Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики
Кафедра алгебры и дискретной математики

А.Н. Павленко, О.А. Пихтилькова

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Оренбургский государственный университет»
для обучающихся по образовательной программе высшего образования
по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Оренбург
2018

УДК 51
ББК 22.1
П 12

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук С.А. Герасименко

П 12 **Павленко, А.Н.**
Задачи с параметрами: методические указания к выполнению домашних заданий и подготовке к контрольным работам / А.Н. Павленко, О.А. Пихтилькова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 28 с.

Методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика при выполнении домашних заданий и при подготовке к контрольным работам по дисциплине «Практикум по решению математических задач».

УДК 51
ББК 22.1

Содержание

Введение

Методические указания предназначены для студентов направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» для дисциплины «Практикум по решению математических задач» при изучении темы «Задачи с параметрами".

Следует отметить, что приведенный материал предназначен лишь для предварительного самостоятельного ознакомления обучающихся с задачами, содержащими параметр. Основная цель методических указаний состоит в быстром и наглядном ознакомлении с основными понятиями, типами и методами решения данных заданий. Для более подробного изучения данной темы предполагается использование приведенных источников.

Несмотря на то, что задачам с параметрами посвящено множество статей и учебных пособий, например, [1-11], в которых рассматривается как подробное всестороннее изложение данной темы, так и предварительное ознакомление с ее основами, написание данных методических указаний представляется актуальным для выполнения следующих требований:

1) возможность быстрого и наглядного ознакомления с данным материалом;

2) наличие ссылок на задачи для самостоятельного разбора/решения;

3) наличие ссылок на источники для последующего подробного изучения темы «Задачи с параметрами».

После предварительного знакомства с данной темой целесообразно использовать для подготовки учебное пособие, например [11] и/или приведенные там источники.

Данные методические указания могут быть использованы студентами, изучающими дисциплину «Практикум по решению математических задач» на физико-математических и инженерных направлениях, учащимися и преподавателями средних учебных заведений.

1 Общие сведения о задачах с параметрами

Представление о значимости задач с параметрами и идеологией их решения можно получить при решении физических задач «в общем виде». В этом случае в условии задачи перечисляются физические величины, которые считаются известными (параметры), а найти требуется некоторую величину (неизвестное) для всех физически допустимых значений известных величин. В качестве примера можно рассмотреть следующую задачу.

Задача. Найти с каким ускорением a будет скользить тело по наклонной плоскости с углом α, если коэффициент трения равен μ?

Ответ: $a = 0,\ \mu \geq \mathrm{tg}\,\alpha$;

$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),\ \mu < \mathrm{tg}\,\alpha$.

В данном случае параметрами являются переменные α и μ, а неизвестной величиной – переменная a.

Параметром будем называть независимую фиксированную переменную, которая при решении задачи считается известной. Ее значение может принадлежать множеству действительных чисел или заданному подмножеству множества действительных чисел.

Решить задачу с параметром означает дать на нее ответ при всех допустимых в задаче значениях параметра или дать множество значений параметра, при которых задача имеет ответ, удовлетворяющий заданному в задаче требованию.

Основные типы задач с параметрами

1. Уравнения, неравенства и их системы, которые надо решить для любого значения параметра или для всех значений параметра из данного множества.

2. Уравнения, неравенства и их системы для которых требуется определить количество решений в зависимости от параметра или множество значений параметра, при которых задача имеет заданное число решений.

3. Уравнения, неравенства и их системы для которых требуется найти множество значений параметра, при которых решение задачи обладает некоторым заданным свойством:

1) содержит заданный промежуток;

2) множество решений является подмножеством множества решений другой задачи и т.д.

Довольно часто встречаются задачи с параметрами, в которых вместо уравнения (неравенства, системы) рассматривается некоторая функция.

Более подробно с основными понятиями темы «Задачи с параметрами» можно в [1].

2 Понятие об основных методах решения задач с параметрами

Основные методы решения задач с параметрами

1. *Аналитический метод*. Данный метод заключается в использовании стандартных процедур, применяемых для решения аналогичных задач без параметра. Как правило, данный способ является наиболее трудным.

2. *Графический метод.* Задача с переменной x и параметром a решается с помощью построения линий или областей в координатах Oxy или Oxa. Данный метод нагляден и часто более удобен по сравнению с другими методами.

3. *Решение задачи относительно параметра.* Данный способ удобен, если аналитическое решение задачи относительно a является более простым. Например, когда уравнение относительно x имеет высокую степень, а относительно a является линейным или квадратным. В этом случае целесообразно решать данную задачу, считая a неизвестным, а x – параметром.

С целью предварительного знакомства с каждым из перечисленных методов рассмотрим решение одной задачи тремя способами.

2.1 Аналитический метод

Задача. Найти число решений уравнения $|x-1| = ax$ в зависимости от параметра a.

Решение. При решении задачи с параметром аналитическим способом применяются те же методы, которые используются при решении аналогичных заданий без параметров.

Выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в 0 при $x=1$.

1. Решим данное уравнение при $x \in [1; +\infty)$.

При этом выражение, стоящее под знаком модуля, является неотрицательным, и тогда $|x-1| = x-1$. Тогда получим:

$$x-1=ax,\ ax-x=-1,\ (a-1)x=-1.$$

При $a=1$ получаем уравнение $0=-1$. В данном случае, уравнение не имеет решений.

Замечание. Если коэффициент при x равен 0, то уравнение необязательно не имеет решений. Например, рассмотрим уравнение

$$(a-1)x = a^2 + a - 2.$$

При $a=1$ получаем уравнение $0=0$. В данном случае, решением уравнения будет любое число.

При $a \neq 1$ имеем $x = -\dfrac{1}{a-1}$, $x = \dfrac{1}{1-a}$.

Решая уравнение с модулем, мы после получения корня должны еще проверить, принадлежит ли он рассматриваемому промежутку. Очевидно, что при наличии параметра, найденный корень при некоторых значениях параметра будет принадлежать рассматриваемому промежутку, а при некоторых не будет. В первом случае мы будем иметь решение данного уравнения, а во втором случае – посторонний корень, который следует исключить.

Найдем все значения параметра a при которых $\frac{1}{1-a}\in[1;+\infty)$. Для этого решим неравенство

$$\frac{1}{1-a}\geq 1,\ 1+\frac{1}{a-1}\leq 0,\ \frac{a-1+1}{a-1}\leq 0,\ \frac{a}{a-1}\leq 0.$$

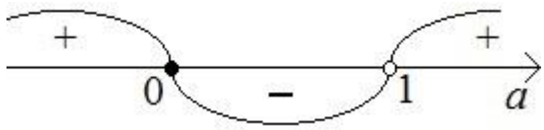

Рисунок 1

Таким образом, данное уравнение имеет корень $x=\frac{1}{1-a}$ при $a\in[0;1)$.

