{u+v+1} + 2u \,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 3 \; u^2 + v^2 \;^2 \, 2v \cdot e^{u+v+1} + \; u^2 + v^2 \;^3 \cdot e^{u+v+1} + 2v \,.$$

Однако, существует достаточное количество задач, в которых ребуется найти непосредственно $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned} \tag{14}$$

Примеры:

1. $z = xy + x^2 y^2$, $x = u \sin v$, $y = u^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \; y + 2xy^2 \; \sin v + \; x + 2x^2 y \; 2u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \; y + 2xy^2 \; u \cos v + \; x + 2x^2 y \; \cdot 0 = \; y + 2xy^2 \; u \cos v.$$

2. Дано дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{15}$$

которое называется уравнением Лапласа. Требуется записать его в полярных координатах $\; r, \varphi \;$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=u_r\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x+u_\phi\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=$$

$$=u_r\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-u_\varphi\cdot\frac{y}{x^2+y^2}=u_r\cdot\frac{r\cos\varphi}{r}-u_\varphi\cdot\frac{r\sin\varphi}{r^2}=u_r\cdot\cos\varphi-u_\varphi\cdot\frac{\sin\varphi}{r},$$

где $\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\ u_x\ =\frac{\partial}{\partial x}\left(u_r\cos\varphi-u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\cos\varphi-u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(u_r\operatorname{co}\varphi-u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}=$$

$$=\left(u_{rr}\cos\varphi-u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}+u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\cos\varphi+\left(u_{r\varphi}\cos\varphi-u_r\sin\varphi-u_{\varphi\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}-u_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)=$$

$$=u_{rr}\cos^2\varphi-u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}-u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+u_r\frac{\sin^2\varphi}{r}+u_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}+u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}=$$

$$=u_{rr}\cos^2\varphi-2u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+2u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+u_r\frac{\sin^2\varphi}{r}+u_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}.$$

Находим:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=u_r\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y+u_\varphi\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=u_r\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+u_\varphi\cdot\frac{x}{x^2+y^2}=$$

$$=u_r\cdot\frac{r\sin\varphi}{r}+u_\varphi\cdot\frac{r\cos\varphi}{r^2}=u_r\cdot\sin\varphi+u_\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{r},$$

где $\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{r}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\ u_y\ =\frac{\partial}{\partial y}\left(u_r\cdot\sin\varphi+u_\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\cdot\sin\varphi+u_\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(u_r\cdot\sin\varphi+u_\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=$$

$$=\left(u_{rr}\sin\varphi+u_{r\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}-u_\varphi\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)\sin\varphi+\left(u_{r\varphi}\sin\varphi+u_r\cos\varphi+u_{\varphi\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}-u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cdot\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)=$$

$$=u_{rr}\sin^2\varphi+u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}-u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+u_r\frac{\cos^2\varphi}{r}+u_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}-u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}=$$

$$=u_{rr}\sin^2\varphi+2u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}-2u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+u_r\frac{\cos^2\varphi}{r}+u_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}.$$

Вычисляем:

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\frac{u_r}{r}\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)+\frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2}\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=0\Rightarrow$$

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0 \text{ или } r^2u_{rr}+ru_r+u_{\varphi\varphi}=0 \qquad (16)$$

– уравнение Лапласа в полярных координатах.

Пусть дана функция $z=f(x)=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, определенная в области $D\subset R^n$, при этом $x_1=\varphi_1\left(t_1,t_2,...,t_n\right)$, $x_2=\varphi_2\left(t_1,t_2,...,t_n\right)$, …, $x_n=\varphi_n\left(t_1,t_2,...,t_n\right)$ являются функциями переменных $t_1,t_2,...,t_n$, определенных на множестве T. В этом случае функция $z=f\left(\varphi_1\left(t_1,t_2,...,t_n\right),\varphi_2\left(t_1,t_2,...,t_n\right),...,\varphi_n\left(t_1,t_2,...,t_n\right)\right)$ называется сложной функцией n-переменных $t_1,t_2,...,t_n$. Согласно формулам (2) и (3) ее частные производные по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial t_i}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+...+\frac{\partial z}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_i},\ i=\overline{1,n}. \qquad (17)$$

1.1.5 Экстремум функции нескольких переменных

Точка $M_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$ называется *точкой максимума (минимума) функции* $z=f(x,y)$, если существует окрестность точки M_0, такая, что для всех точек $\left(x,y\right)$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0,y_0)\geq f(x,y)\ \left(f(x_0,y_0)\geq f(x,y)\right).$$

Если в точке максимума или минимума обе частные производные существуют и непрерывны, то они равны нулю в этой точке (*необходимое условие экстремума*).

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными.

Следует заметить, что есть функции, которые в данной точке имеют экстремум, но частные проивзодные в ней могут не существовать. Примером может служить функция $z^2 = x^2 + y^2$. В точке (0,0) данная функция имеет минимум, а частные производные не существуют (рисунок 5).

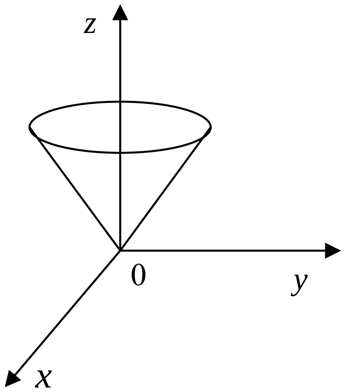

Рисунок 5

Поэтому, также как и в случае функции одной переменной, точки, в которых производные равны нулю или не существуют, будем называть критическими.

Если в точке (x_0, y_0) обе частные производные обращаются в нуль, то характер этой точки определяется величиной $\Delta = AC - B^2$, где $A = z''_{xx}, B = z''_{xy}, C = z''_{yy}$.

При $\Delta > 0$ имеется экстремум (максимум приA<0 и минимум при A>0).

При $\Delta < 0$ функция в данной точке экстремума не имеет.

При $\Delta = 0$ вопрос о наличии экстремума остается открытым (*достаточное условие экстремума*).

Наибольшее (наименьшее) значение функции (глобальный максимум (минимум)) $z = f(x, y)$ определяется как наибольшее (наименьшее) значение функции в замкнутой области из ее значений в критических точках внутри области и на ее границе.

При исследовании функции на экстремум рекомендуется пользоваться следующей схемой:

1. Найти частные производные z'_x и z'_y.

2. Решить систему уравнений $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ и найти критические точки функции.

3. Найти частые производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.

4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

1.2 Примеры решения задач

Задача 1. Найти область определения функции:

а) $z = \dfrac{\sin(2x+3y)}{\sqrt{1-y^2}}$.

Решение. Т.к. функция задается дробью, то ее знаменатель должен быть отличным от нуля, и т.к. в знаменателе стоит квадратный корень, то D_z определяется неравенством: $1-y^2>0$, $(1-y)(1+y)>0$, т.е. $y\in(-1;1)$.

б) $z=\ln\left(x+\sqrt{6-2y}-2\right)$.

Решение. Выражение $\ln\left(x+\sqrt{6-2y}-2\right)$ имеет смысл для значения переменных x и y, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x+\sqrt{6-2y}-2>0, \\ 6-2y\geq 0. \end{cases} \tag{18}$$

Система (18) эквивалентна совокупности следующих трех систем:

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ 6-2y>(2-x)^2, \\ 3-y\geq 0; \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} 2-x<0, \\ 3-y\geq 0; \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} 2-x=0, \\ 3-y>0. \end{cases} \tag{21}$$

Область определения функции $z=\ln\ x+\sqrt{6-2y}-2$ представляет собой объединение трех множеств точек x, y, координаты x и y которых удовлетворяют собственно системам (19), (20), (21). Заменим неравенства системы (20) равенствами: $2-x=0$, $6-2y=\ 2-x\ ^2$, $y=3$. Вершина параболы $y-3=-\frac{1}{2}\ 2-x\ ^2$ находится в точке (2;3), причем точки параболы x, y, для которых $x\le 2$ не входят в область определения (среди них точка(2,3)).

Задача 2. Найти частные производные первого и второго порядков функции $z=e^{xy}+y\sin x$.

Решение. Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+y\cos x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+\sin x.$$

Затем найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}-y\sin x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}.$$

Для смешанных производных имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\ \ ye^{xy}\ \ +\cos x=e^{xy}+xye^{xy}+\cos x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{dy}\right).$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+\cos x$.

Задача 3. Вычислить приближенно $(1,02)^{2,98}$.

Решение. Для этого нужно:

1) записать вид самой функции по виду данного выражения, т.е. $z=x^y$;

2) записать значения x и y, т.е. $x=1{,}02$; $y=2{,}98$ и представить их в виде:

$$x=x_0+\Delta x,\ y=y_0+\Delta y,\ \text{т.е. } x=1+0{,}02,\ y=3-0{,}02,$$

тогда $x_0=1$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=-0{,}02$;

3) найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, т.е. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^y)=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$;

4) вычислить $f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ f(x_0,y_0)$:

$f(x_0,y_0)=1^3=1,\ f'_x(x_0,y_0)=3\cdot 1^2=3,\ f'_y(x_0,y_0)=1^3\cdot\ln 1=0$;

5) вычислить x^y, т.е. $(1{,}02)^{2{,}98}\approx 1+3\cdot 0{,}02+0\cdot(-0{,}02)=1{,}06$.

Задача 4. Используя дифференциал, вычислить приближенные значения функции $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точках (3,1;3,9) и (2,9;4,1).

Решение. Рассматриваемые точки лежат вблизи точки (3;4), в которой легко вычисляется значение функции: $f(3{,}4)=5$. Найдем дифференциал данной функции в точке (3;4):

$$f'_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_x(3,4)=\frac{3}{5}=0{,}6;\ f'_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y(3,4)=\frac{3}{5}=0{,}8.$$

следовательно, $df(3,4)=f'_x(3,4)\Delta x+f'_y(3,4)\Delta y=0{,}6\Delta x+0{,}8\Delta y$.

Из формулы (3) следует, что $f(3+\Delta x,4+\Delta y)\approx f(3,4)+0{,}6\Delta x+0{,}8\Delta y$. Для точки (3,1;3,9) имеем $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=-0{,}1$ и поэтому $f(3{,}1;3{,}9)\approx 5+0{,}6\cdot 0{,}1-0{,}8\cdot 0{,}1=4{,}98$.

Для точки (2,9;4,1) имеем $\Delta x=-0{,}1$, $\Delta y=0{,}1$ и поэтому $f(2{,}9;4{,}1)\approx 5-0{,}6\cdot 0{,}1+0{,}8\cdot 0{,}1=5{,}02$.

Задача 5. Найти полный дифференциал функции $z=\ln\left(xy+\frac{5}{y}\right),\ \begin{cases}x=u\cdot v\\ y=\frac{v}{u}\end{cases}$.

Решение. Пообщей формуле имеем: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, но т.к. $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$, то получаем:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial y}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial u}{\partial v}dv\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv.$$

Вычислим: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{xy+\frac{5}{y}}\cdot\left(xy+\frac{5}{y}\right)'_x=\frac{1}{xy+\frac{5}{y}}\cdot y=\frac{y}{xy+\frac{5}{y}}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot\left(xy+\frac{5}{y}\right)_y^{'}=\frac{1}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot\left(x-\frac{5}{y^2}\right)=\frac{x-\dfrac{5}{y^2}}{xy+\dfrac{5}{y}};\quad \frac{\partial x}{\partial u}=v;\ \frac{\partial x}{\partial v}=u;\ \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{v}{u^2};\ \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{u}.$$

$$dz=\left(\frac{y}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot v+\frac{x-\dfrac{5}{y^2}}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot\left(-\frac{v}{u^2}\right)\right)du+\left(\frac{y}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot u+\frac{x-\dfrac{5}{y^2}}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot\frac{1}{u}\right)dv=$$

$$=\left(\frac{yv}{xy+\dfrac{5}{y}}-\frac{v\left(x-\dfrac{5}{y^2}\right)}{u^2\left(xy+\dfrac{5}{y}\right)}\right)du+\left(\frac{yu}{xy+\dfrac{5}{y}}+\frac{x-\dfrac{5}{y^2}}{u\left(xy+\dfrac{5}{y}\right)}\right)dv.$$

Задача 6. Найти экстремумы функции $z=2x^2+xy-y^2+x$.

Решение. Находим точки "подозрительные" на экстремум:

$$\begin{cases} z'_x=4x+y-1=0, \\ z'_y=x-2y=0, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2y, \\ 5y+1=0, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2y, \\ y=-\dfrac{1}{5}, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-\dfrac{2}{5}, \\ y=-\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Вычисляем в точке $\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$ значение Δ.

$z''_{xx}=4,\ z''_{xy}=1,\ z''_{yy}=-2,\ \Delta=4\cdot\ -2\ \ -1=-9<0$ во всех точках, следовательно, экстремумов функция не имеет.

Задача 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=4x^2++16y^2+2x+1$ на множестве $M=\ \ x,y\ \big|\,0\le x\le 2,\,-x\le y\le 0\ \ $.

Решение. Рассмотрим вопрос о нахождении наибольших и наименьших значений функции $z=f\ \ x,y$ на заданном замкнутом множестве *М*. Известно, что ограниченно и замкнутое множество не плоскости компактно. Тогда по теореме Вейерштрасса непрерывная функция $z=f\ \ x,y$, заданная на компактном множестве, достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Во внутренних точках множества *М* наибольшее и наименьшее значения могут достигаться только в экстремальных точках, следовательно, в этих точках z'_x и z'_y или равны нулю, или не существуют. На границе области во всех предлагаемых случаях функцию $f(x,y)$ можно представить как функцию одного аргумента, меняющуюся на некотором замкнутом отрезке [a, b]. Наибольшее и наименьшее значения такой функции достигаются или в точках, где производная равна нулю или не существует, или на концах отрезка.

Итак, получаем следующую схему для решения задачи:

1) находим точки M_1, M_2, ... M_n, в которых z'_x и z'_y равны нулю или не существуют;

2) на границе области выражаем функцию z как функцию одной переменой, изменяющуюся на [a, b]. Находим точки N_1, N_2, ... N_k, в которых производная этой функции равна нулю или не существует;

3) вычисляем значения функции $z_1 = f(M_1)$, $z_2 = f(M_2)$, ...для точек M_1, M_2, ... $M_n \in$ M и $z^1 = f(N_1)$, $z^2 = f(N_2)$, ... для точек N_1, N_2, ... $N_k \in$ [a, b], $z(a)$, $z(b)$.

Выбираем среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Эти числа будут искомыми.

1) Найдем z'_x и z'_y: $\begin{cases} z'_x = 8x + 2 = 0, \\ z'_y = 32y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}, \\ y = 0. \end{cases}$

Тогда $\left(-\dfrac{1}{4}; 0\right) \in M$.

Точек, в которых z'_x и z'_y не существуют, нет. Таким образом, наибольшее и наименьшее значения достигаться внутри области M не могут.

2) Рассмотрим участок границы $\begin{cases} y = 0 \\ x \in [0, 2] \end{cases}$. На этом участке $z = 4x^2 + 2x + 1$, $z'_x = 8x + 2 = 0$, $x = -\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{4} \notin [0, 2]$.

Так как z'_x существует при всех $x\in\ -\infty;+\infty$, а точка $-\frac{1}{4}\notin\ 0,2$, то внутри этого отрезка границы наибольшее и наименьшее значения функции не достигаются. Они могут достигаться лишь в точках (0; 0) и (2; 0).

Рассмотрим участок границы $\begin{cases} x=2 \\ y\in\ -2,0 \end{cases}$.

$z=16+16y^2+4+1=21+16y^2$, $z'_y=32y=0$, $y=0$.

Производная z'_y существует при всех $y\in\ -\infty;+\infty$, следовательно, точками, в которых могут достигаться наибольшее и наименьшее значения на этой части границы являются точки (2; 0) и (2; -2).

На участке границы $\begin{cases} y=-x \\ x\in\ 0,2 \end{cases}$

$z=4x^2+16x^2+2x+1=20x^2+2x+1$, $z'_x=40x+2=0$, $x=-\frac{1}{20}\notin\ 0,2$, z'_x существует при всех $x\in\ -\infty;+\infty$. Точки, соответствующие концам промежутка изменения $x\in\ 0,2$ есть (0; 0) и (2; -2).

Итак, наибольшее и наименьшее значения могут достигаться лишь в одной из точек (0; 0), (2; -2), (2; 0). Вычислим значения функции в каждой из этих точек и выберем наибольшее и наименьшее из них. Так как $z(0,0)=1$, $z(2,0)=16+4+1=21$, $z(2,-2)=16+64+4+1=85$, то $z=1$ - наименьшее, $z=85$ – наибольшее значения данной функции.

Задача 8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2y(2-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Решение. Найдем стационарные точки, лежащие внутри данного треугольника:

$$z'_x=4xy-3x^2y-2xy^2=xy(4-3x-2y),$$

$$z'_y=2x^2-x^3-2x^2y=x^2(2-x-2y)\,.$$

Приравнивая производные нулю, можно на x и y сократить, так как внутри треугольника и $x>0$, и $y>0$, тогда

$$\begin{cases} 4-3x-2y=0 \\ 2-x-2y=0 \end{cases}.$$

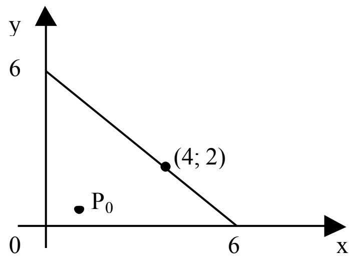

Рисунок 6

Решение этой системы: $x_0=1$, $y_0=\frac{1}{2}$. Стационарная точка $P_0\left(1,\frac{1}{2}\right)$ лежит внутри треугольника. Значение функции z в этой точке:

$$z_0 = z\ \ P_0\ \ = 1\cdot\frac{1}{2}\left(2-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

На сторонах треугольника $x=0$ и $y=0$ значения функции равны нулю.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на стороне $x+y=6$. На этой стороне $y=6-x$ $(0\le x\le 6)$ и $z=z(x)=x^2(6-x)\cdot(2-x-6+x)=-4x^2(6-x)$.

