Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 2

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Оренбург
2018

УДК 519.1(076.5)
ББК 22.176 я 7
Д 48

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко
Авторы: О.А. Пихтилькова, Т.М. Отрыванкина, Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

Д 48 Дискретная математика: методические указания ч. 2 / О.А. Пихтилькова, Т.М. Отрыванкина, Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 70 с.

Методические указания «Дискретная математика». Часть 2 предназначены для практических занятий, содержат краткое изложение лекционного материала, примеры решенных задач, задачи для самостоятельного решения, вопросы для повторения и тесты по темам. Данная разработка поможет преподавателям и студентам усвоить темы практических занятий и успешно решить тестовые задания. Решенные примеры окажут существенную помощь студентам при решении задании и на занятиях и дома, а также помогут подготовиться к коллоквиуму и зачету. Данная работа предназначена для обучающихся по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии.

УДК 519.1(076.5)
ББК 22.176 я 7

Содержание

Глава 1 Булева алгебра

1.1 Булевы функции

1.1.1 Понятие булевой функции

Булевой функцией от n аргументов называется отображние множества $\{0,1\}$ в множество $\{0,1\}$. Конечность области определения функции имеет важное преимущество – такие функции можно задавать перечислением значений при различных значениях аргументов. Для того, чтобы задать значение функции от n переменных, надо определить значения для каждого из 2^n наборов, т.е. достаточно выписать значения $f(0,0,...,0,0)$, $f(0,0,...,0,1)$, $f(0,0,...,1,0)$, $f(0,0,...,1,1),...,$ $f(1,1,...,0,0)$, $f(1,1,...,0,1)$, $f(1,1,...,1,0)$, $f(1,1,...,1,1)$. Этот набор называют ***вектором значений функции***. Таким образом, значений функций n переменных столько, сколько различных двоичных наборов длины n (их 2^n). Количество различных функций n переменных будет определяться по формуле 2^{2^n}.

Функций от одной переменной четыре (таблица 1). Функций от двух аргументов шестнадцать. Приведем их в следующей таблице (таблица 2):

Таблица 1

x	0	x	$\neg x$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 2

x_1	x_2	0	$x_1 \& x_2$		x_1		x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$\neg x_2$	$x_2 \to x_1$	$\neg x_1$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \mid x_2$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$x_1\&x_2=x_1\ \ x_2$ называется ***конъюнкцией***, $x_1\vee x_2$–***дизъюнкцией***, $x_1\to x_2$ – ***импликацией***, $x_1\leftrightarrow x_2$ – ***эквивалентностью***, $x_1\oplus x_2$ – ***суммой по модулю 2 (или суммой Жегалкина)***, $x_1|x_2$ – ***штрихом Шеффера***, $x_1 \downarrow x_2$ – ***стрелкой Пирса***.

Функции от некоторого числа переменных можно рассматривать как функции и от большего числа переменных. При этом значения функции не меняется при изменении этих «добавочных» переменных. Такие переменные называются *фиктивными*, в отличие от остальных – *существенных*.

Переменная x_i называется ***фиктивной*** (несущественной) переменной функции $f(x_1,\cdots,x_n)$, если $f\ (x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n) = f\ (x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$, для любых значений $x_1,\cdots, x_{i-1}, x_{i+1},\cdots, x_n$. Иначе переменная x_i называется ***существенной***.

Операция равенства функций осуществляется с точностью до существенных переменных (т.к. фиктивные переменные можно добавлять в любом количестве).

Примеры решения задач

1) Даны функции: $f_1(x_1,x_2)$=(0,1,1,1), $f_2(x_1,x_2,x_3)$=(0,1,1,1,0,1,1,1) и $f_3(x_1,x_2,x_3)$=(0,0,1,1,1,1,1,1). Какие из этих функций можно считать равными?

Решение. Добавим к $f_1(x_1, x_2)$ фиктивную переменную x_3.

Построим для всех трех функций одну таблицу значений и сравним значения данных функций на одних и тех же наборах переменных.

Из таблицы видно, что $f_1 \neq f_2$, но $f_1 = f_3$.

x_1	x_2	x_3	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2, x_3)$	$f_3(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

2) Какие переменные функции f = (1,1,1,1,0,0,0,0) являются фиктивными, а какие существенными?