2. Решим данное уравнение при $x\in(-\infty;1)$.

При этом выражение, стоящее под знаком модуля, является отрицательным, и тогда $|x-1|=-(x-1)=1-x$. Тогда получим:

$$1-x=ax,\ ax+x=1,\ (a+1)x=1.$$

При $a=-1$ получаем уравнение $0=1$. В данном случае, уравнение не имеет решений.

При $a\neq -1$ имеем $x=\frac{1}{a+1}$.

Найдем все значения параметра a при которых $\frac{1}{a+1}\in(-\infty;1)$. Для этого решим неравенство

$$\frac{1}{a+1}<1,\ \frac{1}{a+1}-1<0,\ \frac{1-(a+1)}{a+1}<0,\ \frac{-a}{a+1}<0,\ \frac{a}{a+1}>0.$$

Рисунок 2

Таким образом, данное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{a+1}$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

3. Отметим на числовой прямой множество значений a, при которых данное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{1-a}$:

Рисунок 3

Отметим на числовой прямой множество значений a, при которых данное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{a+1}$

Рисунок 4

При $a \in (0; 1)$ существует и корень $x = \frac{1}{1-a}$, и корень $x = \frac{1}{a+1}$. Возможен случай, когда при некотором значении $a \in (0; 1)$, найденные корни совпадут, и тогда уравнение будет иметь только одно решение.

В данном случае найденные корни не могут совпадать ни при каком $a \in (0; 1)$, так как первый корень должен принадлежать промежутку $[1; +\infty)$, а второй корень – промежутку $(-\infty; 1)$.

Теперь мы сможем выяснить (рисунок 5), сколько корней имеет данное уравнение в зависимости от параметра a.

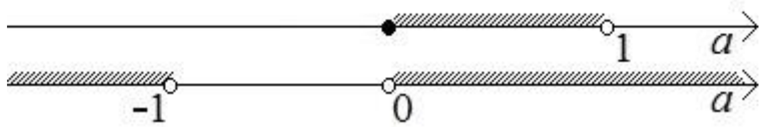

Рисунок 5

Ответ: 1) уравнение не имеет решений при $a \in [-1; 0)$;

2) уравнение имеет 1 решение при $a \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$;

3) уравнение имеет 2 решения при $a \in (0; 1)$.

Замечание. После получения решения задачи с параметром, следует проверить, что найденные промежутки не пересекаются и покрывают весь промежуток $(-\infty; +\infty)$ (или указанное в задаче множество, которому может принадлежать параметр).

2.2 Графический метод

Задача. Найти число решений уравнения $|x-1| = ax$ в зависимости от параметра a.

Решение. Построим графики функций $y = |x-1|$ и $y = ax$ в координатах x, y.

График функции $y = |x-1|$ получим из графика функции $y = |x|$ с помощью сдвига на 1 единицу вправо.

График функции $y = ax$ представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Угловой коэффициент прямой a равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси x. При этом угол откладывается против часовой стрелки.

При изменении параметра a прямая $y = ax$ будет поворачиваться вокруг начала координат. Тогда получим, что при $a \in (-\infty; -1)$ графики построенных функций будут иметь одну точку пересечения (рисунок 6). В этом случае данное уравнение будет иметь один корень.

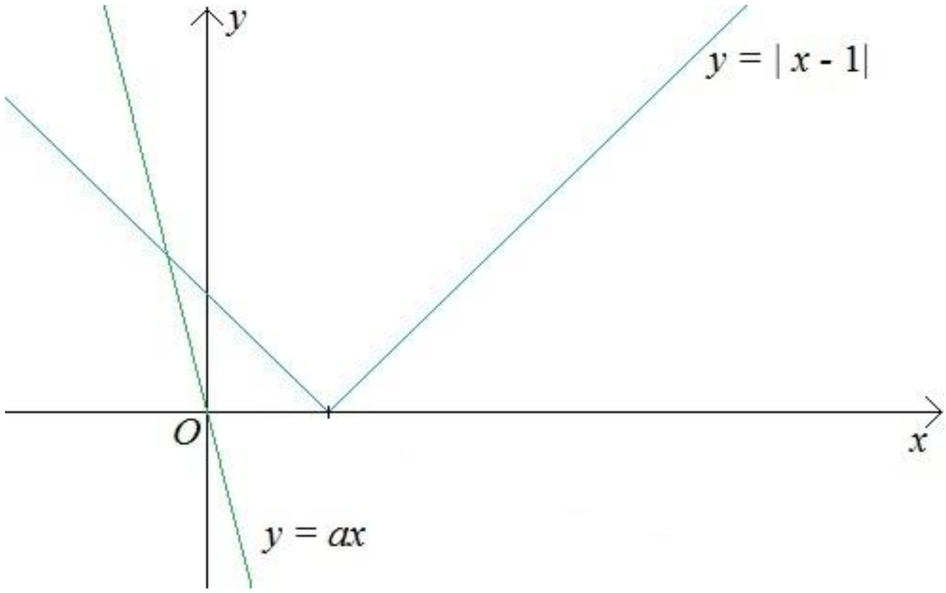

Рисунок 6

При $a \in [-1; 0)$ графики построенных функций не будут иметь точек пересечения (рисунок 7). В этом случае данное уравнение не будет иметь корней.