На концах интервала $z\ \ 0\ \ = z\ \ 6\ \ =0$. Стационарные точки находим из уравнения $z'\ \ x\ \ =0$:

$$-48x+12x^2=0,\ 12x\ \ x-4\ \ =0.$$

Отсюда $x=4$ (так как $x=0$ – граничная точка); при этом $y=2$, $z=-4\cdot 16\cdot\ \ 6-4\ \ =-128$.

Итак, наибольшее и наименьшее значения функции z в данном треугольнике надо искать среди следующих ее значений:

$z=\frac{1}{4}$ - внутри треугольника, в точке $\left(1,\frac{1}{2}\right)$;

$z=0$ – на сторонах $x=0$ и $y=0$ (в том числе и в вершинах);

$z=-128$ – на стороне $x+y=6$, в точке (4, 2).

Отсюда видно, что наибольшее значение $z=\frac{1}{4}$ данная функция принимает внутри треугольника, в точке $P_0\left(1,\frac{1}{2}\right)$, а наименьшее $z=-128$ – на его границе, в точке (4, 2).

1.3 Вопросы для самопроверки

1. Определение функции нескольких переменных.
2. Область определения функции нескольких переменных.
3. График функции двух переменных.
4. Линия уровня функции двух переменных.
5. Частные производные функции нескольких переменных.
6. Дифференциал функции нескольких переменных.
7. Производная по направлению, градиент функции.
8. Точки экстремума функции двух переменных.
9. Необходимое и достаточное условия экстремума.

1.4 Теоретические упражнения

1. Показать, что функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ является непрерывной в точке (0; 0) по каждой переменной *x*и *y*и не является непрерывной в точке (0; 0) по совокупности переменных.

2. Доказать, что если $F(x,y,z)=0$ и функция F дифференцируема, то $\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}=-1$.

Указание: найти производные $\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$ по правилу дифференцирования неявно заданной функции.

3. Найти $f(x, y)$, если $f(x+2y, x-2y) = xy$.

Указание: ввести новые переменные $u = x+2y$, $v = x-2y$.

4. Установить, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy = 0 \\ 1, & \text{если } xy \neq 0 \end{cases},$$

имеет в точке $M(0,0)$ частные производные $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = 0$, но не дифференцируема в точке по совокупности переменных.

5. Показать, что для функции

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = y = 0, \end{cases}$$

в точке $M(0,0)$ $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M \neq \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_M$.

6. Найти все производные второго порядка функции $\int_x^{x^2+y^2} e^t dt$ в точке $M(1,2)$.

7. Показать, что функция $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$, где $a \in R$, $x_0 \in R$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

8. Показать, что функция $u = A \sin \lambda x \cdot \cos \lambda a t$, где $a \in R$, $\lambda \in R$ удовлетворяет уравнению колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

9. Почему нельзя определить касательную плоскость к поверхности по аналогии с определением касательной к кривой как предельное положение

плоскости, проходящей через единую точку и две другие точки, достаточно близкие к данной?

10. Функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Имеет ли поверхность $z=f(x,y)$ касательную плоскость в точке (x_0,y_0,z_0)?

1.5 Индивидуальные задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x-2y}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=e^{x^2+3y^5}$, где $x=\sin 2t$, $y=t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно $x^2+z^2-2y^2-5x^z+10z^3-5=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\sin^2(2x+y)$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^y$ в точке (1,04; 2,05).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=t$, $y=t^2$, $z=1-\dfrac{t}{2}$ в точке (2; 4; 0).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-6x^2-y^2+4y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=(x-2)^2+2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$.

Вариант 2

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\ln x+\ln\left(y^2-4x\right)$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=3z^2+zy^5+y^3$, где $z=\sin t$, $y=e^{2t^2}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $x^y-5xyz=20x^z$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\cos^2\left(3x+5y\right)$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке (4,05; 2,95).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=\sin t$, $y=2\cos t$, $z=4t$ в точке (0; 2; 0).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=3xy-12x^2-3y^2+x$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3xy-12x^2-3y^2+x$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$.

Вариант 3

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\sqrt{x-2\sqrt{y}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\ln\arcsin\left(x-y\right)$, где $x=3t^2$, $y=\dfrac{1}{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $z^3+5yz=a^3$, $a=\mathrm{const}$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=tg\left(x+7y\right)$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = arctg\left(\frac{x}{y}-1\right)$ в точке (1,98; 1,02).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ в точке (1; 0; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + 4y^2 + y - xy$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + 4xy - 2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Вариант 4

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 - \frac{1}{2}y^2}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = 5x^3 + 4x^2 - y$, где $x = \cos t$, $y = e^{2t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $e^z - xyz = 3x^y$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = e^{xy}$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = x^{y+1}$ в точке (0,98; 2,02).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ в точке (2; 0; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + 3y - xy + 4$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$.

Вариант 5

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)^{-1}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\cos\left(x^2+5y\right)$, где $x=e^{3t}$, $y=\sin 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $\sin\left(xyz\right)-x^2y+z=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=x\sin^2 y$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\left(x,y\right)=\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)$ в точке (1,03; 0,98).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=\ln\cos t$ в точке (a; 0; 0).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-2y^2+4xy+4y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=3$.

Вариант 6

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arccos\dfrac{x^2+y^2}{9}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\sin\left(2x^3+y^3\right)$, где $x=\ln 2t$, $y=t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $\cos\left(x^2yz\right)+xy+5z=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=y\cos^2 x$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^3y^4+1$ в точке (2,02; 0,97).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=\sqrt{t}$, $y=t^3$, $z=\ln t$ в точке (1; 1; 0).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-xy$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $y=2x$, $y=x$, $x=1$.

Вариант 7

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+2xy)^{\frac{5}{xy}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\ln(e^x+e^y)$, где $x=t^5$, $y=\cos 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $(x^2+y^2+z^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\sin^2(x-y)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y})$ в точке(0; 3).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, $z=5$ в точке (0; 3; 5).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=3x^2+y^2+3x-4y+1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3\ln x+xy^2-y^3$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=2$.

Вариант 8

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\sqrt{\ln\dfrac{9}{x^2+y^2}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\ln(e^t+e^x)$, где $x=t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $zxe^y+z^2xy=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\ln(x^2-y^2)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\ln(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})$ в точке (4,02; 1,03).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z=3x^2+4xy-y^2$ в точке (0;1; -1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $x=-2$, $y=2$, $y=-2$.

Вариант 9

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arcsin\dfrac{x}{3}+\sqrt{xy}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to k}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$, $k=\text{const}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\ln arctg(tx)$, где $x=e^t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $ye^{zx}+2z^3x^2y=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\ln(xy)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}-\sqrt{y})$ в точке (8,03; 1,02).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z^2=2x^2+3y^2$ в точке (1; -1; 5).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=(x-1)^2-2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=7x^2-6xy+3y^2-4x+7y-12$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=3$, $y=0$, $y=x$.

Вариант 10

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\sqrt{y\sin x}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\arcsin(5t^2+x)$, где $x=\sqrt{t^2+1}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функциизаданной неявно $x^2e^{zy}+xyz=3$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=arctg(xy)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^{2y}$ в точке (1,02;2,02).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2-2y^2-z^2=3$ в точке (-2; 0; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=(x-1)^2+2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x^2+18xy+18y-8x+8$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=2$, $y=0$, $y=x$.

Вариант 11

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4-2y^4}{3x^4+y^4}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=tg\left(3t^2+4x^3-y\right)$, где $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $z\sin\left(x^2y\right)+xyz=5$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=(x-y)e^{xy}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\sqrt{2x+y^2}$ в точке (8,01;3,03).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2-y^2-5z=0$ в точке (0; 5; -5).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=3x^2+18xy+18y-8x+8$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=(x-1)^2+2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $(x-1)^2+y^2=1$.

Вариант 12

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{tg\sqrt{xy}}{\sqrt{x}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\dfrac{e^{at}(y-z)}{a^2}$, где $y=a\sin t$, $z=a\cos t$, $a=\mathrm{const}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции,заданной неявно $e^{xyz}+\sin(xy)+zx=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = y\ln\frac{x}{y}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = x^3y^2$ в точке (1,02; 0,98).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z^2 + x^2 = 5$ в точке (-1; 6; 2).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x-1)^2 - 2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Вариант 13

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+x^2y^2}}{x^2+y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \sin(t^3 + 5x^2 + y)$, где $x = e^t$, $y = 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $e^{xz} - \cos(2xz) + y^2 = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = arctg(x+2y)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = x^5y^4$ в точке (1,03; 0,99).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ в точке $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = xy - 3x^2 - y^2 + x - 12$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$.

Вариант 14

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\left(\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-1\right)^{-\frac{1}{2}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta y}$, $\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\ln\sin(xy)$, где $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции,заданной неявно $e^{zy}+2\sin(x^2y)+z=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\arcsin(xy)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^2\sqrt{21+y^2}$ в точке (2,03; 2,01).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z+2x-3y+4=0$ в точке (1; 4; 6).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=6-3x^2-4y^2+x-y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x^2+y^2-4y+1$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{3}=\frac{1}{3}$.

Вариант 15

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{1+x+y}-1}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\ln\cos(xy)$, где $x=\sqrt[5]{t^3}$, $y=e^t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $x^y+zx-yz=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\sin\ \ xy\ $.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ \ x,y\ =\ln\ \ x^3+y^2$ в точке (0,04; 1,04).

7. Найти градиент функции $z=\sin^2 3x+e^{-y}$ в точке $\left(\frac{\pi}{6};2\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=3\ln x+xy^2-y^3$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-2y^2+4xy+4y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $y=0$, $y+2x=2$.

Вариант 16

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arccos\frac{x}{x^2+y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{2^{\frac{1}{m}}+1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=e^{x^2+3y^4+t}$, где $x=\sin t$, $y=2t+5$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z\ln z\ln\ \ x+z\ \ -\frac{xy}{3}=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=arctg\frac{y}{x}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ \ x,y\ =3x^2+5xy+4y^2$ в точке (1,04; 1,94).

7. Найти градиент функции $z=\ln\sqrt{x-y}$ в точке (2; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=x-x^2+3y-4y^2+234$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+4y^2+4y+1$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $x^2+4y^2=1$.

Вариант 17

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+x}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2-1\quad xy+1}{x^3y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\operatorname{arctg}\ 3x^2+5\sqrt{y}$, где $x=e^{2t}$, $y=3t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z^2\ln\ y+z\ -\frac{xz}{2}=1$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\frac{1}{3}\sqrt{\ x^2+y^2\ ^3}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ \ x,y\ =2x^3+3yx^2+y^2$ в точке (1,02; 1,05).

7. Найти градиент функции $z=arctg\frac{1-x}{y}$ в точке (2; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=yx-2x^2+6y-y^2+394$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^2+3y-xy+4$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $y=0$, $y=x+1$.

Вариант 18

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=arctg\sqrt{e^{-xy}-1}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{x^2y^3-\sqrt{x}}{y\sqrt{x}-1}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\arcsin\ 5x+3y^2$, где $x=2t^4+1$, $y=\frac{1}{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $xz-e^{\frac{z}{y}}+x^3+y^3=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\sqrt{x^2+2y}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^4+2yx^2+y^4$ в точке (1,01; 1,97).

7. Найти градиент функции $z=\sqrt{\dfrac{2-y}{\sin 3x}}$ в точке $\left(\dfrac{\pi}{2};3\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=8x-6x^2+12y-y^2+343$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=9x^2+4y^2+y-3$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $9x^2+4y^2=1$.

Вариант 19

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\ln(-x)+\sqrt[3]{\sin xy}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2\arcsin(x^2+y^2)}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=arctg(txy)$, где $x=e^t$, $y=\sqrt{2t+1}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $yz-e^{\frac{x}{y}}++z^2+x^3+4y^3=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$ в точке (1,02; 1,97).

7. Найти градиент функции $z=\ln(y^2-\sqrt{x})$ в точке(1; 2).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3xy-12x^2-3y^2+x$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $y=2$, $y=2x$.

Вариант 20

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = x + 2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{\sin\ \ xy}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = tg\ \ t + 3x^4 + y$, где $x = \ln t$, $y = e^{2t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $xyz - e^{\frac{z}{5}} + x^2 + y^2 = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = x \ln \frac{y}{x}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ \ x, y\ = \sqrt{x^4 + y^3}$ в точке (1,02; 1,98).

7. Найти градиент функции $z = \cos^3\ \ 2y - x$ в точке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = \ \ x - 2\ ^2 + 2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2 - 4x^2 - y^2 + 4y$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $4x^2 + y^2 = 1$.

Вариант 21

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \ln\ \ 5x^2 + 9y^2 - 30x + 9$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{xy + \sin x}{xy - \sin y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = ctg\ \ tx + 2y^3 + y$, где $x = \sqrt{t+1}$, $y = \ln 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z^3 \ln\left(x + y - \frac{x^2 y}{3}\right) = 10$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y}$ в точке (2,025; 117,15).

7. Найти градиент функции $z=\arcsin(\ln(1-x)+\sqrt{y})$ в точке $\left(0;\frac{3}{4}\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=x^4+4xy-2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy-3x^2+x+1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=1$, $y=0$, $xy=1$.

Вариант 22

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=x^2y\sqrt[4]{x^2+y^2+y}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos xy}{x^2+y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\frac{1}{5}e^{2t^2}(x^3-y)$, где $x=\sqrt{t+1}$, $y=t^2+1$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявнофункции $x^2\ln(yz)+\frac{y}{z}-7=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=(x+y)e^{xy}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\sqrt{12+x^2y^3}$ в точке (2,02; 2,98).

7. Найти производную функции $z=3\cos^2 3x+\ln(1-y)$ в точке (0;0) в направлении биссектрисы первого координатного угла.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^2+4xy-2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=6-3x^2+x-y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $y=2$, $x=y$.

Вариант 23

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\sqrt{x+\sqrt{6-2y}-2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \dfrac{m^2+3n+4\ \ n}{m^2\ \ n^3+1-n}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=e^{t^2}\ \ x^2+y\ $, где $x=e^t$, $y=\sin t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $arctg\ \ x-y\ \ -zy+x=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=arctg\ \ 3x-y\ $.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ \ x,y\ =x^2\sqrt{13+y}$ в точке (3,02; 3,03).

7. Найти производную функции $z=e^{-x^2}\ \ 1-3y\ $ в точке (1; 1) в направлении вектора $\bar{a}=\ 1;-3\ $.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=10-x^2+6y-4y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $x^2+y^2=1$.

Вариант 24

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\ln\ \ 3-4\sqrt{x-1}-y\ $.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\ 1+xy\ ^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\arcsin\ \ ty\ $, где $y=t^{-\frac{1}{2}}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $arctg\ \ 2x-3y\ +xyz=8$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=e^y\sin x$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=y\sqrt{7+x^2}$ в точке (3,02; 0,04).

7. Найти производную функции $z=tg(2\sqrt{x}-3y)$ в точке (4; 1) в направлении вектора $\bar{j}=(1;0)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=e^{\frac{1}{2}(x+y^2)}$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=4x-2x^2+6y-y^2+1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=1$, $y=x$, $y=2x$.

Вариант 25

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arccos\dfrac{x^2}{y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x+y)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\arcsin(5\sqrt{x}+2y)$, где $x=e^t$, $y=\sqrt{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $arctg(x+z)-xy+5=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=e^x\sin y$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ в точке (1,04; 0,04).

7. Найти производную функции $z=\dfrac{3x^3-4y}{x+y}$ в точке(1; 1) в направлении вектора $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^3-xy$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=8x-2x^2+12y-y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $2(x-2)^2+(y-6)^2=1$.

2 Интегральное исчисление функции нескольких переменных

2.1 Краткий теоретический материал

2.1.1 Двойной интеграл в декартовых координатах

Пусть функция $z = f(P) = f(x, y)$ задана в некоторой ограниченной замкнутой области D на плоскости xOy. Разобьем эту область сеткой кривых на ячейки $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$. В каждой ячейке S_i $(i = 1,2,3,...,n)$ выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и умножим значение функции f в этой точке на площадь ΔS_i ячейки S_i.

Сумма таких произведений по всем ячейкам $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$ называется *интегральной суммой*. Обозначим через $d(S_i)$ диаметр ячейки S_i, т.е. расстояние между наиболее удаленными точками этой ячейки, $\max d(S_i)$ - наибольший из диаметров всех ячеек данного разбиения.

Двойным интегралом $\iint\limits_D f(P)\,ds$ от функции $f(P)$ по области D называется предел интегральных сумм $\iint\limits_D f(P)\,ds = \lim\limits_{\max d(S_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$

Если такой предел существует, то функция $f(P)$ называется интегрируемой в области D.

Теорема. Всякая непрерывная в ограниченной замкнутой области D функция $f(P)$ интегрируема в ней.

Двойной интеграл обладает следующими *свойствами:*

1) если $f(P) = c \cdot f_1(P)$, то $\iint\limits_D f(P)\,ds = c \cdot \iint\limits_D f_1(P)\,ds$;

2) если $f(P) = f_1(P) \pm f_2(P)$, то $\iint\limits_D f(P)\,ds = \iint\limits_D f_1(P)\,ds \pm \iint\limits_D f_2(P)\,ds$;

3) если область D состоит из 2-х областей $(D = D_1 + D_2)$, то $\iint\limits_D f(p)\,ds = \iint\limits_{D_1} f(p)\,ds + \iint\limits_{D_2} f(p)\,ds$.

Рассмотрим две области D_1 и D_2 (рисунок 7 и рисунок 8).

