Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Оренбург
2018

УДК 519.1(076.5)
ББК 22.176я7
Д 48

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко
Авторы: О.А. Пихтилькова, Т.М. Отрыванкина, Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

Д 48 Дискретная математика. Часть 1: методические указания / О.А. Пихтилькова, Т.М. Отрыванкина, Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 97 с.

Методические указания «Дискретная математика». Часть 1 предназначены для практических занятий, содержат краткое изложение лекционного материала, примеры решенных задач, задачи для самостоятельного решения, вопросы для повторения, тесты по темам и итоговая контрольная работа. Данная разработка поможет преподавателям и студентам усвоить темы практических занятий, успешно написать тестовые задания и решить контрольную работу. Решенные примеры окажут существенную помощь студентам при решении задании и на занятиях и дома, а также помогут подготовиться к коллоквиуму и зачету. Данная работа предназначена для обучающихся по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии.

УДК 519.1(076.5)
ББК 22.176я7

Содержание

Глава 1 Элементы теории множеств

1.1 Основные понятия теории множеств

1.1.1 Обозначения и способы задания множеств

Примеры решения задач

1) Задайте множество A = {x | x – целое неотрицательное и $x+2=5$} другим способом.

Решение. Корень уравнения $x+2=5$ равен 3. Это число целое неотрицательное, следовательно, является элементом данного множества.

Ответ: A={3}.

2) Задать различными способами множество A всех четных чисел 2, 4, 6, …., не превышающих 1000.

Решение.

Перечислением: A={2, 4, 6, 8, 10, …, 998, 1000};

Описанием: A={$x|x\in N$ и $x/2\in N$, $N\leq 1000$};

Порождающей процедурой: а) $2\in A$; б) если $x\in A$, то $(x+2)\in A$; в) $x\leq 1000$.

3) Верно ли, что: а) {{1,2}, {2,3}}={1,2,3}? б){{1,2}}={1,2}?

Решение.

а) Нет, так как элементами первого множества являются двух элементные подмножества {1,2} и {2,3}, а второе – трех элементное множество 1,2,3.

б) Нет, так как первое множество одноэлементное, состоящее из одного элемента – подмножества, а второе имеет два элемента 1 и 2.

4) Определить множество A решений уравнения $x^2 – 25 = 0$.

Решение.

$A = \{x \mid x^2 – 25= 0\} = \{–5; 5\}$.

5) Определить множество B решений неравенства $2x + 9 \geq 0$.

Решение.

$B = \{x \mid 2x + 9 \geq 0\} = \{x \mid x \geq –4,5\} = [–4,5; \infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

6) Сколько элементов в множестве $\{1,\{1\},2,\{1,\{2,3\}\},\varnothing\}$?

7) Определите мощность множества, состоящего из:

a) букв слова «математика»;

b) букв слова «перпендикулярные»;

c) цифр числа «635252»;

d) цифр числа «1010111».

8) Найдите более простое описание множеств (перечисляющее их элементы):

a) A={x | x – целое и $x^2+4x=12$};

b) B={x | x – название дня недели, не содержащее буквы “е”};

c) A={n^2 | n – целое}.

9) Перечислите элементы следующих множеств:

a) A={x | x∈Z и $10 \le x \le 17$};

b) C={x | x∈Z и $6x^2+x-1=0$};

c) B={x | x∈Z и $x^2<24$};

d) D={x | x∈R и $6x^2+x-1=0$}.

10) Определите с помощью характеристического свойства следующие множества:

a) S={2,5,8,11,…};

b) T=$\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \ldots\right\}$.

11) Задайте множество другим из известных вам способом:

a) A={x | $x \in Z$ и $x>5$};

b) A={y | $y \in Z$ и $y(y-1)(y+1)=0$};

c) A={x | $x \in Z$ и $x=x$};

d) A={x | $x \in Z$ и $x \neq x$};

e) A={x|$x \in Z$ и $x=0$ и $x=12$ и $x=27$};

f) A={y|$y \in Z$ и $y>0$и$y=2k+1$и$k \in Z$ };

g) ∅;

h) {1, 2};

i) {1, 2, …, n};

j) {0, ±2, ±4, ±6, …};

k) A={x | $x \in N \cup \{0\}$ и $x=2^n$};

l) Множество степеней числа 3;

m) Множество простых чисел;

n) Множество названий месяцев года, не содержащих «а».

1.2.1 Отношения между множествами

Примеры решения задач

12) Выясните, равны ли множества:

a) A={1, 2, 3}; B={2, 3, 1}.

b) A – множество всех равносторонних треугольников; B – множество всех равноугольных треугольников.

c) A={1, 5, 8}; B={2, 8}.

d) A={0, 1}; B={{0, 1}}.

Решение.

a) A={1, 2, 3}; B={2, 3, 1}. Множества состоят из одних и тех же элементов, следовательно, A=B.

b) A – множество всех равносторонних треугольников; B – множество всех равноугольных треугольников. Т.к. в равностороннем треугольнике все углы равны, то A=B.

c) A={1, 5, 8}; B={2, 8}. A≠B, т.к. в этих множествах различное количество элементов.

d) A={0, 1}; B={{0, 1}}. A≠B, так как первое – двухэлементное, а второе – одноэлементное.

13) Даны множества N, Z, R. Укажите, какие из них являются подмножествами.

Решение. N⊂Z, где N – множество натуральных чисел, а Z – целых чисел.

Z⊂ R, где R – множество действительных чисел.

14) Найти все подмножества множества A = {0;1;3}.

Решение. Несобственные подмножества Ø и A; одноэлементные {0}, {1}, {3}; двухэлементные {0; 1}, {0; 3}, {1; 3}. Следовательно, степень множества P(A), т.е. множество всех подмножеств, имеет вид P(A)={Ø;{0};{1};{3};{0;1};{0;3};{1;3};{0;1;3}}.

Проверка: если множество A состоит из ″n″ элементов, то число всех его подмножеств равно 2^n. В нашем случае, n = 3. Значит, 2^3 = 8, что совпадает с числом объектов в P(A).

15) Перечислить элементы следующих множеств:

1) $A=\{a|a\subseteq B, B=\{1,2,3\}\}$; 2) $A=\{a|a\in B, B=\{1,2,3\}\}$.

Решение.

1) Так как $a\subseteq B$, а B – трехэлементное множество, то имеется $2^3=8$ подмножеств: $A=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \varnothing\}$.

2) Так как $a\in B$, то $A=B=\{1,2,3\}$.

Задачи для самостоятельного решения

16) Даны три множества $A=\{0, 1\}$, $B=\{\{0,1\}$, $C=\{\{\{0,1\}, 2\}, 3\}$. Верно ли, что: $A\subset B$, $B\subset C$, но $A\not\subset C$?

17) Верно ли, что:

a) $1\in\{1,2\}$;

b) $3\notin\{0,1\}$;

c) $3\notin\varnothing$;

d) $\varnothing\notin\varnothing$;

e) $\varnothing\in\{\varnothing\}$;

f) $\{0,1\}\subset\{\{\{0,1\},2\},\{1,2\},\{0,1\}$;

g) $\{1,2\}\not\subset\{\{1,2\}, 1, 2\}$;

h) $\{1,2\}\subset\{\{1,2\}\}$.

1.3.1 Операции над множествами

Примеры решения задач

18) Заданы два множества. Выполните над ними все известные операции.
$A=\{x|\ x\in R$ и $1\le x\le 3\}$, $B=\{x|\ x\in R$ и $2\le x\le 4\}$.

Решение: $A\cup B=\{x|x\in R$ и $1\le x\le 4\}$; $A\cap B=\{x|x\in R$ и $2\le x\le 3\}$; $A\backslash B=\{x|x\in R$ и $1\le x<2\}$; $A\Delta B=\{x|x\in R$ и $1\le x<2$ и $3<x\le 4\}$; $\bar{A}=\{x|x\in R$ и $x<1$ и $x>3\}$;

19) Пусть A – множество всех женщин, универсальное множество U – множество всех людей. Тогда $\bar{A}$ – это множество всех мужчин.

20) Заданы множества A={x|1$\le$x$\le$5}, B={x|3$\le$x<7}. Определить результаты операций $A\cap B$, $A\cup B$, A\B, B\A, A+B.

Решение.

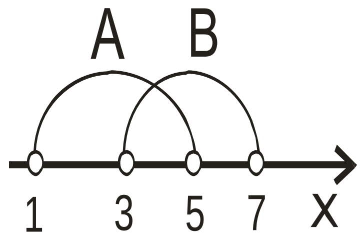


Рисунок 1

$A\cap B$={x|3$\le$x$\le$5}=[3;5]; $A\cup B$={x|1$\le$x<7}=[1;7); A\B={x|1$\le$x<3}=[1;3);

B\A ={x|5<x<7}=(5;7); A+B={x|1$\le$x<3$\cup$5<4<7}=[1;3)$\cup$(5;7).

21) Даны множества. X – множество отличников в группе, Y – множество студентов, живущих в общежитии X. Найдите множества: $X\cup Y$, $X\cap Y$, X\Y, Y\X, $X\oplus Y$.

Решение. $X\cup Y$ – множество студентов, которые учатся на отлично или живут в общежитии. $X\cap Y$ – множество отличников, которые живут в общежитии. X\Y – множество отличников, которые не живут в общежитии. Y\X – множество студентов, живущих в общежитии и не учащихся на отлично. $X\oplus Y$ – множество отличников, не живущих в общежитии и множество неотличников, живущих в общежитии.

22) Для множеств S={4,5,6,7,8} и T={4,6,8}. Определить SUT, S$\cap$T, S\T.

Решение. S U T={4,5,6,7,8}, S $\cap$ T={4,6,8} , S \ T={5,7}

23) Доказать аналитически: $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

Решение. Введем обозначения: $D=(A\cap B)\cup C$; $E=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

а) Пусть $x\in D$, тогда имеет место либо $x\in A\cap B$, либо $x\in C$. Если $x\in A\cap B$, тогда $x\in A$ и $x\in B$ и в таком случае $x\in A\cup C$ и $x\in B\cup C$ или, что тоже самое, $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$, т.е. $x\in E$. Если $x\in C$, тогда можно записать $x\in A\cup C$

и $x \in B \cup C$ одновременно. Откуда, очевидно, и в этом случае $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ т.е. $x \in E$.

Итак, если $x \in D$, то $x \in E$. Следовательно, $D \subseteq E$.

б) Пусть $x \in E$. Тогда $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$. Если $x \in A \cup C$, то либо $x \in A$, либо $x \in C$. Но если $x \in C$, то (см. п.а) $x \in D$. Если же $x \notin C$, тогда $x \in B$. Из последнего следует, что $x \in A$ и $x \in B$, т.е. $x \in A \cap B$, или, что тоже самое, $x \in (A \cap B) \cup C$, т.е. $x \in D$.

Итак, если $x \in E$ то $x \in D$. Следовательно, $E \subseteq D$.

Из пунктов (а) и (б) следует, что $D \subseteq E$ и $E \subseteq D$. Следовательно, D=E, т.е. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Тождество доказано.

24) Доказать, что для произвольных множеств A и B имеет место соотношение $A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Решение. Для доказательства используем метод от противного, т.е. предположим, что $A \subseteq B$ и $\overline{B} \not\subset \overline{A}$.Тогда из $A \subseteq B \Rightarrow$ если $a \in A$, то $a \in B$. (1)

С другой стороны, из $\overline{B} \not\subset \overline{A} \Rightarrow$ существует такой элемент a, что $a \in \overline{B}$ и $a \notin \overline{A} \Rightarrow a \in \overline{B}$ и $a \in A$. (2)

Но с учетом (1) и (2) $a \in A$ и $a \in \overline{B} \Rightarrow a \in B$ и $a \in \overline{B} \Rightarrow a \in (B \cap \overline{B}) = \varnothing$, т.е. получили противоречие. Следовательно, предположение $\overline{B} \not\subset \overline{A}$ ложно и поэтому $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, т.е. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Аналогично можно показать, что $\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B$ и, значит, $A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}$, что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

25) Опишите на словах элементы следующих множеств: $A \cap B \cap C$; $(A \cup B) \cap \overline{C}$.

26) Пусть A={1,3,5,7}; B={2,4,6,8}; C={1,2,3,4,5}. Найдите: $A \cup C, B \cap C, A \setminus C, B \Delta C$.

27) Пусть U={1,2,3,4}; A={1,3,4}; B={2,3}, C={1,4}. Найдите:

$$\overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cap B}, A \cap \overline{B}, (B \setminus A) \cup \overline{C}.$$

28) Изобразите на числовой прямой пересечение, объединение и разность следующих множеств: $X_1=\{x|x\in R$ и $x^2-1\le 0\}$ и $X_2=\{x|\ |x|<1\}$.

29) Выполните все известные вам операции над заданными множествами:

a) A={1,2,3,4}; B={1,3,5}; C={5,6}.

b) A={a,b,d}; B={b,d,e,h}; U={a,b,c,d,e,f,g,h}.

c) A={2,4,6,8}; B={3,6,9}; C={1,2,3,…,10}.

30) Выразите операцию разности двух множеств и симметрической разности двух множеств через операции объединения, пересечения и разности.

31) В качестве универсального множества данной задачи зафиксируем U={p,q,r,s,t,u,v,w}. Пусть A={p,q,r,s}, B={r,t,v}, C={p,s,t,u}. Найдите элементы следующих множеств:

a) $B\cap C$;

b) $A\cup C$;

c) $\overline{C}$;

d) $A\cap B\cap C$;

e) $\overline{A\cup B}$;

f) $B\Delta C$;

g) $(A\cup B)\cap(A\cap C)$;

h) B\C.

32) Пусть U={a,b,c,d}, X={a,c}, Y={a,b,d}, Z={b,c}. Найдите множества:

а). $X\cap\overline{Y}$; *б*). $(X\cap Z)\cup\overline{Y}$; *в*). $X\cup(Y\cap Z)$;
г). $(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$; *д*). $X\cup Y$; *е*). $\overline{X}\cap\overline{Y}$;
ж). $\overline{X\cap Y}$; *з*). $(X\cup Y)\cup Z$; *и*). $X\cup(Y\cup Z)$;
к). $X\setminus\overline{Z}$; *л*). $(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)$.

33) Пусть U={1,2,3,4,5,6}, A={1,2,3}, B={1,3,5,6},C={4,5,6}.

Найдите множества:

а). $A\setminus C$; *б*). $B\setminus C$; *в*). $C\setminus B$; *г*). $A\setminus B$; *д*). $\overline{A}\cup B$;
е). $B\cap\overline{A}$; *ж*). $A\cap C$; *з*). $(C\cup A)\setminus(C\cap A)$.

34) Рассмотрим подмножества целых чисел: A={3n | n∈Z и n≥4}; B={2n | n∈Z} и C={n | n∈Z и n^2≤100}. Используя операции на множествах, выразите следующие подмножества через A, B и C:

a) множество всех нечетных целых чисел;

b) {-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10};

c) {6n | n∈Z и n≥2};

d) {-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9}.

e) Задайте множество A\B с помощью задания свойств элементов.

35) Для заданных множеств A и B найти их объединение, пересечение и дополнение к множеству A. Изобразить все множества на числовой оси.

1) $A=\{x\in R/,\ x^2-10x+21 \le 0\}$; $B=\{x\in R/,\ 4-5x \ge 2x-31\}$;

2) $A=\{x\in R/,\ (2x+4)(x-5)<0\}$; $B=\{x\in R/,\ |x/3+2| < 3\}$;

3) $A=\{x\in R/,\ \ln(x-5)>2\}$; $B=\{x\in R/,\ x^2-5x+6 \ge 0\}$;

4) $A=\{x\in R/,\ \lg(x-5) > 3\}$; $B=\{x\in R/,\ (x-5)/(x+2) < 3\}$.

36) Пусть A_1 – множество четных натуральных чисел; A_2 – множество, состоящее из числа 10 и всех нечетных натуральных чисел, не делящихся на 5; A_3 – множество натуральных чисел, делящихся на 5. Найдите: $A_1\cup A_2\cup A_3$.

37) Пусть M множество всех параллелограммов на плоскости; A_1 – множество квадратов на плоскости; A_2 – множество прямоугольников на плоскости; A_3 – множество ромбов на плоскости. Найдите $A_i\cup A_j$; $A_i\cap A_j$; $A_i\cap \bar{A}_j$, где i,j=1,2,3.

1.4.1 Основные свойства операций

Примеры решения задач

38) Доказать, что $A\cap(A\cup B)=A$.

Решение. $A\cap(A\cup B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)=A\cap(B\cup U)=A\cap U=A$.

39) Доказать, используя тождества алгебры множеств, что $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$.

Решение. Используя тождества алгебры множеств, получаем

$$A\cup(B\setminus A)=A\cup(B\cap\overline{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})=(A\cup B)\cap I=A\cup B.$$

40) Упростить выражение $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

Решение. Используя законы и тождества алгебры множеств, получаем:

$$(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = [(A \cup \overline{A}) \cap B \cap C] \cup \overline{B} \cup \overline{C} =$$
$$(I \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = (B \cap C) \cup (\overline{B \cap C}) = I$$

Задачи для самостоятельного решения

41) Пусть A={x | x – целое четное число и 1≤x≤12}; B={x | x – целое число, кратное 3 и 1≤x≤12}. Убедитесь, что $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

42) Опираясь на законы алгебры множеств, докажите, что произвольные множества A и B удовлетворяют свойству: $A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$.

43) Считая, что X_1, X_2, X_3 являются подмножествами множества X, упростите выражения:

a) $(X_1 \cup X_2) \setminus X_1$;

b) $(X_1 \cap X_2) \setminus X_1$;

c) $(X_1 \cap X_2) \cup X_1$;

d) $(X_1 \cup X_2 \cup X_3) \cup (X_1 \cup X_2) \cup (X_1 \cup X_3)$;

e) $((X_1 \cup X_2) \cap (X_1 \cup X_3)) \setminus (X_2 \cup X_3)$;

44) $((X_1 \setminus X_2) \cap (X_1 \cup X_2))$Докажите с помощью законов алгебры множеств следующие тождества:

a) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B$;

b) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A \cup C}) = \varnothing$;

c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

d) $A \Delta A \Delta A = A$.

45) Упростить выражения:

1) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B$;

2) $\overline{\overline{\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})} \cup (A \cup B)}$;

3) $\overline{\overline{(A \cup \overline{B})} \cup \overline{(\overline{A} \cup B)} \cap (A \cup B)}$;

4) $\overline{[(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap D)] \cap \overline{\overline{(A \cap B \cap C \cap D \cup I)}}}$;

5) $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})$;

6) $(\overline{A\setminus B}\setminus B\cap C)\setminus\overline{\overline{C}\cup D}$;

7) $(A\cup A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap C)\cap\overline{A}\cap B\setminus C$;

8) $\overline{A}\cup(A\setminus\overline{B})\cup(\overline{A}\setminus B)$.

44) Доказать тождества, используя законы алгебры множеств:

1) $\overline{(\overline{\overline{A}\cup B})\cup(A\cup\overline{B})}=B\setminus A$;

2) $A\setminus[(A\cap B)\cup(A\setminus B)]=\varnothing$;

3) $(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)=C$;

4) $(A\cap B\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap D\cap E)\cup(A\cap D\cap\overline{A})=A\cap B\cap D$;

5) $[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap D\cap E)]\cap\overline{[(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{D}\cap\overline{E})\cup(\overline{A}\cap B\cap E)]}=$ $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{D}\cap E)$.

1.5.1 Диаграммы Эйлера-Венна

Примеры решения задач

45) Заштрихованные множества, полученные с помощью диаграмм Эйлера-Венна запишите в виде формул.

Решение.

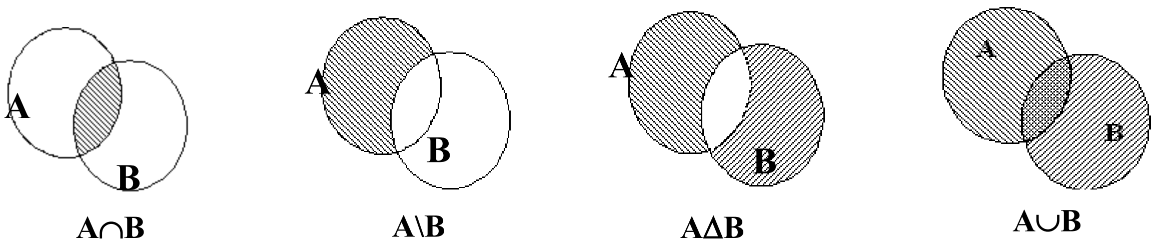


Рис. 2

46) Запишите формулой графически заданное множество:

Решение. Заданное выделенное множество может быть представлено различными способами, например:

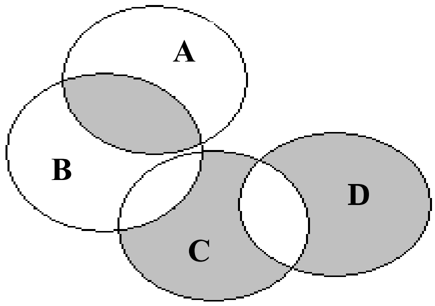


Рис. 3

(A∩B)∪(C\B\D)∪(D\C).

47) Построить диаграммы Венна для множеств A, B, C, D⊂I, если (A∪B)⊂(C∪D), $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap D \neq \varnothing$.