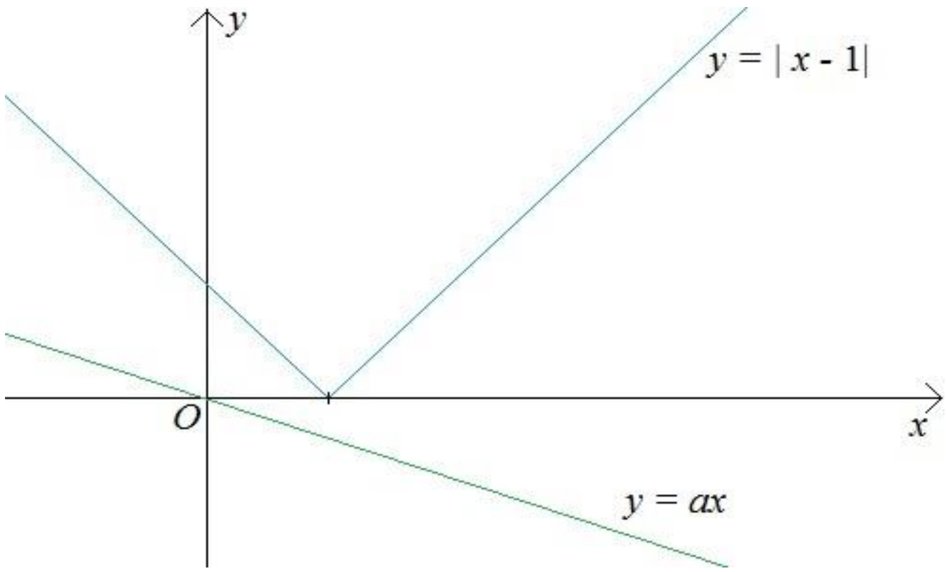

Рисунок 7

При $a = 0$ графики построенных функций будут иметь одну точку пересечения (рисунок 8). В этом случае данное уравнение будет иметь один корень.

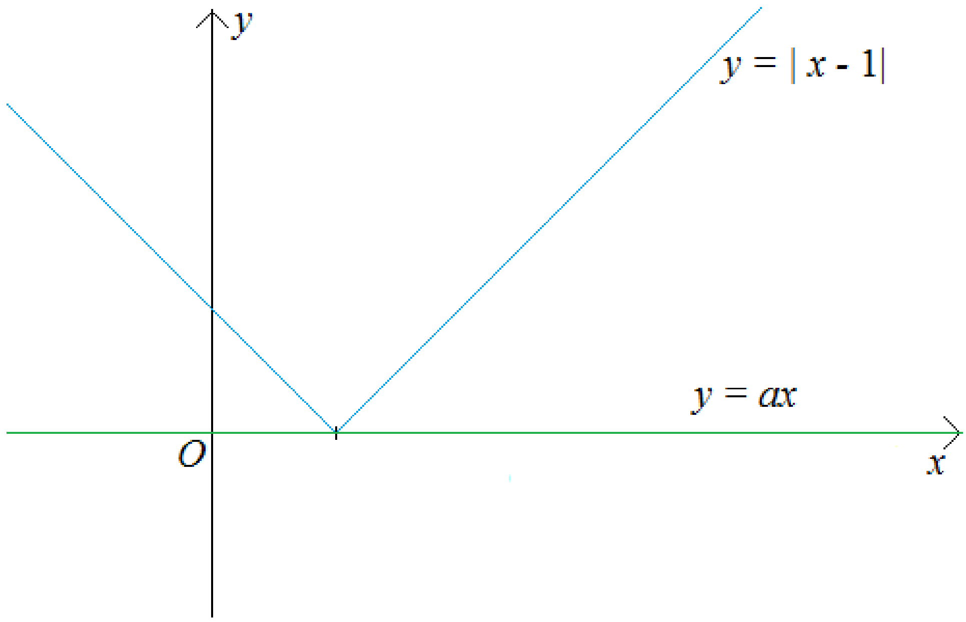

Рисунок 8

При $a \in (0;1)$ графики построенных функций будут иметь две точки пересечения (рисунок 9). В этом случае данное уравнение будет иметь два корня.

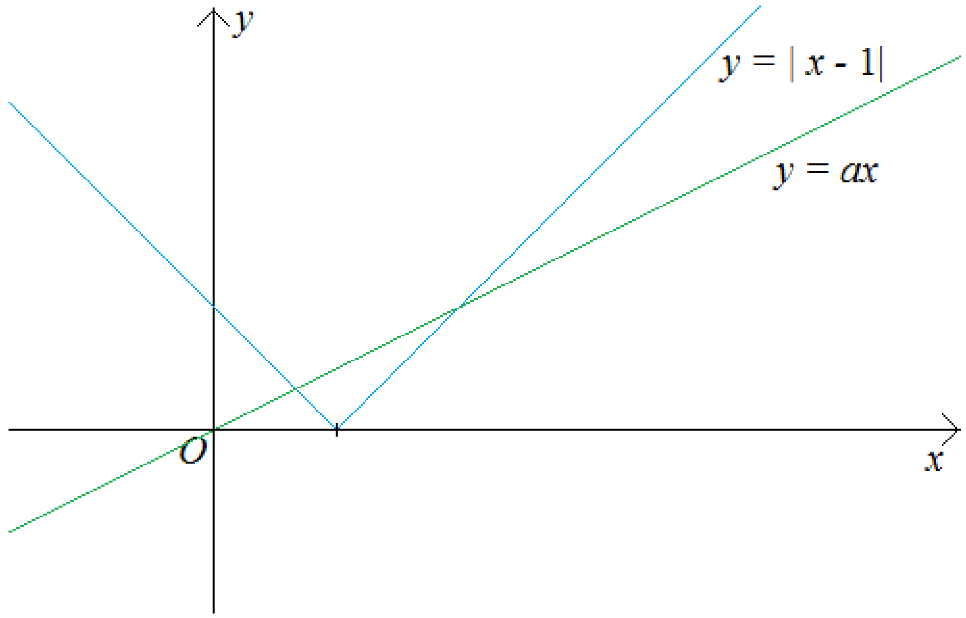

Рисунок 9

При $a \in [1; +\infty)$ графики построенных функций будут иметь одну точку пересечения (рисунок 10). В этом случае данное уравнение будет иметь один корень.