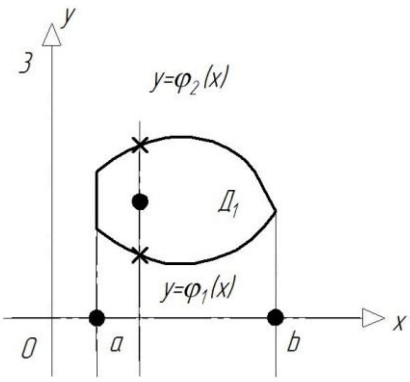

Рисунок 7

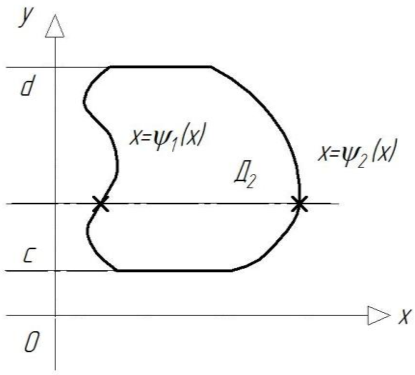

Рисунок 8

Определение. Область D_1 называется правильной в направлении оси $\overrightarrow{OY}$, если любая прямая, проведенная через внутреннюю точку области D_1, параллельно оси $\overrightarrow{OY}$, пересекает её границу не более, чем в двух точках. Её граница определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x = a, \\ x = b, \\ y = \varphi_1(x), \\ y = \varphi_2(x). \end{cases} \tag{22}$$

Из определения следует, что если область D_1 правильная в направлении оси $\overrightarrow{OY}$, то она однозначно проектируется на ось $\overrightarrow{OX}$.

Определение. Область D_2 называется правильной в направлении оси $\overrightarrow{OX}$, если любая прямая, проведенная через внутреннюю точку области D_2, параллельно оси $\overrightarrow{OX}$, пересекает её границу не более, чем в двух точках. Её границу определяется следующей системой уравлений:

$$\begin{cases} y = c, \\ y = d, \\ x = \psi_1(y), \\ x = \psi_2(y). \end{cases} \tag{23}$$

Из данного определения следует, что если область D_2 правильная в направлении оси $\overrightarrow{OX}$, то она однозначно проектируется на ось $\overrightarrow{OY}$.

Определение. Область D, правильная как в направлении оси $\overrightarrow{OX}$, так и в направлении оси $\overrightarrow{OY}$ называется просто правильной.

Пусть в области D_1, правильной в направлении оси $\overrightarrow{OY}$ задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Для этой функции по области D_1 составим следующее выражение:

$$J_{D_1} = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx, \tag{24}$$

которое назывется двукратным или повторным интегралом I-го типа по области D_1 от функции $z = f(x, y)$. Данный двукратный интерал вычисляется следующим образом: Вначале вычисляется интеграл, стоящий в круглых скобках, то есть внутренний интеграл, вычисляется при условии, что x считается постоянным, поэтому вычисляется как обычный определенный интеграл. Затем вычисляется внешний интеграл, который после вычисления внутреннего интеграла превратится в обычный определенный интеграл, поэтому вычисляется как определенный интеграл. В связи с этим двукратный интеграл кратко записывают как:

$$J_{D_1} = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \tag{25}$$

Пусть теперь в области D_2 задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Тогда совершенно аналогично вводится и вычисляется двукратный или повторный интеграл II-го типа:

$$J_{D_2} = \int_c^d dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)dx. \tag{26}$$

то есть в начале интегрируем по x при y постоянным, а затем x пропадает для внешнего интеграла, поэтому интегрируем по y.

Если область D просто правильная, то можно составить двукратный интеграл от функции $z = f(x, y)$ по данной просто правильной области как I-го типа, так и II-го типа.

Пример. Вычислить двукратный интерал от функции $z = x \cdot y$ по области D, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение.

1 Построим область D.

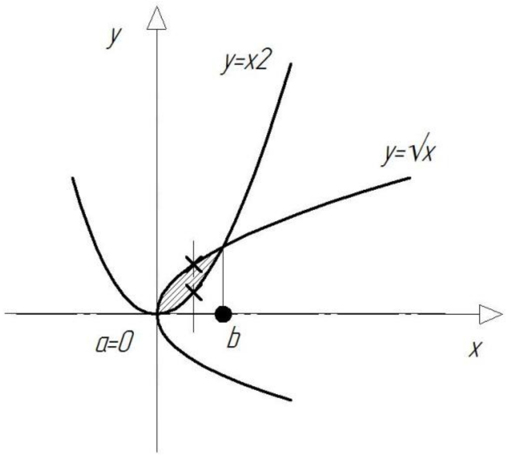

Рисунок 9.

2. Устанавливаем, что область просто правильная, поэтому можно вычислить двукратный интеграл как I-го типа, так и II-го типа. Вычисляем двукратный интеграл I-го типа: $J = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$

3. Находим пределы интегрирования: $\varphi_1(x)=x^2;\ \varphi_2(x)=\sqrt{x};\ a=0;$ $b-$является абсцисой точки пересечения кривых $y=x^2;\ y=\sqrt{x}.$ Нахидим её: $\sqrt{x}=x^2\ \Rightarrow\ x^4=x\ \Rightarrow\ x(x^3-1)=0\ \Rightarrow x=0;\ x=1\ \Rightarrow a=0;\ b=1.$

4. Вычисляем двукратный интеграл: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} x\cdot y\,dy=\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy=\int\limits_0^1 x\,dx\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}=$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,dx\ \left(x-x^4\right)\ =\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^2-x^5\right)\ dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}.$$

Если дан двойной интеграл от функции $z=f(x,y)$, по области D, правильной в направлении оси $\overrightarrow{OY}$, то есть $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, то двойной интеграл равен двуратному интегралу I-го типа по той же области D от этой же функции $z=f(x,y)$:

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{27}$$

Совершенно аналогично, если дан двойной интеграл по области D правильной в направлении оси $\overrightarrow{OX}$, от функции $z=f(x,y)$, то он равен двукратному интегралу II-го типа по этой же области D от этой же функции $z=f(x,y)$, то есть:

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx. \tag{28}$$

Если область D просто правильная, то можно применять как равенство (27) так и равенство (28). Тогда, если левые части в (27) и (28) равны, то равны и правые части, то есть $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$, если область просто правильная, то в двукратном интеграле можно менять порядок интегрирования.

Примеры. Изменить порядок интегрирования:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

Решение: Определяем систему уравнений, представляющих границу области D.

$$\begin{cases} y=0 \\ y=1 \\ x=y \\ x=\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \\ y=x \\ y=x^2 \end{cases} \begin{matrix} \\ \text{- прямая} \\ \\ \text{- парабола} \end{matrix}$$

Строим область D и устанавливаем, что она просто, правильная. Двукратный интеграл II-го типа.

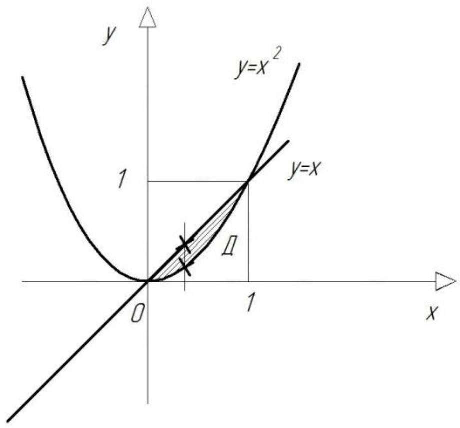

Рисунок 10

Устанавливаем пределы интегрирования для интеграла I-го типа, то есть систему уравнений границы:

$$\begin{cases} y=0 \\ y=1 \\ y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dx.$$

2) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

Решение. Определим систему уравнений, представляющих границу области D.

$$\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ y=0 \\ y=\sqrt{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ y=0 \\ y^2=1-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ y=0 & \text{- уравнение оси } \overrightarrow{OX} \\ x^2+y^2=1 & \text{- уравнение окружности} \end{cases}$$

Строим область D и устанавливаем, что она просто правильная. Двукратный интеграл дан I-го типа.

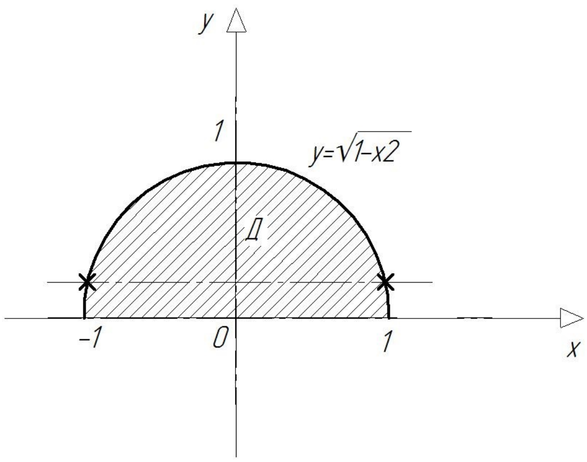

Рисунок 11

Устанавливаем пределы интегрирования для интеграла II-го типа, то есть определяем систему уравнений границы:

$$\begin{cases} y=0 \\ y=1 \\ x=-\sqrt{1-y^2} \\ x=\sqrt{1-y^2} \end{cases} \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

В декартовых координатах элемент площади ds обычно записывается в виде $ds = dxdy$, а двойной интеграл обозначают $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$.

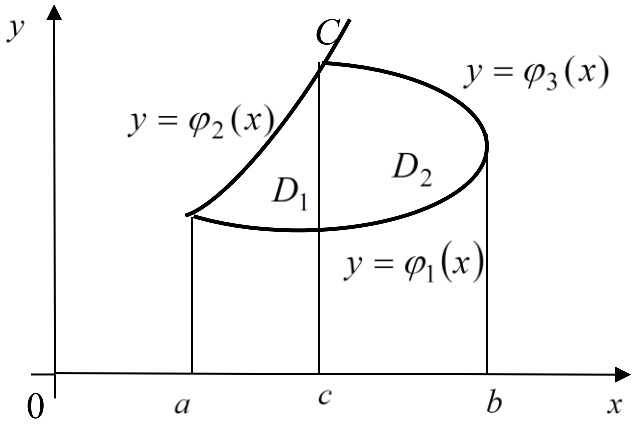

Рисунок 12

Замечание:

1)Если же нижняя или верхняя границы области D состоят из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D следует разбить на части прямыми, параллельными оси Oy и проходящими через точки, в которых «стыкуются» различные участки границы. Так для области D (рисунок 12) вычисление двойного интеграла осуществляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)\,dy\,. \quad (29)$$

2)Если левая или правая границы области D состоят из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D следует разбить на части прямыми параллельными оси Ox и проходящими через точки, в которых «стыкуются» различными участками границы. Для области D (рисунок 13) вычисление двойного интеграла осуществляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^l dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_3(y)} f(x,y)\,dx + \int\limits_l^d dy \int\limits_{\psi_2(y)}^{\psi_3(y)} f(x,y)\,dx\,. \quad (30)$$

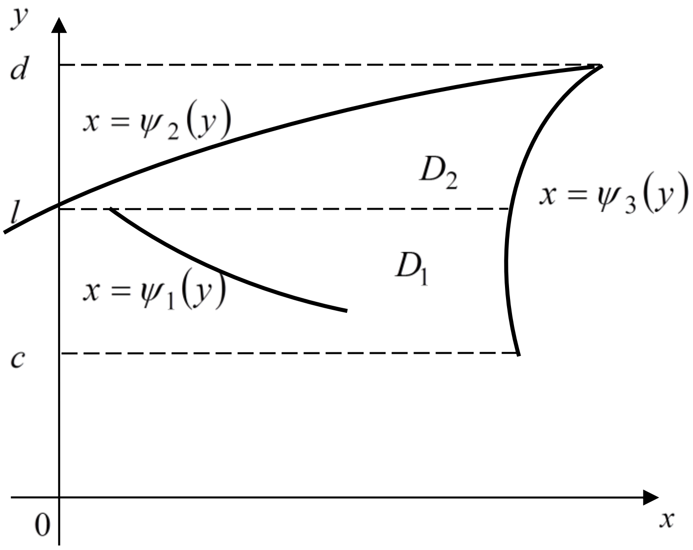

Рисунок 13

2.1.2 Замена переменной в двойном интеграле.

При вычислении двойных интегралов иногда бывает полезно сделать замену переменных

Пусть $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ функции, определены на всей числовой плоскости *xOy* или в некоторой области *D* и имеют непрерывные частные производные в области *D*. Допустим, что систему уравнений можно однозначно разрешить относительно x и y: $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

Тогда каждой точке $M(x, y)$ из области *D* будет взаимно однозначно соответствовать пара чисел (u, v) называемых криволинейными координатами этой точки. Если область *D* расположена в той части плоскости *xOy*, в которой введены криволинейные координаты u и v, то справедлива следующая формула

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f\left[x(u, v); y(u, v)\right] \left|J(u, v)\right| dudv.$$

D_1 - область изменения криволинейных координат u и v, отвечающая области D, а $J(u,v)$- якобиан преобразования

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

2.1.3 Двойной интеграл в полярных координатах.

$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$ система осуществляет переход от прямоугольных координат x и y к полярным координатам ρ и φ при условии, что полюс помещен в начало координат и полярная ось направлена вдоль оси Ox (рисунок 14). В этом случае $|J|=\rho$ и формула примет вид: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$

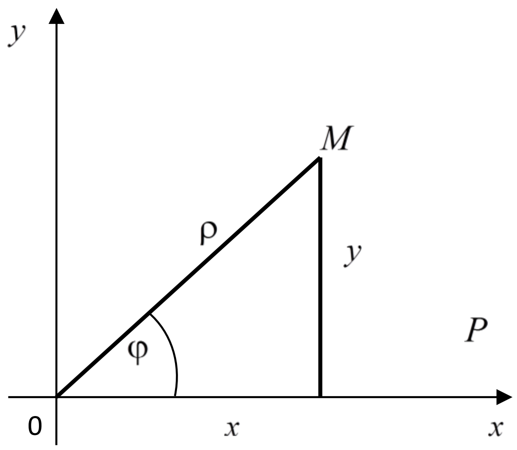

Рисунок 14

Если область D ограничена лучами, образующими с полярной осью углы φ_1 и φ_2 $(\varphi_1<\varphi_2)$ и кривыми $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi)<\rho_2(\varphi))$ (рисунок 15), то соответствующие этой области полярные координаты изменяются в пределах

$$D_1\ (\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2;\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)).$$

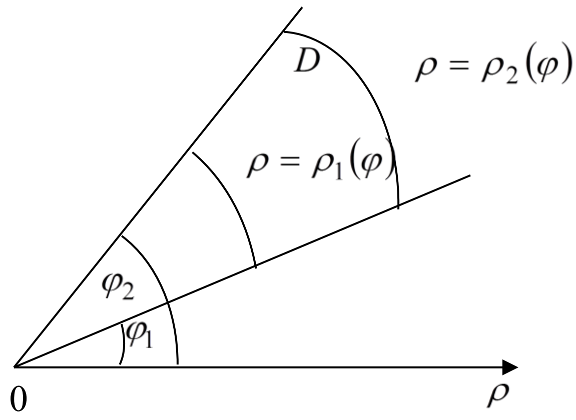

Рисунок 15

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} du \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\rho d\varphi .$$

Если область *D* охватывает начало координат,то:

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho ,$$

где $\rho = \rho(\varphi)$ - полярное уравнение кривой, ограничивающей область *D*. Формулы удобно использовать при решении задач, когда область *D* есть круг или сектор круга.

2.2 Примеры решения задач

Задача1

Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле, если область *D* ограничена линиями $x-2=0$, $x-4=1$, $y=x$, $y=x+3$.

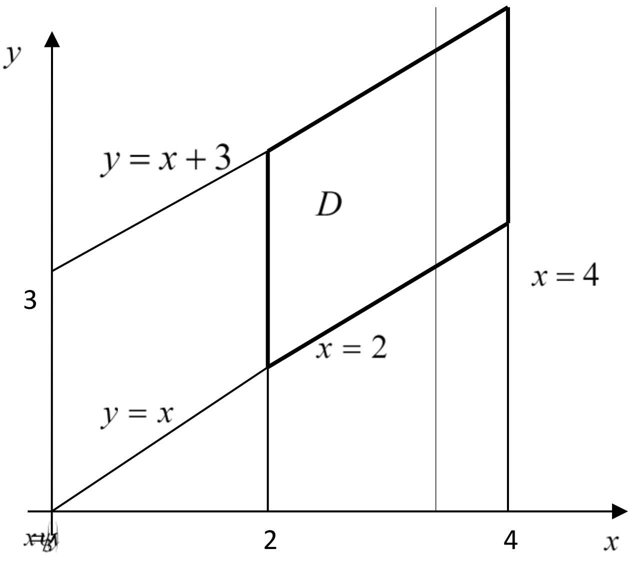

Рисунок 16

Решение:

Построим область *D* (рисунок 16). Она ограничена прямыми $x = 2$, $x = 4$, $y = x$, $y = x + 3$.

Область *D* является относительно оси *Ox*, а поэтому: $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{x+3} f(x, y)\,dy$.

Задача 2

В двойном интеграле расставить пределы интегрирования для того и другого порядка интегрирования по области *D*, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ и кривой $y = -\sqrt{2x - x^2}$.

Решение:

Область *D* (рисунок 17) находится на полосе между прямыми $x = 0$ и $x = 1$. Нижняя граница - дуга окружности $y = -\sqrt{2x - x^2}$, верхняя – прямая $y = 1$.

Следовательно, $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x, y)\,dy$.

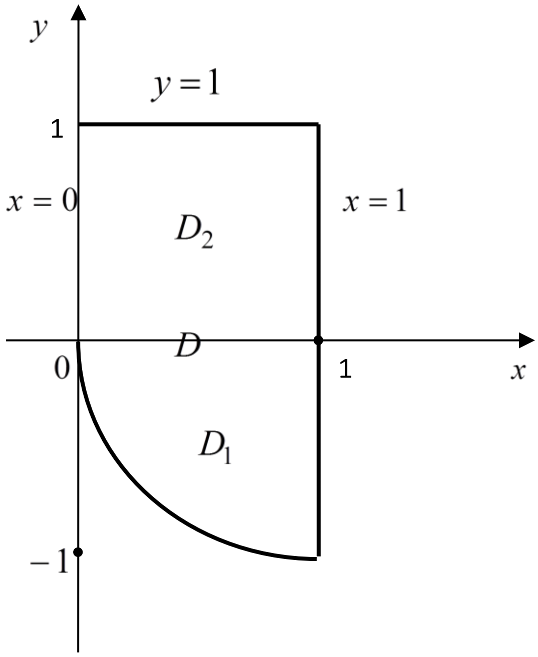

Рисунок 17

Область D проектируется на ось Oy в отрезок $[-1,1]$. Левая граница области имеет уравнение $y=-\sqrt{2x-x^2}$, т.е. $x=1-\sqrt{1-y^2}$ при $-1\le y\le 0$ и $x=0$ при $0\le y\le 1$.