Решение. Одно из возможных решение может быть представлено следующей диаграммой:

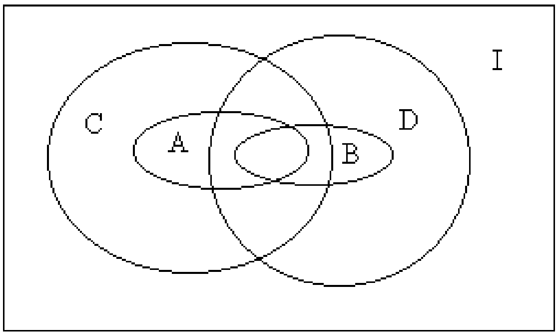


Рисунок 4

48) Заданы множества A = {1;3;4;6} и B = {3;5;6;7}. Определить результаты операций A∩B, A∪B, A\B, B\A, A+B.

Решение.

A + B = (A\B) ∪ (B\A)

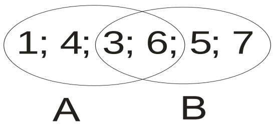


диаграмма Эйлера-Венна.

A∪B={1;3;4;5;6;7}; A∩B={3;6}; A\B={1;4}; B\A={5;7}; A+B ={1;4;5;7}.

Задачи для самостоятельного решения

49) Проиллюстрируйте тождества с помощью диаграмм Эйлера-Венна:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

b) $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$;

c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

d) $(B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = B$.

50) Для произвольных множеств A, B, C, D⊂I построить диаграммы Эйлера-Венна при условии:

1) $A, B, C \subset D$; $A \cap B \cap C \neq \varnothing$;

2) $C \subset A \cap B$; $D \subset B$; $C \cap D \neq \varnothing$;

3) $A \subset B$; $C \subset D$; $A \cap D = \varnothing$; $B \cap C = \varnothing$;

4) $C \subset A \cup B$; $(A \setminus B) \cap C \neq \varnothing$; $(B \setminus A) \cap C \neq \varnothing$.

51) С помощью диаграмм Эйлера-Венна установить справедливость каждого из следующих утверждений относительно произвольных множеств $A,B,C \subset I$:

1) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

2) если $A \cap B \subset \overline{C}$ и $A \cup C \subset B$, то $A \cap C = \varnothing$;

3) если $A \subset \overline{B \cup C}$, и $B \subset \overline{A \cup C}$, то $B \neq \varnothing$;

4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

1.6.1 Прямое произведение множеств

Примеры решения задач

52) Даны множества $A=\{1, 2\}$; $B=\{a, b\}$. Найдите $A \times B$, $B \times A$.

Решение: $A \times B=\{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$.

$B \times A=\{(a,1), (b,1), (a,2), (b,2)\}$.

53) Изобразить на плоскости декартово произведение множеств A и B.

$A=\{x \in R \mid x \in [1,2]\}$; $B=\{y \in R \mid y \in [2,3]\}$.

Решение.

$A \times B=\{(x,y) \in R^2 \mid x \in A, y \in B\}$

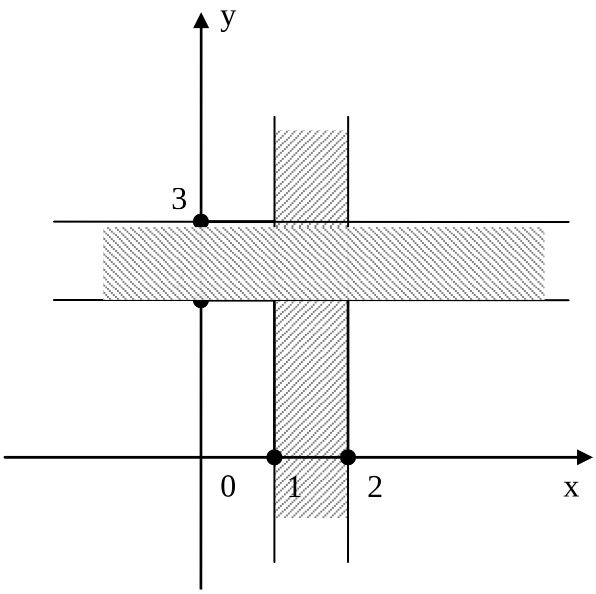


Рисунок 5

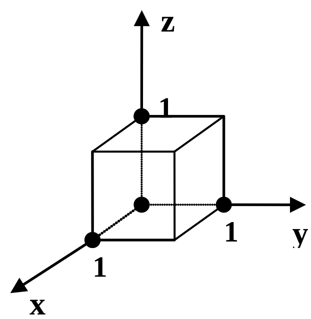


Рисунок6

54) Даны числовые множества:

A=[0,1], B=[0,1], C=[0,1]. Изобразите декартово произведение A×B×C.

Решение. $A\times B=\{(x,y,z)\in R^3|x\in A,y\in B,z\in C\}$.

Любую тройку можно представить точкой пространства (см. рис. 6).

55) Даны числовые множества: A=[0,1], B=[0,1], C=[0,1]. Изобразите декартово произведение A×B×C.

Решение. $A\times B=\{(x,y,z)\in R^3|x\in A,y\in B,z\in C\}$.

Любую тройку можно представить точкой пространства (см. рис. 6).

56) Пусть: $X = \{1,2\}$, $Y = \{-1,0,1\}$. Найти $X \times Y$, $Y \times X$.

Решение. $X \times Y =$ (1,-1), (1,0), (1,1), (2,-1), (2,0), (2,1) ,

$Y \times X =$ (-1,1), (-1,2), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2) .

57) Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Задать декартово произведение X×Y.

Решение. Декартово произведение X×Y удобно представить в виде таблицы (матрицы).

x \ y	y_1	y_2	y_3
x_1	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	(x_1, y_3)
x_2	(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	(x_2, y_3)
x_3	(x_3, y_1)	(x_3, y_2)	(x_3, y_3)
x_4	(x_4, y_1)	(x_4, y_2)	(x_4, y_3)

На множестве X задано бинарное отношение R, если задано подмножество декартова произведения $X \times X$ (т.е. $R \subseteq X \times X$).

58) Пусть дано множество $X = \{1,2,3,4\}$. Зададим на X следующие отношения:

$T = \{(x, y) \mid x, y \in X; x = y\}$ – отношение равенства;

$P=\{(x, y) \mid x, y \in X; x = y-1\}$ – отношение предшествования;

$Q = \{(x, y) \mid x, y \in X;$ x делится на $y\}$ – отношение делимости.

Решение. Все эти отношения заданы с помощью характеристического свойства. Перечислим элементы этих отношений для заданного множества X = {1,2,3,4}:

T = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)};

P = {(1,2), (2,3), (3,4) };

Q = {(4,4), (4,2), (4,1), (3,3), (3,1), (2,2), (2,1), (1,1)}.

59) Рассмотрим следующие отношения на множестве X = {1,2,3,4,5,6,7}:

$G = \{(x,y) \mid x, y \in X; x > y\}$;

$L = \{(x,y) \mid x, y \in X; x \le y\}$;

$M = \{(x,y) \mid x, y \in X$; (x - y) делится на 3};

$К = \{(x,y) \mid x, y \in X; x+ y \le 10\}$.

Исследуйте, какими свойствами они обладают?

Решение. Среди приведенных в примере отношений рефлексивными являются отношение L (т.к. $x \le x$ справедливо при всех $x \in X$) и отношение M (т.к. x - x = 0 делится на 3, поэтому пара (x, x) принадлежит отношению M при всех $x \in X$).

Симметричными являются отношения M (если x-y делится на 3, то и y-x делится на 3) и К (если $x+y \le 10$, то и $y+x \le 10$). Транзитивными являются отношения G, L. Транзитивным не является отношение M.

60) Для множеств S = {4,5,6,7,8} и T = { 4, 6, 8 }

а) Определить SxT, TxS.

б) Перечислить все элементы множества $R_1 = \{(m, n) \in SxT : m<n\}$.

в) Перечислить все элементы множества $R_2 = \{(m, n) \in TxS : m<n\}$.

Решение. SxT – это множество элементов следующих пар: {4,4},{4,6},{4,8}, {5,4}, {5,6}, {5,8}, {6,4}, {6,6},{6,8}, {7,4}, {7,6}, {7,8}, {8,4}, {8,6}, {8,8}.

TxS-это множество элементов следующих пар: {4,4}, {4,5}, {4,6}, {4,7}, {4,8}, {6,4}, {6,5},{6,6},{6,7},{6,8},{8,4},{8,5},{8,6},{8,7},{8,8}

R_1= {{4,6}, {4,8}, {5,6}, {5,8}, {6,8}}

R_2= {{4,5}, {4,6},{4,7}, {4,8}, {6,7}, {6,8}}

61) На множестве S={4,5,6,7,8} задано отношение R, определяемое как (m,n)∈R, если max{m, n}=7: а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар. б) Является ли отношение R: Рефлексивным, симметричным, транзитивным?

Решение. SxS = {(4,4), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8), (5,4), (5,5), (5,6), (5,7), (5,8), (6,4), (6,5), (6,6), (6,7), (6,8), (7,4), (7,5), (7,6), (7,7), (7,8), (8,4), (8,5), (8,6), (8,7), (8,8)}, R={ (4,7), (5,7), (6,7), (7,4), (7,5), (7,6), (7,7)}.

Отношение R является только симметричным, т. к. из условия (m,n)∈R следует (n,m)∈R.

62) Дано множество бинарного отношения {(1,2), (2,2), (Иванов, Петров)}. Найти область определения и область значения данного отношения.

Решение.

Областью определения данного отношения является множество {1, 2, Иванов} и областью значений – {2, Петров}.

Задачи для самостоятельного решения

63) Дано два множества A={x,y} и B={1,2,3}. Найдите декартовы произведения: A×B, B×A, B×B, A×A, B×A×B, A×B×A.

64) Изобразите на плоскости декартовы произведения множеств: A×B, B×A, B×B.

a) A={x | x∈[0;1]}; B={y | y∈(-1;1)};

b) A={ x | x∈R и x^2>1}; B={y | y∈R и y∈[1;+∞)}.

65) Постройте множество A^2, если:

a) A= {0, 1};

b) A={x, y, z};

c) A={0, 2, 4, 6, 8};

d) A={1, 3, 5, 7};

e) A={день, ночь};

f) A={a, b, c, d}.

66) Для данных множеств А и В найти $A \times B$ и $B \times A$ и дать геометрическую интерпретацию полученного декартова произведения.

а) $A = (-3; +\infty)$, $B = (-\infty;\ 7]$; б) $A = [-2; 5)$, $B = [-10;\ 4)$

Вопросы для повторения

1. Понятия множества, пустого и универсального множества. Отношение принадлежности элемента множеству, равенство множеств. Примеры.
2. Операции над множествами, определения, примеры. Теорема о пяти положениях.
3. Свойства операций над множествами. Примеры.
4. Понятие декартово произведение множеств. Примеры.
5. Способы задания множеств. Примеры

1.2 Отношения между множествами

1.2.1 Определение бинарных отношений

Примеры решения задач

67) Пусть A={2, 8, 16, 18}, а B={4, 6, 9, 12}. Приведите примеры отношений между этими множествами.

Решение. 1. ρ_1={(16,6), (2,12)} – множество пар чисел из A и B, оканчивающихся на одинаковую цифру, $\rho \subset A \times B$;

2. ρ_2={(8,4), (16,4), (18,6), (18,9)} **–** множество пар чисел, первое из которых, взятое из A, без остатка делится на второе из множества B.

68) Задайте бинарное отношение на множестве A={5,7,11,23}, т.е. $\rho \subset A \times A = A^2$.

Решение. Элементы множества A находятся в отношении ρ, если их разность без остатка делится на 3.

ρ={(5,11), (11,5) (5,23), (23,5), (11,23), (23,11), (5,5), (11,11), (23,23)}.

Задачи для самостоятельного решения

69) Рассмотрим генеалогическое древо, изображенное на рисунке 7. Выпишите упорядоченные пары, находящиеся в следующих отношениях на

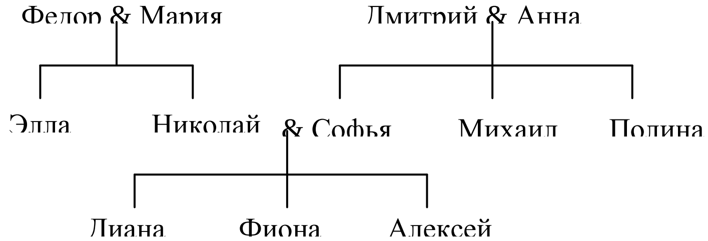


Рисунок 7

множестве P членов этой семьи:

a) ρ={(x,y) | x – дедушка y}; *b)* φ={(x,y) | x – сестра y}.

70) Выпишите упорядоченные пары, принадлежащие следующим бинарным отношениям на множествах A={1,3,5,7} и B={2,4,6}:

a) ρ ={(x,y) | x+y=9};

b) φ ={(x,y) | $x<y$}.

71) Множество ρ={(x,y) | x – делитель y} определяет отношение на множестве A={1,2,3,4,5,6}. Найдите все упорядоченные пары, ему принадлежащие.

72) Для каждого из следующих отношений на множестве натуральных чисел N опишите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям:

a) ρ={(x,y) | 2x+y=9};

b) ρ={(x,y) | $x+y<7$};

c) ρ={(x,y) | $y=x^2$};

d) ρ={(x,y) | $4x=y^2$}.

73) Является ли множество пар ρ отношением, заданным на множестве M:

a) ρ={(1,3), (3,3), (4,1)}, M={1,3,4};

b) ρ={(1,1), (4,4)}, M={1,4};

c) ρ={(4,6), (4,5), (5,4)}, M={4,5,6};

d) ρ={(1,3,1), (0,1,3), (2,1,3)}, M={0,1,2,3};

e) ρ={(1,3,1),(1,3,2), (0,3,1), (2,3,2), (3,2,2)}, M={0,1,2,3};

f) ρ={(0,0), (□,□), (∇,∇), (×,×)}, M={0, □, ∇, ×}.

74) На множествах A=R, B=R и C=R задано отношение $s=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$. Определите геометрический смысл отношения s.

75) Даны множества $X=\{-2, -1, 4, 5\}$ и $Y=\{-2, 0, 6\}$. Известно, что $x\in X$, $y\in Y$. Составьте отношения и их постройте графики.

a) $x+y>0$;

b) $x-y<0$;

c) $x+y\leq 0$;

d) $x-y\geq 0$;

e) $xy>0$;

f) $xy<0$.

1.2.2 Представление бинарных отношений в виде графа, матрицы

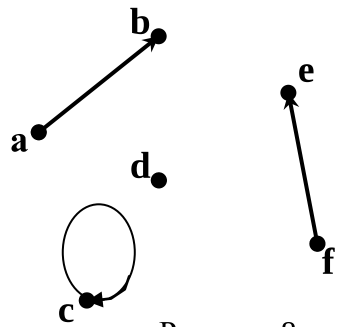


Рисунок 8

Под ***графом*** понимают некоторую совокупность точек плоскости, пары которых могут быть соединены стрелками.

Оказывается, любое бинарное отношение на конечном множестве можно представить графом и наоборот, каждому графу можно сопоставить некоторое бинарное отношение на множестве его вершин.

Алгоритм предельно прост: если некоторая пара (a,b) принадлежит отношению, то соответствующие точки на плоскости соединяются стрелкой, которая выходит из a и заходит в b. Обратная операция очевидна.

Бинарные отношения между конечными множествами можно представить в виде таблиц или матриц.

Примеры решения задач

76) Даны два множества $A=\{a, b, c\}$, $B=\{1, 2, 3\}$ и отношение $\rho=\{(a,1),(a,2),(c,3)\}$. Задайте данное отношение графом и матрицей.

Решение.

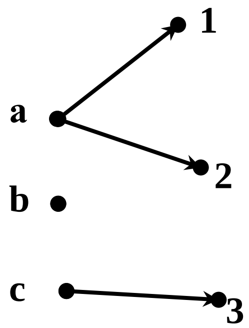


Рисунок 9

	1	**2**	**3**
A	1	1	0
B	0	0	0
C	0	0	1

Построенная таблица есть таблица бинарного отношения.

Задачи для самостоятельного решения

77) Какое отношение задается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$? Постройте для него граф.

78) Составить матрицы отношений, заданных на множестве всех подмножеств множества M={a,b,c}:

a) ρ_1 – «пересекаться с»;

b) ρ_2 – «являться строгим включением $\subset$».

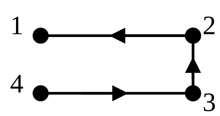
79) Изобразите граф и матрицу, представляющие отношение ρ={(x,y) | x – делитель y} на множестве A={1,2,3,4,5,6}.

80) Отношение ρ на множестве A={a,b,c,d} задается матрицей,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

порядок строк и столбцов в которой соответствует порядку выписанных элементов множества A. Назовите упорядоченные пары, принадлежащие R.

81) Отношение ρ на множестве A={1,2,3,4} представлено графом. Перечислите упорядоченные пары, принадлежащие R, выпишите соответствующую матрицу и определите это отношение с помощью характеристического свойства.



82) Пусть ρ – это отношение на множестве {1,2,3,4}, определяемое условием: $u\,\rho\,v$ тогда и только тогда, когда u+2v – нечетное число. Представьте ρ каждым из способов:

a) как множество упорядоченных пар;

b) в графической форме;

c) в виде матрицы.

83) Задайте отношения графами:

a) {(a,b), (b,c), (a,c), (a,a), (c,a)};

b) {(1,a), (2,a), (1,2), (a,2), (3,b), (b,a), (4,a), (5,5)};

c) $\{(n,m)\in N^2 | m=n+1\}$.

84) Для отношений, заданных на множестве элементов структуры, изображенной на рис. 10, привести примеры пар, для которых выполняются отношения, и пар, для которых отношения не выполняются. Постройте соответствующие матрицы отношений.

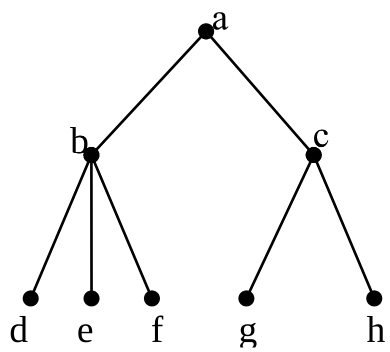


Рисунок10

a) ρ_1 – «быть частью целого»;

b) ρ_2 –«быть непосредственно связанным с»;

c) ρ_3 – «быть начальником»;

d) ρ_4 – «быть непосредственным начальником».

85) Для отношения φ, заданного на конечных множествах X и Y, найти область определения и область значения, построить граф и составить матрицу отношения, определить обратное отношение и найти ядро отношения φ.

а) X = {α, β, γ}, Y = {1, 2, 3, 4, 5}, φ = {(α, 1), (α, 3), (α, 5), (β, 1), (β, 2)};

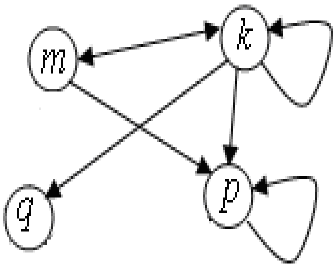
б) X = {0, 2, 4, 6},Y = {r, w, q, v}, φ = {(2, r), (4, q), (6, q), (2, v)}.

86) Найти объединение, пересечение и композицию бинарных отношений φ и ρ, заданных на множествах X и Y. Найти матрицу композиции бинарных отношений φ и ρ как булево (логическое) произведение матрицы отношения φ и матрицы отношения ρ: а) X={r, w, q, h, v}, Y = {1, 2, 3, 4},φ = {(r, 1), (w, 3), (h, 2), (h, 3), (v, 3)}, ρ={(w,2), (q,3), (h,3)}; б) X={α,β,γ}, Y={μ,η,ρ}, φ={(α,μ), (α,ρ), (β,μ)}, ρ = {(α, μ), (β, ρ), (γ, η)}.

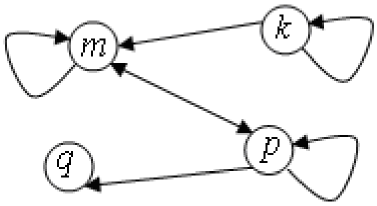
87) Отношение φ задано на конечных множествах X и Y. Перечислить пары элементов, находящихся в отношении φ. Найти область определения и область значения отношения φ. а) $X=\{-2,1,3\}$, $Y=\{-6,-2,2,6\}$, $x\varphi y \Leftrightarrow x\cdot y=-6$;

б) $X=\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\pi\right\}$, $Y=\left\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\right\}$, $x\varphi y \Leftrightarrow y=\cos x-1$.

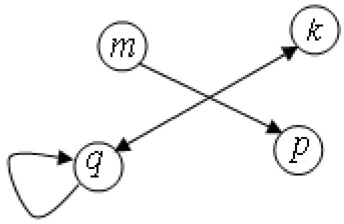
88) Отношение φ задано на конечном множестве $M=\{m,n,p,q\}$ и представлено ориентированным графом или матрицей отношения. Перечислить пары элементов, находящихся в отношении φ.



а)



;б)



;в)

г) $\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} m & k & p & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ k \\ p \\ q \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$; д) $\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} m & k & p & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ k \\ p \\ q \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$; е) $\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} m & k & p & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ k \\ p \\ q \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$.

89) Определить вид бинарного отношения φ, заданного на указанном множестве: а) $x\varphi y \Leftrightarrow (x+y)$ четно, N – множество натуральных чисел; б) $x\varphi y \Leftrightarrow$ x–внук y, M – множество людей; в) $x\varphi y \Leftrightarrow x<y$, R – множество действительных чисел; г) $\vec{x}\,\varphi\,\vec{y} \Leftrightarrow \left|\vec{x}\right|=\left|\vec{y}\right|$, V–множество векторов на плоскости.

1.2.3 Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение ρ на множестве A (ρ⊂A2) называется ***рефлексивным***, если для любого элемента множества A пара (a,a) ∈ρ.