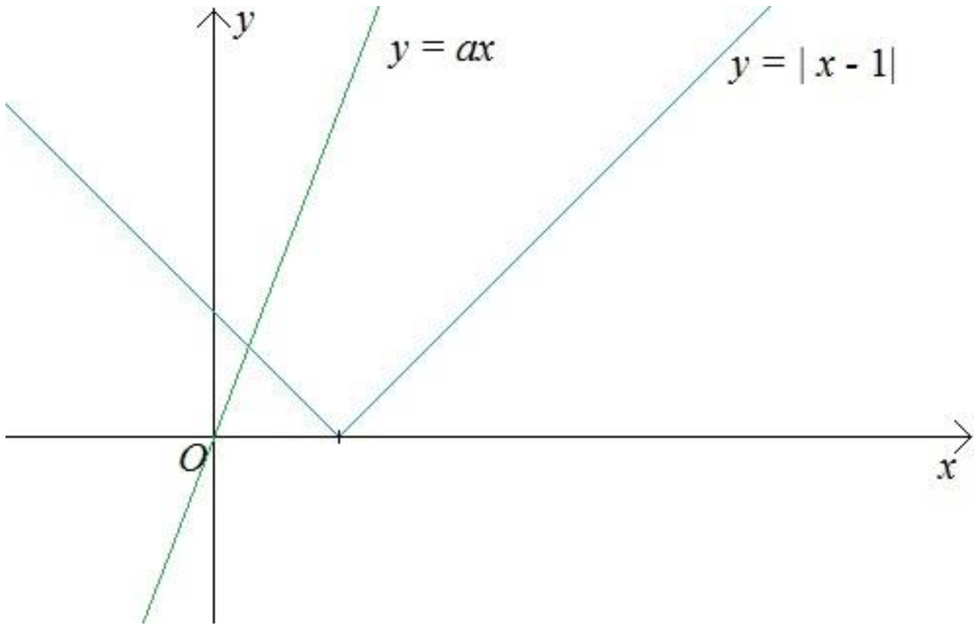

Рисунок 10

Объединив множества значений параметра a, при которых уравнение имеет одно решение, получим ответ.

Ответ: 1) уравнение не имеет решений при $a \in [-1; 0)$;

2) уравнение имеет 1 решение при $a \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$;

3) уравнение имеет 2 решения при $a \in (0; 1)$.

2.3 Решение задачи относительно параметра

Задача. Найти число решений уравнения $|x-1| = ax$ в зависимости от параметра a.

Решение. Так как в данное уравнение неизвестное входит и под знаком модуля, а параметр под знак модуля не входит, то решим данную задачу относительно параметра. При этом будем считать, что x - параметр, a - неизвестное.

$$|x-1| = ax$$

При $x=0$ получаем уравнение $1=0$. В данном случае, уравнение не имеет решений.

При $x \neq 0$ имеем $a = \dfrac{|x-1|}{x}$.

Построим график функции $a = \dfrac{|x-1|}{x}$ в координатах Oxa. Для этого преобразуем формулу, задающую данную функцию.

$$a = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}, x \geq 1; \\ \dfrac{-x+1}{x}, x < 1. \end{cases} \qquad a = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{x}, x \geq 1; \\ -1+\dfrac{1}{x}, x < 1. \end{cases}$$

Получим

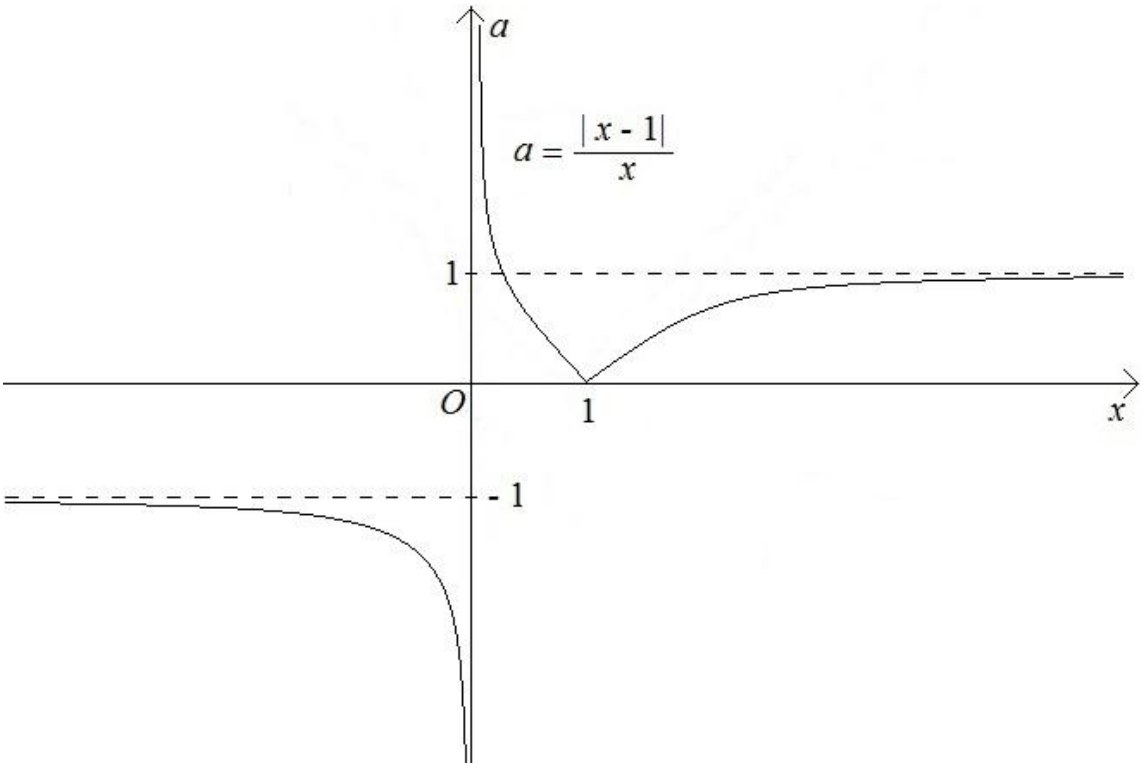

Рисунок 11

Построенный график позволяет выяснить, сколько корней имеет данное уравнение при заданном значении параметра a_*. Для этого достаточно выяснить сколько точек пересечения у построенного графика с горизонтальной прямой $a = a_*$.

Тогда получаем зависимость количество корней данного уравнения в зависимости от параметра a.

Ответ: 1) уравнение не имеет решений при $a \in [-1; 0)$;

2) уравнение имеет 1 решение при $a \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$;

3) уравнение имеет 2 решения при $a \in (0; 1)$.

Несколько подробнее познакомиться с обзорным изложением темы «Задачи с параметрами» можно в статьях, опубликованных в журнале «Квант» [2-4]. Номера данного журнала находятся в свободном доступе на сайте [5].

3 Некоторые рекомендации по применению различных методов решения задач с параметрами

3.1 Применение аналитического метода

3.1.1 Типовые задания

Предположим, что данная задача с параметром имеет вид, аналогичный некоторому типовому заданию без параметра. В качестве примера приведем следующую задачу.

Задача ([6], задача 514451). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a} = x^2 + ax + 3$$

имеет ровно три различных корня.

В данном случае имеется иррациональное уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$, для которого известен стандартный метод решения. Отсюда следует, что целесообразно начать решение данной задачи с применения аналитического метода, то есть заменить данное уравнение равносильной ему системой

$$\begin{cases} x^4 - x^2 + a = \left(x^2 + ax + 3\right)^2, \\ x^2 + ax + 3 \geq 0. \end{cases}$$

Изучить решение приведенной задачи можно на сайте [6], задача 514451.