Правая граница $x=1$.

Разбивая область D на две части D_1 и D_2, а интеграл на сумму двух интегралов, получим $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x,y)\,dx+\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{1} f(x,y)\,dx$.

Задача 3

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

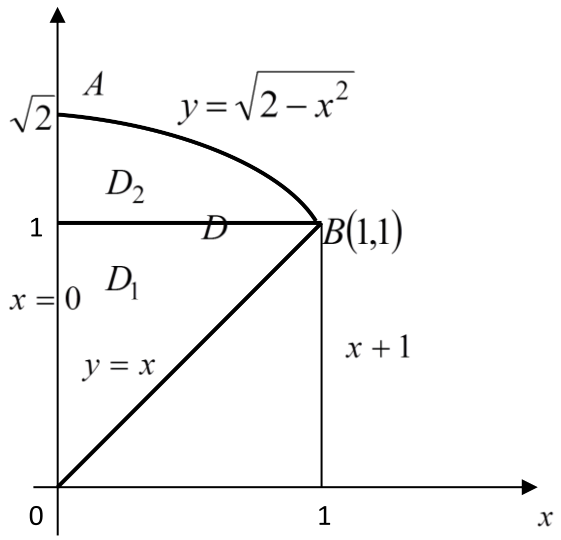

Рисунок 18

Решение:

Область D (рисунок 18) расположена в полосе между прямыми $x = 0$ и $x = 1$. Ее нижняя граница - $y = x$, верхняя - $y = -\sqrt{2x - x^2}$. Спроектируем область D на ось Oy. В результате получим отрезок $[0, \sqrt{2}]$. Левой границей области D является прямая $x = 0$, правой - на участке $[0, 1]$ прямая $x = y$, а на участке $[1, \sqrt{2}]$ - дуга окружности $x = \sqrt{2 - y^2}$. Поэтому область D следует разбить на две части $(D = D_1 + D_2)$, а интеграл на сумму интегралов:

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

Задача 4

Вычислить двойной интеграл $\iint_D \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\,dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Решение:

Построим область D (рисунок 19). Формула перехода прямоугольных координат к полярным: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

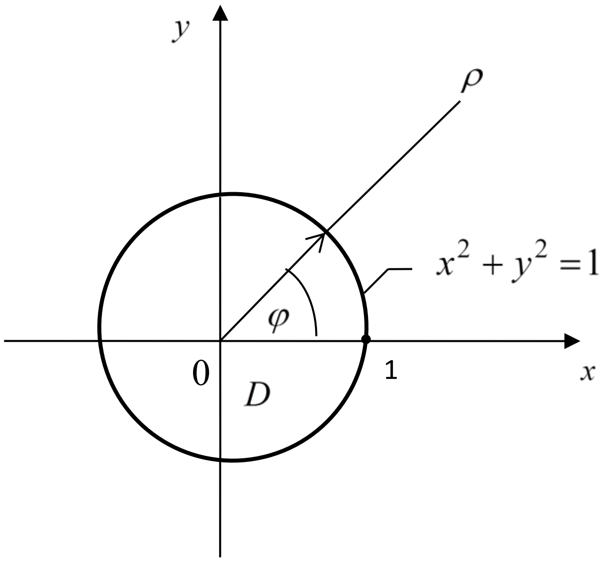

Рисунок 19

Введем полярные координаты:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ т.к. } \rho = 1.$$

Получаем: $\iint\limits_D \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \iint\limits_{D_1}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho\cdot d\varphi$.

Для того чтобы найти переделы интегрирования по ρ, замечаем, что ρ в области изменяется от 0 до 1 (радиус круга $\rho = 1$). Это будет нижний и верхний пределы интегрирования по ρ. Для того чтобы описать всю область, луч должен повернуться на угол 2π. Начальное положение луча $\varphi = 0$ будет нижним пределом интегрирования по φ, а конечное положение $\varphi = 2\pi$ - верхним пределом интегрирования.

Тогда:

$$\iint_{D_1}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\left(-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}.$$

Задача 5

Вычислить $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, если область D расположена в первом октанте и ограничена линиями $x^2+y^2=1$, $y=x$, $x^2+y^2=4$, $y=0$.

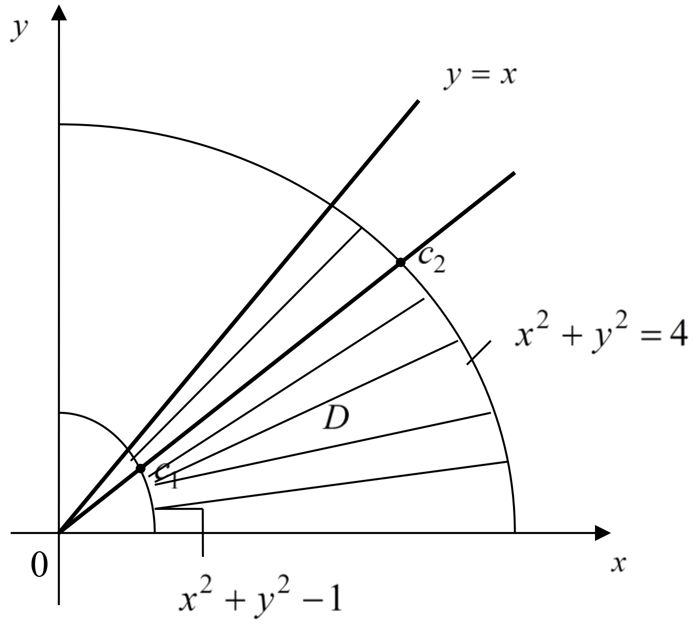

Рисунок 20

Решение:

Построим область D (рисунок 20). Т.к. подынтегральная функция зависит от x^2+y^2, а граница области содержит дуги окружности и лучи выходящие из начала координат, то целесообразно перейти к полярной системе координат.

Имеем: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$

Тогда $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D_1} \rho \cdot \rho d\rho d\varphi$.

Из уравнения $x^2+y^2=1$ получаем $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$; $\rho = 1$.

Из уравнения $x^2+y^2=4$, получим $\rho = 2$.

Это будет нижним и верхним пределами интегрирования по ρ.

Для того чтобы описать всю область *D*, луч должен повернуться на $\varphi = \frac{\pi}{4}$, причем начальное его положение $\varphi = 0$, а конечное $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Это будет нижним и верхним пределами интегрирования по φ.

Следовательно,

$$\iint\limits_{D_1} \rho^2 d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^2 \rho^2 d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_1^2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = \frac{7}{3}\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7\pi}{12}.$$

Задача 6

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной прямой $y=2$ и параболой $y = x^2 - 1$.

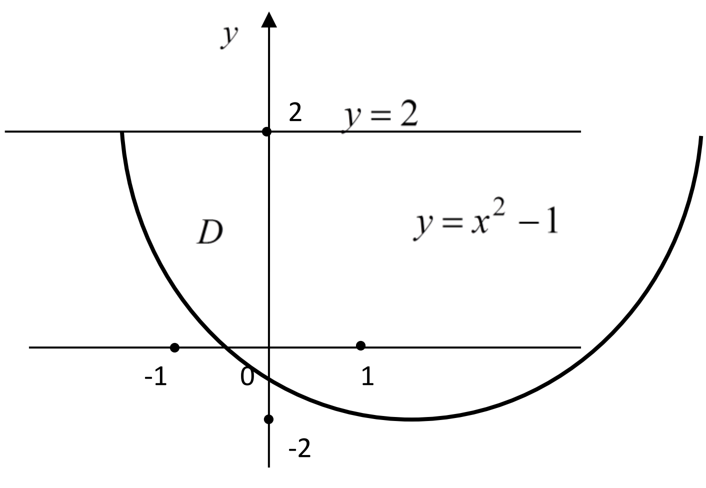

Рисунок 21

Решение:

Площадь S плоской фигуры D вычисляется по формуле: $S=\iint\limits_{D} dxdy$.

Область D можно проектировать и на ось Ox и на ось Oy (рисунок 21).

Спроектируем ее на ось Oy. Для решения задачи достаточно вычислить площадь правой половины области D и результат удвоить. Правая половина области D проектируется на ось Oy в отрезок $[-1,2]$ и имеет левой границей прямую $x=0$, а правой - линию $y=x^2-1$ или $x=\sqrt{y+1}$.

Имеем:

$$\frac{1}{2}\cdot S=\frac{1}{2}\iint\limits_{D} dxdy=\int\limits_{-1}^{2} dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y+1}} dx=\int\limits_{-1}^{2} x\Big|_{0}^{\sqrt{y+1}} dy\int\limits_{-1}^{2}\sqrt{y+1}\,dy=\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{2}=2\sqrt{3};$$

$$S=4\sqrt{3}\text{ (кв.ед.).}$$

Задача 7

Вычислить площадь плоской области D, ограниченной прямыми $y=0$, $y=x$ и окружностью $x^2+y^2=2x$ (рисунок 22).

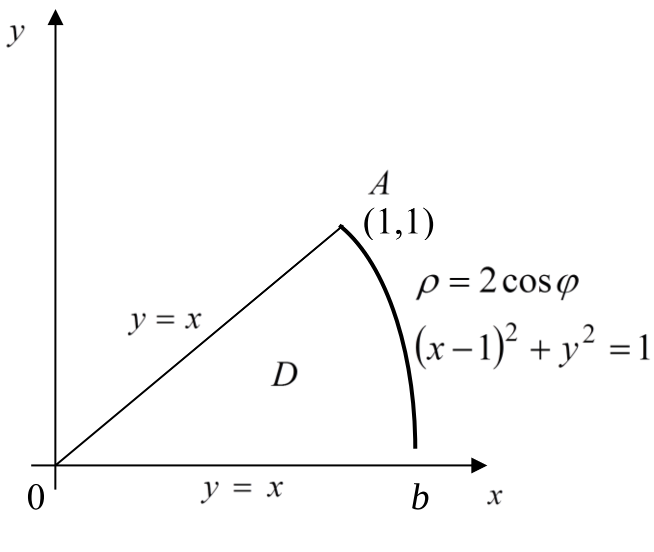

Рисунок 22

Решение:

Если область D отнесена к полярной системе координат, то ее площадь вычисляется по формуле $S = \iint\limits_D \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$.

Введем полярные координаты: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Уравнение окружности, ограничивающей область D, имеет вид:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2\rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = 2\rho\cos\varphi,$$

$$\rho = 2\cos\varphi.$$

Угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{4}$ и ρ меняется от 0 до $2\cos\varphi$.

Имеем:

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \left.\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

$$S = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{(кв.ед.)}.$$

Задача 8

Вычислить площадь, ограниченную линиями $xy = 1$, $y = x^2$, $y = 2$, $x = 0$.

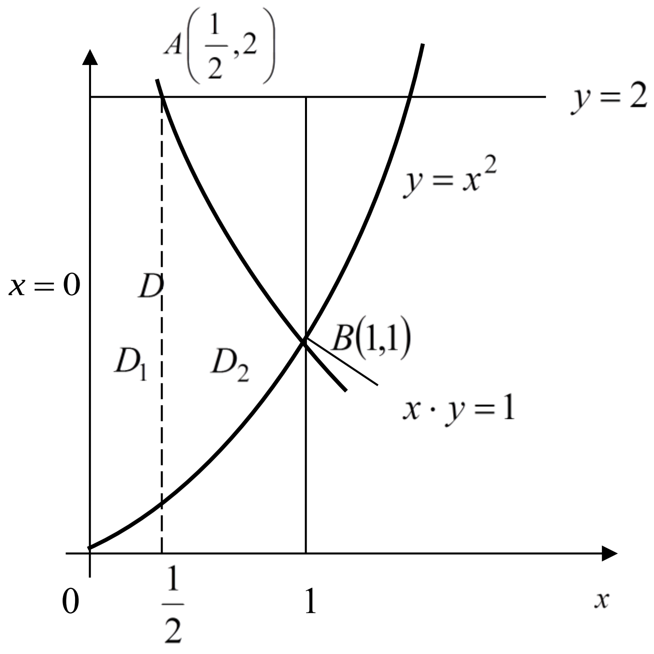

Рисунок 23

Решение:

Построим область, ограниченную данными линиями (рисунок 23). Найдем координаты точки *A*- пересечения прямой $y=2$ и гиперболы $xy=1$,

для этого решим совокупность:

$$\begin{cases} xy=1, \\ y=2, \end{cases}$$

получим $x=\frac{1}{2}$; $y=2$, $A\left(\frac{1}{2},2\right)$.

Найдем координаты точки *B*. Для этого решим систему $\begin{cases} y=x^2 \\ xy=1 \end{cases}$, получим $x=1$, $y=1$, $B(1,1)$.

Замечаем, что при любом порядке интегрирования нам необходимо будет вычислить два повторных интеграла. Разобьем область D на две области D_1 и D_2 найдем площадь каждой из областей D_1 и D_2.

Тогда: $S_D = S_{D_1} + S_{D_2} = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} dy}_{J_1} + \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\frac{1}{x}} dy}_{J_2}.$

$$J_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \cdot y \Big|_{x^2}^{2} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx\left(2 - x^2\right) = \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24};$$

$$J_1 = \frac{23}{24}.$$

$$J_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\frac{1}{x}} dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \cdot y \Big|_{x^2}^{\frac{1}{x}} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx = \left[\ln x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln 1 - \frac{1}{3} - \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \ln 2 - \frac{7}{4};$$

$$J_2 = \ln 2 - \frac{7}{4}.$$

$$J = J_1 + J_2 = \frac{23}{24} + \ln 2 - \frac{7}{24} = \ln 2 + \frac{16}{24} = \ln 2 + \frac{2}{3};$$

$$S = \ln 2 + \frac{2}{3} \text{ (кв.ед.).}$$

Задача 9

Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом $z = x^2 + y^2 + 1$.

Решение:

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$ снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область D, вычисляется по формуле $V = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$.

В данной задаче область D (рисунок 24) есть прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$. Сверху тело ограниченно поверхностью $z = x^2 + y^2 + 1$. По формуле объема тела имеем:

$$V = \iint\limits_D f(x^2 + y^2 + 1)\,dxdy = \int_0^4 dx\int(x^2 + y^2 + 1)\,dy = \int_0^4 \left[(x^2+1)y + \frac{y^3}{3}\right]_0^4 dx =$$

$$= \int_0^4 4\left[(x^2+1) + \frac{64}{3}\right]dx = 4\int_0^4 \left(x^2 + \frac{19}{3}\right)dx = 4\left(\frac{x^3}{3} + \frac{19}{3}x\right)\Bigg|_0^4 = 4\left(\frac{64}{3} + \frac{76}{3}\right) = \frac{560}{3} = 186\frac{2}{3},$$

$$V = 186\frac{2}{3} \text{ (куб.ед.).}$$

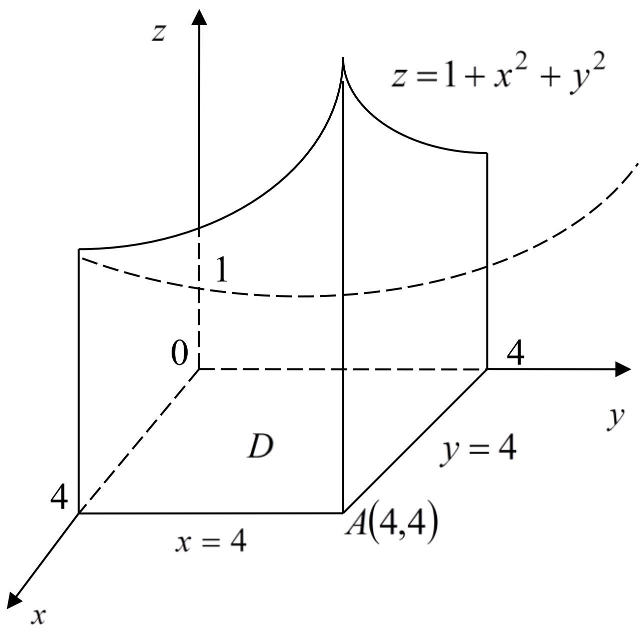

Рисунок 24

Задача 10

Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y + z = 2$ и цилиндром $y = x^2$.

Решение:

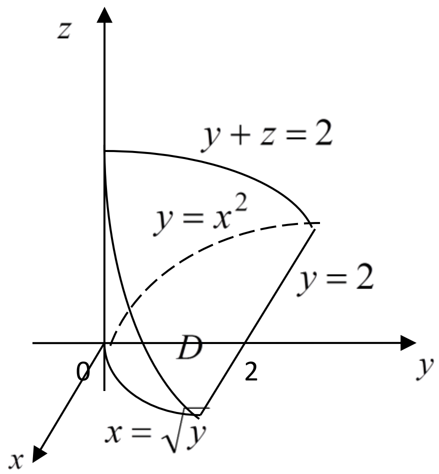

Рисунок 25

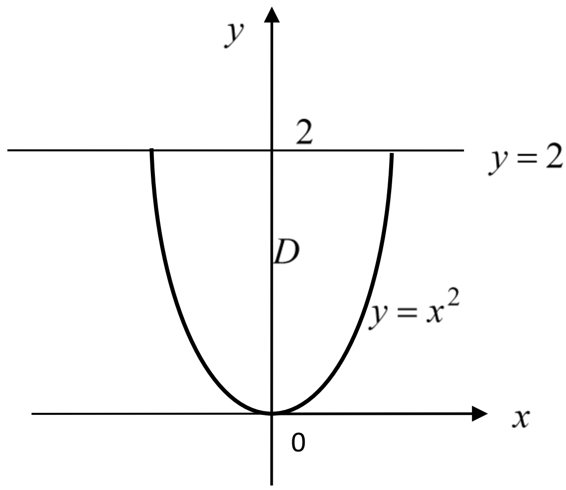

Рисунок 26

Данное тело (рисунок 25) ограниченно сверху плоскостью $z = 2 - y$, поэтому

$$V = \iint_D (2 - y)\,dxdy.$$

Область D есть параболический сегмент, ограниченный в плоскости xOy прямой $y=2$ и параболой $y=x^2$ (рисунок 26). Спроектируем область D на ось Oy. Тогда, с учетом симметрии тела относительно плоскости yOz, получим:

$$\frac{V}{2}=\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{y}}(2-y)\,dx=\int_0^2 (2-y)\,x\Big|_0^{\sqrt{y}}dy=\int_0^2\left(2\sqrt{y}-y\sqrt{y}\right)dy=\left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=2y^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}-\frac{y}{5}\right)\Bigg|_0^2=4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)=8\sqrt{2}\cdot\frac{2}{15}=\frac{16\sqrt{2}}{15};$$

$$V=\frac{32\sqrt{2}}{15}\ \text{(куб.ед.)}.$$

Задача 11

Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$ и параболоидом $z=3-x^2-y^2$.