Бинарное отношение ρ на множестве A ($\rho \subset A^2$) называется ***транзитивным***, если из того, что $(a,b) \in \rho$ и $(b,c) \in \rho$ следует, что $(a,c) \in \rho$.

Бинарное отношение ρ на множестве A ($\rho \subset A^2$) называется ***симметричным***, если из того, что $(a,b) \in \rho$ следует, что $(b,a) \in \rho$.

В приведенном выше примере отношение ρ_1 обладает тремя вышеперечисленными свойствами.

Бинарное отношение ρ на множестве A ($\rho \subset A2$) называется ***антирефлексивным***, если никакая пара вида (a,a) не находится в отношении ρ.

Бинарное отношение ρ на множестве A ($\rho \subset A^2$) называется ***антисимметричным***, если из того, что $(a,b) \in \rho$ и $a \neq b$ следует, что $(b,a) \notin \rho$.

Примеры решения задач

90) Каковы свойства отношений, заданных на множестве людей:

a) ρ_1 – «быть сыном»;

b) ρ_2 – «жить в одном городе».

Решение. a). $\rho_1 = \{(a,b) \mid a \text{ сын } b\}$:

- не рефлексивно, антирефлексивно, так как ни для каких a не выполняется: a – сын a;
- не симметрично, антисимметрично, поскольку ни для каких $a \neq b$ не выполняется: a - сын b и b - сын a;
- не транзитивно, так как если: a - сын b и b - сын c, то a – не сын c.

b). $\rho_2 = \{(a,b) \mid a \text{ живет в одном городе с } b\}$:

- рефлексивно, не антирефлексивно, так как $(a,b) \in R_2$ для всех a;
- симметрично, не антисимметрично, поскольку для любых a,b, если $(a,b) \in R_2$, то $(b,a) \in R_2$;
- транзитивно, так как если: $(a,b) \in \rho_2$ и $(b,c) \in \rho_2$, то $(a,c) \in \rho_2$.

91) Задано бинарное отношение R на множестве M={1, 2, 3, 4}. Является ли оно рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Найти область определения δ_R, область значений ρ_R, обратное отношение R^{-1}, пересечение и объединение отношений R и R^{-1}.

R={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4).

Решение. Отношение R, заданное на множестве M, называется *рефлексивным, если для всякого x из этого множества xRx истинно*. Заданное отношение не является рефлексивным, так как нет пар (2,2) и (3,3).

Отношение R, заданное на множестве M называется *симметричным, если на этом множестве из xRy следует yRx*. Заданное отношение не является симметричным, т.к., например, пара $(1,2)\in R$, а $(2,1)\notin R$.

Отношение R, заданное на множестве M называется *антисимметричным, если на этом множестве из xRy и yRx следует x=y*. Заданное отношение не является антисимметричным, так как ему принадлежат пары (1,4) и (4,1), но $1\neq 4$.

Отношение R, заданное на множестве M называется *антирефлексивным, если для любого* $x\in M$ *xRx ложно*. Заданное отношение антирефлексивно, так как (уже было показано) нет пар (2,2) и (3,3).

Отношение R, заданное на множестве M называется *транзитивным, если на этом множестве из xRy и yRz следует xRz*. Заданное отношение является транзитивным, так как для любых двух пар (a,b) и (b,c) следует, что $(a,c)\in R$, где a, в, c $\in M$.

Областью определения отношения R называется множество $\delta_R=\{x|\ \exists(y)\ xRy\}$. Следовательно, областью определения R является двухэлементное множество {1,4}.

Областью значений отношения R называется множество $\rho_R=\{y|\exists(x)\ xRy\}$. Следовательно, областью значений является все множество M={1, 2, 3, 4}.

Обратным отношением для R называется отношение $R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$.

Обратное отношение R^{-1}={(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4)}.

Пересечение R и R^{-1} равно $R\cap R^{-1}$={(1,1), (4,1), (1,4), (4,4)}.

Объединение R и R^{-1} равно $R\cup R^{-1}$={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (2,1), (3,1)}.

Задачи для самостоятельного решения

92) Определите свойства отношений:

a) ρ={(1,1), (a,a), (a,2), (2,2)};

b) φ={(1,2), (2,3), (3,2), (4,4)};

c) τ={(1,2), (2,1), (1,1), (2,2), (3,3)}.

93) Какими свойствами обладают следующие отношения:

a) «x делит y» на N;

b) «$x \neq y$» на Z;

c) «количество лет x совпадает с возрастом y» на множестве людей.

94) Определите, какие из следующих отношений на множестве людей рефлексивны, симметричны или транзитивны:

a) «иметь тех же родителей»;

b) «быть братом»;

c) «быть старше» или «быть младше»;

d) «быть знакомым»;

e) «быть не выше».

95) Определите, какие из приведенных ниже отношений на Z являются рефлексивными и симметричными, а какие только рефлексивными?

a) «x+y –нечетное число»;

b) «x+y –четное число»;

c) «xy – нечетное число»;

d) «x+xy – четное число».

96) Определите, какими свойствами обладают следующие отношения на множестве {1,2,3,4,5}.

a) $\rho_1=\{(a,b) \mid |a-b|=1\}$;

b) $\rho_2=\{(a,b) \mid 0<a-b<3\}$;

c) $\rho_3=\{(a,b) \mid a\geq b^2\}$

97) Определите, какими свойствами обладают следующие отношения на множестве точек R.

a) «находиться на одинаковом расстоянии от начала координат»;

b) «находиться на разном расстоянии от начала координат»;

c) «быть симметричным относительно оси х»;

d) «находиться на одной и той же окружности с центром в (0,0)».

98) Найдите все отношения на двухэлементном множестве {a, b}. Укажите среди них:

a) все рефлексивные и все симметричные.

1.2.4 Отношение эквивалентности

Отношение называется ***отношением эквивалентности***, если оно обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и симметричности. Обычно отношение эквивалентности обозначают ≡. ***Разбиением*** множества М называется совокупность непустых подмножеств M_1, M_2, …M_n множества М, удовлетворяющих следующим требованиям: $M=M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_n$ и $M_i\cap M_j=\varnothing$, $i\neq j$. Отношение эквивалентности на множестве М задает на нем разбиение.

Например, отношение “проживания в одном доме” на множестве жителей России является отношением эквивалентности.

Этот пример иллюстрирует ***основное свойство*** любого отношения эквивалентности: с помощью этого отношения можно разбить соответствующее множество на непересекающиеся подмножества. При этом все элементы каждого подмножества находятся между собой в отношении эквивалентности (эквивалентны друг другу) и не находятся в этом отношении ни с одним из элементов другого подмножества. В данном случае все население России разбивается на множества людей, живущих в одном доме.

Пусть ≡ – отношение эквивалентности на множестве М и $x\in M$. Подмножество элементов множества М, эквивалентных x, называется ***классом эквивалентности*** для x. Множество классов эквивалентности называется ***фактор-множеством*** множества М и обозначается М/≡.

Примеры решения задач

99) На множестве целых чисел Z задано отношение ρ={(a,b) | (a-b) делится на 3}. Является ли заданное отношение отношением эквивалентности? Укажите классы эквивалентности.

Решение. 1. Для любого целого *a* пара $(a,a)\in\rho$, т.к. (a-a)=0, а 0 делится на 3, следовательно отношение рефлексивно.

2. Если пара $(a,b)\in\rho$, то (a-b) делится на 3, тогда и (b-a) делится на 3, т.е. $(b,a)\in\rho$. Это значит, что отношение симметрично.

3. Если пара $(a,b)\in\rho$, то (a-b) делится на 3, следовательно, $a-b=3k_1$, $k_1\in Z$. Если пара $(b,c)\in\rho$, то (b-c) делится на 3, следовательно, $b-c=3k_2$, $k_2\in Z$. Сложив почленно эти два равенства, получим $a-b+b-c=3k_1+3k_2$. Упростив, получим a-c=3k, где $k\in Z$. А это значит, что пара $(a,c)\in\rho$. Значит, отношение транзитивно.

Так как отношение ρ обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, значит оно является отношением эквивалентности. Отношение ρ разбивает множество Z на три класса эквивалентности: {0,3,6,9,…} – множество чисел без остатка делящихся на 3; {±1, ±4, ±7,…} - множество чисел, делящихся на 3 с остатком 1; {±2, ±5, ±8,…} - множество чисел, делящихся на 3 с остатком 2. Получили три класса эквивалентности.

Задачи для самостоятельного решения

100) Для каждого из следующих отношений эквивалентности на множестве A опишите классы эквивалентности, на которые разбивается множество A.

a) A – множество книг в библиотеке; xρy, если цвет переплета x совпадает с цветом y;

b) A=Z; xρy тогда и только тогда, когда x-y – четное число;

c) A – множество людей, и xρy, если x имеет тот же пол, что и y;

d) $A=\rho^2$, ρ задается по правилу: (a,b) ρ (c,d) в том случае, когда $a^2+b^2=c^2+d^2$.

101) Имеется множество A = {1,2,3,4} и его разбиение {{1,2}, {3,4}}. Задайте отношение эквивалентности *ρ*.

102) Имеется множество A = {1,2,3,4} и его разбиение {{1}, {2, 3}, {4}}. Задайте отношение эквивалентности *ρ*.

103) Отношение ρ на множестве Z определяется так: xρy тогда и только тогда, когда x^2-y^2 делится на 3. Покажите, что ρ является отношением эквивалентности и опишите классы эквивалентности.

104) Являются ли заданные отношения отношениями эквивалентности?

a) Отношение “быть одного цвета”;

b) Отношение равенства множеств;

c) Отношение равенства чисел;

d) Отношение равенства фигур;

e) Отношение подобия на множестве всех треугольников;

f) Отношение параллельности на множестве прямых

g) Отношение перпендикулярности на множестве прямых.

105) Какие из отношений, представленных графами на рисунке 11, являются

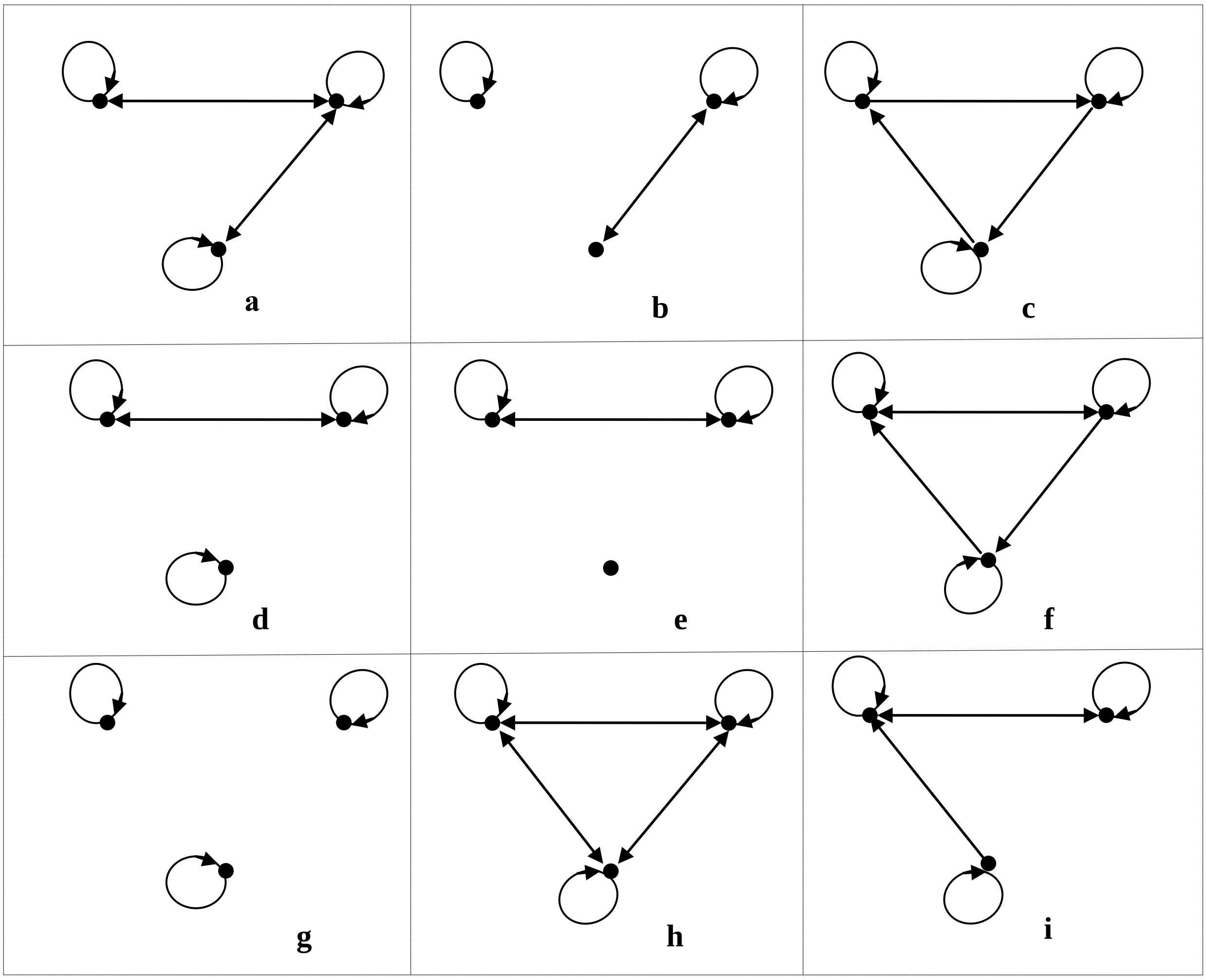


Рисунок11

отношениями эквивалентности?

106) На множестве X={лягушка, уголь, елка, апельсин, крокодил, “Фанта”, сажа} задано отношение “быть одного цвета”. Укажите классы эквивалентности.

107) Заданы отношения эквивалентности. Выпишите классы эквивалентности и фактор-множество.

a) $\rho = \{(4, 4), (4, 2), (2, 4), (2, 2), (3, 3)\}$;

b) $\varphi = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$;

c) $\tau = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2), (4, 4), (4, 2), (2, 4)\}$.

108) По заданным разбиениям установить, для каких множеств они заданы и найдите соответствующие отношения эквивалентности.

a) $\{\{0,1\}, \{2\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{5\}\}$;

b) $\{\{0\}, \{1,2,3\}\}$; *d)* $\{\{0,1,2,3\}\}$.

109) Показать, что отношение φ, заданное на множестве M, является отношением эквивалентности. Найти фактор-множество множества M:

а) $M = \{-4, 4, -2, 2, -1, 1\}$, $x\varphi y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$;

б) $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $x\varphi y \Leftrightarrow x - y$–четное число;

в) M–множество натуральных однозначных чисел, $x\varphi y \Leftrightarrow x \equiv y (\mathrm{mod}\, 4)$, то есть при делении на 4 дают одинаковые остатки;

г) M={ ▱, ⏢, △, ◺, □, ⬡ }, $x\varphi y \Leftrightarrow$ x и y имеют одинаковое число углов.

1.2.5 Отношение порядка

Бинарное отношение ρ на множестве A ($\rho \subset A^2$) называется ***отношением порядка***, если оно обладает свойствами транзитивности и антисимметричности. Множество A, на котором задано отношение порядка называется ***упорядоченным***.

Виды порядка:

1) Порядок ρ называется ***нестрогим***, если он обладает свойством рефлексивности.

2) Порядок ρ называется ***строгим***, если он обладает свойством антирефлексивности.

3) Порядок ρ называется ***полным***, если, каковы бы ни были два элемента из множества, $(a,b)\in\rho$ или $(b,a)\in\rho$.

4) Порядок ρ называется ***частичным***, если найдутся два элемента из множества такие, что$(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho$.

Если ρ – отношение частичного порядка на множестве A, то при $a\neq b$ и $(a,b)\in\rho$ будем называть x предшественником или ***предшествующим элементом***, а y – ***последующим***. У произвольно взятого элемента y может быть много предшествующих элементов. Если x предшествует y, и не существует таких элементов z, для которых $(x,z)\in\rho$ и $(z,y)\in\rho$, то x называется ***непосредственным предшественником*** y и обозначается $x\prec y$.

Непосредственных предшественников можно изобразить с помощью графа, известного как ***диаграмма Хассе***.

Алгоритм построения такой диаграммы следующий: вершинами графа изобразить элементы частично упорядоченного множества A, и если x и y принадлежат данному множеству (обозначение следующее: $x\prec y$), то вершину x поместить ниже вершины y и соединить с ней ребром.

Примеры решения задач

110) Отношение « x делитель y» определяет частичный порядок на множестве A={1,2,3,6,12,18}. Составьте таблицу предшественников и непосредственных предшественников, после чего постройте соответствующую диаграмму Хассе.

Решение. Построим таблицу следующего вида:

элемент	**предшественник**	**непосредственный предшественник**
1	нет	нет
2	1	1
3	1	1
6	1,2,3	2,3
12	1,2,3,6	6
18	1,2,3,6	6

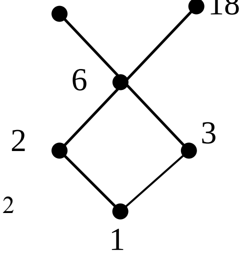


Рисунок12

Справа на рисунке 12 изображена соответствующая диаграмма Хассе.

Задачи для самостоятельного решения

111) Являются ли следующие отношения отношениями порядка? Если да, то укажите вид порядка.

a) ρ={(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)} на множестве {a,b,c};

b) ρ={(a,a), (b,b), (c,c), (b,a), (c,b), (c,a)} на множестве {a,b,c};

c) $\rho=\{(x,y)\in N_0^2 \mid \exists k\in N_0, y=kx\}$.

112) На множестве {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} заданы следующие отношения: ρ_1 (≤) и ρ_2 (делимость). Являются ли данные отношения отношениями порядка?

113) Является ли множество концентрических кругов на плоскости упорядоченным? Частично упорядоченным?

114) Нарисуйте диаграмму Хассе для каждого из следующих упорядоченных множеств. Определите вид порядка.

a) множество {1,2,3,5,6,10,15,30} с отношением «x делит y»;

b) множество всех подмножеств {1,2,3} с отношением «x – подмножество y»;

c) множество натуральных чисел с отношением «x меньше либо равен y»;

d) множество натуральных чисел с отношением «x делится на y»;

e) множество натуральных чисел без единицы с отношением «x делится на y».

115) Диаграмма Хассе частичного порядка ρ на множестве A={a,b,c,d,e,f,g,h} показана на рисунке 13. Перечислите элементы ρ и найдите минимальный и максимальный элементы частично упорядоченного множества A.

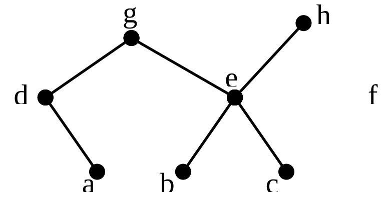


Рисунок13

116) Задано отношение делимости на множестве {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Представьте данное отношение в виде графа.

117) Лексикографический (алфавитный) порядок работает следующим образом: у данных слов x и y сравниваем букву за буквой, оставляя без внимания одинаковые, пока не найдем пару разных. Если в этой паре буква слова x стоит раньше, то x предшествует y. Если все буквы слова x совпадают с соответствующими буквами слова y, но оно короче, то x предшествует y, в противном случае, x предшествует x. Упорядочьте следующие слова: бутылка, банан, бисквит, бивень, банджо. Объясните, почему выбран именно такой порядок.

1.3 Функциональные отношения между множествами

1.3.1 Определение функции (отображения)

Пусть заданы множества A и B. Рассмотрим некоторое бинарное отношение $\rho\subset A\times B$. Говорят, что задана ***функция (отображение)*** f с областью определения A и областью значений B, если *каждому* элементу $a\in A$ ставится в соответствие по некоторому правилу *единственный* элемент $b\in B$ и записывают $f{:}A\to B$ или $(a,b)\in f$ или $b\in f(a)$. При этом элемент b будем называть ***образом*** элемента a, а элемент a ***прообразом*** элемента b.

Иногда для обсуждения этих вопросов удобно пользоваться диаграммами (см. на рисунках 14-16).

Примеры решения задач

118) Даны множества A={1, 2, 3, 4}; B={3, 4, 6, 7}. Укажите отношения ρ_1 и ρ_2, одно из которых было бы функцией, а другое нет.

Решение. ρ_1={(1,3), (2,3), (3,3), (4,3)} - функция,

ρ_2={(1,3), (2,3), (2,4), (3,3), (4,3)} - не является функциональным.

119) Какие из данных отношений являются отображениями?

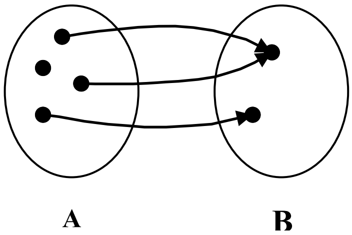


Рисунок14

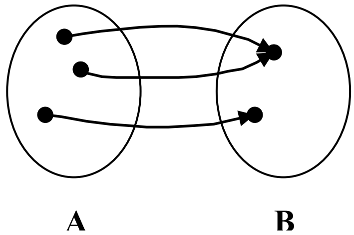


Рисунок15

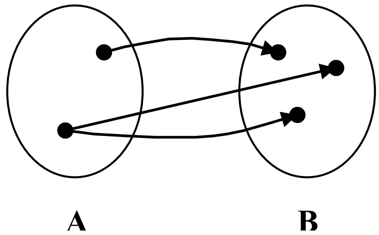


Рисунок 16

Решение. Отношение ρ, изображенное на рисунке 15, является функциональным по определению. Отношение на рисунке 14 не является отображением, т.к. не для всех элементов множества A имеются образы. Отношение на рисунке 16 не является отображением, т.к. один из элементов множества A имеет два образа.