Для самостоятельного решения можно рекомендовать [6], задачи 514478, 514484, 500115, 484545, 517464 и др.

3.1.2 «Нестандартные» задания

Предположим, что приведенное в задаче с параметром уравнение (неравенство), содержит одновременно, например, $\sin x$ и 2^x или имеет настолько сложный вид, что его решение типовыми методами весьма проблематично. В качестве примера приведем следующую задачу.

Задача. Для всех значений параметра *a* решите уравнение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{ax^2+3}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4x+1}=\sqrt[3]{ax^2+3}-\sqrt[3]{4x+1}.$$

Решение. Данное уравнение содержит одновременно и показательные функции, и корни. Очевидно, что в общем случае уравнения такого типа не допускает аналитического (точного) решения. Следует отметить, что в уравнение выражения ax^2+3 и $4x+1$ входят более чем по одному разу. В этом случае целесообразно попытаться применить метод введения вспомогательной функции (задачи из пункта 3) нижеприведенного списка).

При решении «нестандартных» задач часто применяются следующие методы:

1) использование монотонности: [6] задачи 484640, 508258, 505244;

2) применение ограниченности: [6] задачи 484639, 512818, 502026;

3) введение вспомогательной функции: [6] задачи 512996, 511469, 505432;

4) использование соображений симметрии: [6] задачи 510665, 513268, 484631, 484635.

Кроме того, представляется целесообразным ознакомиться со статьями [7-8].

3.2 Применение графического метода

3.2.1 Общие рекомендации

Использование графического метода целесообразно в случае, когда по данной задаче возможно построение ее графической интерпретации при приемлемой трудоемкости.

Как правило, в задания, решаемые графическим методом, входят уравнения (или соответствующие неравенства):

1) $y=kx+b$ - уравнение прямой;

2) $y=ax^2+bx+c$ - уравнение параболы;

3) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ - уравнение окружности с центром в точке $C(x_0,y_0)$ и радиусом R;

4) $y-y_0=\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ - уравнение полуокружности (верхней) с центром в точке $C(x_0,y_0)$ и радиусом R;

5) уравнение с модулем;

6) уравнение, содержащее $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ - расстояние между точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

Кроме того, уравнение может иметь вид произведения, равного 0. Причем каждый из сомножителей определяет одну из вышеприведенных линий. Например, уравнение

$$(x^2+y^2-4)(y-x)=0$$

задает на плоскости объединение окружности $x^2+y^2=4$ и прямой $y=x$.

При использовании графического метода часто бывает полезным условие касания графиков двух функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$:

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f'(x)=g'(x). \end{cases}$$

3.2.2 Построение в координатах *Oxy*

Приведем обзор приложений построения чертежей в координатах *Oxy*.

1. *Уравнение вида* $f(x)=g(x)$. Построим в координатах *Oxy* графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. (рисунок 12).

Сколько точек пересечения у построенных графиков – столько и корней у данного уравнения. В данном случае уравнение имеет два корня x_1 и x_2.

Для самостоятельного решения можно рекомендовать [6], задачи 511366, 519519, 507479, 485982 и др.

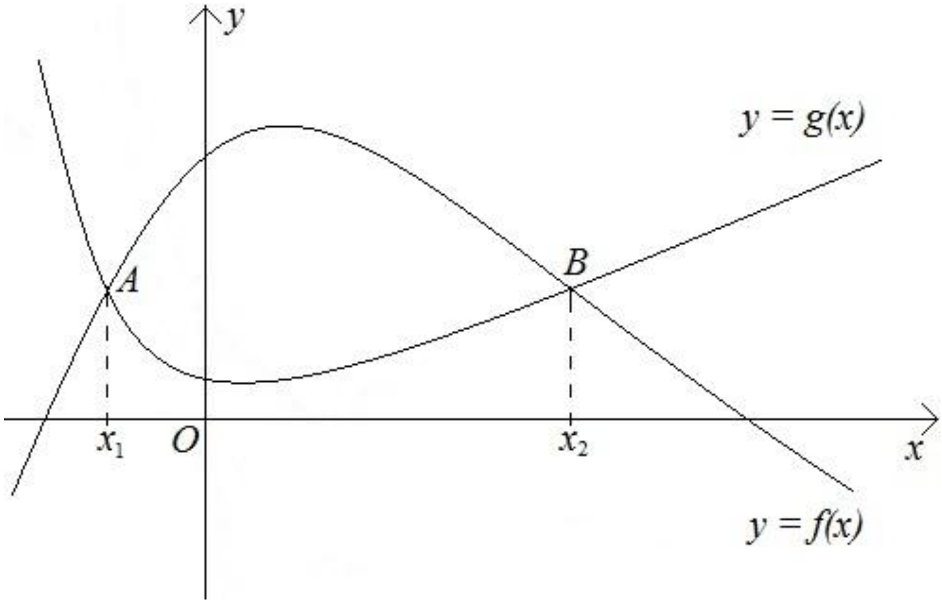

Рисунок 12

2. *Неравенство вида* $f(x) < g(x)$. Построим в координатах *Oxy* графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

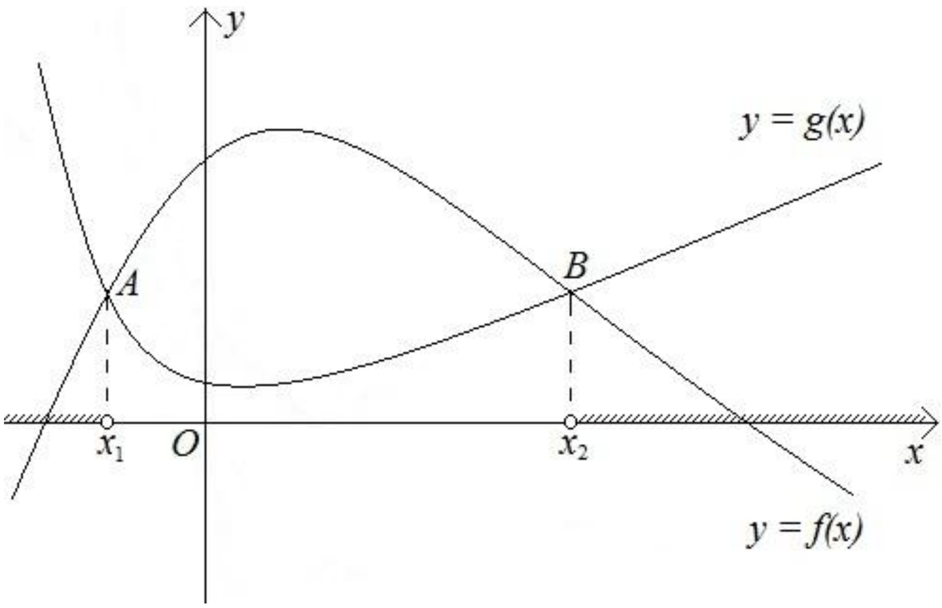

Рисунок 13

Найдем промежутки, на которых график функции $y = f(x)$ лежит ниже графика функции $y = g(x)$. Объединив полученные промежутки, найдем решение данного неравенства – множество $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Для самостоятельного решения можно рекомендовать [6], задачи 510517, 507594, 484643 и др.