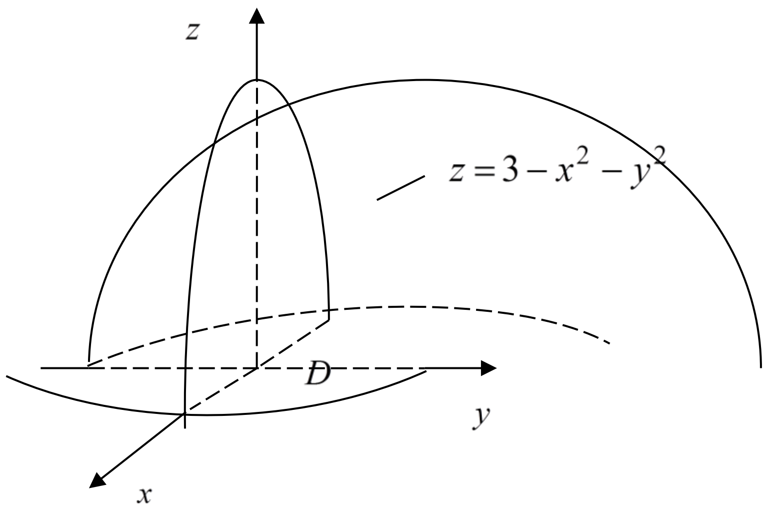

Рисунок 27

Решение:

Сверху данное тело ограниченно параболоидом $z = 3 - x^2 - y^2$ (рисунок 27), поэтому $V = \iint\limits_D (3 - x^2 - y^2)\,dxdy$.

Область D есть круг, его границу $x^2 + y^2 = 3$ получим подстановкой $z = 0$ в уравнении $z = 3 - x^2 - y^2$. В полярных координатах $z = 3 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = 3 - \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 3 - \rho^2$.

Уравнение окружности в полярных координатах

$$x^2 + y^2 = 3,$$

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho^2 = 3,$$

$$\rho^2 = 3 \text{ или } \rho = \sqrt{3}.$$

Учитывая симметрию тела относительно плоскости xOz и yOz найдем:

$$\frac{V}{4} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} (3 - \rho^2)\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{(3 - \rho^2)^2}{2}\right|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{9}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{9}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{8},$$

$$V = \frac{9\pi}{2} \text{ (куб.ед.).}$$

Задача 12

Вычислить площадь части поверхности параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Решение

Поверхность гладкая однозначная задана уравнением $z = f(x, y)$, площадь поверхности выражается формулой: $S = \iint\limits_{D_{xOy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$ где D_{xOy} проекция заданной поверхности на плоскость xOy.

Для упрощения вычислений выгодно проектировать поверхность, площадь которой вычисляется не на плоскости xOy, а на плоскость yOz или на плоскость xOz. Тогда уравнение поверхности примет вид:

$$S = \iint\limits_{D_{yOz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz,$$

$$S = \iint\limits_{D_{xOz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz.$$

Уравнение поверхности следует решать в 1-м случае относительно переменной x, во втором относительно y.

Где D_{yOz} и D_{xOz} - проекции заданной поверхности соответственно на плоскости yOz и xOz.

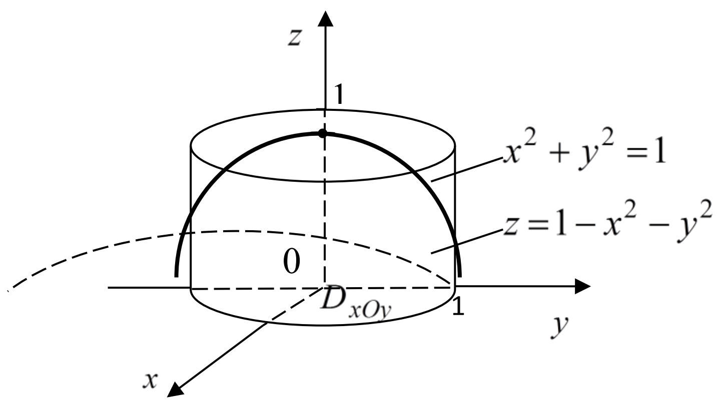

Рисунок 28

Область интегрирования ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 1$. Из уравнения $z = 1 - x^2 - y^2$ имеем: $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x; \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$.

Тогда: $S = \iint\limits_{D_{xOy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \iint\limits_{D_{xOy}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy$.

В данном примере целесообразно перейти к полярной системе, координат:

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho,$$

$$J = \int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)$$

Тогда: $S = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$(кв.ед.).

$$S = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \text{(кв.ед.)}.$$

2.3 Приложение двойного интеграла к задачам механики

Если пластинка занимает область D плоскости xOy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$, то

1) *масса пластинки* D вычисляется по формуле:

$$M = \iint\limits_D \gamma(x, y) dxdy; \tag{31}$$

2) *статистические моменты* M_x *и* M_y пластины D относительно координатных осей Ox и Oy - по формулам:

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y)\, dxdy,\ M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y)\, dxdy; \qquad (32)$$

3) *координаты центра тяжести по формулам*:

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x \cdot \gamma(x, y)\, dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)\, dxdy},\ y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y \cdot \gamma(x, y)\, dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)\, dxdy}; \qquad (33)$$

Если пластина однородна, то $\gamma(x, y) = const$ и

$$x_c = \frac{\iint_D x\, dxdy}{\iint_D dxdy},\ y_c = \frac{\iint_D y\, dxdy}{\iint_D dxdy};$$

4) *моменты инерции* J_x *и* J_y *относительно координатных осей* Ox *и* Oy *и момент инерции* J_0 *относительно начала координат* (полярный момент инерции) вычисляется соответственно по формулам:

$$J_x = \iint_D y^2 \cdot \gamma(x, y)\, dxdy,\ J_y = \iint_D x^2 \cdot \gamma(x, y)\, dxdy,\ J_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Если $\gamma(x, y) = const = 1$, то формулы примут вид:

$$J_x = \iint_D y^2 dxdy,\ J_y = \iint_D x^2 dxdy,\ J_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Задача 13

Наитии центр тяжести однородного сегмента эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, отсекаемой прямой $x + 2y = 4$ (рисунок 29).

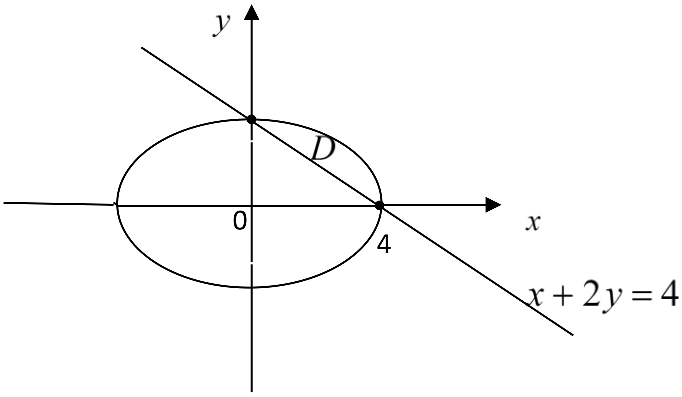

Рисунок 29

Решение:

Найдем массу сегмента *D*:

$$M=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{2-\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{16-x^2}}dy\ .$$

При нахождении пределов интегрирования по y мы разрешили уравнения эллипса и прямой относительно переменной y.

$$M=\int\limits_0^4 dx\cdot y\Bigg|_{2-\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}}=\int\limits_0^4\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-2+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx-2\int\limits_0^4 dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^4 xdx.$$

При вычислении первого интеграла используем формулу

$$\int\sqrt{16-x^2}\,dx=\frac{x^2}{2}\sqrt{16-x^2}+\frac{16}{2}\arcsin\frac{x}{4}+c.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+8\arcsin\frac{x}{4}\right]_0^4=\frac{16}{2}\sqrt{16-16}+8\arcsin\frac{4}{4}-8\arcsin 0=$$

$$
=8\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi .
$$

Тогда:

$$
M=\frac{1}{2}4\pi-2x\Big|_0^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=2\pi-8+\frac{16}{4}=2\cdot(\pi-2)
$$

$$
M_y=\iint\limits_D xdxdy=\int_0^4 xdx\int_{2-\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}}dy=\int_0^4 x\left[\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\left(2-\frac{x}{2}\right)\right]dx=
$$

$$
=\frac{1}{2}\int_0^4 x\sqrt{16-x^2}\,dx-\int_0^4\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^4(16-x^2)^{\frac{1}{2}}d(16-x^2)=
$$

$$
=\int_0^4\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)dx=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(16-x^2)^{3/2}\Big|_0^4-\left(\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^4=\frac{1}{6}\cdot16^{\frac{3}{2}}-16-\frac{64}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}.
$$

Тогда:

$$
x_c=\frac{M_y}{M}=\frac{16}{3\cdot2(\pi-2)}=\frac{8}{3(\pi-2)};\quad y_c=\frac{M_x}{M}=+\frac{\int_0^4 dx\int_{2-\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}}y\,dy}{2(\pi-2)}.
$$

$$
M_x=\int_0^4 dx\int_{2-\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}}y\,dy=\int_0^4 dx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{2-\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^4 dx\left[\frac{1}{4}(16-x^2)-\left(2-\frac{x^2}{2}\right)^2\right]=
$$

$$
=\frac{1}{2}\int_0^4 dx\left(4-\frac{x^2}{4}-4+2x-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\int_0^4\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^4=
$$

$$
=\frac{1}{2}\left(-\frac{64}{6}+16\right)=\frac{8}{3};\quad y_c=\frac{8}{3\cdot2(\pi-2)}=\frac{4}{3(\pi-2)}
$$

Ответ: $x_c = \dfrac{8}{3(\pi - 2)}$; $y_c = \dfrac{4}{3(\pi - 2)}$

3 Криволинейный интеграл по плоской кривой

Пусть $Г$- кривая, лежащая на плоскости xOy. Выясним геометрический смысл криволинейного интеграла $\int\limits_{Г} f(P)dL = \int\limits_{Г} f(x,y)dL$, считая интегрируемую функцию положительной.

Построим цилиндрическую поверхность с направляющей линией $Г$ и образующими, параллельными оси OZ. В каждой точке $P \in Г$ длину образующей сделаем равной значению функции *f(P)* (рисунок 30).

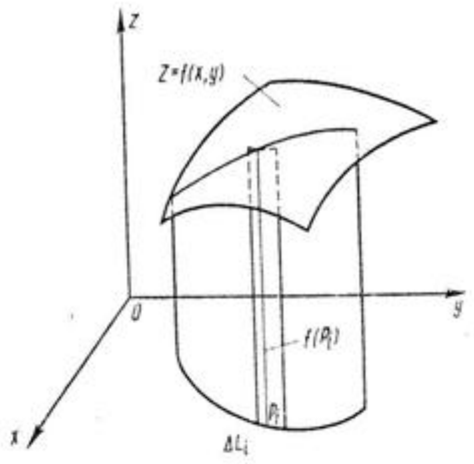

Рисунок 30

Цилиндрическая поверхность пересечена сверху поверхностью $z=f(x, y)$. Найдем площадь S построенной части цилиндрической поверхности. Если разбить линию $Г$ на части $\Delta L_1, \Delta L_2 ..., \Delta L_n$, то поверхность S разобьется на узкие полосы $S_1, ...S_n$. Площадь узкой полосы приближенно подсчитаем, как площадь прямоугольника с основанием ΔL_i и высотой $f(P_i)$, где P_i произвольно взятая точка ΔL_i. Имеем:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta L_i, \qquad S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(p_i)\Delta L_i$$

где λ-наибольший из диаметров частей ΔL_i. Последняя формула может быть записана окончательно так:

$$S = \int_{\Gamma} f(P)dL = \int_{\Gamma} f(x, y)dL.$$

Таким образом криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} f(x, y)\, dL$ *по плоской кривой Г дает площадь куска цилиндческой поверхности с направляющей Г и образующей, параллельной OZ, срезанной сверху поверхностью* z=*f*(*x*, *y*).

3.1 Вычисление криволинейных интегралов

Вычисление криволинейно интеграла сводится к вычислению обычного определенного интеграла, если воспользоваться выведенными в дифференциальном исчислении формулами для дифференциала длины дуги dL. Рассмотрим сперва плоскую кривую *Г*, по которой требуется вычислить интеграл $\int f(x, y)\, dL$. Пусть линия *Г* задана уравнением:

$$y = \varphi(x), \quad a \le x \le b.$$

В криволинейном интеграле та функция, которую мы интегрируем, не имеет ничего общего с уравнениями кривой, по которой ведется интегрирование.

Вспомним формулу:

$$dL = \sqrt{1 + \varphi^{I2}(x)}dx, \tag{34}$$

и подставим выражение для dL в наш интеграл. Одновременно, воспользуемся уравнением $y = \varphi(x)$ для замены переменного у под знаком функции $f(x, y)$. Наконец, заметим, что х меняется в пределах от a до b, Тогда

$$\int_{\Gamma} f(x,y)dL = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\ \varphi^I(x)\ ^2}dx. \qquad (35)$$

Справа, в формуле (35), стоит самый обычный определенный интеграл. Если бы кривая Г была задана уравнением: $x=\psi(y)$, где $c \le y \le d$, то получили бы,

$$dL = \sqrt{\ 1+\ \varphi^I(y)\ ^2\ \ dy}, \qquad (36)$$

$$\int_{\Gamma} f(x,y)dL = \int_c^d f(\psi(y),y)\sqrt{1+\ \psi(y)\ ^{I2}}dy. \qquad (37)$$

Если кривая Г задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha \le t \le \beta$ то, вспоминая, что в этом случае

$$dL = \sqrt{x^{I2}(t)+y^{I2}(t)}dt, \qquad (38)$$

получаем равенство

$$\int_{\Gamma} f(x,y)dL = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x^{I2}(t)+y^{I2}(t)}dt. \qquad (39)$$

В правой части стоит обычный определенный интеграл от некоторой функции переменной t.

Точно так же, когда кривая Γ пространственная и задана уравнениями

$$x = x\ \ t\ \ , y = y\ \ t\ \ , z = z\ \ t\ \ ,$$

$$\alpha \le t \le \beta$$

выражение для dL имеет вид

$$dL = \ \ \overline{x^{I2}\ \ t\ \ + y^{I2}\ \ t\ \ + z^{I2}\ \ t\ \ } dt, \qquad (40)$$

и поэтому

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt. \qquad (41)$$

Наконец, в случае, когда плоская линия Г задана полярным уравнением $r=r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, то вспомнив, что $x=r\cos\varphi$, $y= r\sin\varphi$ и

$$dL = \sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi, \qquad (42)$$

Получим

$$\int_{\Gamma} f(x,y)\,dL = \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \qquad (43)$$

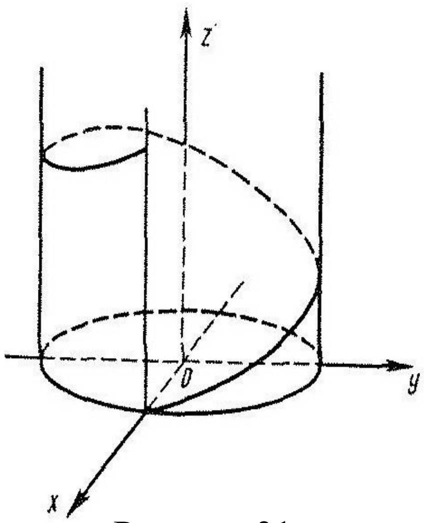

Рисунок 31

Сведение криволинейного интеграла к обычному определенному интегралу по идее очень близко к замене переменной в определенном интеграле. Однако, следует иметь в виду одно отличие. После замены переменной в определенном интеграле, может случиться, что нижний предел интегрирования оказывается больше верхнего. При вычислении же криволинейного интеграла всегда *нижний предел должен быть меньше верхнего*. Это вызывается тем, что элемент dL, длины дуги всегда должен быть больше нуля. Таким образом, при переходе от криволинейного интеграла к обыкновенному определенному интегралу переменная, выбранная в качестве основной, должна пробегать промежуток своего изменения в сторону возрастания.

Примеры 1. Найти длину дуги Г параболы $y=x^2$ на участке от $x= 0$ до $x=a$.

$$L = \int_{\Gamma} 1\cdot dL = \int_0^a \sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\int_0^a \sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\,dx = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}\ln\left|x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right] = a\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left|a+\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}\right|+\frac{1}{4}\ln 2.$$

2. Найти массу M одной четверти окружности радиуса a, расположенной в первом квадрате, если плотность ρ =y.

Имеем: $M = \int \rho \, dL = \int y \, dL$. Воспользуемся параметрическими уравнениями окружности x = a cos t, y = a sin t. При этом у нас $0 \le t \le \pi/2$ и поэтому

$$M = \int_0^{\pi/2} a \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} \, dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin t dt = a^2.$$

3. Найти длину первого витка винтовой линии (рисунок 31) x=acos t, y = a sin t, z = bt.

$$L = \int_\Gamma dL = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} \, dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

При развертывании цилиндра на плоскость первый виток винтовой линии изобразится диагональю прямоугольника со сторонами 2πa и 2πb. Длина диагонали $2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$, как мы и нашли (рисунок 32).