Задачи для самостоятельного решения

120) Определите, какие из следующих отношений между множествами A={a,b,c} и B={1,2,3} являются функциями из множества A в B.

a) f={(a,1), (a,2), (b,3), (c,2)};

b) g={(a,1), (b,2), (c,1)};

c) h={(a,1), (c,2)}.

121) Какие из отношений являются функциями?

a) «x – брат или сестра y» на множестве всех людей;

b) отношение на множестве Z, заданное парами: $\{(x,x^2) \mid x \in Z\}$;

c) отношение на множестве R, $\{(x,y) \mid x=y^2\}$.

122) Найдите область определения и область значения заданного отношения. Является ли оно функцией?

a) {(1,1), (2,3), (3,2)};

b) {(1,2), (2,2), (пешка, ферзь), (ладья, слон)};

c) $\{(x,y) \in R^2 \mid y=x^2+x+3\}$;

123) Пусть A={0,2,4,6} и B={1,3,5,7}. Какие из нижеперечисленных отношений между множествами A и B являются функциями, определенными на A со значениями в B?

a) {(6,3), (2,1), (0,3), (4,5)};

b) {(2,3), (4,7), (0,1), (6,5)};

c) {(2,1), (4,5), (6,3)};

d) {(6,1), (0,3), (4,1), (0,7), (2,5)}.

124) Пусть f=sin x, $f \subseteq R^2$. Найдите образ элемента $\frac{\pi}{6}$, прообраз отрезка [0, ½], прообраз образа элемента $\frac{\pi}{3}$.

125) Доказать, что отношение f является функциональным. Проверить, является ли f биективным:

а) $f: R \to (1; +\infty)$, $f(x) = 2^x + 1$;

б) $f: R \to R$, $f(x) = -|x|$;

в) $f: R \to [1; 7]$, $f(x) = 3\sin x + 4$;

г) $f: \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \to R$, $f(x) = tg\, x$;

д) $f: R \to [0; +\infty)$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$;

е) $f: [0; +\infty) \to [5; +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x} + 5$.

1.3.2 Обратное отображение

Пусть f некоторое отображение из A в B ($f \subset A \times B$). Построим симметричное отношение f^* такое, что $f^* = \{(b,a) |\ a \in A,\ b \in B$ и $(a,b) \in f\}$.

Говорят, что отображение f ***обратимо***, если симметричное ему отношение так же является отображением. Если f обратимо, то симметричное отображение обозначают $f^* = f^{-1}$ и называют ***обратным отображением*** или обратной функцией для f.

Алгоритм построения симметричного отображения для $y=f(x)$:

1. Выразить x через y.
2. Заменить в полученной формуле x на y, а y на x.

Алгоритм определения обратимости отображения f: $A \to B$:

1. Определить A и B, если они не заданы.
2. Построить f^*: $B \to A$.
3. Выяснить, является ли f^* - функцией.
4. Если да, то f обратима, и обратная функция $f^{-1} = f^*$. Если нет, то f обратной не имеет.

Примеры решения задач

126) На рисунке 17 представлены три отображения: f_1:A→B, f_2:C→D и f_3:E→F. Какие из них являются обратимыми?

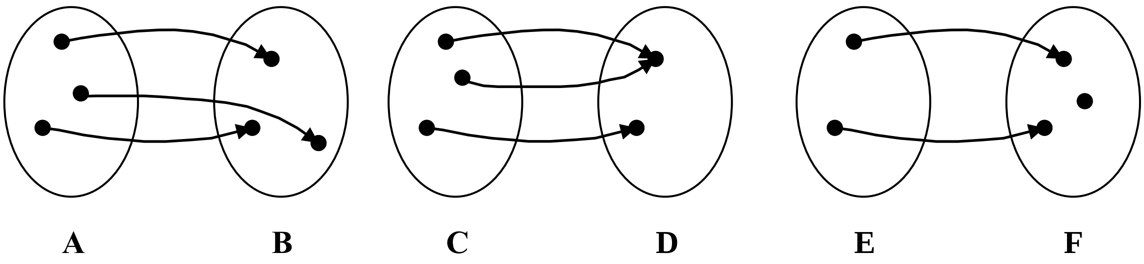


Рисунок 17

Решение. f_1 является обратимым, для него существует f_1^{-1}. f_2 и f_3 не являются обратимыми, так как f_2^* и f_3^* не являются отображениями.

Задачи для самостоятельного решения

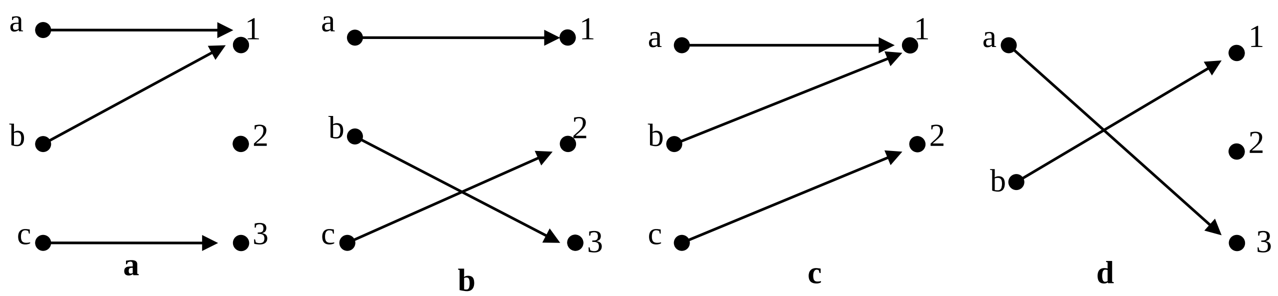


Рисунок18

127) Какие из функций, изображенных на рисунке 18, обратимы?

128) Задана функция. Обратима ли она? Если да, то найдите обратную.

a) f={(1,2), (2,3), (3,4), (4,2)};

b) g={(x,y)∈Z^2 | y=x-1};

c) h={(1,a), (2,b), (3,c)}.

1.3.3 Композиция отображений

Пусть даны функции f:A→B и g:B→C. Тогда ***композицией*** функций называется функция φ=$f\circ g$ с областью определения A и областью значений C такая, что для любого a∈A $g(f(a))$=c, c∈C.

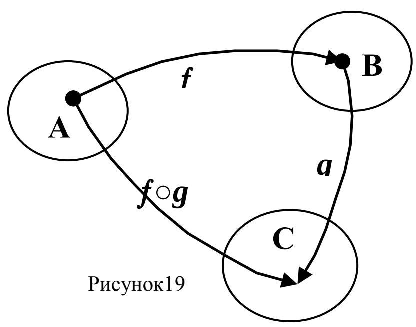


Рисунок19

Таким образом, $\varphi = f \circ g = g(f(a))$ не что иное, как сложная функция.

Примеры решения задач

129) Рассмотрим две функции: $f\colon R \to R$, $f(x)=\sin x$ и $g\colon R \to R$, $g(x)=x+1$. Построить $g \circ f$.

Решение. $g \circ f = f(g(a)) = \sin(x+1)$.

Задачи для самостоятельного решения

130) Пусть R – отношение “a сестра b”, а S обозначает отношение “b – мать c” на множестве всех людей. Опишите на словах композиции: SoR и SoS.

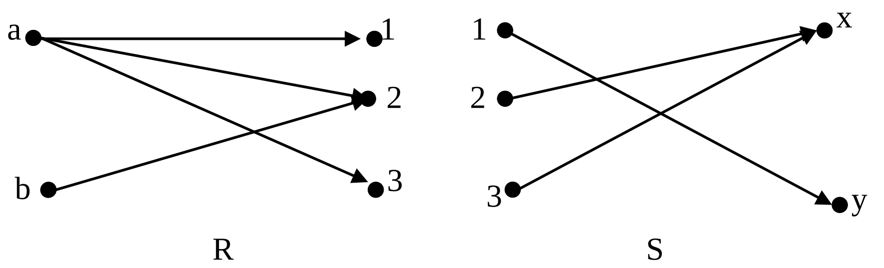


Рисунок 20

131) Предположим, что отношения R и S заданы орграфами, представленными на рисунке 20. Найдите орграф, соответствующий композиции SoR.

132) Пусть R – отношение между множествами {1,2,3} и {1,2,3,4}, заданное перечислением пар: R={(1,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)}. Кроме того, S – отношение между множествами {1,2,3,4} и {1,2}, состоящее из пар: S={(1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (4,2)}. Вычислите R^{-1}, S^{-1} SoR. Проверьте, что $(SoR)^{-1}=R^{-1}oS^{-1}$.

133) Пусть R – отношение “…родитель…”, а S – отношение “…брат…” на множестве всех людей. Дайте краткое словесное описание отношениям: R^{-1}, S^{-1}, RoS, $S^{-1}oR^{-1}$, RoR.

134) ОтношениеR на множестве A ={1,2,3,4,5} задается матрицей
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычислить матрицу композиции RoR и объяснить, почему отношение R не обладает свойством транзитивности.

135) Отношения R и S заданы матрицами M и N соответственно. Вычислите

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

RoS.

136) Заданы две функции: $f\colon R \to R$, $f(x)=x^2$ и $g\colon R \to R$, $g(x)=4x+3$.

Вычислить $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ *и* $g \circ g$.

137) Функции $f\colon R \to R$ и $g\colon R \to R$ заданы условием:

$$f(x) = x^2 \ и \ g(x) = \begin{cases} 2x+1, & если \ x \geq 0, \\ -x, & если \ x < 0. \end{cases}$$

Выразите формулами композиции: $f \circ g$, $g \circ f$, *и* $g \circ g$.

1.3.4 Виды отображений

Отображение f из множества A в множество B называется ***сюръективным***, если для любого элемента b∈B существует элемент a∈A и f(a)=b.

Отображение f из множества A в множество B называется ***инъективным***, если различным элементам из A соответствуют различные элементы из B. То есть, если $f(a_1)=b$ и $f(a_2)=b$, то $a_1=a_2$.

Отображение f из множества A в множество B называется ***биективным***, если оно является инъекцией и сюръекцией.

Функция имеет обратную тогда и только тогда, когда она является биекцией.

Алгоритм определения сюръективности:

1. Возьмем любой y из области значений.
2. Запишем равенство $f(x)=y$.
3. Выразим x через y.
4. Если x существует в множестве A для любого y из множества B, то вывод: f сюръективна, иначе – нет.

Алгоритм определения инъективности:

1. Возьмем любые x_1, x_2 и предположим, что $x_1 \neq x_2$.
2. Найдем $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
3. Запишем равенство $f(x_1)=f(x_2)$ и упростим его.

4. Если получим $x_1 = x_2$, то вывод: f инъективна, иначе – нет.

Чтобы доказать, что отображение не является инъективным или сюръективным, достаточно привести контрпример.

Примеры решения задач

138) Пусть A=R=(-∞;+∞), x∈A. B=[0; +∞), y∈B. Зададим отношение $f=\{(x,y)|\ y=x^2\}$, $f \subset A\times B$. Является ли данное отношение сюръекцией?

Решение. Данное отношение является отображением. Кроме того для любого y>0 существует x такой, что $x^2=y$. Следовательно, заданное отображение является сюръекцией.

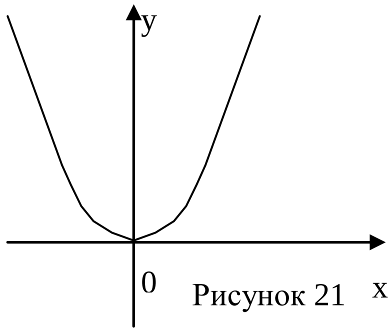


Рисунок 21

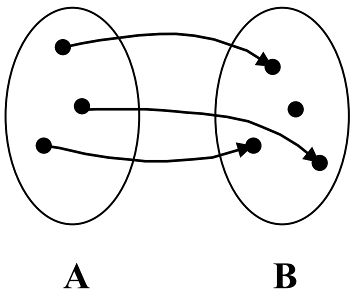


Рис.22

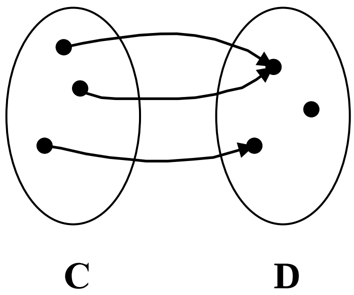


Рис. 23

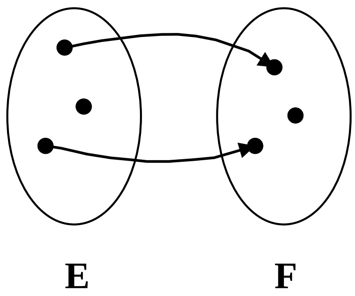


Рис. 24

139) Какого вида отображения изображены на рисунках 22-24?

Решение. A→B – инъективное отображение (см. рисунок 22), но не сюръекция, так как один из элементов множества B не имеет прообраза;

C→D – отображение, но не инъективное, т.к. различным элементам из C соответствует один и тот же элемент из D (см. рисунок 23) и не сюръективное;

E→F – данное отношение не является отображением (см. рисунок 24).

140) Пусть заданы множества A=(-π/2; π/2), x∈A и B=R=(-∞;+∞), y∈B. Зададим отношение $f=\{(x,y)|\ y=\text{tg}\ x\}$, $f \subset A\times B$. Является ли оно биекцией?

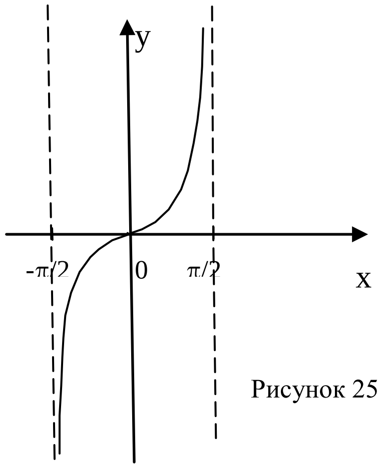


Рисунок 25

Решение. Данное отношение является биективным отображением, так как оно является инъекцией и сюръекцией.

Придумайте биективное отображение f: $A \to B$, где $A=(0;1)$ и $B=(-\infty;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

141) Существует ли биекция между:

1) Множеством букв и множеством звуков русского языка;

2) Множеством чисел, записанных в арабской и двоичной системах счисления;

3) Множеством чисел и множеством студентов вашей группы;

4) Словом русского языка и его значением;

5) Автором и литературным произведением;

6) Названием и музыкальным произведением.

142) Покажите, что функция $h: Z \to Z$, заданная формулой $h(x)=x^2$ не инъективна, и не сюръективна.

143) Покажите, что функция $k:R \to R$, заданная формулой $k(x)=4x+3$, является биекцией.

144) Про каждую из трех функций, чьи области определения и значений совпадают с Z, скажите, являются ли они инъекциями, сюръекциями или биекциями.

1) $f(n)=2n+1$;

2) $g(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{ если } n \text{ четно,} \\ 2n, \text{ если } n \text{ нечетно}; \end{cases}$

3) $h(n)=\begin{cases} n+1, \text{ если } n \text{ четно,} \\ n-1, \text{ если } n \text{ нечетно}; \end{cases}$

145) Изобразите графики функций. Назовите их множество значений и скажите, какие из них инъективны, а какие сюръективны.

1) $f: Z \to Z, f(x)=x^2+1$;

2) $g:N \to N, g(x)=2^x$;

3) $h:R \to R, h(x)=5x-1$;

4) $j:R \to R$,

$j(x)=\begin{cases} 2x-1, \text{ если } x \geq 1, \\ x+1, \text{ если } x < 1; \end{cases}$;

5) $k:R \to R, k(x)=x+|x|$;

146) Пусть A={x | x∈R и x≠1} и *f: R→R* задается формулой $f(x)=\frac{x}{x-1}$. Покажите, что *f* биективна и найдите обратную ей функцию.

147) Функция *f: A→B* задана формулой: $f(x)=1+\frac{2}{x}$, где A обозначает множество вещественных чисел, отличных от 0, а B – множество вещественных чисел без 1. Покажите, что *f* биективна и найдите обратную к ней функцию.

148) Найдите область определения и область значения заданного отношения. Является ли оно функцией? Если да, то какого вида (сюръекция, инъекция или биекция)? Обратима ли функция? Если да, то Найдите обратную.

1) $\{((x,y), x+y) \mid (x,y) \in R^2\}$;
2) $\{((x,y,z),x+2y-z) \mid (x,y,z) \in R^3\}$;
3) $\{(x,y) \in R^2 \mid y=x^2\}$;
4) $\{(x,y) \in R^2 \mid y=5\}$;
5) $\{(x,y) \in Z^2 \mid y=2x+1\}$;
6) $\{(x,y) \in Z^2 \mid y=2x-1\}$;
7) $\{(0,1), (1,0), (2,1)\}$;
8) $g=\{(n,m) \in Z^2 \mid m=n^2+1\}$;
9) $h=\{(x,y) \in R^2 \mid y=\sqrt{x}\}$;
10) $s=\{(x,y) \in R^2 \mid y=e^x\}$;
11) $t=\{((n,m),r) \in Q^2 \times Q \mid r=nm\}$;
12) $h_1:R\to R$, где $h_1(x)=x^3$;
13) $h_2:R\to R$, где $h_2(x)=\lg(x^2+1)$;
14) $s_1=\{(x,y)\in R^2 \mid 0<x<1$ и $y=\sqrt{1-x^2}\}$
15) $s_2=\{(x,y) \in R^2 \mid -1<x\leq 2$ и $y=\frac{x}{x+1}\}$;

Вопросы для повторения

1. Понятие отношения. Примеры.
2. Свойства отношений. Примеры.
3. Понятие отношение эквивалентности. Алгоритм задания отношения эквивалентности с помощью графа и матрицы. Примеры.
4. Понятия класс эквивалентности и фактор-множество. Примеры.
5. Понятие отношение порядка. Алгоритм задания отношения порядка с помощью графа и матрицы. Примеры.
6. Понятие бинарного отношения на множестве. Примеры.
7. Понятие отображения. Примеры.
8. Виды отображений. Определения. Примеры.

Глава 2 Комбинаторика

2.1 Формула включения и исключения

Комбинаторика тесно связана с теорией конечных множеств. Если множества X и Y конечны, причем $X \cap Y = \varnothing$, то $|X \cup Y| = |X| + |Y|$. Это очевидное утверждение называют в комбинаторике правилом суммы. Если пересечение множеств X и Y непусто, имеет место равенство: $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

Для трех множеств: $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

Такие формулы называются формулами включения и они отвечают на вопрос «Сколько элементов принадлежит хотя бы одному из множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$?»

Теорема. (Принцип включения и исключения).

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - \ldots - |X_{k-1} \cap X_k| +$$
$$+ |X_1 \cap X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_4| + \ldots + |X_{k-2} \cap X_{k-1} \cap X_k| - \ldots + (-1)^{k+1}|X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k|$$

Вторая формула отвечает на вопрос «Сколько элементов множества X не содержится ни в одном из множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$?»

$$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k)| = |X| - |X_1| - |X_2| - \ldots - |X_k| + |X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + \ldots +$$
$$+ |X_{k-1} \cap X_k| - |X_1 \cap X_2 \cap X_3| - |X_1 \cap X_2 \cap X_4| - \ldots - |X_{k-2} \cap X_{k-1} \cap X_k| + \ldots +$$
$$+ (-1)^k |X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k|$$

Примеры решения задач

149) Приехало 100 туристов. Из них 10 человек не знали ни немецкого, ни французского. 75 человек знали немецкий, и 83 - французский. Сколько туристов знали французский и немецкий языки?

Решение. Введем обозначения: N – множество туристов, знающих немецкий; F – множество туристов, знающих французский. Далее имеем:

$|N|=75$, $|F|=83$ – по условию. 10 человек не знают ни одного языка, следовательно, знают хотя бы один язык 100-10=90 человек. Применяя формулу включения и исключения для двух множеств, получим:

$90=75+83-|N \cap F|$, откуда $|N \cap F|=75+83-90=68$, а $|N \cap F|$ и есть количество туристов, знающих французский и немецкий языки.

150) Каждая из 30 невест красива, воспитана или умна. Обладают только хорошим воспитанием 21 невеста, только красотой – 18, а умом – 15. 12 невест красивы и воспитаны, 9 – воспитаны и умны и 7 – красивы и умны. Сколько невест обладает всеми тремя качествами?

Решение. Обозначим: множество A – хорошо воспитанные невесты, B – умные, C – красивые. |A|=21, |B|=15, |C|=18, |A∩C|=12, |A∩B|=9, |B∩C|=7, |A∪B∪C|=30.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

$$|A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = |A \cap B \cap C|.$$

|A∩B∩C|=30-21-15-18+12+9+7=4.

151) Опрос 100 студентов, изучающих иностранные языки, показал: английский язык изучают 29 студентов, немецкий –30, французский –9, только французский - 1, английский и немецкий – 10, немецкий и французский – 4, все три языка – 3 студента. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только немецкий язык? При решении использовать диаграммы Венна.

Решение.