3. *Система уравнений вида*

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Построим в координатах Oxy линии, заданные уравнениями $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$.

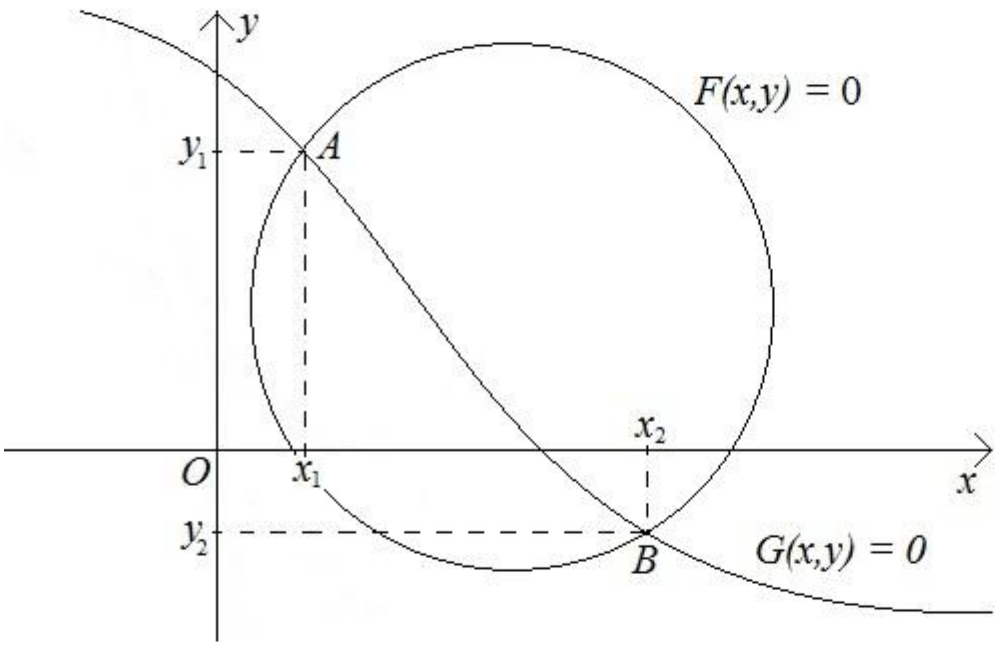

Рисунок 14

Сколько точек пересечения у построенных линий – столько система уравнений имеет решений. В данном случае система уравнений имеет два решения: (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Для самостоятельного решения можно рекомендовать [6], задачи 514386, 517424, 484645, 484647, 485952 и др.

3.2.3 Построение в координатах *Oxa*

Приведем обзор приложений построения чертежей в координатах *Oxa*.

1. *Уравнение с параметром*. Предположим, что нам удалось выразить a через x. Построим график функции $a = f(x)$.

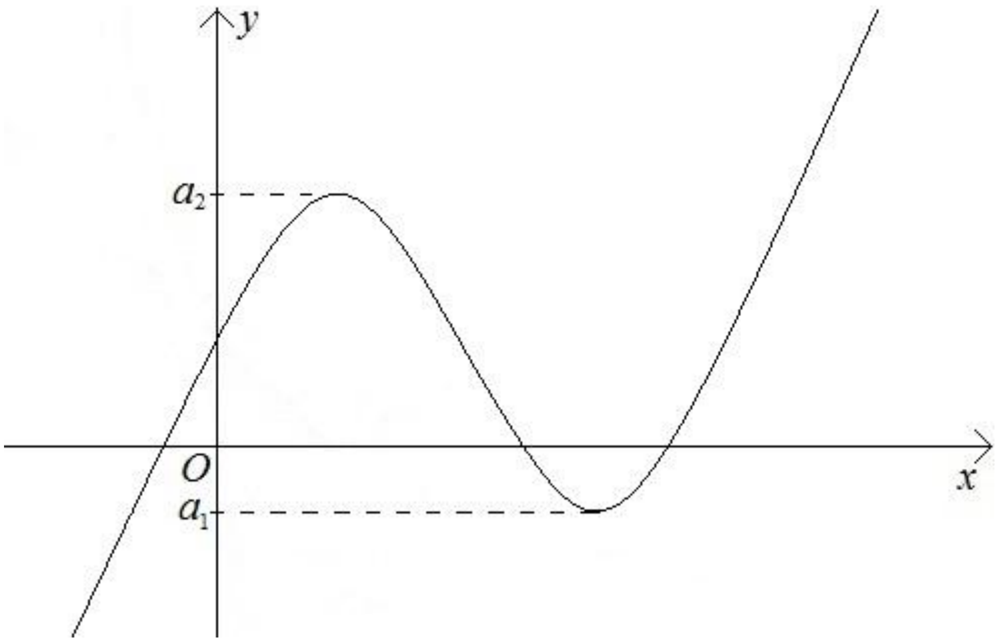

Рисунок 15

Из полученного чертежа сразу можно сделать вывод, что данное уравнение при $a \in (-\infty; a_1) \cup (a_2; +\infty)$ имеет один корень, при $a = a_1$ и $a = a_2$ два корня, а при $a \in (a_1; a_2)$ – три корня.

Для самостоятельного решения можно рекомендовать задачи, приведенные в статье [10].

2. Неравенство с параметром. Рассмотрим возможности применения построений в координатах *Oxa* в данном случае на конкретных примерах.

Задача (неравенство взято из [6], задача 501219). Решите неравенство

$$\frac{x-2}{ax^2-\left(a^2+1\right)x+a}\geq 0$$

для всех положительных значений параметра *a*.