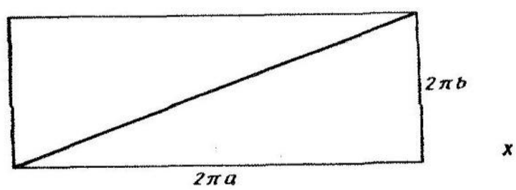

Рисунок 32

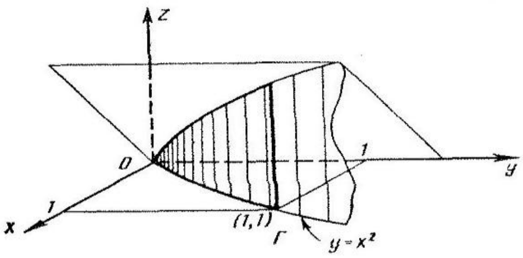

Рисунок 33

4. Найти площадь части боковой поверхности цилиндра y= x^2, лежащей в первом октанте и вырезанной плоскостями z=x и x=1.

Воспользуемся геометрическим смыслом интеграла $\int f(x, y) \, dL$ (рисунок 33). В качестве функции z = f(x, y), задающей поверхность ограничивающую цилиндр сверху, выступает сейчас функция z=x. Получаем:

$$s=\int_{\Gamma} z\,dL=\int_{\Gamma} x\,dL=\int_{0}^{1} x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{8}\left.\frac{\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{1}{12}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\left(\sqrt{125}-1\right).$$

5. Найти длину первого витка спирали Архимеда r = aφ (a >0).

$$L=\int_{\Gamma} dL=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=a\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$$

3.2 Криволинейные интегралы второго рода (криволинейные интегралы по координатам)

Пусть в пространстве (или на плоскости) задана кривая линия Г (рисунок 34). Установим на ней определенное направление движения (на чертеже это направление показано стрелкой), которое происходит от А к В. Кривую с установленным на ней направлением движения назовем ориентированной кривой. Если задать по Г движение в противоположную сторону, то получится уже другая ориентированная кривая. Таким образом, ориентированная кривая состоит из кривой и направления движения по этой кривой.

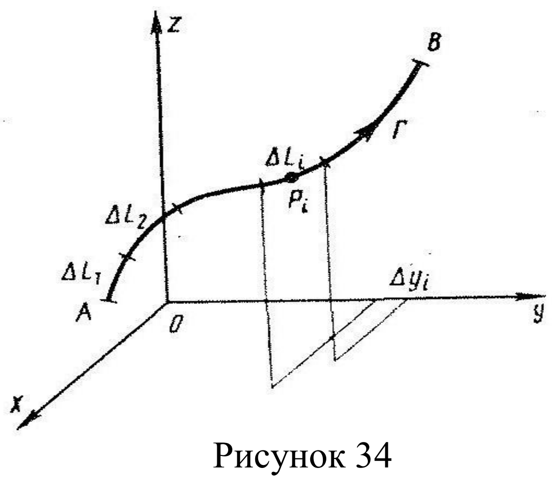

Рисунок 34

Пусть на кривой Г задана функция точки P в виде f(P) = f(x, y, z). Разобьем Г на части ΔL_1, ΔL_2,…, ΔL_n (как обычно ΔL_i обозначает и саму часть и ее длину). Пусть, как обычно,λ-максимальный из диаметров частей ΔL_i. Теперь будем интересоваться не длинами этих частей, а величинами их проекций на ось Oy. Возьмем какую-нибудь часть ΔL_i и будем двигаться по ней в направлении, установленном для движения вдоль Г. Проекция (на оси Oy) двигающейся по ΔL_i точки будет двигаться вдоль оси Oy. Если направление движения проекции совпадает с направлением движения, установленным на оси Оу (если движение по проекции происходит в сторону увеличения у), то проекцию Δy_i части ΔL_i считаем положительной, в противном случае - отрицательно

Приступим к составлению интегральной суммы для нового типа интеграла, еще не встречавшегося у нас. Возьмем на каждой части ΔL_i по точке P_i и вычислим значение функции f(P) в этой точке, равное f(P). Интегральная сумма составляется следующим образом:

$$f(p_1)\Delta y_1 + f(p_2)\Delta y_2 + \cdots + f(p_n)\Delta y_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta y_i\,, \tag{44}$$

(проекции Δy_i берутся с учетом их знаков). Напомним, что интегральная сумма для введенного нами ранее криволинейного интеграла имела другой вид:

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta L_{i.} \tag{45}$$

Если существует предел (не зависящий от способа составления интегральных сумм)

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta y_{i,} \tag{46}$$

то этот предел называется *криволинейным интеграломпо координате* у от функции f(P) =f(x, y, z) по ориентированной кривой Г обозначается так:

$$\int_{\Gamma} f(P)\,dy = \int_{\Gamma} f(x,y,z)\,dy = \int_{AB} f(x,y,z)\,dy. \tag{47}$$

Чтобы не спутать этот интеграл с введенным ранее криволинейным интегралом

$$\int_{\Gamma} f(P)\,dL,$$

новый интеграл называют *криволинейным интегралом второго рода* (криволинейным интегралом по координате) в отличие от *криволинейного интеграла* *первого рода* (криволинейного интеграла по длине дуги). Точно так же, как был определен интеграл по координате у, определяются и интегралы по координатам х и z:

$$_{\Gamma} f\ \ x, y, z\ \ dx,\ \ _{\Gamma} f\ \ x, y, z\ \ dz. \tag{48}$$

Если кривая Г- замкнутая то, чтобы подчеркнуть это обстоятельство, иногда обозначают интеграл по ней так:

$$f\ \ x, y, z\ \ dy.$$

Первые три основных свойства определенных интегралов сохраняются и здесь:

1) $_{\Gamma}\ f\ \ x, y, z\ \ = \varphi\ \ x, y, z\ \ \ dy =\ _{\Gamma} f\ \ x, y, z\ \ dy =\ _{\Gamma} \varphi\ \ x, y, z\ \ dy$;

2) $_{\Gamma} kf\ \ x, y, z\ \ dy = k\ \ _{\Gamma} f\ \ x, y, z\ \ dy$;

3) $_{\Gamma}\ x, y, z\ \ dy =\ _{\Gamma_1} f\ \ x, y, z\ \ dy +\ _{\Gamma_2} f\ \ x, y, z\ \ dy,$

если кривая разбита на две части Γ_1 и Γ_2 и движение по этим частям установлено в том же направлении, как и на всей кривой

4) Предоставляем читателю сообразить, что дает здесь аналог четвертого основного свойства. (для криволинейного интеграла по длине четвертое свойство означало, $_{\Gamma} 1 \cdot dL = L(\Gamma)$ длине - г.)

5) Если направление движения по кривой Г изменить на противоположное (двигаться от В к А), то знаки всех проекций Δy_i в интегральной сумме (44) сменяются на противоположные и поэтому

$$\underset{AB}{} f\ \ x, y, x\ \ dy = -\ \ \underset{BA}{} f\ \ x, y, z\ \ dy.$$

Из ранее рассматривавшийся интегралов аналогичным свойством обладает лишь обычный определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Что же касается криволинейного интеграла по длине, то подчеркнем еще раз - он от направления движения по кривой не зависел (длины ΔL_i в интегральной сумме (45) всегда положительны)

5) Пусть линия Г замкнута и ограничивает некоторую поверхность Q. Интегрируемая функция f(P) = f(x,y, z) предполагается заданной не только на кривой Г, но и на всей поверхности Q. На кривой Г установим направление обхода, например, такое, чтобы поверхность Q оставалась при движении вдоль Г с левой руки (рисунок 35). Разобьем линией AB поверхность Q на части Q_1 и Q_2 с границами L_1 и L_2, причем движение вдоль L_1 и L_2 установим так, чтобы Q_1 и Q_2 соответственно оставались с левой руки. Тогда криволинейный интеграл по замкнутой кривой Г, ограничивающей поверхность Q, равен сумме интегралов по замкнутым кривым L_1 и L_2, ограничивающим части Q_1 и Q_2, на которые разбита поверхность:

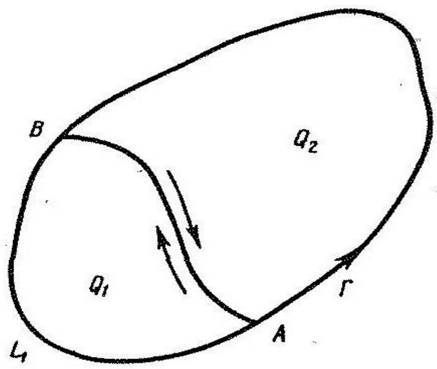

Рисунок 35

6)

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,dy = \int_{L_1} f(x,y,z)\,dy + \int_{L_2} f(x,y,z)\,dy. \qquad (49)$$

Для краткости будем писать только знак интеграла, опуская подынтегральное выражение. Если Γ_1 - та часть Г, входит в состав границы Q_1, а Γ_2 - та часть Г, что вошла в состав границы Q_2, то

$$\int_{L_1} = \int_{\Gamma_1} + \int_{AB}, \quad \int_{L_2} = \int_{BA} + \int_{\Gamma_2}.$$

Складывая интегралы по L и L2 и применяя свойство (7), найдем:

$$\int_{L_1} + \int_{L_2} = \int_{AB} + \int_{BA} + \int_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma}.$$

Свойство сохраняется и тогда, когда поверхность делится не на две, а на любое число частей. Это свойство дополняет свойство (3).

3.3 Составной криволинейный интеграл

Наиболее частым является следующее положение. На кривой Г задаются сразу три функции: X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x,y, z) (обозначаем их буквами X, Y, Z потому, что эти функции часто полезно понимать в качестве проекций переменного вектора a (x, y,z). Выражение

$$\int_{\Gamma} X\ x,y,z\ dx + \int_{\Gamma} Y\ x,y,z\ dy + \int_{\Gamma} Z\ x,y,z\ dz,$$

можно записать короче, с одним знаком интеграла:

$$\int_{\Gamma} X\ x,y,z\ dx + Y\ x,y,z\ dy + Z\ x,y,z\ dz;$$

оно называется *составным криволинейным интегралом*.

Пусть переменная сила F с проекциями X, Y, Z, являющимися функциями точки (x,y,z) ее приложения, передвигает материальную точку вдоль кривой Г. Найдем работу этой силы. Выделим бесконечно малый элемент dL кривой Г и заменим его отрезком $d\tau$, идущим по касательной (в сторону движения по Г) и имеющим длину dL (рисунок 36). Как известно из дифференциального исчисления проекциями $d\tau$ будут

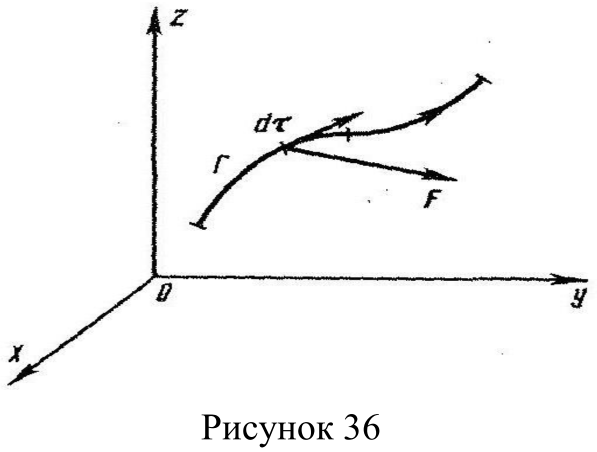

Рисунок 36

дифференциалы dx, dy и dz соответствующих координат. Работа dA силы F (X,Y,Z) на бесконечно малом перемещении dτ(dx, dy, dz) равна скалярному произведению:

$$dA = Fd\tau = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Суммируя все такие элементарные работы, получим полную работу

$$A = \int_\Gamma X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz. \qquad (50)$$

Таким образом, составной криволинейный интеграл дает *работу силы* с проекциями X, Y, Z вдоль пути Г. Выражение работы в виде составного криволинейного интеграла часто более удобно, чем полученная ранее формула (25) содержащая криволинейный интеграл по длине дуги.

3.4 Вычисление криволинейных интегралов по координатам

Вычисление криволинейного интеграла по координате сводится к вычислению обычного определенного интеграла.

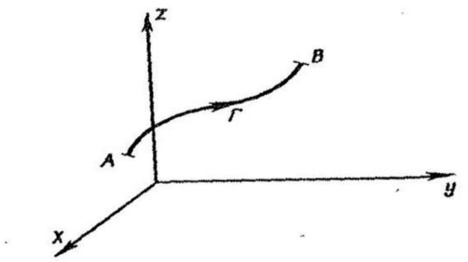

Рисунок 37

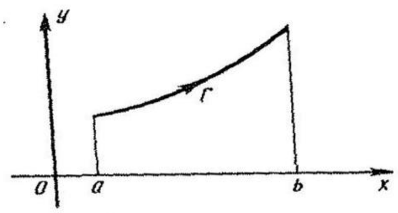

Рисунок 38

Пусть кривая Г (рисунок 37) задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta.$$

Если установленное по кривой Г движение от A к B соответствует изменению t от α до β, то

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,dy = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\,dt. \qquad (51)$$

Если же движение от А к В соответствует изменению t от β до α a, то

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,dy = \int_{\beta}^{\alpha} f(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\,dt. \qquad (52)$$

Если кривая Г плоская, y=y(x), а a ≤ x ≤b с направлением движения, показанным на рисунке 38, то

$$\int_{\Gamma} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{b} f(x,y(x))\,y'(x)\,dx. \qquad (53)$$

Если плоская кривая Г (рисунок 39) задана уравнением x = x(y)

$$\int_{\Gamma} f(x,y)\,dy = \int_{c}^{d} f(x(y),y)\,dy. \qquad (54)$$

Совершенно аналогично вычисляются интегралы и по другим координатам, а также составные.

Если кривая Г распадается на части, заданные различными уравнениями, то надо отдельно вычислить интегралы по этим частям и полученные результаты сложить.

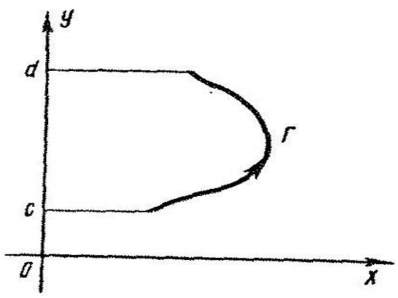

Рисунок 39

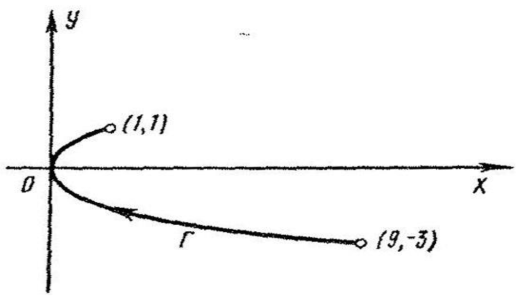

Рисунок 40

Таким образом, чтобы вычислить криволинейный интеграл, надо все координаты x, y, z и их дифференциалы dx, dy, dz выразить через переменное, принятое за основное в задании кривой и его дифференциал (в выражении (51) основное переменное t, в (53) - x, в (54) - y). Получившийся обыкновенный определенный интеграл берется в направлении изменения основного переменного, соответствующем обходу контура интегрирования.

Примеры 1. Сила F, зависящая от точки (x, y, z) приложения, имеет проекции X = - y, Y = x, Z = z^2. Найти работу силы вдоль первого витка винтовой линии Г.

Имеем: x = acost, y = asint, z = bt, $0 \leq t \leq 2\pi$;

$A = \int_Г Xdx + Ydy + Zdz = \int_Г -y\ dx + xdy + z^2dz + \int_0^{2\pi}[(-a\sin t)(-a\sin t)dt + a\cos t\, a\cos t\, dt + b^2t^2b\, dt] = \int_0^{2\pi} a^2 + b^3t^2\ dt = a^2 2\pi + \frac{b^3(2\pi)^3}{3}$.

2. Вычислить $\int_Г xydx$ по параболе x = y^2 от точки (9,-3) до точки (1,1) (рисунок 40)

$$\int_Г xydx = \int_Г y^2y2ydy = 2\int_{-3}^{1} y^4dy = \frac{488}{5}.$$

3.5 Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

Пусть на кривой Г установлено направление движения. Взяв точку P на этой кривой, проведем в ней касательную к Г и установим на касательной направление, соответствующее направлению движения по кривой. Отложим по касательной в установленном направлении дифференциал длины дуги dL получим вектор dτ, проекциями которого служит дифференциалы dx, dy, dz координат x, y, и z соответственно. Обозначим углы, составляемые касательным вектором dτ с осями координат x, y и z через α(P), β(P), γ(P) соответственно. Эти углы есть функции от точки P. Известная формула, дающая проекцию вектора на ось, приводит теперь к соотношениям

$$dx = |d\tau| \cos\alpha(p) = dL\cos\alpha(p),$$

$$dy = dL\cos\beta(p),$$

$$dz = dL\cos\gamma(p). \qquad (55)$$

Поэтому, например, составной криволинейный интеграл

$$\int_Г Xdx + Ydy + Zdz,$$

может быть заменен интегралом по длине дуги:

$$\int_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = \int_{\Gamma} (X\cos\alpha(P) + Y\cos\beta(P) + Z\cos\gamma(P))dL. \qquad (56)$$

$$\iint_D \sqrt{1-r^2}\, rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, rdr = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Найти $\iint_q xdydz$, где Q такая же поверхность, как и P в предыдущем примере. Очевидно, что $\iint_Q xdydz = \iint_{Q1} xdydz,$ ибо круг D дает проекцию нулевой площади на плоскость yOz. Обозначим через Δ проекцию Q на yOz, через Q_2 – ту часть Q_1, которая лежит перед плоскостью yOz проекцию Q на yoz лежит ту часть Qi, которая рез перед плоскостью yoz, а через Q_3 – часть Q_1, лежащую за плоскостью yOz. Учитывая направления нормалей на Q_2 и Q_3 , и то,что на Q_2 $x = \sqrt{1-y^2-z^2},$ а на Q_3 $x = -\sqrt{1-y^2-z^2}$.