Введем обозначения: I – множество всех опрошенных студентов; A – множество студентов, изучающих английский язык; Н – множество студентов, изучающих немецкий язык; Ф – множество студентов, изучающих французский

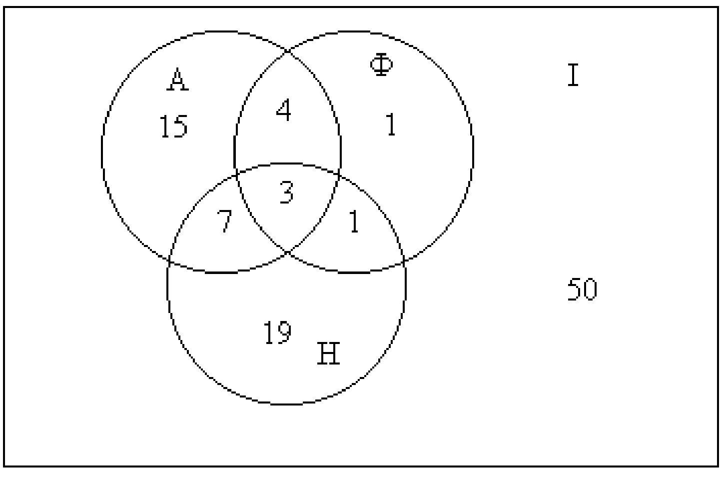


Рисунок 26 – Диаграмма Эйлера-Венна

язык (См. диаграмму Эйлера-Венна на рисунке 26) По условию задачи очевидно, что $А \cap Ф \cap Н$=3, тогда $(Н \cap Ф) \setminus (А \cap Ф \cap Н)$=4-3=1; $(А \cap Н) = (А \cap Ф \cap Н) = 10$-3=7. В таком случае только немецкий язык изучают 30-7-3-1=19 студентов. Из условия задачи также следует, что $(А \cap Ф) \setminus (А \cap Ф \cap Н) = 9$-1-1-3=4, а поэтому только английский язык изучают 29-4-3-7=15 студентов. Тогда число студентов, не изучающих ни одного языка, будет равно $I \setminus (А \cup Ф \cup Н) = 100$-(1+1+3+4+7+15+19)=50 студентов.

152) Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 – леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 – шоколад и леденцы, 348 – конфеты и леденцы, а 297 – все три вида сладостей. Показать, что в этой информации содержатся ошибки.

Решение. Обозначим через А свойство людей - любить шоколад, через В – любить конфеты, через С – свойство - любить леденцы. По условию задачи $|A|$=811, $|B|$=752, $|C|$=418, $|A \cap B|$=570, $|A \cap C|$=356, $|B \cap C|$=348, $|A \cap B \cap C|$=297. Подсчитаем количество опрошенных людей, которые любят хотя бы один вид сладостей. Воспользуемся формулой включения и исключения.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.=811+752+418-570-356-348+297=1004. Опрошено было всего 1000 человек, следовательно, в предложенной информации содержатся ошибки.

153) Упростить выражение $B = \frac{7!\cdot 4!}{10!}\left(\frac{9!}{3!\cdot 6!} - \frac{9!}{2!\cdot 7!}\right)$.

Решение. $B = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{8\cdot 9\cdot 10}\left(\frac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3} - \frac{8\cdot 9}{2}\right) = \frac{4\cdot 7}{10} - \frac{3\cdot 4}{10} = 1{,}6$.

154) Упростить выражение $A = \frac{5!}{m\cdot(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!\cdot 3!}$.

Решение. $A = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{m\cdot(m+1)} \cdot \frac{(m-1)!\,m(m+1)}{(m-1)!\cdot 2\cdot 3} = 20$.

Задачи для самостоятельного решения

155) Каждый ученик либо девочка, либо блондин, либо любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок. Одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученика блондина, из них 12 любят математику. А всего учеников, любящих математику – 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в классе?

156) Рассмотрим множество студентов. Из них 28% знают французский язык, 30% - немецкий, 42% - английский. Английский и немецкий знают 8%, английский и французский – 10%, французский и немецкий – 5%. Все три языка знают 3%. Ответьте на вопросы: а). Какой процент студентов не знает ни одного языка; б). Сколько процентов студентов знают не более двух языков?

157) В некоторой возрастной группе 60% читают регулярно только различные журналы, 50% - только газеты, 50% - романы о любви. Журналы и газеты читают 30%, газеты и романы – 20%, а журналы и романы – 40%. Все три вида изданий читают 10% людей рассматриваемой группы. Сколько процентов не читает ничего?

158) В группе студентов из 15 человек английский язык знают 10 человек, немецкий знают 7 человек, французский – 6 человек. Два языка: английский и немецкий знают 5 человек, английский и французский – 4 человека, немецкий и французский – 3 человека. 13 человек знают хотя бы один из этих языков. Выясните:

а) Сколько человек не знают ни одного из этих языков?

б) Сколько студентов знают все три языка?

в) Сколько студентов знают не более двух языков?

г) Сколько человек знают английский, но не знают немецкий и французский?

159) Найдите количество натуральных (положительных целых) чисел из первой тысячи, не делящихся нацело ни на 3, ни на 5, ни на 7.

160) Найдите количество натуральных (положительных целых) чисел из первой тысячи, не делящихся нацело ни на 6, ни на 10, ни на 15.

161) На первом туре олимпиады школьникам были предложены 4 задачи, и на второй тур допускали только тех, кто все их решил. На первый тур пришло 200 школьников. Первую задачу решили 180 школьников, вторую – 170, третью – 160, а четвертую – 150. Поместятся ли школьники, допущенные на второй, тур в классной комнате, вмещающей не более 50 человек?

162) В классе 35 учеников, каждый из которых любит футбол, волейбол или баскетбол. 24 из них любят футбол, 18 – волейбол и 12 – баскетбол. Дело в том, что 10 учеников одновременно любят и футбол и волейбол, 8 – футбол и баскетбол, а 5 – волейбол и баскетбол. Сколько учеников этого класса любят все три вида спорта?

163) Группа пятиклассников отправилась в поход. На привале разговорились о предстоящем первенстве школы по футболу, баскетболу и волейболу. Оказалось, что семеро из ребят хотят участвовать в первенстве по футболу, шестеро – по баскетболу, а пятеро – по волейболу. Сколько ребят принимало участие в этом разговоре, если четверо из них хотели участвовать в первенстве по футболу и баскетболу, трое – по футболу и волейболу, двое – по баскетболу и волейболу, а один хотел участвовать во всех трех видах игр?

164) Из 35 студентов, побывавших на каникулах в Москве, все, кроме двоих, делились впечатлениями. О посещении Большого театра с восторгом вспоминали 12 человек, Кремля – 14, а 16 – о концерте, по три студента запомнили посещение театра и Кремля, а также театра и концерта, а четверо – концерта и пребывания в Кремле. Сколько студентов сохранили воспоминания одновременно о театре, концерте и Кремле?

165) Из 100 студентов специальности ПО ВТ и АС 42 человека посещают спортивные секции, 30 – занятия студенческого научного общества (СНО), а 28 – школу актива. На занятия СНО и спортом успевают ходить 5 студентов, спортом и школы актива – 10, СНО и школы актива – 8. Сразу все три увлечения имеют три студента. Сколько студентов:

1) Не посещают ни одно из этих объединений по интересам;
2) Занимаются только спортом;
3) Занимаются либо в СНО, либо в школе актива;
4) Занимаются либо спортом, либо в школе актива, но не в СНО;
5) Занимаются спортом или в школе актива, но не в СНО;

6) Занимаются или в СНО, или в школе актива, но не спортом?

166) Инспектор курса составил отчет, в котором сказано, что из 100 абитуриентов английский язык в школе изучали 50 человек, немецкий – 23, а французский – 30. С английским и французским языками знакомы 8 абитуриентов, с французским и немецким – 10, а с английским и немецким -20. Все три языка изучали 5 человек. Докажите, что в отчете имеется ошибка. Укажите, каких данных, по вашему мнению, не хватает.

2.2 Правило произведения

Для случая двух объектов правило произведения состоит в следующем: если объект x может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект y, в свою очередь, может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) может быть осуществлён $m\cdot n$ способами.

В общем случае правило произведения формулируется так: если объект x_1 может быть выбран n_1 способами, после чего объект x_2 может быть выбран n_2 способами, и для любого k такого, что k=2, …, m, после выбора объектов $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ объект x_k может быть выбран n_k способами, то выбор упорядоченного набора $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ может быть осуществлён $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ способами.

Правило произведения $|X_1\times X_2\times X_3\times\ldots\times X_k|=\prod_{i=1}^{k}|X_i|$.

Примеры решения задач

167) В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Решение. Чашку можно выбрать 5 способами. Для каждого способа выбора чашки существует 3 способа выбора блюдца. Таким образом, имеем 5·3=15 способов выбора пары предметов.

168) В магазине «Все для чая» есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

Решение. Из решения предыдущей задачи известно, что существует 5·3=15 способов выбора пары предметов чашка – блюдце. Для каждого способа выбора этой пары существует 4 способа выбора ложки. Таким образом, по правилу произведения имеем 5·3·4=60 способов выбора комплекта из чашки, блюдца и ложки.

2.3 Правило суммы

Пусть X – конечное множество, состоящее из n элементов. Тогда говорят, что объект x из X может быть выбран n способами, и пишут |X|=n.

Если X_1, X_2, …, X_k – попарно непересекающиеся множества, то, очевидно, имеет место равенство: $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$ - ***правило суммы***

При k=2 указанное правило формулируется так: если объект x может быть выбран m способами, а объект y – n способами, то выбор «x или y» может быть осуществлён m+n способами.

Примеры решения задач

169) Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги, Из города А в город Г – 2 дороги, и из города Г в город В – тоже 2 дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

Решение. Из города А в город В можно попасть либо через город Б, либо через город Г. По правилу произведения через город Б можно проехать 6·4=24 способами, через город Г – 2·2=4 способами. Тогда из города А в город В можно попасть 24+4=28 способами.

170) Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая по правилам игры комбинация.

Решение. Шахматное поле имеет 64 клетки, поэтому белого короля можно поставить 64 способами. Как известно, король бьет клетки, расположенные непосредственно рядом с ним. Таким образом, если король находится в углу, то под боем находятся 3 клетки, если у стены, то – 5, если в центре, то – 8. Очевидно, что ставить черного короля нельзя в ту же клетку, где находится белый король и в клетку, которая находится под боем. Так как существует 4 способа поставить короля в угол, 24 способа – у стены и 36 способов – в центре поля, то ответ на вопрос задачи вычисляется следующим образом: $4\cdot(64-4)+24\cdot(64-6)+36\cdot(64-9)=3612$

Задачи для самостоятельного решения

171) Имеется пять видов конвертов и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

172) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный?

173) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный, так чтобы они не лежали на одной горизонтали и вертикали?

174) Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами это можно сделать?

175) У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?

176) Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

177) Имеется 6 пар перчаток разных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну – на правую так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

178) Из трех различных экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 6 экземпляров учебника физики надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

179) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова “КАМЗОЛ”?

180) На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

181) В магазине одежды продаются 5 видов костюмов троек (брюки, пиджак, жилет), 7 видов брюк, 3 вида пиджаков и 2 вида жилетов, кроме того, 3 вида костюмов двоек (брюки, пиджак). Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую брюки, пиджак и жилет?

182) У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

2.4 Размещения с повторениями

$\overline{A}_n^r$– число различных (n, r)-размещений с повторениями, которые вычисляются по формуле : $\overline{A}_n^r = n^r$.

Примеры решения задач

183) В телефонном номере преступника встречаются только цифры 2, 4, 5, 7 семизначного телефонного номера. Сколько всего вариантов?

Решение. В семизначном номере встречаются только 4 цифры, остальные 3 повторяют какие-то из имеющихся. Следовательно, имеет задачу о размещениях из 4 цифр по семи, т.е. с повторениями. $\tilde{A}_4^7 = 4^7 = 16384$ номера.

184) Каково число последовательностей длины n, состоящих из 0 и 1?

Решение. Заметим, что последовательность длины n можно получить из последовательности длины n – 1, дописывая в конец последовательности либо 1, либо 0. Значит, из каждой последовательности длины n – 1 получается две последовательности длины n. Ответ на вопрос задачи – 2^n.

185) Для того чтобы открыть камеру хранения, используется комбинация из 4 цифр (от 0 до 9), набираемая на 4 колесиках. Сколько различных комбинаций существует?

Решение. Из условия задачи следует, что необходимо составить всевозможные комбинации по 4 элемента из данных 10. По формуле размещений с повторением получаем: $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10\ 000$ вариантов.

186) Сколько в n-ичной системе счисления натуральных чисел, записываемых ровно k знаками?

Решение. Если допустить записи чисел, начинающиеся с нуля, то каждое k-значное число в n-ичной системе счисления можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из k цифр, причем цифры бывают n видов. Получаем, что количество чисел, имеющих такую запись, равно n^k.

Но натуральные числа не могут начинаться с нуля. Поэтому из полученного значения n^k необходимо вычесть количество чисел, запись которых начинается с нуля. Если отбросить от этих чисел первую цифру – ноль, то получим (k–1)-значное число (быть может, начинающееся с нуля). Таких чисел по формуле для вычисления количества размещений с повторениями существует n^{k-1}. Значит общее количество k-значных чисел в n-ичной системе счисления равно $n^k – n^{k-1}= n^k(n – 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

187) Назовем натуральное число «симпатичным'», если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных «симпатичных» чисел?

188) Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что все студенты экзамен сдали?

189) На железнодорожной станции имеется m светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый, зеленый?

190) Сколькими способами можно отправить 6 писем с тремя курьерами?

191) В клубе велосипедистов считается плохим знаком иметь членский билет, в номере которого есть цифра 8. Поэтому председатель клуба решил выдавать билеты с номерами, в которые ни одна 8 не входит. Сколько было членов в группе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной восьмерки?

192) На флоте применяют семафор флажками. Каждой букве соответствует определенное положение флажков. Всего положений каждого флажка пять – вниз отвесно, вниз наклонно, горизонтально, вверх наклонно и вверх отвесно. Как правило, флажки находятся по разные стороны от тела сигнальщика. Но при передаче некоторых букв оба флажка расположены по одну и ту же сторону. Почему пришлось сделать такое исключение?

2.5 Размещения без повторений

Количество размещений без повторений обозначают: $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$, $r \leq n$.

Примеры решения задач

193) При расследовании хищения установлено, что у преступника семизначный телефонный номер, в котором ни одна цифра не повторяется. Следователь, полагая, что набор этих номеров потребует одного – двух часов, доложил о раскрытии преступления. Прав ли он?

Решение. Телефонный номер обычно не начинается с “0”. Значит, вычислим число комбинаций из девяти различных цифр по 7. Это размещение.

$A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!} = 181440$ номеров.

Если на проверку тратить 1 мин на 1 номер, то на всё уйдет 3 024 часа или 126 суток. Следователь, значит, не прав.

194) Как изменится решение задачи о камере хранения, если известно, что цифры, набираемые на колесиках, различны.

Решение. Вариантов выбора первой цифры 10 (от 0 до 9). Так как повторения быть не может, то вариантов выбора второй цифры всего 9. Аналогично для выбора третьей цифры остается 8 вариантов, для выбора четвертой – 7. По правилу произведения получаем, что всего комбинаций, в которых все числа различны, $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$.

195) В первенстве России по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены?

Решение. Переформулируем задачу: Сколько существует комбинаций из 17 элементов по 3, если важны порядок элементов в комбинации, состав элементов и в комбинацию не могут входить элементы одного типа. (Повторения здесь быть не может – одна и та же команда не может получить и золотую и серебреную медаль.). Эта задача относится к задачам на размещения без повторения. По формуле получаем: медали могут распределиться A_{17}^{3}=17·16·15=4 080 способами.

196) Сколько можно образовать целых чисел, из которых каждое изображалось бы тремя цифрами (номера машин)?

Решение. $A_{10}^{3}=10\cdot 9\cdot 8=720$ чисел.

197) Автомобильные номера некоторой страны состоят из 3 букв (все буквы различны) и четырех цифр (цифры могут повторяться). Сколько максимально машин может быть в этой стране, если в её алфавите 26 букв?

Решение. Число комбинаций по 3 буквы из данных 26, при условии, что буквы не могут повторяться, определим с помощью формулы для вычисления количества размещений без повторений: A_{26}^{3}=26·25·24=15 600.

Число комбинаций по 4 цифры из данных 10, если в комбинацию могут входить одинаковые цифры, найдем с помощью формулы для вычисления количества размещений с повторениями: $\overline{A}_{10}^{4}=10^4$.

Тогда по правилу произведения различных автомобильных номеров – $A_{26}^{3}\cdot\overline{A}_{10}^{4}=15600\cdot10^4=156\cdot10^6$.

Задачи для самостоятельного решения

198) Сколькими способами в группе студентов из 34 человек можно выбрать старосту и казначея? Если известно, что один человек не может занимать две должности сразу. Если известно, что один человек может занимать две должности сразу.

199) В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

200) Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

201) Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

202) Забор состоит из 100 дощечек. У Тома Сойера есть краски 150 различных цветов. Сколько существует различных раскрасок забора, если все дощечки покрашены в разный цвет? Та же задача, но дощечки могут быть покрашены в одинаковый цвет.

203) Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили два различных числа?

204) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5? Тот же вопрос, но при условии, что ни одна цифра не повторяется?

205) У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают ровно три имени?

206) У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?

207) Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? А если одна полоса обязательно должна быть красной?

2.6 Перестановки

Число n-перестановок обозначают через: $P_n = n!$

Примеры решения задач

208) Сколькими способами семь разных учебников можно поставить на полке в один ряд?

Решение. $P_7 = 7! = 5040$ способов.

209) Сколькими способами можно расположить на книжной полке 6 томов детской энциклопедии?

Решение. Так как на полке располагаем все 6 томов, то различные расположения отличаются только порядком, но не составом. По формуле перестановок имеем 6!=720.

210) Сколькими способами можно разместить 12 студентов за столом, на котором поставлено 12 приборов?

Решение. $P_{12} = 12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 12 = 479001600$.

211) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга.

Решение. На каждой вертикали и горизонтали должно стоять по одной ладье. Введем обозначения: перестановка (13256487) означает, что на первой горизонтали ладья стоит в первом поле, на второй – в третьем, на третьем – во втором и т.д. Таким образом, число искомых расположений равно количеству перестановок чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, то есть P_8=8!=40320.

212) Сколько способов разбить 6 мужчин и 6 женщин на пары для танцев?

Решение. Выстроим мужчин в одну линию в произвольном порядке. Пусть каждая женщина выбирает себе пару. Тогда количество способов разбиения на пары равно количеству способов переставить 6 различных предметов, т.е. равно 6!.

213) Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Решение. Если бы девушки стояли на месте, то получилось бы 7! способов. Так как танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих предметов не существенно, а важно лишь взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении танцовщиц, необходимо считать одинаковыми. Из каждой перестановки можно получить еще шесть новых путем вращения. Значит, число 7! необходимо разделить на 7. Получаем 7!:7=6!=720 различных перестановок девушек в хороводе.

2.7 Перестановки с повторениями

Число перестановок с повторениями обозначают через $P(n_1, n_2, ..., n_k)$. Общее правило вычисления количества перестановок с повторениями:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k)=. \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}.$$

Рассмотрим, как изменится количество перестановок, если некоторые из переставляемых предметов одинаковы.

Примеры решения задач

214) Сколько слов можно получить, переставляя буквы слова «март»? Сколько слов можно получить, если переставлять буквы слова «мама»?

Решение. Переставляя буквы слова «март» получим 24 различные перестановки, так как все переставляемые элементы различны.

Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок – некоторые перестановки совпадают друг с другом.

При перестановке букв слова «мама» имеем две пары одинаковых букв мм и аа. Сделаем их различными, дописав к одинаковым буквам различные индексы: $м_1а_1м_2а_2$. Рассмотрим все возможные перестановки:

$м_1а_1м_2а_2$ $м_1м_2а_1а_2$ $а_1а_2м_1м_2$ $м_1а_1а_2м_2$ $а_1м_1м_2а_2$ $а_1м_1а_2м_2$

$м_2а_1м_1а_2$ $м_2м_1а_1а_2$ $а_2а_1м_1м_2$ $м_2а_1а_2м_1$ $а_1м_2м_1а_2$ $а_1м_2а_2м_1$

$м_1а_2м_2а_1$ $м_1м_2а_2а_1$ $а_1а_2м_2м_1$ $м_1а_2а_1м_2$ $а_2м_1м_2а_1$ $а_2м_1а_1м_2$

$м_2а_2м_1а_1$ $м_2м_1а_1а_1$ $а_2а_1м_2м_1$ $м_2а_2а_1м_1$ $а_2м_2м_1а_1$ $а_2м_2а_1м_1$

Получили 24 различные перестановки, которые разбиваются на четверки одинаковых слов, если убрать индексы при буквах «м» и «а». Значит, всего различных перестановок $\frac{24}{4}=6$.

215) Сколькими способами можно разложить в ряд две зелёные и 4 красные папки?

Решение. Число способов разложения равно числу перестановок с повторениями. $P_6(2,4)=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$ способов.

216) Сколькими способами можно переставит буквы в слове “какао”, чтобы получились всевозможные различные наборы букв?

Решение. В заданном слове – 5 букв, причем “и” и “а” повторяются по два раза, а “о” встречается один раз. Тогда $P_5(2,2,1) = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30$ способов.

217) Сколькими способами можно поставить в ряд 3 красных, 4 синих и 5 зеленых кубиков?

Решение. По формуле перестановок с повторениями получаем: P(3, 4, 5)=$\frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!} = 27\ 720$.

218) Слово – любая конечная последовательность букв русского алфавита. Сколько различных слов можно составить из слова КАСАТЕЛЬНАЯ, если необходимо использовать все буквы?

Решение. В слове имеется 3 буквы А и еще 8 различных букв. По формуле перестановок с повторениями получаем: P(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3)=$\frac{11!}{3!}$=6 652 800.

Задачи для самостоятельного решения

219) Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

220) Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

221) В ряду зрительного зала 15 кресел. Сколькими способами можно разместить на них 15 человек?

222) На полке n различных книг. Сколькимспособами их можно переставить.

223) Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 6 мужчин и 6 женщин таким образом, чтобы мужчины и женщины чередовались?

224) Сколько можно сделать перестановок из n различных элементов, в которых данные два стоят рядом?

225) Сколько можно сделать перестановок из n различных элементов, в которых данные два не стоят рядом?

226) Лингвисты разгадывают записи некоторого племени. Известно, что каждый символ обозначает один звук. Всего в алфавите 26 символов. Сколькими способами можно сопоставить звуки знакам письма? Во сколько раз уменьшится количество возможных вариантов, если ученым удалось найти 7 знаков, обозначающих гласные, и 19 согласные?

227) Сколько существует различных последовательностей длины 5, составленных из трех 1 и двух 0?

228) Слово - любая конечная последовательность букв русского алфавита. Выясните, сколько различных слов можно составить из слов а) «ВЕКТОР'»; б) «ЛИНИЯ»; в) «ПАРАБОЛА»; г) «БИССЕКТРИСА»; д) «МАТЕМАТИКА», используя все буквы.

2.8 Сочетания без повторений

Количество сочетаний из n элементов по r обозначают: $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $r \leq n$.

Примеры решения задач

229) В штате прокуратуры областного центра, имеется 5 следователей. Сколькими способами можно выбрать двух из них для проверки оперативной информации о готовящемся преступлении?

Решение. $C_5^{\,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ способами.

230) В розыгрыше первенства по футболу среди вузов принимает участие 16 команд, при это любые две команды играют между собой только один матч. Сколько всего календарных игр?

Решение. $C_{16}^{\,2} = \dfrac{16!}{2! \cdot 14!} = 16$ игр.

231) Два филателиста хотят обменяться марками. У одного для обмена есть 7 марок, у другого – 5. Сколькими способами они могут поменять две марки одного на две марки другого?

Решение. Первый филателист должен выбрать 2 марки из 7. Он может это сделать C_7^2 способами. Второй должен выбрать 2 марки из 5. Он может это сделать

C_5^2 способами. По правилу произведения получаем, $C_7^2 \cdot C_5^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 210$ способов совершить обмен.

232) Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди них окажется ровно три туза?

Решение. Необходимо выбрать трех тузов и семь «не тузов». Всего в колоде 4 туза. Поэтому выбрать из них 3 можно C_4^3 способами. «Не тузов» в колоде 48. Выбрать из них 7 можно C_{48}^7 способами. По правилу произведения получаем: $C_4^3 \cdot C_{48}^7 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{48!}{7! \cdot 41!} = \frac{4 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 29\ \ 451\ \ 6288$ способов выбрать из колоды 10 карт так, что среди них будет ровно три туза.

Задачи для самостоятельного решения

233) Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если: Все путевки различны, Все путевки одинаковы?

234) Сколько вариантов экзаменационной комиссии, состоящей из 5 человек, можно создать из 14 преподавателей?

235) Сколькими способами можно выбрать из n человек упорядоченную группу из k человек? Сколькими способами можно выбрать из n человек неупорядоченную группу из k человек?

236) У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого - 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

237) При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько сделано рукопожатий?

238) Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

239) Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников: одного для участия в математической олимпиаде, другого для участия в олимпиаде по физике. Сколькими способами это можно сделать, при условии, что олимпиады проходят в одно время?

240) Есть 3 билета в различные театры. Сколькими способами они могут быть распределены среди 25 студентов группы, если каждый студент может получить только один билет.)

241) На группу из 25 человек выделены 3 пригласительных билета на вечер. Сколькими способами они могут быть распределены (не более одного билета в руки)?

242) В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

2.9 Свойства чисел C_n^k

Числа C_n^k обладают рядом замечательных свойств. Эти свойства можно доказывать по-разному. Можно прямо воспользоваться формулой $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Однако часто удается получить доказательство из комбинаторных соображений.

1 свойство: $P(k, n\text{-}k) = C_n^k$

2 свойство – свойство симметричности $C_n^k = C_n^{n-k}$

3 свойство – основное свойство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

4 свойство: $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n$

5 свойство: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 ... + (-1)^k C_n^k + ... + (-1)^n C_n^n = 0$

Примеры решения задач

243) На окружности отмечено 11 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в отмеченных точках?

Решение.

Первый способ. Существует C_{11}^3 треугольников с вершинами в отмеченных точках, C_{11}^4 – четырехугольников, C_{11}^5– пятиугольников, … , C_{11}^{11} –

одиннадцатиугольников. Таким образом, по правилу суммы всего многоугольников $C_{11}^{3}+C_{11}^{4}+C_{11}^{5}+\ldots+C_{11}^{11}$. Из четвертого свойства следует, что это выражение равно 2^{11}-C_{11}^{1}-C_{11}^{2}=1 982.

Второй способ. Любая из одиннадцати точек либо является вершиной рассматриваемого многоугольника, либо не является. Всего вариантов 2^{11}. Но одна или две точки не могут составлять многоугольник. Остается 2^{11}-C_{11}^{1}-C_{11}^{2} вариантов многоугольников с вершинами в отмеченных точках.

2.10 Сочетания с повторениями

Количество сочетаний из n элементов по r с повторениями обозначают $\overline{C}_{n}^{r}=C_{n+r-1}^{r}$.

Примеры решения задач

244) В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение Эта задача не является задачей на размещения с повторениями, так как порядок, в котором укладывают пирожные в коробку, несуществен. Поэтому она ближе к задачам на сочетания. Но от задач на сочетания она отличается тем, что в комбинации могут быть повторяющиеся элементы. Такие задачи называют задачами на *сочетания с повторениями*. Чтобы решить задачу, поступим следующим образом. Зашифруем каждую покупку с помощью нулей и единиц. Сначала напишем столько единиц, сколько куплено наполеонов. Потом, чтобы отделить наполеоны от эклеров, напишем нуль, затем – столько единиц, сколько куплено эклеров, и т. д. Например, если куплено 3 наполеона, 1 эклер, 2 песочных и 1 слоеное пирожное, то получим такую запись: 1110101101. Ясно, что разным покупкам соответствуют разные комбинации из 7 единиц и 3 нулей. Обратно, каждой комбинации 7 единиц и 3 нулей соответствует какая-то покупка. Таким образом, число различных покупок равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из 7 единиц и 3 нулей. А это число равно P(7,3)=120.

К тому же самому результату можно было прийти и другим путем, а именно: расположим в каждой покупке пирожные в таком порядке: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные, а потом перенумеруем их. Но при нумерации будем к номерам эклеров прибавлять 1, к номерам песочных – 2, к номерам слоеных – 3. К номерам наполеонов ничего прибавлять не будем. Например, пусть куплено 2 наполеона, 3 эклера, 1 песочное пирожное и 1 слоеное. Тогда эти пирожные нумеруются так: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Ясно, что самый большой номер может быть 10, самый маленький – 1, а кроме того, ни один из номеров не повторяется, причем они образуют возрастающую последовательность. Обратно, каждой возрастающей последовательности из 7 чисел соответствует некоторая покупка. Например, последовательность 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 соответствует покупке из 4 эклеров и 3 песочных пирожных. Чтобы убедиться в этом, надо отнять от заданных номеров числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Мы получим числа 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2. Но 1 мы прибавляли к номерам эклеров, а 2 – к номерам песочных. Отсюда, общее число покупок равно числу возрастающих последовательностей из 7 чисел от 1 до 10. А число таких последовательностей равно C(10,7)=120.

Количество сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначают: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Встречаются задачи, в которых на сочетания с повторениями накладывается дополнительное условие, например, когда в комбинацию обязательно должны входить элементы r фиксированных типов, где r≤n. Эта задача легко сводится к уже решенной. Для того чтобы обеспечить присутствие заданных r типов, возьмем с самого начала по одному элементу каждого такого типа. Тем самым в k-сочетании окажутся заняты r мест. Поэтому ответом на задачу будет число $\overline{C}_n^{k-r} = C_{n+k-r-1}^{k-r}$. В частности, если требуется, чтобы в каждом сочетании был элемент каждого из типов (n≤k), то получится C_{k-1}^{k-n}.

245) Сколько существует различных бросаний двух одинаковых кубиков?

Решение. Переформулируем задачу. Всего при подбрасывании одного кубика возможны шесть ситуаций – имеем предметы шести различных типов.

Подбрасывают два кубика, следовательно, из данных шести типов предметов необходимо выбрать два, причем нас не интересует порядок выбора, и допускается выбор одинаковых предметов. Таким образом, это задача на сочетания с повторением. По формуле для вычисления количества сочетаний с повторением имеем $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ различных бросаний двух одинаковых кубиков.

246) Сколько трехзначных чисел начинаются с 3 или 4?

Решение. Трехзначные числа, о которых идет речь в задаче, естественным образом разбиваются на два непересекающихся класса. К одному из них относятся числа, начинающиеся с 3, а ко второму — с 4. Для подсчета чисел в первом классе заметим, что существует один возможный исход для первой цифры (она должна быть равна 3), 10 исходов для второй и 10 исходов для последней цифры. По правилу произведения получаем, что всего чисел в первом классе насчитывается ровно 1•10•10 = 100. Аналогично можно подсчитать количество чисел во втором классе. Оно тоже равно 100. Наконец, по правилу суммы получаем, что существует 100 + 100 = 200 трехзначных чисел, начинающихся с 3 или 4.

247) Сколько различных вариантов можно получить, бросая пять игральных костей?

Решение. На каждой из костей может выпасть от одного до шести очков, т.е. каждая кость дает шесть вариантов. Если бросили пять костей, то каждый вариант можно рассматривать как $C_{6+5-1}^{6-1} = C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!\cdot 5!} = 252.$ неупорядоченный набор пяти объектов (для каждого из которых есть 6 возможностей) с повторениями, т. е. сочетания с повторениями.

248) Двенадцать человек, включая Марию и Петра, являются кандидатами в комитет пяти. Сколько разных комитетов можно набрать из 12 кандидатов? Сколько из них

а) включают как Марию, так и Петра;

б) не включают ни Марию, ни Петра;

в) включают либо Марию, либо Петра, но не обоих?

Решение. Существует возможных комитета.

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{7!\cdot 5!} = 792$$

а) Если Мария и Петр уже выбраны в комитет, нам остается отобрать в него только трех членов из оставшихся десяти кандидатов. Это можно сделать способами.

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

Значит, Мария и Петр могут быть членами 120 разных комитетов.

б) Если Мария и Петр не участвуют в комитете, то мы выбираем всех его членов из десяти кандидатов. Поэтому у нас есть возможности для разных комитетов, не включающих ни Марию, ни Петра.

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$$

в) Один из способов дать ответ на этот вопрос заключается в подсчете комитетов, включающих Марию, но без Петра. Их ровно C_{10}^{4}. То же число комитетов включают Петра, но без Марии. Значит, $2 \cdot C_{10}^{4}$ комитета имеют в качестве члена либо Марию, либо Петра, но не обоих сразу.

Задачи для самостоятельного решения

249) В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов.

250) Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

251) Сколькими способами можно купить 8 открыток?

252) Сколькими способами можно купить 12 открыток?

253) Сколькими способами можно купить 12 открыток, чтобы среди них оказались открытки 3 фиксированных типов?

254) Сколькими способами можно купить 20 открыток, чтобы среди них были открытки всех типов?

255) Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений 4, 5, 6, 7?

256) Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длина каждого ребра которых является целым числом от 1 до 10?

257) Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр1,2,3,4?

258) Сколько различных десятизначных чисел можно составить из цифр0,1,2?

259) Сколько существует различных бросаний пяти одинаковых кубиков?

2.11 Комбинаторика разбиений

Многим комбинаторным задачам можно придать вид стандартной схемы. В этой схеме объекты (предметы) помещаются в ящики. Из-за наложения различных ограничений получаются различные задачи. Рассмотрим некоторые из них.

Имеется n_1 предметов одного сорта, n_2 – другого, ... , n_k – k-го сорта. Сколькими способами можно разложить их в два ящика?

Так как в каждый ящик может попасть от 0 до n_i предметов i-го сорта (во второй все оставшиеся), по правилу произведения получаем $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot...\cdot(n_k+1)$ способов раскладки.

Примеры решения задач

260) Двое ребят собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?

Решение. Необходимо 10 предметов одного вида, 15 – второго и 14 – третьего разложить в два ящика. Применяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем $11\cdot16\cdot15=2460$ способов раздела цветов.

Следствие 1. Если все предметы различны ($n_1=n_2=...=n_k=1$), то их можно разложить 2^k способами.

Следствие 2. Если в каждый ящик нужно положить не менее s_i предметов i-го сорта, то получим формулу: $(n_1-2s_1+1)\cdot(n_2-2s_2+1)\cdot...\cdot(n_k-2s_k+1)$.

Даны n различных предметов и k ящиков. Надо положить в первый ящик n_1 предметов, во второй – n_2, ..., в k-ый – n_k, где $n_1+...+n_k=n$. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок предметов в ящике?

Выложим все предметы в один ряд. Это можно сделать $n!$ способами. Первые n_1 предметов положим в первый ящик, вторые n_2 предмета – во второй ящик, …, k-ые n_k предметов – в к-ый ящик. Так как нас не интересует порядок предметов в ящике, то любая перестановка первых n_1 предметов не меняет результат раздела. Точно так же его не меняет любая перестановка вторых n_2 предметов, ..., k-ых n_k предметов. По правилу произведения получаем $n_1!\cdot n_2!\cdot...\cdot n_k!$ перестановок, не меняющих результата раздела. Таким образом, n! перестановок делятся на группы по $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ перестановок в каждой группе, причем перестановки из одной группы приводят к одинаковому распределению предметов. Следовательно, число раздела предметов равно $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = P(n_1, \ldots, n_k)$.

261) При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Решение. Переформулируем задачу: необходимо разложить 28 предметов в 4 ящика по 7 предметов в каждый, причем порядок предметов в ящике не важен. Получаем $\frac{28!}{(7!)^4}$ способов распределения костей домино.

Можно было рассуждать другим способом. Первый игрок выбирает себе 7 костей из 28, это можно сделать C_{28}^7 способами. Второму необходимо выбрать 7 костей из оставшихся 21, это можно сделать C_{21}^7 способами. Третьему 7 из 14 – C_{14}^7 способов. А четвертый заберет оставшиеся. По правилу произведения получаем $C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7$.

Задачи для самостоятельного решения

262) Вычислите следующие величины:

a) A_7^2, A_8^5, A_6^4, A_n^{n-1};

b) C_{10}^7, C_9^2, C_8^6, C_n^{n-1}.

c) Убедитесь, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

263) Необходимо выбрать смешанную команду, которая будет представлять местный теннисный клуб на соревнованиях. В спортивном клубе состоят 6 женщин и 9 мужчин. Сколько различных пар можно выбрать для участия в соревнованиях?

264) Я хочу взять с собой для ланча два фрукта. У меня есть три банана, четыре яблока и две груши. Сколькими способами я могу выбрать два фрукта разного вида из имеющихся у меня?

265) Государственный регистрационный знак легкового автомобиля состоит из трех цифр и трех букв русского алфавита (не считая когда города). Будем считать, что в номере можно задействовать любую последовательность букв и цифр. Сколько различных автомобильных номеров может выдать ГИБДД?

266) У человека есть пять пиджаков, восемь рубашек и семь галстуков. Сколько различных костюмов можно составить из этих предметов?

267) У женщины в шкафу висит шесть платьев, пять юбок и три блузки. Сколько различных нарядов она может составить из своей одежды?

268) В холодильнике стоит мороженое шести различных наименований. На десерт можно взять одно, две или даже три порции мороженого сразу. Сколько возможностей есть у Вас для различных десертов?

269) Целые числа в компьютере представляются строчкой из N двоичных знаков. Первый из них отведен на знак (+ или -), а остальные N – 1 отвечают за модуль целого числа. Сколько различных целых чисел может использовать компьютер?

270) Сколько различных четырехбуквенных “слов” можно написать, используя буквы: а, с, п, о, и е, если под “словом” мы будем понимать любую последовательность неповторяющихся букв, даже если эта последовательность не несет в себе никакого смысла.

271) Меню в китайском ресторане дает Вам возможность выбрать ровно три из семи главных блюд. Сколькими способами Вы можете сделать заказ?

272) Перевертыш – это многозначное число, которое не поменяет своего значения, если все его цифры записать в обратном порядке. Сколько существует шестизначных перевертышей? А сколько семизначных?

273) Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6000, можно составить, используя только нечетные цифры?

274) Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из шести символов. Первые два из них – строчные буквы алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей?

275) Пусть S – множество четырехзначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют цифры: 0,1,2,3, и 6, причем 0 на первом месте, естественно, стоять не может.

a) Какова мощность множества S?

b) Сколько чисел из S в своей десятичной записи не имеют повторяющихся цифр?

c) Как много четных среди чисел пункта (b)?

d) Сколько чисел из пункта (b) окажутся больше, чем 4 000?

276) Сколько существует возможностей для присуждения первого, второго, третьего мест семнадцати участницам соревнований по икебане?

277) Комитет из 20 членов избирает председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

278) Пароль, открывающий доступ к компьютеру, составляется по правилам задачи 189. Сколько разных паролей можно написать из не повторяющихся символов?

279) Хоккейная команда насчитывает 18 игроков. Одиннадцать из них входят в основной состав. Подсчитайте количество возможных основных составов.

280) Жюри из 5 женщин и 7 мужчин должно быть выбрано из списка в 8 женщин и 11 мужчин. Сколько можно выбрать различных жюри?

281) Предстоит выбрать команду четырех игроков в гольф из пяти профессиональных игроков и пяти любителей. Сколько разных команд может состоять из трех профессионалов и одного любителя? Сколько команд состоит только из профессионалов или только из любителей?

282) В один из комитетов парламента можно отобрать трех членов, причем выбирать надо из пяти консерваторов, трех лейбористов и четырех либерал - демократов.

a) Сколько разных комитетов можно составить?

b) Сколько разных комитетов можно составить, если в него должен входить по крайней мере один либерал –демократ?

c) Сколько разных комитетов можно составить, если лейбористы и консерваторы не могут быть его членами одновременно?

d) Сколько разных комитетов можно составить, если в него должен войти по крайней мере один консерватор и хотя бы один лейборист?

283) В небольшой фирме девять человек работают на производстве, пятеро – в отделе сбыта, и трое – в бухгалтерии. Для обсуждения новой продукции было решено пригласить на совещание шестерых работающих. Сколькими способами это можно сделать, если:

a) Необходимо пригласить по два представителя от каждого отдела;

b) Необходимо пригласить, по крайней мере, двоих представителей производства;

c) Необходимы представители каждого из трех отделов?

284) Ресторан в своем меню предлагает пять различных главных блюд. Каждый из компании в шесть человек заказывает свое главное блюдо. Сколько разных заказов может получить официант?

285) Цветочница продает розы четырех разных сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз?

286) Вы покупаете пять рождественских открыток в магазине, который может предложить четыре разных типа приглянувшихся Вам открыток.

a) Как много наборов из пяти открыток Вы можете купить?

b) Сколько наборов можно составить, если ограничиться только двумя типами открыток из четырех, но купить все равно пять открыток?

287) Сколькими способами можно распределить 15 студентов по трём учебным группам по пять студентов в каждой?

288) Сколько разных «слов» можно составить из букв слова «КОЛОБОК».

a) Сколько из них начинаются с буквы “Л?

b) В скольких из них три буквы “О” стоят рядом?

289) Сколько разных “слов” можно получить из слова “АБРАКАДАБРА”?

a) Сколько из них начинаются с буквы “К”?

b) В скольких из них обе буквы “Б” стоят рядом?

290) Сколькими способами можно расставить белые фигуры на первой линии шахматной доски?

2.12 Треугольник Паскаля. Формула бинома

Биномом Ньютона называют формулу для вычисления выражения $(a+b)^m$ для натуральных значений n: $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}$ или

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1!}x^{m-1}\cdot a + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}\cdot a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{m-3}\cdot a^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^{m-n}\cdot a^n + \ldots + a^m$$

Это равенство называется формулой бинома Ньютона. Правая часть называется разложением бинома.

Например,

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb = a^2+2ab+b^2$;

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb=$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Свойства:

1. Показатели буквы “x” уменьшаются на 1 от первого члена к последнему, причем в первом члене показатель x равен показателю степени бинома, а в последнем 0. Показатели степени “a” увеличиваются на 1 от первого к последнему, причем в первом члене показатель при a есть 0, а в последнем он равен показателю степени бинома. Таким образом, сумма показателей степени при x и a в каждом члене одна и та же, а именно: она равна показателю степени бинома.

2. Число всех членов разложения равно “m+1”, т.к. разложение содержит все степени a от 0 до m включительно.

3. Коэффициенты равны: C_m^n, где n = 0, 1, 2,…, m.

4. Каждый член разложения можно получить из формулы $T_{n+1} = C_m^n\, a^n\, x^{m-n}$ где n = 0, 1, 2, 3,…, m.

5. Коэффициенты членов, одинаково удаленных от концов разложения, равны между собой: симметричность биномиальных коэффициентов $C_n^k = C_n^{n-k}$

6. Т.к. коэффициенты членов равноотстоящих от концов разложения x одинаковы, то наибольший коэффициент должен находиться посередине разложения. Причем, если число всех членов разложения нечетное (при четном показателе бинома), то посередине будет один член с наибольшим коэффициентом; если же число всех членов четное (нечетный показатель бинома), то посередине должны быть два члена с одинаковыми наибольшими коэффициентами.

7. $T_{n+2} = \dfrac{T_{n+1}\cdot(m-n)}{n+1}$ Для получения коэффициента следующего члена достаточно умножить коэффициент предыдущего члена на показатель “x” в этом члене и разделить на число членов, предшествующих определяемому.

8. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n. Если положить в формуле бинома $x = a = 1$, то получим $2^m = 1 + m + \dfrac{m(m-1)}{2!} + \ldots + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!} + \ldots + 1$.

9. Если в формуле бинома “a” заменить на “–a”, то получим: $(x-a)^m = x^m - m\cdot a\cdot x^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{2!}a^2\,x^{m-2} - \ldots + (-1)^m\,a^m$, т.е. знаки “+” и ”-” чередуются.

10. Если в последнем равенстве положим $x = a = 1$, то получим: $0 = 1 - m + \dfrac{m(m-1)}{2!} - \ldots + (-1)^m$.

11. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

12. Сумма квадратов биномиальных коэффициентов

$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^k)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Числа C_n^k называют *б*иномиальными коэффициентами.

Треугольник Паскаля.

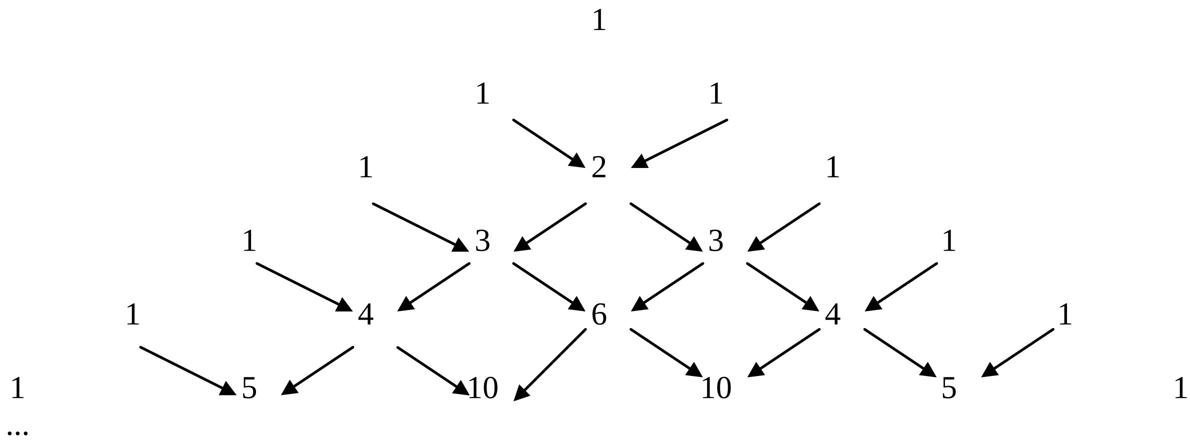


Рисунок 27

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 \quad C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 & & & \\
 & & C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 & & & \\
 & & C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5 & & &
\end{array}
$$

Рисунок 28

Примеры решения задач

291) Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении $(x+y)^5$.

Решение. Пятая строка треугольника Паскаля имеет вид: 1 5 10 10 5 1. Поэтому $(x+y)^5=1x^0y^5+5x^1y^4+10x^2y^3+10x^3y^2+5x^4y^1+1x^5y^0$.

292) Разложить по формуле бинома Ньютона: $(1+x)^6$.

Решение.

$$(1+x)^6 = 1^6 + \frac{6}{1!}1^{6-1}\cdot x + \frac{6\cdot(6-1)}{2!}\cdot 1^{6-2}\cdot x^2 + \frac{6\cdot5\cdot4}{3!}\cdot 1^3\cdot x^3 + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4!}\cdot 1^4\cdot x^4 +$$
$$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{5!}\cdot 1^5\cdot x^5 + x^6 = 1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6.$$

293) Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении $(3x+2y)^4$, используя формулу бинома Ньютона.

Решение.

$$(3x+2y)^4 = C_4^0\cdot(3x)^0\cdot(2y)^4 + C_4^1\cdot(3x)^1\cdot(2y)^3 + C_4^2\cdot(3x)^2\cdot(2y)^2 + C_4^3\cdot(3x)^3\cdot(2y)^1 +$$
$$+C_4^4\cdot(3x)^4\cdot(2y)^0 = 16\cdot y^4 + 4\cdot3\cdot x\cdot8\cdot y^3 + 6\cdot9\cdot x^2\cdot4\cdot y^2 + 4\cdot27\cdot x^3\cdot2\cdot y + 81\cdot x^4 =$$
$$=16y^4+96xy^3+216x^2y^2+216x^3y+81x^4$$

294) Разложить по формуле бинома Ньютона: $(3a^2-2b^2)^6$.

Решение.

$$(3a^2-2b^2)^6=(3a^2)^6+6(3a^2)^5\cdot(-2b^2)+\frac{6\cdot5}{2}(3a^2)^4\cdot(-2b^2)^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3}(3a^2)^3\cdot(-2b^2)^3+$$
$$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot3\cdot4}(3a^2)^2\cdot(-2b^2)^4+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot3a^2\cdot(-2b^2)^5+(-2b^2)^6=$$

$$=3^6a^{12}-12\cdot3^5\cdot a^{10}\cdot b^2+60\cdot3^4\cdot a^8\cdot b^4-20\cdot27\cdot8\cdot a^6\cdot b^6+20\cdot9\cdot16\cdot a^4\cdot b^8-$$
$$-18\cdot2^5\cdot a^2\cdot b^{10}+64\cdot b^{12}=729a^{12}-8748a^{10}b^2+4860a^8b^4-4320a^6b^6+$$
$$+2880a^4b^8-576a^2b^{10}+64b^{12}.$$

295) Найти коэффициент при x^2 в разложении $(2x+3)^6$.

Решение. В данной задаче требуется найти коэффициент только при x^2, поэтому нет необходимости раскрывать все выражение по формуле бинома Ньютона. Достаточно рассмотреть только одно слагаемое

$$C_6^2(2x)^2 3^{6-2}=\frac{6!}{2!\cdot4!}\cdot4\cdot x^2\cdot3^4=15\cdot4\cdot81\cdot x^2=4860\cdot x^2.$$

Таким образом, x^2 в разложении $(2x+3)^6$ будет иметь коэффициент 4 860.

296) Найти 6-й член разложения $(5x^2-6a^2)^{10}$.

Решение. $T_6=C_{10}{}^5\cdot\left(-6a^2\right)^5\cdot\left(5x^2\right)^5=-30^5\cdot C_{10}{}^5\cdot a^{10}\cdot x^{10}$.

297) Вычислить $(0{,}97)^4$

Решение.

$$(0{,}97)^4=\left(1-\frac{3}{100}\right)^4=1+4\cdot\left(-\frac{3}{100}\right)+\frac{4\cdot3}{2}\cdot1\cdot\left(-\frac{3}{100}\right)^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{2\cdot3}\cdot1\cdot\left(-\frac{3}{100}\right)^3+\left(-\frac{3}{100}\right)^4=$$

$$=1-0{,}12+0{,}0054-0{,}00108+0{,}000081\approx0{,}88.$$

298) В разложении $\left(x^2-\dfrac{a}{2x^3}\right)^{15}$ вычислить член, не содержащий "x".

Решение.

$$T_{n+1}=C_m{}^n a^n x^{m-n}.\ (x+a)^m=\sum_{n=0}^{m}C_m{}^n a^n x^{m-n}$$

$m=10,\quad n=?$

$$T_{n+1}=C_{10}{}^n\cdot\left(-\frac{a}{2x^3}\right)^n\cdot\left(2x^2\right)^{10-n}=(1)^n\cdot C_{10}{}^n\left(\frac{a}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{x^{3n}}\cdot2^{10-n}\cdot x^{2(10-n)}=$$

$$=(-1)^n \cdot C_{10}{}^n \cdot a^n \cdot 2^{10-2n} \cdot x^{20-5n} \quad \Rightarrow \quad 20-5n=0,\ n=4.$$

T_5 – не содержит “x”,

$$T_5 = C_{10}{}^4 \cdot \left(-\frac{a}{2x^3}\right)^4 \cdot \left(2x^2\right)^6 = C_{10}{}^4 \cdot \frac{a^4}{2^4 x^{12}} \cdot 2^6 \cdot x^{12} = 4a^4 \cdot C_{10}{}^4 =$$

$$= 4a^4 \cdot \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 4a^4 \cdot \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4} = 840a^4.$$

2.13 Полиномиальная формула

Полиномиальной формулой называют формулу для вычисления значения выражений $(x_1+x_2+\ldots x_k)^n$ для различного числа слагаемых и различных натуральных степеней n.

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} P(k_1,k_2,\ldots,k_m)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m} = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$$

Свойства чисел $P(k_1,k_2,\ldots,k_3)$

1. $\sum\limits_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} P(k_1,k_2,\ldots,k_m) = m^n$.

2. $P(k_1,k_2,\ldots,k_m) = P(k_1-1,k_2,\ldots,k_m) + P(k_1,k_2-1,\ldots,k_m) + \ldots + P(k_1,k_2,\ldots,k_m-1)$.

Примеры решения задач

299) Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении $(x+y+z)^4$, используя полиномиальную формулу.

Решение. Ясно, что коэффициенты при x^2yz и xy^2z равны. Поэтому достаточно найти коэффициенты для таких разбиений $n=k_1+k_2+\ldots k_m$, что $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m$, а потом переставлять показатели всеми возможными способами. Для нашего примера имеем: 4=4+0+0; 4=3+1+0; 4=2+2+0; 4=2+1+1;

P(4,0,0)=1; P(3,1,0)=4; P(2,2,0)=6; P(2,1,1)=12.

$(x+y+z)^4=x^4+y^4+z^4+4x^3y+4x^3z+4y^3x+4y^3z+4z^3x+4z^3y+6x^2y^2+6x^2z^2+6y^2z^2+12x^2yz+12xy^2z+12xyz^2$.

300) Найти коэффициенты при x^5 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(2+x^2-x^3)^9$.

Решение. В задаче нас интересует только коэффициент при x^5, поэтому нет необходимости искать все коэффициенты. Член, содержащий x^5, появится только один раз как слагаемое вида $2^7(x^2)^1(-x^3)^1$, коэффициент при этом члене согласно полиномиальной формуле будет равен P(7, 1, 1)=72. Следовательно, коэффициент при x^5 равен (–1) · 2^7· 72 =–9 216.

301) Найти коэффициенты при x^{12} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^2+x^5)^8$.

Решение. Данная задача отличается от предыдущей тем, что член, содержащий x^{12}, появится два раза: как слагаемое вида $1^2\cdot(x^2)^6\,(x^5)^0$ и $1^5\,(x^2)^1\,(x^5)^2$. В первом случае коэффициент будет равен P(2, 6, 0)=28, во втором – P(5, 1, 2)=168. Следовательно, коэффициент при x^{12} равен 28+168=196.

302) Найдите коэффициент при a^7 после раскрытия скобок в выражении $(a+3)^{11}$.

Решение. Данное выражение представляет собой бином вида $(a+b)^n$, где коэффициент при $a^7\,b^{11-7}$ равен $C_{11}^{\;7}=C_{11}^{\;4}$=11!/(4! 7!)=330. Т.к. b=3, то 330 $a^7\,b^4$=

=330 $a^7\,3^4$=330 a^7 81=26730.

Задачи для самостоятельного решения

303) Вот восьмая строка треугольника Паскаля:

1 7 21 35 35 21 7 1 .

a) Найдите девятую и десятую его строки.

b) Проверьте, что если a, b, c – три последовательных числа в восьмой строке треугольника Паскаля, то одно из чисел десятой строки можно получить как сумму: $a+2b+c$.

c) Воспользуйтесь формулой Паскаля для доказательства равенства:

$C_n^k+2C_n^{k+1}+C_n^{k+2}=C_{n+2}^{k+2}$, при $0\le k\le n-2$.

(Эта формула обобщает факт (b) на весь треугольник Паскаля.)

304) Раскрыть скобки: $(a+в)^5$, $(3x+2y)^6$.

305) Найти коэффициент при x^7 в выражении $(2x+3)^{12}$.

306) Найти коэффициент при x^{10} в выражении $(3x-2)^{13}$.

307) В выражении $(x+2y)^{10}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Какой коэффициент будет стоять при выражения x^4y^6.

308) Чему равна сумма $C_7^1 + C_7^3 + C_7^5 + C_7^7$?

309) Чему равна сумма $C_8^2 + C_8^4 + C_8^6 + C_8^8$?

310) Докажите тождество $C_n^i \cdot C_i^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{i-m}$.

311) Докажите тождество $m \cdot C_{m-1}^{n-1} = n \cdot C_m^n$.

312) Получить все различные коэффициенты, которые будут появляться при приведении подобных членов в формулах: $(x+y+z)^6$ и $(x+y+z+u)^5$.

313) Найти коэффициенты при x^7 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(2+x^3+x^4)^{13}$.

314) Найти коэффициенты при x^8 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^2-x^3)^9$.

315) Найти коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$.

316) В каком из выражений $(1+x^2-x^3)^{1000}$, $(1-x^2+x^3)^{1000}$ будет после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{17}.

317) Покажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0.$

318) Найдите коэффициент при a^3b^5 после раскрытия скобок в выражении $(a+b)^8$.

319) Найдите n, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.

320) Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении: а) $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{20}$ б) $(\sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{2})^{100}$

321) Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

322) Пользуясь полиномиальной теоремой, вычислить $(x+y+z)^3$.

323) Найдите коэффициент при

a) $x^2y^3z^2$ в выражении $(x+y+z)^7$;

b) x^3y^2 из разложения степени $(x+y+3)^7$;

c) xy^3z^4 после раскрытия скобок в выражении $(x+y+z)^8$;

d) xy^2z после раскрытия скобок в выражении $(x+2y+z-1)^5$.

Вопросы для повторения

1 Решение каких задач изучает комбинаторика?

2 Сформулируйте правило суммы.

3 Сформулируйте правило произведения.

4 Что такое выборка? Какой она бывает?

5 Какая выборка называется размещением с повторениями? без повторений?

6 Какая выборка называется сочетанием с повторениями? без повторений?

7 Что такое перестановка?

8 Как подсчитать число размещений с повторениями? без повторений?

9 Как подсчитать число сочетаний с повторениями? без повторений?

10 Как подсчитать число разбиений некоторого конечного множества на подмножества фиксированной мощности?

11 Какие числа называются биномиальными коэффициентами? Какие свойства этих чисел вам известны?

12 Напишите бином Ньютона. Как доказать справедливость этого тождества?

13 Что называется треугольником Паскаля?

14 Напишите полиномиальную формулу.

15 Выведите формулу включений-исключений. Какие формы записи этой формулы Вам известны?

Тест по теме «Множества и операции над множествами»

1 Перечислите элементы множества $B=\{x|\ x\in \mathbf{Z}$ и $x^2<24\}$.

а) {0, 1, 2, 3, 4}; б) [–4; 4]; в) {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4}; г) список пуст;

д) (–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4).

2 Перечислите элементы множества $D=\{x|\ x\in \mathbf{R}$ и $6x^2+x-1=0\}$.

а) список пуст; б) (1/3; –1/2); в) {1/3; –1/2}; г) {–1/3; 1/2}; д) {2/3; –1}.

3 Множество B={1, 1/3, 1/7, 1/15, …} можно задать характеристическим свойством так:

а) B={x| x = $\frac{1}{2^n+1}$, $n\in\mathbf{N}_0$}; б) B={x| x∈**R** и x = $\frac{1}{2^n-1}$, $n\in\mathbf{N}$};

в) B={x| x∈**Q** и x = $\frac{1}{2^n-1}$, $n\in\mathbf{N}$}; г) B={x| x∈**N** и x = $\frac{1}{2^n-1}$}.

4 Найдите {a, b, c}∩{a, c, d, f}.

а) {a, b, c}; б) {a, b, c, d, f}; в) {a, c, d, f}; г) {a, c}; д) ∅.

5 Найдите {a, b, c}∪{b, c}.

а) {a, b, c}; б) {a}; в) {a, c}; г) {b, c}; д) ∅.

6 Найдите {a, b, c, d}\{a, f, g, k}.

а) ∅; б) {a, b, c, d, f, g, k}; в) {a, c}; г) {f, g, k}; д) {b, c, d}.

7 Если A={x| x ∈ **Z** и $x^3+x-1=0$} и B={–1, 1, 2}, то будет верным утверждение:

а) A=B; б) A⊆B; в) B⊆A; г) A∩B=B; д) A∩B=A.

8 Если упростить выражение (A∪B∪C)∩(A∪B'∪C)∩(A∪C)', получится…

а) A∪C; б) A; в) ∅; г) B; д) C.

9 Какое подмножество множества U={1,2,3,4} представлено последовательностью 1001?

а) {1,2,3,4}; б) {1,4}; в) ∅; г) {2,3}; д) {1,2,4}.

10 Пусть U={1,2,3,4,5,6} – универсальное множество. Выпишите характеристический вектор подмножества A={1,2,4,5}.

а) 110110; б) 11011; в) 001001; г) 00100; д) 010101.

11 Пусть U={1,2,3,4,5,6} – универсальное множество. Выпишите характеристический вектор подмножества B={3,5}.

а) 110101; б) 1111; в) 001011; г) 00101; д) 001010.

12 Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Известно, что 16 из них слушают еще курс бухгалтерии, 37 – курс коммерческой деятельности и 5 изучают обе эти дисциплины. Это значит, что … студентов посещают хотя бы один вид дополнительных занятий.

а) 53; б) 42; в) 58; г) 21; д) 48.

13 Если A={1, 2} и B={a, b, c}, то A×B = …

а) {(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2, c)}; б) {(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c,2)};

в) {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}; г){(1,1), (b,b), (c,c), (2,), (a,a)};

д) {1, 2, a, b, c}.

14 Дано множество C={4, 8, 9}. Число всех подмножеств этого множества равно:

а) 3; б) 4; в) 9; г) 8; д) 6.

15 Следующие тождества являются справедливыми …

а) $A\cap A = A$; б) $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$; в) $(A\cup B)\cap C = (A\cap C) \cup (B\cap C)$;

г) $(A\cap B) \cup A = B$; д) $A\cap U = A$; е) $(A\cap B)' = A' \cup B'$; д) $A\backslash B = A\cup B'$.

16 Даны множества A={{1, 2}, {2, 3}} и B={1, 2, 3}. Тогда … .

а) $A=B$; б) $A\subseteq B$; в) $B\subseteq A$; г) $A\cap B=\varnothing$; д) $A\cap B\neq\varnothing$.

17 Пусть M – множество всех параллелограммов плоскости, A_1 – множество всех квадратов, A_2 – множество всех прямоугольников, A_3 – множество всех ромбов. Тогда $A_1\cap A_2$ равно … .

а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) M; д) $\varnothing$.

18 Пусть M – множество всех параллелограммов плоскости, A_1 – множество всех квадратов, A_2 – множество всех прямоугольников, A_3 – множество всех ромбов. Тогда $A_1\cup A_2$ равно … .

а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) M; д) $\varnothing$.

19 Пусть M – множество всех параллелограммов плоскости, A_1 – множество всех квадратов, A_2 – множество всех прямоугольников, A_3 – множество всех ромбов. Тогда $A_1 \setminus A_2$ равно … .

а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) M; д) $\varnothing$.

20 Пусть $X_1=\{x \mid x^2-1\leq 0\}$, $X_2=\{x \mid |x|<1\}$. Тогда $X_1 \cup X_2$ = … .

а) X_1; б) X_2; в) $\varnothing$; г) $\{-1, 1\}$.

Тест по теме «Бинарные отношения. Функции»

1 Пусть $(x, y)\in R$ означает «x – родитель y» на множестве всех людей. Тогда $(y, x)\in R^{-1}$ означает «y – … x».

а) родитель; б) дочь; в) сын; г) ребенок; д) отец.

2 Бинарное отношение между множествами A={1,2,3} и B={a,b,c,d} задано матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Выпишите элементы этого отношения.

а) {(1,a), (1,c), (2,a), (2,c), (3,b), (3,c)}; б) {(a,1), (c,1), (a,2), (c,2), (b,3), (c,3)};

в) {(1,a), (2,a), (2,c), (3,b), (3,c)}; г) {(a,1), (a,2), (c,2), (b,3), (c,3)};

д) {(1,a), (1,c), (2,a), (2,c), (3,b), (3,c), (a,1), (c,1), (a,2), (c,2), (b,3), (c,3)}.

3 Дано $P\subseteq\mathbf{R}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow x^2+y^2=4$. Областью определения этого отношения является … .

а) множество всех действительных чисел **R**; б) [–4; 4];

в) (–4; 4); г) [–2; 2]; д) (–2; 2).

4 Дано $P\subseteq\mathbf{Z}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow x^2+y^2=4$. Областью значений этого отношения является … .

а) множество всех целых чисел **Z**; б) {–2, 0, 2};

в) {–2, –1, 0, 1, 2}; г) {–2; 2}; д) {–4, 0, 4}.

5 Дано $P\subseteq\mathbf{R}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow x^2+y^2=4$. Оно является … .

а) рефлексивным; б) симметричным;

в) транзитивным; г) антисимметричным.

6 Пусть A={0, 2, 4, 6} и B={1, 3, 5, 7}. Функциями, определенными на A со значениями в B, являются отношения … .

а) {(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)}; б) {(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)}

в) {(2, 1), (4, 5), (6, 3)}; г) {(6,1), (0, 3), (4,1), (0, 7), (2, 5)}

д) {(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5), (2, 5), (6,1)}

7 Пусть A={0, 2, 4, 6} и B={1, 3, 5, 7}. Инъективными функциями, определенными на A со значениями в B, являются отношения … .

а) {(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)}; б) {(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)};

в) {(2, 1), (4, 5), (6, 3)}; г) {(6,1), (0, 3), (4,1), (0, 7), (2, 5)};

д) {(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5), (2, 5)}.