Решение. Задана функция трех переменных. Чтобы легче было определять значение функции на наборе, построим таблицу.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Переменная x_1 будет фиктивной (несущественной) переменной функции $f(x_1,x_2,x_3)$, если $f(0,x_2,x_3) = f(1,x_2,x_3)$, для <u>*любых*</u> значений x_2, x_3. Иначе переменная x_1 будет существенной. Проверим следующие равенства:

$x_2=0,\ x_3=0:\ f\ (0,0,0) = f\ (1,0,0) \Rightarrow 1=0$ – равенство неверно, следовательно, переменная x_1 – существенная. Проверять остальные значения x_2, x_3 в

1	1	1	0

данном случае не нужно, т. к. условие «для любых значений x_2, x_3» не выполнилось уже на первом шаге.

Переменная x_2 будет фиктивной переменной функции $f(x_1,x_2,x_3)$, если $f(x_1,0,x_3) = f(x_1,1,x_3)$, для любых значений x_1, x_3.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0,\ x_3=0:\ f(0,0,0) = f(0,1,0) \Rightarrow 1=1 \\ x_1=0,\ x_3=1:\ f(0,0,1) = f(0,1,1) \Rightarrow 1=1 \\ x_1=1,\ x_3=0:\ f(1,0,0) = f(1,1,0) \Rightarrow 0=0 \\ x_1=1,\ x_3=1:\ f(1,0,1) = f(1,1,1) \Rightarrow 0=0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

Все полученные равенства верны, следовательно, переменная x_2 фиктивная

Переменная x_3 будет фиктивной переменной функции $f(x_1,x_2,x_3)$, если $f(x_1,x_2,0) = f(x_1,x_2,1)$, для любых значений x_1, x_2.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0,\ x_2=0:\ f(0,0,0) = f(0,0,1) \Rightarrow 1=1 \\ x_1=0,\ x_2=1:\ f(0,1,0) = f(0,1,1) \Rightarrow 1=1 \\ x_1=1,\ x_2=0:\ f(1,0,0) = f(1,0,1) \Rightarrow 0=0 \\ x_1=1,\ x_2=1:\ f(1,1,0) = f(1,1,1) \Rightarrow 0=0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

Все полученные равенства верны, следовательно, переменная x_3 фиктивная

Задачи для самостоятельного решения

3) Какие переменные являются фиктивными, а какие существенными?

a. $f = (1,1,1,1,0,0,0,0)$;

b. $f = (0,0,1,1,0,0,1,1)$;

c. $f = (0,0,1,1,1,1,0,0)$;

d. $f = (0,1,0,1,0,1,0,1)$;

e. $f = (1,1,0,0,1,1,0,0)$;

f. $f = (1,1,1,0,1,0,1,1)$.

4) Укажите существенные и фиктивные переменные функции $f(x,y,z)$, заданной вектором значений:

a. $f = (1,1,0,0,0,0,1,1)$;

b. $f = (1,0,0,1,1,0,0,0)$;

c. $f = (0,0,0,1,1,0,0,0)$;

d. $f = (1,0,0,1,1,0,0,1)$;

5) Постройте таблицу функции f:

a. $f(x,y) = (x \leftrightarrow y) \& (y \leftrightarrow x)$;

b. $f(x,y,z) = (x \& y) \oplus (x \& z) \oplus (y \& z)$;

c. $f(x,y,z) = (x \& \overline{y}) \vee (x \& \overline{z}) \vee (y \& \overline{z})$

d. $f(x,y,z) = (x \& y) \vee (x \& z) \vee (y \& z)$;

e. $f(x,y) = (x \mid y) \downarrow (x \mid y)$.

f. $f(x,y) = x \mid (x \downarrow y)$.

6) Найдите количество функций n переменных, принимающих значение 1 ровно на одном наборе.

7) Найдите количество функций n переменных, принимающих на противоположных наборах - одинаковые значения.