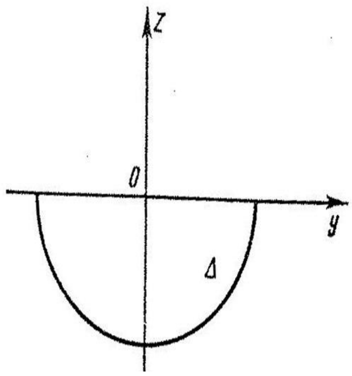

Рисунок 41

Находим:

$$\iint_Q = \iint_{Q2} xdydz + \iint_{Q3} xdydz = \iint_\Delta \sqrt{1-y^2-z^2}\, dydz$$

$$- \iint_\Delta (-\sqrt{1-y^2-z^2}\, dydz = 2\iint_\Delta \sqrt{1-y^2-z^2}\, dydz.$$

переходим к полярным координатам в плоскости yOz (рисунок 41):

$$2\iint_\Delta \sqrt{1-r^2}\, rdrd\varphi = 2\int_\pi^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, rdr = \frac{2\pi}{3}.$$

3.6 Формула Грина

Пусть D - плоская область, ограниченная линией Г. В замкнутой области - D (т.е. в области D с включенной границей Г) заданы функции X(x,y) и Y(x, y). Предположим, что эти функции имеют в D частные производные, причем как самЬфункции так и их частные производные непрерывны в D. На Г зададим направление движения так, чтобы при этом движении область D Оставалась с левой руки (обход Г против часовой стрелки). Имеет место следующая формула

$$\iint_D \left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)dxdy = \oint_{\Gamma} Xdx+Ydy, \tag{57}$$

которая называется формулой Грина.

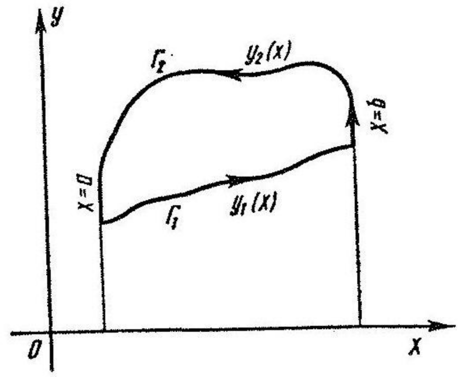

Рисунок 42

Формула Грина и другие формулы, похожие на нее, которые мы рассмотрим в дальнейшем, имеют весьма большое значение. Они позволяют заменять анализ одного явления, происходящего в области (двойной интеграл) анализом другого явления, происходящего только на границе области (криволинейный интеграл). Выведем формулу (57). Эта формула получается сложением двух формул

$$\iint_D \frac{dY}{dx}dxdy = \oint_{\Gamma} Ydy \text{ и } -\iint_D \frac{dX}{dy}dxdy = \oint_{\Gamma} Xdx. \tag{58}$$

Для простоты предположим, что граница Г состоит из линий Γ_1 и Γ_2, заданных уравнениями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, и прямых x = a и x = b (рисунок 42). Вычисляем двойной интеграл:

$$\iint_D \frac{dX}{dy}dxdy = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{dX}{dy}dy.$$

$$\int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{dX}{dY} dy = \int_a^b dx X(x,y) = \int_a^b \left[X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x)) \right] dx.$$

Вычисляем криволинейный интеграл:

$$\int_{\Gamma} X(x,y)\, dx = \int_{\Gamma_1} X(x,y)\, dx + \int_{\Gamma_2} X(x,y)\, dx =$$

(интегралы по вертикальным прямым x = a и x = b исчезли, так как там dx=0)

$$= \int_a^b X(x, y_1(x))\, dx - \int_a^b X(x, y_2(x))\, dx = \int_a^b \left[X(x, y_1(x)) - X(x, y_2(x)) \right] dx.$$

Сравнивая выражения для двойного и криволинейного интегралов, видим, что различие лишь в знаке. Это и приводит к формуле (58).

3.7 Формула Стокса

Формула Грина является частным случаем более общей формулы Стокса. Пусть в пространстве задана поверхность Q, ограниченная замкнутой кривой Г. Поверхность предполагаем ориентированной, а на контуре Г установим такое направление обхода, чтобы наблюдатель, идущий по Г, направление от ног к голове которого совпадает с направлением **n** нормали к Q, видел поверхность Q с левой руки (рисунок 43). Пусть на поверхности Q заданы три функции X(x, y, z), Y(x,y, z), Z(x, y, z), непрерывные вместе с их частными производными. *Формула Стокса* утверждает, что

$$\iint_{Q} \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right) dxdy + \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) dydz + \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) dxdz = \int_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz.$$

Чтобы запомнить левую часть этой формулы, можно поступить следующим образом. Изобразим переменные x, y и z в виде круговой диа граммы (рисунок 44). Начинаем с x и, продвинувшись до y берем функцию Y, дифференцируем ее по x и вычитаем производную X по y (занятые в этом члене

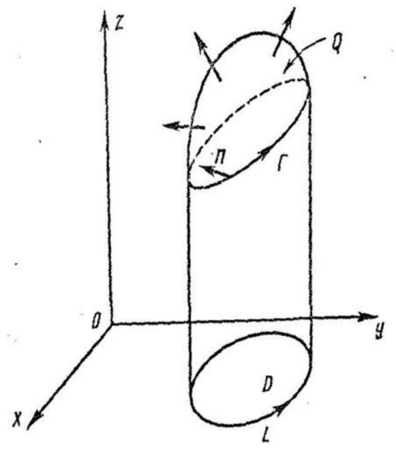

Рисунок 43

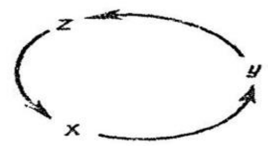

Рисунок 44

дифференциалы dxdy от тех же переменных). Теперь начинаем от y (вместо x). Продвинувшись до z , берем функцию Z и дифференцируем ее по y. Раз первый член $\frac{dz}{dy}$, то второй будет $\frac{dY}{dz}$ со знаком минус (занятые в этом члене дифференциалы dydz). Затем начинаем от z и т. д.

Формула Стокса складывается из трех формул:

$${}_{Q}\frac{dX}{dz}dxdz - \frac{dX}{dy}dxdy = {}_{\Gamma}Xdx,$$

$${}_{Q}\frac{dY}{dx}dxdy - \frac{dY}{dz}dydz = {}_{\Gamma}Ydy,$$

$${}_{Q}\frac{dZ}{dy}dydz - \frac{dZ}{dx}dxdz = {}_{\Gamma}Zdz. \qquad (59)$$

3.8 Вопросы для самопроверки

1. Понятие двойного интеграла.
2. Вычисление двойных интегралов в декартовой и полярной системах координат.
3. Приложения двойных интегралов.
4. Понятие криволинейного интеграла.
5. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода.
6. Формула Грина и формула Стокса.

3.9 Теоретические упражнения

1. С помощью теоремы о среднем найти $\lim\limits_{R\to 0}\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^3} f(x,y)\,dxdy$, где $f(x,y)$ – непрерывная функция.

2. Оценить интеграл $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$, ($x^2+y^2+z^2\le R^2$),т.е. указать, между какими значениями заключена его величина.

3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, если область D-прямоугольник $(a\le x\le b, c\le y\le d)$, а функция $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$.

4. Доказать равенство $\iint\limits_D f(x)p(y)\,dxdy=\int\limits_a^b f(x)\,dx\cdot\int\limits_c^d p(y)\,dy$, если область D-прямоугольник $(a\le x\le b, c\le y\le d)$.

5. Доказать формулу Дирихле $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x f(x,y)\,dy=\int\limits_0^a dy\int\limits_y^a f(x,y)\,dx$, $(a>0)$.

6. Пользуясь формулой Дирихле, доказать равенство $\int\limits_0^a dy\int\limits_0^y f(x)\,dx=\int\limits_0^a (a-x)f(x)\,dx$.

7. Какой из интегралов больше: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dz$ или $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz$, если $f(x,y,z)>0$?

8. Доказать, что $\oint\limits_\Gamma xdy-ydx=2\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где Γ- контур криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $y=f(x)>0$ и прямыми $x=a, x=b,\ y=0$.

9. Вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{\Gamma} \left[f(y) e^{x} - my \right] dx + \left[f'(y) e^{x} - m \right] dy$, где $f'(y)$ – непрерывная функция; Γ - кусочно-гладкая кривая, ограниченная область, площадь которой равна S, m- постоянная.

3.10 Индивидуальные задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx$.

2. Вычислить: $\iint\limits_{D} (2x^2y^2 + 16x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_{V} x\,dxdydz$, $V:\ y=10x,\ x=1,\ z=xy,\ z=0$.

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл: $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dy$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=1$, $x+y+z=3$, $z=0$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=2y$, $z=\frac{5}{4}-x^2$, $z=0$.

7. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $\overline{F}=(x^2-2y)\,\overline{i}+(y^2-2x)\,\overline{j}$, L-отрезок MN, $M(-4;0)$, $N(0;2)$.

8. Определить момент инерции тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=a\sqrt{2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ относительно оси Oz.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривыми: $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$.

10. Тело *V* задано ограничивающими его поверхностями, *M*- плотность. Найти массу тела*V*: $64\left(x^2+y^2\right)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ y=0,\ z=0\ (y>0, z>0),\ M=\frac{5}{4}\left(x^2+y^2\right)$

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_a^1 dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)\,dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2}} f(x,y)\,dx$.

2. Вычислить: $\iint\limits_D \left(x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy,\ D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4},\ V:\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z,\ z=2x$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=y,\ x^2+y^2=4y,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$.

7. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии *L* от точки *M* к точке *N*: $\overline{F}=\left(x^2+2y\right)\overline{i}+\left(y^2+2x\right)\overline{j},\ L:\ y=2+\frac{x^2}{8},\ M(-4;0),\ N(0;2)$

8. Найти момент инерции относительно оси *Oz* тела, ограниченного сверху полусферой радиуса *R*, а снизу конусом (высота конуса равна радиусу основания).

9. Найти момент инерции фигуры, ограниченной петлей кривой $\rho=2a\cos 2\varphi$, относительно полярной оси.

10. Тело *V* задано ограничивающими его поверхностями, *M*- плотность. Найти массу тела*V*: $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1\ \left(x^2+y^2<1\right),\ x=0\ (x>0),\ M=4|z|$.

Вариант 3

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_a^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

2. Вычислить: $\iint\limits_D (6x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_V 15(y^2+z^2)dxdydz$, $V:\ z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0$.

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{3-\sqrt{9-y^2}}^{3+\sqrt{9-y^2}} \sqrt{36-x^2-y^2}\,dx$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y^2=4-3x$, $y^2=x$, $z=x$, $z=-x$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=8\sqrt{2}x$, $z=x^2+y^2-64$, $z=0\ (z>0)$.

7. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии *L* от точки *M* к точке *N*: $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+2x\overline{j}$, *L*: $x^2+y^2=4\ (y>0)$, $M(2;0)$, $N(-2;0)$.

8. Радиус основания прямого круглого цилиндра равен *a*, высота *h*, плотность в любой точке обратно пропорциональна ее расстоянию от оси. Определить массу цилиндра.

9. Найти момент инерции полукруга радиуса *a*, относительно касательной, параллельной диаметру, ограничивающему полукруг.

10. Тело *V* задано ограничивающими его поверхностями, *M*- плотность. Найти массу тела*V*: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2z$, $x=0$, $y=0$, $z=0\ (x>0, y>0)$, $M=10x$.

Вариант 4

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_a^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

2. Вычислить: $\iint\limits_D (8x^2y^2 + 32y^3)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_V (3x+4y)dxdydz$, $V:\quad y=x,\quad y=0,\quad x=1,\quad z=0,$ $z=5(x^2+y^2)$.

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^6 dx \int\limits_{-\sqrt{6x-x^2}}^{\sqrt{6x-x^2}} \sqrt{36-x^2-y^2}\,dy$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y=1-x^2$, $y^2=z$, $z=0$, $y=0$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2+4x=0$, $z=8-y^2$, $z=0$.

7. Найти работу силы $\bar{F}$ при перемещении вдоль линии *L* от точки *M* к точке *N*: $\bar{F}=x^3\bar{i}-y^3\bar{j}$, *L*: $x^2+y^2=4\ (x>0, y>0)$, $M(2;0)$, $N(0;2)$

8. Найти центр тяжести тела, ограниченного поверхностями: $y^2+2z^2=4x$, $x=2$.

9. Для фигуры, ограниченной параболой $y^2=4x+4$ и прямой $x+y=2$, найти статический момент относительно оси симметрии параболы.

10. Тело *V* задано ограничивающими его поверхностями, *M*- плотность. Найти массу тела*V*: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=4z^2$, $x=0$, $y=0$ $(x>0, y>0, z>0)$, $M=20z$.

Вариант 5

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)\,dy$

2. Вычислить: $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dxdydz$, $V:\ y=9x,\ y=0,\ x=1,\ z=0,\ z=\sqrt{xy}$.

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми: $y^2 = x+4$, $y^2 = 4-2x$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=8z$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=6x$, $x^2+y^2=9x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y=0$ $(y<0)$.

7. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии *L* от точки *M* к точке *N*: $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+(x-y)\overline{j}$, $L:\ y=x^2$, $M(-1;1)$, $N(1;1)$.

8. Найти массу шара, зная, что плотность в любой точке обратно пропорциональна расстоянию этой точки до центра.

9. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной линиями: $y=\sqrt{8x}$, $y=0$, $x+y=6$.

10. Тело *V* задано ограничивающими его поверхностями, *M*- плотность. Найти массу тела *V*: $36(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0, z=0$ $(x>0, z>0)$, $M=\frac{5}{6}(x^2+y^2)$.

Вариант 6

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f(x,y)\,dx$.

2. Вычислить: $\iint\limits_D (8x^2y^2 + 32y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_V (7+54y^3)\,dxdydz$, $V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=0,\ z=\sqrt{xy}$.

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми: $y=\sqrt{a^2-x^2}$ и $x+y=a$ (имеется ввидуобласть, не содержащая начала координат).

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=6\sqrt{2}y$, $z=x^2+y^2-36$, $z=0$ $(z>0)$.

7. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии *L* от точки *M* к точке *N*: $\overline{F}=x^2y\bar{i}+y\bar{j}$, *L* – отрезок*MN*, $M(-1;0)$, $N(0;1)$.

8. Найти центр тяжести тела, расположенного над плоскостью *xOy* и ограниченного сферой радиуса *a*и конусом с углом при вершине осевого сечения 2α, если центр сферы и вершина конуса лежат в начале координат.

9. Найти момент инерции фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно оси *Oy*.

10. Тело *V* задано ограничивающими его поверхностями, *M*- плотность. Найти массу тела *V*: $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=4$ $(x^2+y^2<4)$, $M=2|z|$.

Вариант 7

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)\,dx$.

2. Вычислить: $\iint\limits_D (8x^2y^2+32y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, $V:\ y=15x,\ y=0,\ x=1,\ z=0,\ z=xy$.

4. Вычислить площадь, ограниченную кривой $P\cos\varphi=4$, $P=8$ и не содержащая начала координат.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y+z=2$, $y=x^2$, $z=0$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=2y,\ z=\frac{9}{4}-x^2,\ z=0$.

7. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $\overline{F}=(2xy-y)\overline{i}+(x^2+x)\overline{j}$, L: $x^2+y^2=9$ $(y>0)$, $M(3;0)$, $N(-3;0)$.

8. Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и в вершинах квадрата равна I.

9. Центр круга радиуса $2a$ лежит на окружности радиуса a. Вычислить момент инерции фигуры, содержащейся между обеими окружностями, относительно общей касательной.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу телаV: $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=8z,\ x=0,\ y=0, z=0\,(x>0, y>0),\ M=5x$.

Вариант 8

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx+\int\limits_1^{e} dy\int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить: $\iint\limits_D (27x^2y^2+48x^3y^3)dxdy$, D: $x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5}$, V: $\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}}\sqrt{16-x^2-y^2}\,dy$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=4-x^2-y^2$, $x^2+y^2=2y,\ z=0$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=5y, z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$.

7. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $\overline{F} = (x+y)\overline{i} + (x-y)\overline{j}$, L: $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ($x>0, y>0$), $M(1;0)$, $N(0;3)$.

8. Вычислить момент инерции пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$ относительно плоскости yOz.

9. Доказать, что статический момент треугольника с основанием a относительно этого основания, зависит только от высоты треугольника.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела V: $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $x=0$, $y=0$ ($x>0, y>0, z>0$), $M=6z$.

Вариант 9

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy$.

2. Вычислить: $\iint\limits_D (xy + 3x^2y^2)\,dxdy$, D: $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, V: $z=10y$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=4-y^2$, $y=\dfrac{x^2}{2}$, $z=0$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2+2\sqrt{2}y=0$, $z=x^2+y^2-4$, $z=0$ ($z>0$).

7. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j}$, L: $y = x^2 + y^2$ ($y>0$), $M(1;0)$, $N(-1;0)$

8. Вычислить массу шара радиуса R зная, что плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра.

9. В квадратной пластине плотность пропорциональна квадрату расстояния от одной из ее вершин. Вычислить момент инерции пластины относительно стороны, проходящей через эту вершину.

10. Тело *V* задано ограничивающими его поверхностями, *M*- плотность. Найти массу телаV: $25(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x>0, y>0, z>0$), $M=z(x^2+y^2)$.

Вариант 10

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy$.

2. Вычислить: $\iint\limits_D (2xy+7x^2y^2)\,dxdy$, D: $x=1$, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^2$.

3. Вычислить: $\iiint\limits_V (5x+30z)\,dxdydz$, V: $z=x^2+3y^2$, $x=1$, $z=9$, $y=x$, $y=0$, $x=1$.

4. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{x^2-x}} (1+x^2+y^2)\,dy$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=y$, $x^2+y^2=2y$, $z=-2y$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=4x$, $z=10-y^2$, $z=0$.