8 Пусть A={0, 2, 4, 6} и B={1, 3, 5, 7}. Сюръективными функциями, определенными на A со значениями в B, являются отношения … .

а) {(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)}; б) {(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)};

в) {(2, 1), (4, 5), (6, 3)}; г) {(6,1), (0, 3), (4,1), (0, 7), (2, 5)};

д) {(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5), (2, 5)}.

9 Даны бинарные отношения ρ = {(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 4)} и σ = {(1, α), (2, β), (3, α)}. $\rho\circ\sigma$ = … .

а) {(a, α), (a, β), (b, β), (c, α)}; б) {(a, α), (a, β), (b, β), (b, α)};

в) {(a, α), (a, β), (b, β), (b, α), (c, α)}; г) {(a, α), (b, β), (b, α), (c, α)};

д) {(a, α), (1, α), (a, β), (b, β), (b, α), (c, α)}.

10 Число бинарных отношений на n-элементном множестве равно … .

а) 2^{2^n}; б) n^{2^n}; в) 2^{n^3}; г) n^{n^2}; д) 2^{n^2}.

11 Если упорядочить слова «бит», «сбитень», «Битлз», «биточки», «прибитый» лексикографически, получится … .

а) «бит», «сбитень», «Битлз», «биточки», «прибитый»;

б) «биточки», «Битлз», «бит», «прибитый», «сбитень»;

в) «Битлз», «бит», «сбитень», «биточки», «прибитый»;

г) «бит», «Битлз», «биточки», «прибитый», «сбитень»;

д) «бит», «Битлз», «биточки», «сбитень», «прибитый».

12 Отношение параллельности на множестве прямых плоскости является …

а) рефлексивным; б) симметричным;

в) транзитивным; г) антисимметричным;

д) не рефлексивным.

13 Отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости является …

а) рефлексивным; б) симметричным;

в) транзитивным; г) антисимметричным;

д) не рефлексивным.

14 Число бинарных отношений на 2-элементном множестве равно … .

а) 10; б) 16; в) 2; г) 4; д) 8.

15 Число бинарных отношений на 3-элементном множестве равно … .

а) 2^{10}; б) 2^3; в) 2^8; г) 3^2; д) 2^9.

16 Число бинарных отношений на 4-элементном множестве равно … .

а) 2^{16}; б) 8; в) 16; г) 32; д) 4.

17 Число бинарных отношений на 5-элементном множестве равно … .

а) 5; б) 25; в) 2^5; г) 2^{25}; д) 5^{15}.

18 Число бинарных отношений на 1-элементном множестве равно … .

а) 3; б) 4; в) 2; г) 1; д) 0.

19 Даны бинарные отношения $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 4)\}$ и $\sigma = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\}$. $\rho \circ \sigma = \ldots$.

а) $\{(1, \alpha), (1, \beta), (b, \beta), (c, \alpha)\}$;б) $\{(1, \alpha), (1, \beta), (b, \beta), (b, \alpha)\}$;

в) $\{(1, \alpha), (1, \beta), (b, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha)\}$; г) $\{(1, \alpha), (b, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha)\}$;

д) $\{(1, \alpha), (1, \alpha), (1, \beta), (b, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha)\}$.

20 Отношение R на множестве **Z** определяется так: $xRy \Leftrightarrow$ «x–y делится на 3». Тогда R является … .

а) рефлексивным; б) симметричным;

в) транзитивным; г) антисимметричным;

д) отношением эквивалентности; е) отношением частичного порядка.

Тест по теме «Комбинаторика»

1 *Задача пересчёта* состоит в ответе на вопрос … .

а) «Сколько элементов, принадлежащих заданному конечному множеству, обладает некоторым свойством или набором свойств?»;

б) «Как выделить все элементы множества, удовлетворяющие заданным свойствам?»;

в) «Как подсчитать всевозможные размещения элементов?»;

г) «Сколько перестановок элементов заданного множества существует?».

2 *Задача перечисления* состоит в ответе на вопрос … .

а) «Сколько элементов, принадлежащих заданному конечному множеству, обладает некоторым свойством или набором свойств?»;

б) «Как выделить все элементы множества, удовлетворяющие заданным свойствам?»;

в) «Как подсчитать всевозможные размещения элементов?»

г) «Сколько перестановок элементов заданного множества существует?».

3 Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из шести символов. Первые два из них – строчные буквы латинского алфавита, а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и сточными буквами. Сколько можно придумать различных паролей?

а) $26^2 \cdot 10^4$; б) 36^6; в) $26^2 + 36^4$; г) $26^2 \cdot 36^4$; д) $2^{26} \cdot 4^{36}$.

4 Правило суммы в комбинаторике записывается так: … .

а) $|X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_k| = \prod_{i=1}^{k} |X_i|$;

б) $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|,\ X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

в) $|X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_k| = \prod_{i=1}^{k} |X_i|,\ X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

г) $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$.

5 Правило произведения в комбинаторике записывается так: … .

а) $|X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_k| = \prod_{i=1}^{k} |X_i|$; б) $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|,\ X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

в) $|X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_k| = \prod_{i=1}^{k} |X_i|,\ X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$; г) $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$.

6 В турнире принимали участие n шахматистов. Каждые два шахматиста встретились 1 раз. Значит, в турнире было сыграно … партий.

а) n б) $\frac{n}{2}$ в) $\frac{n(n-1)}{2}$ г) $n(n–1)$ д) $n–1$

7 Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения и забыл номер. Помнит только, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

а) 10; б) 20; в) 30; г) 40; д) 50; е) 60.

8 Пусть X ={1,2,3}. (3,2)-размещениями с повторениями являются пары …

а) (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

б) (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

в) {1,1}, {2,2}, {3,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3};

г) {1,2}, {1,3}, {2,3};

д) {1,1}, {2,2}, {3,3}, {1,2}, {2,1}, {1,3}, {3,1}, {2,3}, {3,2}.

9 Пусть X ={1,2,3}. (3,2)-размещениями без повторений являются пары …

а) (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

б) (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

в) {1,1}, {2,2}, {3,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3};

г) {1,2}, {1,3}, {2,3};

д) {1,1}, {2,2}, {3,3}, {1,2}, {2,1}, {1,3}, {3,1}, {2,3}, {3,2}.

10 Пусть X = {1,2,3}. Различными (3,2)-сочетаниями с повторениями являются пары … .

а) (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

б) (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

в) {1,1}, {2,2}, {3,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3};

г) {1,2}, {1,3}, {2,3};

д) {1,1}, {2,2}, {3,3}, {1,2}, {2,1}, {1,3}, {3,1}, {2,3}, {3,2}.

11 Пусть X = {1,2,3}. (3,2)-сочетаниями без повторений являются пары … .

а) (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

б) (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

в) {1,1}, {2,2}, {3,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3};

г) {1,2}, {1,3}, {2,3};

д) {1,1}, {2,2}, {3,3}, {1,2}, {2,1}, {1,3}, {3,1}, {2,3}, {3,2}.

12 Приведите формулу для подсчета числа размещений с повторениями из n элементов по r.

а) $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$;б) $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ в) P_n^r = (n – r)! г) $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$; д) $\overline{A}_n^r$ =n^r

13 Приведите формулу для подсчета числа размещений без повторений из n элементов по r.

а) $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$; б) $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ в) P_n^r = (n – r)!; г) $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$; д) $\overline{A}_n^r$ =n^r

14 Приведите формулу для подсчета числа сочетаний без повторений из n элементов по r.

а) $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$; б) $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ в) P_n^r = (n – r)! г) $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$; д) $\overline{A}_n^r$ =n^r

15 Приведите формулу для подсчета числа сочетаний с повторениями из n элементов по r.

а) $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$; б) $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$; в) P_n^r = (n – r)!; г) $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$; д) $\overline{A}_n^r$ =n^r

16 Жюри из 5 женщин и 7 мужчин должно быть выбрано из списка в 8 женщин и 11 мужчин. Значит, можно сформировать … различных составов жюри?

а) C_{19}^{12} б) 19 в) $C_8^5 + C_{11}^7$ г) $C_8^5 C_{11}^7$ д) 12

17 Укажите коэффициент при слагаемом x^3y^2 в разложении выражения $(x+y+3)^7$ в сумму.

а) $C_7^{3,2,2}$ б) $C_7^{3,2,1}$ в) $9C_7^{3,2,2}$ г) $3C_7^{3,2}$ д) $3!\ C_7^{3,2,2}$

18 Ресторан в своем меню предлагает пять различных главных блюд. Каждый из компании в шесть человек заказывает свое главное блюдо. Официант мог бы получить … разных заказов.

а) $\overline{C}_6^5$ б) $\overline{C}_5^6$ в) C_5^6 г) A_6^5 д) $\overline{A}_6^5$ е) C_6^5

19 Восьмая строка треугольника Паскаля имеет вид: 1 7 21 35 35 21 7 1. Девятая строка имеет вид: … .

а) 8 28 56 70 56 28 8; б) 1 7 147 735 1225 735 147 7 1;

в) 1 7 8 28 56 70 56 28 8 7 1; г) 1 8 28 56 70 56 28 8 1.

20 Имеется … трехзначных чисел, которые делятся на пять.

а) 180 б) 555 в) 200 г) 900 д) 125

21 Бином Ньютона имеет вид … .

а) $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum\limits_{n_1 + n_2 + ... + n_k = n} C_n^{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}$

б) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

в) $\sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$

г) $(a+b+c)^2 = \sum\limits_{n_1+n_2+n_3=2} C_2^{n_1,n_2,n_3} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$

22 7 человек могут разместиться в очереди в кассу … различными способами:

а) 7 б) 17 в) 49 г) 7! д) 7^7

23 Если переставлять буквы слова «комбинаторика», то можно получить … различных слов.

а) 13 б) 13! в) 13^{13} г) 29 д) $\frac{13!}{2!2!2!2!}$

Итоговая контрольная работа

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Для проведения письменного экзамена по дискретной математике надо составить 4 варианта по 7 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на 4 варианта?

Задача 2. Найдите коэффициент при $x^6 y^4$ в разложении $(2x+3y)^{10}$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A \times B$.

а) $A = [2; 8)$, $B = (1; 6]$, $I = [0; 10]$,

б) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 5, 9\}$, где I — множество цифр $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. На выставке кошек у 40% в окрасе шерсти присутствует черный цвет, у 35% — белый, у 20% — рыжий. Известно, что 10% кошек имеют в окрасе черный и белый цвет, 5% — белый и рыжий и 4% кошек имеют в окрасе черный и рыжий цвет. Также известно, что 20% кошек не имеют четко выраженного окраса. Сколько кошек трехцветного окраса шести было на выставке? У скольких кошек в окрасе был только белый цвет?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка

а) отношение знакомства на множестве людей,

б) отношение R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

ВАРИАНТ 2

Задача 1. Сколько существует различных миноров третьего порядка у матрицы размера 6×5?

Задача 2. Найдите коэффициент при x^9 в разложении $\left(x^2 - \frac{5}{x}\right)^9$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A \times B$.

а) $A = [3; 8]$, $B = (0; 6]$, $I = [0; 10]$,

б) $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 9\}$, где I — множество цифр $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. Каждый из 45 туристов, прибывших в Мон-Сен-Мишель, свое свободное время посвятил посещению старого бенедиктинского аббатства, покупке сувениров и поеданию устриц в местном ресторанчике. Аббатство посетило 28 человек, сувениры приобрели 18, а устрицами успели полакомиться 14 человек; из посетивших аббатство лакомились устрицами 6, попробовали устриц и купили сувениры 7,посетили аббатство и купили сувениры — 4. Сколько человек успели осмотреть исторические достопримечательности, попробовать местные деликатесы и купить сувениры на память, а сколько успели только посетить аббатство?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка

а) отношение родства на множестве людей,

б) отношение R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(2,3),(3,2),(2,5),(5,2)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

ВАРИАНТ 3

Задача 1. У профессора есть три любимых каверзных вопроса. В группе 20 студентов. Профессор решил задавать каждому из студентов по одному каверзному вопросу. Сколько есть возможностей провести опрос в группе?

Задача 2. Найдите коэффициент при x^6y^5 в разложении $(2x-y)^{11}$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A \times B$.

а) $A = [3; 8)$, $B = (2; 5]$, $I = [0; 10]$,

б) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, где I — множество цифр $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. Каждый из 54 членов Клуба Любителей Овчарок владеет немецкими, кавказскими или азиатскими овчарками. 20 владеют немецкими, 23 — кавказскими и 23 азиатскими, 4 имеют немецких и азиатских овчарок,5 — немецких и кавказских, 6 — азиатских и кавказских. У скольких членов клуба есть собаки всех трех пород? Сколько членов клуба имеют только одну породу собак?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка

а) отношение «быть братом» на множестве людей,

б) отношение R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (2,2), (5,5)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

ВАРИАНТ 4

Задача 1. Позывные американских радиостанций состоят из трех или четырех букв и начинаются с k или w. Сколько может существовать различных позывных (в английском языке 26 букв)?

Задача 2. Найдите коэффициент при x в разложении $\left(2x + \frac{3}{x^2}\right)^7$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A \times B$.

а) $A = [2; 7]$, $B = (5; 8]$, $I = [0; 10]$,

б) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, где I — множество цифр $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. 70 первокурсников потока АВ – 08 в качестве домашнего задания придумывали задачу на пересечение трех множеств. К помощи Интернета прибегли 25 человек, к помощи сокурсника 30 человек, самостоятельно сочиняли 47 человек. Один студент часть задачи взял с Интернета, часть списал у сокурсника, часть додумал сам, 13 человек часть взяли с Интернета, а часть додумали сами, 8 человек часть взяли с Интернета, а часть списали у сокурсника, 15 человек часть списали у сокурсника, а часть придумали сами. Сколько человек были полностью самостоятельными? Сколько человек не сделали домашнего задания?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка

а) отношение «быть отцом» на множестве людей, б) отношение R на множестве $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,3),(3,2),(2,5),(5,2)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

ВАРИАНТ 5

Задача 1. В профкоме 9 человек. Сколькими способами можно выбрать из них председателя, заместителя, секретаря и культорга?

Задача 2. Найдите коэффициент при x^3y^4 в разложении $(5x+2y)^7$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A\times B$.

а) $A=[5;9)$, $B=(2;7]$, $I=[0;10]$,

б) $A=\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, где I — множество цифр $I=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. В жаркой-жаркой Африке на солнечном пляже все отдыхающие пьют или колу, или спрайт, или фанту; 67% пьют колу, 35% — спрайт, 31% — фанту; 10% пьют колу и спрайт, 11% — спрайт и фанту, 15% — колу и фанту. Сколько процентов отдыхающих пьют и колу, и спрайт, и фанту? Сколько процентов отдыхающих пьют только фанту?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка

а) отношение «быть одного возраста» на множестве людей,

б) отношение R на множестве $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1),(3,3)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

ВАРИАНТ 6

Задача 1. Сколько разных «слов» можно получить, переставляя буквы в словах а) домик, б) шалаш (под «словом» понимается любая последовательность букв)?

Задача 2. Найдите коэффициент при x^8 в разложении $\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^8$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A \times B$.

а) $A = (3; 8)$, $B = (1; 5]$, $I = [0; 10]$,

б) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, где I — множество цифр $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. Каждый из студентов группы умеет программировать хотя бы на одном из языков C++, Python и PHP. На C++ программируют 14 человек, на Python — 10, на PHP — 12 человек; на C++ и Python программируют 6 человек, на Python и PHP — 5, на C++ и PHP — 7, а на всех трех языках программируют 4 человека. Сколько человек в группе? Сколько человек умеют программировать только на одном из этих языков?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка

а) отношение «учиться в одной группе» на множестве студентов,

б) отношение R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,4), (3,3), (4,5)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

ВАРИАНТ 7

Задача 1. 15 пронумерованных биллиардных шаров разложены по шести лузам. Сколько существует способов такого разложения?

Задача 2. Найдите коэффициент при $x^4 y^5$ в разложении $(x - 2y)^9$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A \times B$.

а) $A = [2; 9)$, $B = (1; 4]$, $I = [0; 10]$,

б) $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{0, 4, 8\}$, где I — множество цифр $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. В итальянской траттории можно заказать любую из трех видов пасты: с грибами, с креветками и с тунцом, можно получить пасту «бис», когда в одну порцию вам положат любые две понравившиеся вам пасты, и «трис», когда положат все три. Каждый из 73 посетителей заказал порцию пасты; пасту с грибами ели 29 человек, с креветками — 34, а с тунцом — 32; 10 человек ели пасту с грибами и креветками, 8 — с креветками и тунцом, 7 — с тунцом и грибами. Сколько человек заказали пасту «трис»? У скольких была обычная порция с грибами?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка

а) отношение «быть тезками» на множестве людей,

б) отношение R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R = \{(2,1),(1,2),(1,3),(3,2),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

ВАРИАНТ 8

Задача 1. В придорожном финском ресторане можно взять обед за 12€, состоящий из напитка, салата, супа и второго, или за 8€ без второго. Сколько существует вариантов обеда за а) 12€, б) 8€, в) любого обеда, если предлагается 4 вида напитков, 2 вида супа, 6 вторых и 10 видов салата?

Задача 2. Найдите коэффициент при x^4 в разложении $\left(2x^2 + \dfrac{3}{x^2}\right)^8$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A \times B$.

а) $A = (5; 9)$, $B = [1; 6]$, $I = [0; 10]$,

б) $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, где I — множество цифр $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. Большинство студентов считают, что учиться, развлекаться и высыпаться одновременно невозможно. Студент Смышляев решил проверить это на собственном опыте. Из 30 дней он развлекался 18, спал –15 и учился всего 12 дней, одновременно на сон и развлечение ушло 10 дней, учебу и развлечения – 8 дней, на сон и учебу – 5 дней. Только два дня соответствовало его стремлению сделать все в один день – учиться, развлекаться и спать. Сколько дней студент Смышляев бездельничал, не занимаясь ни одним из этих трех дел? Сколько дней он только добросовестно учился, забыв про все остальное?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка

а) отношение «жить в одном городе» на множестве людей,

б) отношение R на множестве $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R=\{(2,3),(2,4),(2,5),(5,5),(3,1),(4,4),(4,5),(2,1),(3,5)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

ВАРИАНТ 9

Задача 1. Сколько существует различных матриц размера 4×5, элементами которых служат 2 цифры, повторяющиеся по 10 раз?

Задача 2. Найдите коэффициент при $x^5 y^5$ в разложении $(3x+2y)^{10}$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A\times B$.

а) $A=[1;5)$, $B=(3;7]$, $I=[0;10]$, б) $A=\{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, где I – множество цифр $I=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. В клубе почитателей творчества Дэна Брауна организовали экскурсионные туры в Париж, Лондон и Рим по местам действия его романов. Из 40 членов клуба в Париже побывали 25, в Лондоне – 22 и в Риме тоже – 22; В Париже или Лондоне побывало 33 человека, в Париже или Риме – 32, в Лондоне или Риме – 31. Во всех трех городах побывало 10 человек. Сколько членов клуба побывало только в одном из этих городов? Сколько не ездило ни на одну из этих экскурсий?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка а) отношение любви на множестве людей,

б) отношение R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R = \{(1,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

ВАРИАНТ 10

Задача 1. Сколькими способами можно распределить 4 разные конфеты между четырьмя девочками, если а) каждая должна получить по конфете, б) разрешаются любые способы распределения?

Задача 2. Найдите коэффициент при x^{22} в разложении $\left(x^3 - \frac{3}{x}\right)^{10}$.

Задача 3. Даны числовые множества A и B. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Изобразите $A \times B$.

а) $A = (4; 9)$, $B = [2; 6]$, $I = [0; 10]$,

б) $A = \{0, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 4, 5, 7\}$, где I — множество цифр $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Задача 4. Три подруги Маша, Даша и Саша решили устроить праздник для своих однокурсников, и каждая составила свой список приглашенных. Оказалось, что у Маши и Саши в списках есть 5 общих друзей, у Даши и у Маши — трое, у Даши и у Саши — только двое, причем один из них есть и в Машином списке. Список Маши был самый длинный — 15 человек, в списке Даши — 7 человек, а у Саши — 10. Сколько гостей оказалось в общем списке? Сколько гостей есть в Машином списке, но нет в Дашином и Сашином?

Задача 5. Проверьте, являются ли заданные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, эквивалентными, отношениями порядка

а) отношение «быть старше по возрасту» на множестве людей,

б) отношение R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где $R = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$.

Для случая б) укажите матрицу отношения R и постройте граф.

Список использованных источников

1 Канцедал, С.А. Дискретная математика / С.А. Канцедал. – М.: ИНФРА, 2010. – 224 с.

2 Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. – 6 изд. – М.: URSS, 2009. – 400 с.

3 Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2004. – 256 с.

4 Молчанов, В.А. Математическая логика: учеб. пособие / В.А. Молчанов. – Саратов: Изд-во СГСЭУ, 2011.

5 Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2000. – 364 с.

6 Пухначев, Ю.В. Математика без формул. Книга первая: Множества, отображения, последовательности, ряды, функции, дифференциальное и интегральное исчисление, функции многих переменных / Ю.В. Пухначев, Ю.П. Попов. – 3 изд., Кн.1 – М.: 2010. – 513 с.

7 Сборник задач по математике для втузов в 4 частях: Ч I / А.В. Ефимов, А.С. Поспелов. – М.: Физматлит, 2009. – 288 с.

8 Судоплатов, С.В. Дискретная математика / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.

9 Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2005. – 320 с.

10 Шевелев, Ю.П. Дискретная математика: учеб. пособие / Ю.П. Шевелев. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 592 с.