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$ax^2-\left(a^2+1\right)x+a=ax^2-a^2x-x+a=ax^2-a^2x-x+a=$$

$$=ax\left(x-a\right)-\left(x-a\right)=(ax-1)(x-a)\,.$$

Получили неравенство

$$\frac{x-2}{(ax-1)(x-a)}\geq 0\,.$$

Построим в координатах Oxa множество точек, координаты которых удовлетворяют данному неравенству.

Замечание. Учитывая, что в задаче требуется решить неравенство при всех положительных значениях параметра, то при построении можно ограничиться только полуплоскостью $a>0$.

Искомое множество точек имеет следующие границы.

1. $x-2=0$, $x=2$ - прямая. Так как неравенство нестрогое, то данная прямая будет принадлежать искомому множеству точек. Тогда построим ее сплошной линией.

2. $ax-1=0$, $a=\dfrac{1}{x}$ – гипербола. Так как при $ax-1=0$ имеем деление на 0, то данная гипербола не будет принадлежать искомому множеству точек. Тогда построим гиперболу пунктирной линией.

3. $x-a=0$, $a=x$ – прямая. Так как при $x-a=0$ имеем деление на 0, то данная прямая не будет принадлежать искомому множеству точек. Тогда построим прямую пунктирной линией.

4. Так как по условию $a>0$, то чертеж будет лежать в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что прямая $a=0$ также будет границей чертежа. Так как имеем строгое неравенство, то эту прямую начертим пунктиром (рисунок 16).

Построенные линии ограничивают несколько областей. Определим, какие из них принадлежат искомому множеству точек, а какие нет. Возьмем произвольную точку плоскости, не лежащую на построенных границах. Рассмотрим, например, точку $A(1;2)$ (рисунок 17).

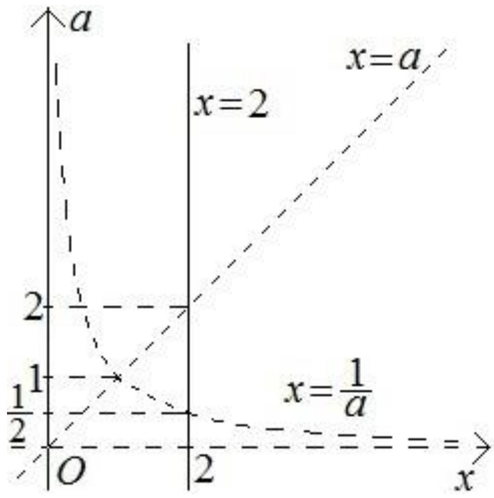

Рисунок 16

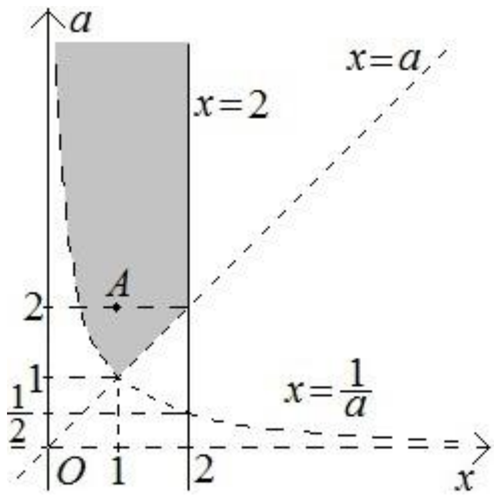

Рисунок 17

Так как при подстановке значений $x=1$ и $a=2$ в данное неравенство, мы получим верное неравенство, то точка $A(1;2)$ принадлежит искомому множеству точек. Построим теперь все множество точек, отвечающее решению данного неравенства, используя, что при переходе через любую границу один из множителей левой части данного неравенства будет менять знак. Отсюда следует, что любые две соседние области должны быть по-разному выделены на чертеже (рисунок 18).

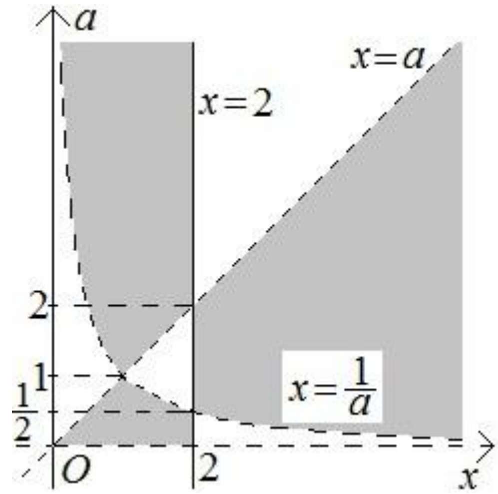

Рисунок 18

Построенное множество точек, координаты которых удовлетворяют данному неравенству, позволяет решить задачу.

Например, чтобы выяснить какое решение имеет неравенство, например, при $a=3$, нам достаточно найти пересечение построенного множества с горизонтальной прямой $a=3$. Получим: $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right] \cup (3; +\infty)$.

Перемещая горизонтальную прямую при $a \in (0; +\infty)$, получим ответ к данной задаче.

Ответ: 1) $x \in (a; 2] \cup \left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$, при $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$;

2) $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$, при $a \in \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$;

3) $x \in \left(a; \frac{1}{a}\right) \cup [2; +\infty)$, при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$;

4) $x \in [2; +\infty)$, при $a=1$;

5) $x \in \left(\frac{1}{a}; a\right) \cup [2; +\infty)$, при $a \in (1; 2)$;

6) $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right] \cup (a; +\infty)$, при $a \in (2; +\infty)$.

Задача ([6], задача 501219). Найти все положительные значения параметра a при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x-2}{ax^2-(a^2+1)x+a} \geq 0$$

является некоторый луч.

Решение. Построим в координатах Oxa множество точек, координаты которых удовлетворяют данному неравенству (рисунок 18).

Перемещая горизонтальную прямую при $a \in (0; +\infty)$, получим, что при $a = 1$ множеством решений неравенства является луч $[2; +\infty)$.

Ответ: $a = 1$.

Задача. Найти все значения параметра, при которых неравенство

$$\frac{4(x^2+a^2)-17}{(ax-1)(x^2-a)} \geq 0$$

имеет хотя бы одно решение, принадлежащее отрезку $[0; 1]$.

Решение. Построим в координатах Oxa множество точек, координаты которых удовлетворяют данному неравенству.

Теперь найдем все значения a, при которых данное неравенство имеет решения, попадающие в отрезок $[0; 1]$.