7. Найти работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии *L* от точки *M* к точке *N*: $\overline{F}=(x^2+y^2)\overline{i}+(x^2-y^2)\overline{j}$, L: $y=x$ $(0<x<1)$, $y=2-x$ $(1<x<2)$, $M(0;0)$, $N(2;0)$.

8. Вычислить массу шара радиуса *R*, если плотность в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра шара.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой: $P = 2\alpha\cos2\varphi$.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу телаV: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$ $(x^2 + y^2 < 4)$, $y = 0$ $(y > 0)$, $M = |z|$.

Вариант 11

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x,y)\,dy + \int_1^0 dx \int_{lnx}^1 f(x,y)dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)}(8xy + 9x^2y^2)\,dxdy,$$ D: x=1, $y = \sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$.

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)}(4 + 8z^3)xdxdydz,$$ V: y=x, x=1, $z = \sqrt{xy}$, z=0.

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл: $\int_0^{-2} dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 (x^2 + y^2)dy$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2+y^2$, $y=-x^2$, $y=-1$, $x=0$ $z=0$ $(x>0)$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=7x$, $x^2+y^2=10x$, $z=0$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $y=0$ $(y<0)$.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: F=yi+xj, L: $x^2+y^2=2$, $(y>0)$ M(√2,0), N(-√2,0).

8. Вычислить массу шара радиуса a, если плотность в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра шара.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой $P=asin2\varphi$.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=6z$, y=0, y=0, z=0 $(x>0,y>0)$, M=90y.

Вариант12

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$\iint_{(D)}(24xy + 18x^2y^2)\,dxdy$, D: $x=1$, $y=x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Вычислить:

$\iiint_{(V)}(1 + 2x^3)dxdydz$, V: $y=36x$, $y=0$, $x=1$, $z = \sqrt{xy}$, $z=0$.

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми: $y=2x-x^2$, $y=x^2$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=2x$, $z>0$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=8\sqrt{2}y$, $z=x^2-y^2-64$, $z=0$, $(z>0)$.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $F=xyi+2yj$, L: $x^2+y^2=1$, $(x>0, y>0)$ M(1,0), N(0,1).

8. Вычислить массу шара радиуса R, если плотность в любой точке обратно пропорциональна расстоянию ее от центра шара.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осями координат и параболой $y=1-x^2$.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=9z^2$, $x=0$, $y=0$, $(x>0, y>0, z>0)$, $M=10z$.

Вариант13

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x,y)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{cosy} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$\iint_{(D)}(12xy + 27x^2y^2)\,dxdy$, D: $x=1$, $y=x^2$, $y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Вычислить:

$\iiint_{(V)}(12xy + 27x^2y^2)dxdydz$, V: $y=x$, $y=0$, $z=xy$, $z=0$.

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми: P=10, P$\sin\varphi$=5 и не содержащую начало координат.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: z=x^2+y^2-2,$z = \sqrt{x^2+y^2}$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: x^2+y^2=2y, z=13/4-x^2, z=0.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: F= yi-xj, L: 2x^2+y^2=1, (y>0), M(1/√2,0),N(-1/√2,0).

8. Вычислить среднюю плотность прямого круглого цилиндра радиуса r и высотыh, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от плоскости нижнего основания.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой: y^2=4x+4, P=a(1-cosφ).

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: 9(x^2+y^2)=z^2, x^2+y^2=4, y=0, y=0, z=0 (x>0, y>0, z>0), M=5/3(x^2+y^2)

Вариант 14

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)}(8xy + 18x^2y^2)\,dxdy,$$ D: x=1, $y = \sqrt[3]{x}$, y=-x^2.

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} \frac{dxdydz}{(1+\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3})^6},$$ V: $\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3} = 1$ x=0, y=0, z=0.

4. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $P = a\sqrt{cos2\varphi}, Pcos\varphi = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: z=x^2+y^2/4, x^2+y^2=4, z=0.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: x^2+y^2=3y, x^2+y^2=6y, z=0, (z>0), $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: F=(x^2+y^2)(i+ 2j), L: x^2+y^2=R^2, (y>0) M(R,0),N(-R,0).

8. Вычислить среднюю плотность прямого круглого цилиндра радиуса r и высоты h, если плотность в каждой его точке прямо пропорциональна расстоянию от оси цилиндра.

9. Найти момент инерции сегмента параболы с хордой, перпендикулярной к оси, относительно вершины параболы, если длина хорды равна a и «стрелка» хорды равна h.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$, $(x^2+y^2<1)$, M=6|z|.

Вариант 15

1. Изменить порядок интегрирования:

$$_0^1 dy \ _0^{\overline{y}} f(x,y)\,dx + \ _1^e dy \ _{lny}^1 f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$$_{(D)}(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2)\,dxdy,\ \text{D: } x=1,\ y=x^3,\ y=-\ \overline{x}.$$

3. Вычислить:

$$_{(V)}(x^2+3y^2)dxdydz,\ \text{V: } z=10x, x+y=1\ y=0,\ x=0,\ z=0.$$

4. Вычислить площадь общей части двух кругов:P=2, P=2(cosφ+sinφ).

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-1)^2=z$, z=0.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=6\sqrt{2}x$, $z=x^2+y^2-36$, z=0, (z>0).

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $F=x^2yi-zy^2j$, L: $x^2+y^2=4$, (x>0, y>0) M(2,0), N(0,2).

8. От цилиндра, радиус основания которого равен a, отрезан клин, плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклонной к основанию под углом в 45º. Найти центр тяжести этого клина.

9. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной окружностями P=acosφ, P=bcosφ (a>b>0) .

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=z$, x=0, y=0, z=0, (x>0, y>0), M=10y.

Вариант 16

1. Изменить порядок интегрирования:

$${}_0^1 dy\ {}_{-\ \overline{y}}^{0} f(x,y)\,dx + {}_1^2 dy\ {}_{-\ \overline{2-y}}^{0} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

${}_{(D)}(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2)\,dxdy$, D: x=1, y=√x, $y=-x^3$.

3. Вычислить:

${}_{(V)}(60y + 90z)xdxdydz$, V:y=x, x=1, $z=x^2+y^2$, z=0.

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми: y=9+x, $y^2=9-3x$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y=x^2$, $y=2x^2$, x+y=2 z=0.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=2\sqrt{2}y$, $z=x^2+y^2-4$, z=0, z>0.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $F=y^2i-x^2j$, L: $x^2+y^2=9$, (x>0, y>0), M(3,0),N(0,3).

8. Вычислить массу прямого кругового цилиндра радиуса r и высоты h, если его плотность в любой точке численно равна квадрату расстояния точки от плоскости нижнего основания.

9. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной эллипсом и его осями симметрии.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=4z^2$, x=0, y=0, (x>0, y>0), M=10z.

Вариант 17

1. Изменить порядок интегрирования:

$${}_0^1 dy\ {}_{-y}^{0} f(x,y)\,dx + {}_1^{\overline{2}} dy\ {}_{-\ \overline{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

${}_{(D)}(24xy + 48x^3y^3)\,dxdy$, D: x=1, $y=x^2$, y=-√x,.

3. Вычислить:

$$_{(V)}(\frac{10}{3}x+\frac{5}{3})xdxdydz,\text{ V: y=9x, y=0, x=1, } z=\ \overline{xy}\text{, z=0.}$$

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми: $y=x^2+1$, $y=4-2x$, $y=1$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y=\cos x$, $z=1-y^2$; $x=0$,$y=0$, $z=0$, $(0<x<\pi/2)$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=4x$, $z=12-y^2$, $z=0$.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $F=(x^2+y^2)i+y^2j$, L-отрезок MN, M(2,0),N(0,2).

8. Вычислить среднюю плотность шара радиуса a, зная, что плотность в любой точке пропорциональна расстоянию ее от центра шара.

9. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной линиями:$y^2=4x+4$ и $y=2-x$ и расположенной выше оси *Ox*.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $x^2+y^2=1$, $x=0$ $y=0$, $z=0$ $(x>0, y>0, z>0)$, $M=5(x^2+y^2)$.

Вариант 18

1. Изменить порядок интегрирования:

$$_0^1 dy\ _0^{y^3} f\ \ x,y\ \ dx+\ _1^2 dy\ _0^{2-y} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$$_{(D)}(6xy+24x^3y^3)\,dxdy,\quad \text{D: x=1, } y=-x^2,\ y=\ \overline{x},.$$

3. Вычислить:

$$_{(V)}(9+18z)dxdydz,\text{ V: y=4x, y=0, x=1, } z=\ \overline{xy}\text{, z=0.}$$

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить интеграл:

$$_0^1 dx\ _{-\ \overline{1-x^2}}^{\ \overline{1-x^2}} e^{x^2+y^2}dy.$$

5. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=8x$, $x^2+y^2=11x$,$z=\ \overline{x^2+y^2}$ $z=0$, $y=0$ $(y<0)$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2xz=0$.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: F=(x+y)i-(x-y)j, L-отрезок MN, M(0,1),N(1,0).

8. В теле, имеющем форму полушария, плотность изменяется пропорционально расстоянию точки от центра. Найти центр тяжести этого тела.

9. Найти статистический момент прямоугольника со сторонами aи b относительно стороны a, если в каждой точке поверхностная плотность прямоугольника пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=4$, $(x^2+y^2<4)$, M=|z|.

Вариант 19

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)} (4xy+16x^3y^3)\,dxdy,$$ D: x=1, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$.

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} 3y^2 dxdydz,$$ V: y=2x, y=0, x=2, z=xy, z=0.

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми: $y^2=8x+16$, $y^2=4x+16$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: z=3x, z=0, $x^2-y^2=2x$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=4\sqrt{2}x$, $z=x^2-y^2-16$, z=0 (z>0).

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $F=(y^2-y)i+(2xy+x)j$, L: $x^2-y^2=9$, (y<0) M(3,0),N(-3,0).

8. Вычислить момент инерции пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью x+y+z=1, относительно плоскости XOY.

9. Найти центр тяжести кругового сектора радиусаa с углом при вершине α.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4z$, x=0, y=0, z=0 (x>0,y>0), M=5y.

Вариант 20

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)} (4xy + 16x^3y^3)\,dxdy,$$ D: x=1, $y = \sqrt[3]{x}$, $y=x^3$.

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} \frac{dxdydz}{(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6})^4},\qquad V: \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1\ \ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y^2=x-2$, $y^2=x$, x=4.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=2$, (z>0).

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=4$, $z=4-x^2$, z=0.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $F=(xy-y^2)i+xj$, L: $y=2x^2$, M(0,0), N(1,2).

8. Найти момент инерции однородного кругового конуса плотности γ с радиусом R и высотой H относительно его оси.

9. Найти момент инерции квадрата со стороной a, поверхностная плотность которого постоянна, относительно одной из вершин.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=z^2$, x=0, y=0, (x>0, y>0, z>0), M=32z.

Вариант 21

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)} (44xy + 16x^3y^3)\,dxdy,$$ D: x=1, $y = -\sqrt[3]{x}$, $y=x^2$.

3. Вычислить:

$_{(V)}\, x^2 dxdydz$, V: z=10(x+3y), x+y=1, x=0, y=0, z=0.

4. Вычислить площадь, ограниченную гиперболой y^2-x^2=1, и двумя прямыми: x=2, x=-2.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: y=e^x, y=e^{-x}, z=0, z=3-y.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: x^2+y^2=4y, x^2+y^2=7y, $z = \ \overline{x^2+y^2}$, z=0.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: F=(xy-x)i+x^2/2j, L: y=2√x, M(0,0), N(1,2).

8. Найти момент инерции шара радиуса R относительно его диаметра, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от центра шара, а на поверхности шара равна $\gamma_{0.}$

9. Найти момент инерции круга радиуса R относительно точки, лежащей на окружности.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=4, x=0, y=0, z=0 (x>0, y>0, z>0), M=5/2(x^2+y^2).

Вариант 22

1. Изменить порядок интегрирования:

$${}_0^1 dx\ {}_0^{x^2} f(x,y)\,dy + {}_1^{\overline{2}} dx\ {}_0^{\overline{2-x^2}} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить:

$_{(D)}(4xy + 176x^3y^3)\,dxdy$, D: x=1, $y = {}^3\ \overline{x}$, y=-x^2.

3. Вычислить:

$_{(V)}(8y + 12z)dxdydz$, V:y=x, y=0, x=1, z=0, x=3x^2+2y^2.

4. Вычислить площадь, ограниченную кривой P=2+cosφ.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями z=1-x^2/4-y^2/9, x^2+y^2=4, x^2+y^2=1, z=0.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: x^2+y^2=4√2y, z=x^2+y^2-16,z=0 (z>0).

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: F=-yi+xj, L: $y=x^3$, M(0,0), N(2,8).

8. Найти массу шара радиуса R, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до одного из диаметров шара и на окружности большого круга, лежащего в плоскости шара и на окружности большого круга, лежащего в плоскости, перпендикулярной к этому диаметру, равна γ_0.

9. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной верхней половиной эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ и его большой осью.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2=4$, $(x^2+y^2<4)$, z=0 (z>0), M=2z.

Вариант 23

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{sinx} f(x,y)\,dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{cosx} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить:

$$\iint_{(D)} (xy - 4x^3y^3)\,dxdy, \text{ D: } x=1,\ y = -\sqrt{x},\ y=x^3.$$

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} 63(1 + 2\sqrt{y})dxdydz, \text{ V: } y=x,\ y=0,\ x=1,\ z = \sqrt{xy},\ z=0.$$

4. Найти площадь одного лепестка кривой $P=4\sin^2\varphi$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $z^2=x^2+y^2$, (z>0).

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2+2x=0$, $z=17/4-y^2$, z=0.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: F=-xi+yj, L: $x^2+y^2/9=1$, (x>0, y>0) M(1,0), N(0,3).

8. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями: $Z=H/R^2(x^2+y^2)$, Z=H.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной цепной линией $y=a/2(l^{x/a}+l^{-x/a})$ и прямыми x=a, x=-a, y=0.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=3z$, x=0,y=0, (x>0, y>0), z=0, M=15x.

Вариант 24

1. Изменить порядок интегрирования:

$$_{-\ 2}^{-1} dy\ \ _{-\ \overline{2-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx +\ _{-1}^{0} dy\ \ _{y}^{0} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить:

$$_{(D)}(4xy+176x^3y^3)\,dxdy,\ \text{D: x=1, } y = \ \overline{x},\ \text{y=-}x^3.$$

3. Вычислить:

$$_{(V)}(x+y)dxdydz,\ \text{V: y=x, y=0, x=1, z=0, z=}30x^2+60y^2\ .$$

4. Вычислить двойной интеграл $_{(D)}xy\,dxdy$, распространенный на область D, ограниченную осью OX и верхней полуокружностью $(x-2)^2+y^2=1$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=1-x^2$, y=1/x, z=0, y=2.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2=9x$, $x^2+y^2=12x$, z=0, $z = \ \overline{x^2+y^2}$, y=0 (y>0).

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $F=(x^2i-y^2)i+(x^2+y^2)j$, L: $x^2/9+y^2/4=1$, (y>0) M(3,0), N(-3,0).

8. Найти массу сферического слоя между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$ и , $x^2+y^2+z^2=4a$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки от начала координат , а наибольшее значение плотности $\gamma_{0.}$

9. Вычислить момент инерции куба, относительно его ребра.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=9z^2$, x=0, y=0, (x>0, y>0, z>0), M=5z.

Вариант 25

1. Изменить порядок интегрирования:

$$_{0}^{1} dx\ \ _{0}^{x^3} f(x,y)\,dy +\ _{1}^{2} dx\ \ _{0}^{2-x} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить:

$$_{(D)}(6x^2y^2+25/3x^4y^4)\,dxdy,\ \text{D: x=1, } y = -\ \overline{x},\ \text{y=}x^2.$$

3. Вычислить:

$$\iiint_{(V)} \frac{dxdydz}{(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16})^5}, \qquad V: \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1 \ \ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

4. Найти площадь, ограниченную кривыми: $P=a(1+\cos\varphi)$, $P=2a\cos\varphi$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2=x^2+y^2$, $z=(x^2+y^2)/4+1$.

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2+2\sqrt{x}=0$, $z=x^2+y^2-4$, $z=0$, $(z>0)$.

7. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N: $F=(x-y)i+j$, L: $x^2+y^2=4$, $(y>0)$ $M(2,0)$, $N(-2,0)$.

8. Найти среднюю плотность шара радиуса *R*, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до одного из диаметров шара и на окружности большого круга, лежащего в плоскости, перпендикулярной к этому диаметру равна γ_0.

9. Найти момент инерции круга радиуса *R* относительно касательной.

10. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, M- плотность. Найти массу тела: V: $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y=0$, $z=0$, $(y>0,\ z>0)$, $M=10(x^2+y^2)$.

Список использованныхисточников

1 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / Л.Д. Кудрявцев.- 3-е изд., перераб. – Т.1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Ряды.- М.: Физматлит,2008.-400с.

2 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / Л.Д. Кудрявцев.- 3-е изд., перераб. – Т.2 : Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных. Гармонический анализ.- М.: Физматлит,2008.-424с.

3 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа [Электронный ресурс] : учебник в 2-х т. / Л.Д. Кудрявцев.- 3-е изд., перераб. – Т.2 : Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных. Гармонический анализ.- М.: Физматлит, 2010. – 425с.-

4 Ильин, В.А. Основы математического анализа [Электронный ресурс] : учебник/В.А. Ильин,Э.Г. Позняк.- 7-е изд.,стер.- М.:Физматлит,2009.-Ч.1.-647 с. –

5 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч.: учеб.пособие для вузов/ П.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. – 6-е изд. – М.: Оникс 21 векМир и образование, 2003. Ч.2. – 2003. – 416 с.

6 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс/ Д.Т.Письменный. – 5-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 608 с.

7 Гурьянова, К.Н. Математический анализ : учебное пособие / К.Н. Гурьянова, У.А. Алексеева, В.В. Бояршинов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014. - 332 с. - ISBN 978-5-7996-1340-2; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275708