Данному отрезку в координатах Oxa отвечает бесконечная вертикальная полоса (рисунок 20).

Для того чтобы определить, есть ли при данном конкретном значении a_0 параметра a решения неравенства, попадающие в отрезок $[0; 1]$, достаточно выяснить, есть ли у горизонтальной прямой $a = a_0$ в выделенной полосе общие точки с множеством точек, отвечающим данному неравенству.

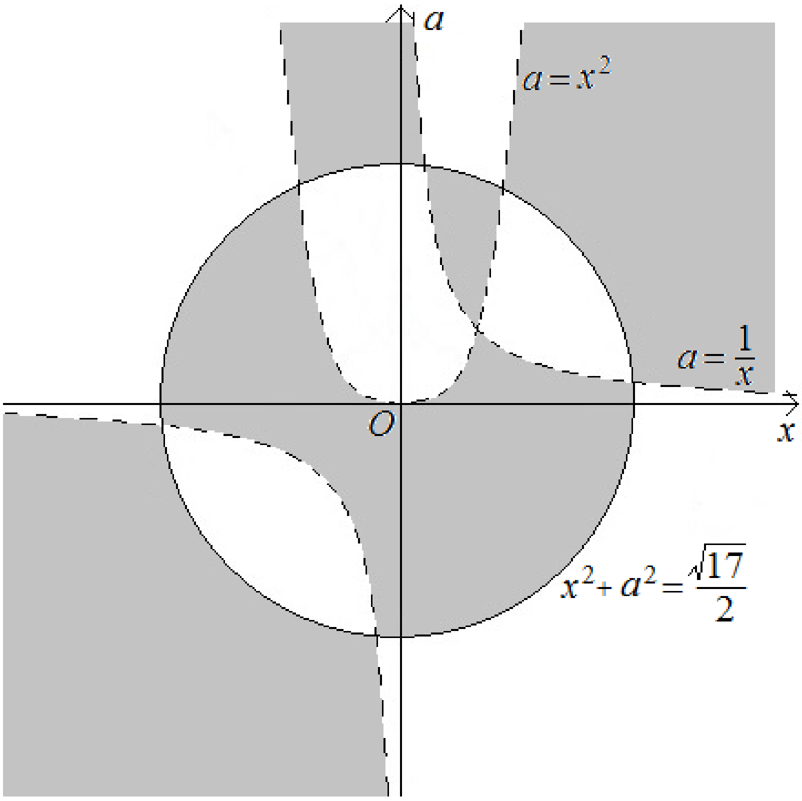

Рисунок 19

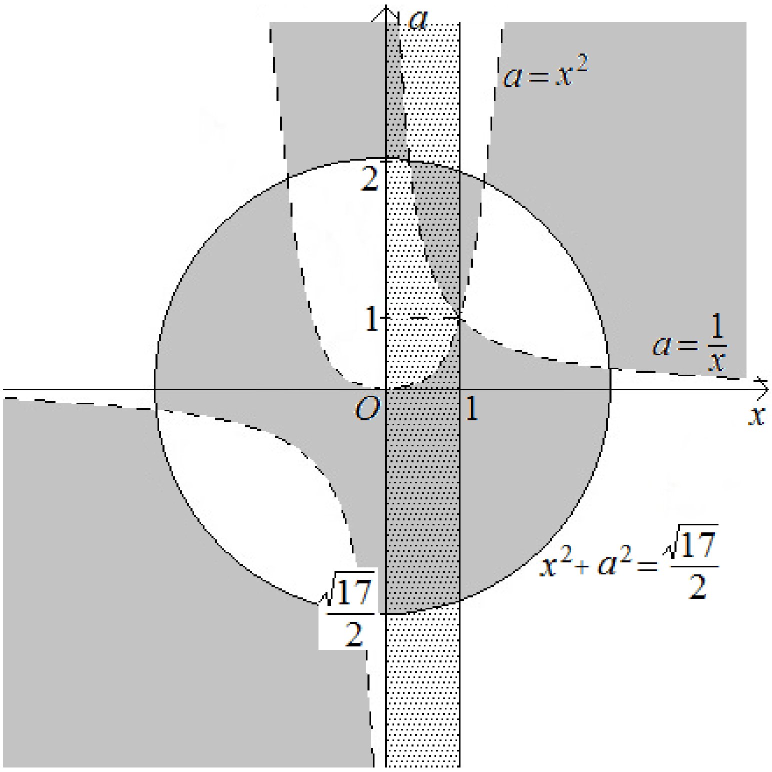

Рисунок 20

Получаем, что $a \in \left[-\frac{\sqrt{17}}{2}; 1\right] \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $a \in \left[-\frac{\sqrt{17}}{2}; 1\right] \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Для самостоятельного решения можно рекомендовать [6], задачи 516803 и 517267, а также статью [9].

3.3 Решение задач относительно параметра

Краткое, наглядное и весьма доступное изложение данного метода решения приведено в [10].

Список использованных источников

1. Голубев, В.И. О задачах с параметрами / В.И. Голубев, А.М. Гольдман // Математика. – 2002. - № 23. – С. 27-32.

2. Моргулис, А.Я. Внимание: в уравнении параметр / А.Я. Моргулис, А.Г. Мордкович, Б.А. Радунский // Квант. - 1970. - № 9. - С. 19-25.

3. Моргулис, А.Я. Решая неравенство с параметром… / А.Я. Моргулис, А.Г. Мордкович, Б.А. Радунский // Квант. - 1970. - № 10. - С. 51-59.

4. Вавилов, В. Задачи с параметрами / В. Вавилов // Квант. - 1997. - № 5. - С. 38-42.

5. www.kvant.info/old.htm

6. https://ege.sdamgia.ru/

7. Горнштейн, П. Необходимые условия и задачи с параметрами / П. Горнштейн, В. Полонский, М. Якир // Квант. - 1991. - № 11. - С. 44-49

8. Фалин, Г. Инвариантность и задачи с параметрами / Г. Фалин, А. Фалин // Квант. - 2007. - № 5. - С. 45-47.

9. Ярский, А.С. Неравенства с параметрами / А.С. Ярский // Квант. - 1987. - № 3. - С. 49-53.

10. Егоров, А. Решим относительно параметра / А. Егоров // Квант. - 1997. - № 4. - С. 43-46.

11. ЕГЭ 2018. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень). Рабочая тетрадь / С.А. Шестаков; под ред. И.В. Ященко - М.: МЦНМО, 2018. — 288 с. - ISBN 978-5-4439-1218-9.