1.1.2 Суперпозиция функций

Суперпозицией булевых функций f_0 и f_1, ..., f_n называется функция $f(x_1,...,x_m) = f_0(g_1(x_1,...,x_m), ..., g_k(x_1,...,x_m))$, где каждая из функций $g_i(x_1, ..., x_m)$ либо совпадает с одной из переменных (тождественная функция), либо – с одной из функций $f_1, ..., f_n$. Другими словами, суперпозиция – это подстановка функции в функцию. Например, функция $f(x,y) = \neg(x \,\&\, y)$ является суперпозицией функций $\neg$ и &. Одна и та же функция может быть реализована различными формулами, которые будем называть ***равносильными***.

Следующие равносильности могут быть проверены прямым сравнением значений функций в левой и правой части соотношения на всевозможных наборах аргументов.

1. $x \,\&\, y = y \,\&\, x$; $x \vee y = y \vee x$; $x \oplus y = y \oplus x$;
2. $x \,\&\, (y \,\&\, z) = (x \,\&\, y) \,\&\, z$; $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;
3. $x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$; $x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$;
4. $\overline{\overline{x}} = x$;
5. $\overline{(x \,\&\, y)} = \overline{x} \vee \overline{y}$; $\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \,\&\, \overline{y}$;
6. $x \,\&\, x = x$; $x \vee x = x$;
7. $x \,\&\, \overline{x} = 0$; $x \vee \overline{x} = 1$;
8. $x \,\&\, 0 = 0$; $x \,\&\, 1 = x$;
9. $x \vee 0 = x$; $x \vee 1 = 1$;
10. $x \oplus y = (x \,\&\, \overline{y}) \vee (\overline{x} \,\&\, y)$;
11. $x \to y = \overline{x} \vee y$;
12. $x \leftrightarrow y = (x \,\&\, y) \vee (\overline{x} \,\&\, \overline{y})$.

Примеры решения задач

8) Упростить выражение: $\overline{(x \,\&\, y)} \vee y$.

Решение. $\overline{(x \,\&\, y)} \vee y = (\overline{x} \vee \overline{y}) \vee y = \overline{x} \vee (\overline{y} \vee y) = \overline{x} \vee 1 = 1.$

Задачи для самостоятельного решения

9) Проверьте, справедливы ли следующие соотношения:

a. $x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$;

b. $x \to (y \leftrightarrow z) = (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$;

c. $x \oplus (y \,\&\, z) = (x \oplus y) \,\&\, (x \oplus z)$;

d. $x \,\&\, (y \leftrightarrow z) = (x \,\&\, y) \leftrightarrow (x \,\&\, z)$;

e. $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;

f. $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

10) Докажите равенства:

a. $x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$;

b. $x \oplus y = (x \,\&\, \overline{y}) \vee (\overline{x} \,\&\, y)$.

c. $x \leftrightarrow y = (x \,\&\, y) \vee (\overline{x} \,\&\, \overline{y})$;

d. $x \,\&\, (y \oplus z) = (x \,\&\, y) \oplus (x \,\&\, z)$.

11) Упростите выражение:

a. $\overline{(x \,\&\, y)} \vee y$;

b. $x \vee (x \,\&\, y)$;

c. $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z \vee \overline{x} \,\&\, y \,\&\, z \vee x \,\&\, y \,\&\, \overline{z} \vee x \,\&\, y \,\&\, z$.

12) По функциям f и g, заданным векторно, построить векторное задание функции h:

a. $f = (1,1,1,0)$, $g = (1,0,1,1)$, $h(x,y,z) = f(x,y) \,\&\, g(z,y)$;

b. $f = (0,0,1,0)$, $g = (0,1,0,0)$, $h(x,y,z) = f(g(x,y),z)$.

c. $f = (1,1,1,0)$, $g = (1,0,0,0)$, $h(x,y,z) = f(g(x,y),g(y,z))$

1.1.3 Двойственные функции

Симметрия элементов 0 и 1 в множестве B приводит к понятию двойственности. Функция $g(x_1,\ldots,x_n) = \overline{f}(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$ называется ***двойственной функцией*** к функции f и обозначается f^*. Двойственными являются, например, $x \oplus y$ и $x \leftrightarrow y$, задаваемые векторами (0,1,1,0) и (1,0,0,1).

Теорема. Функция, двойственная к двойственной функции f равна самой функции f.

Теорема. (Принцип двойственности). Функция, двойственная к суперпозиции функций, равна суперпозиции двойственных функций.

Функция f называется ***самодвойственной***, если она равна своей двойственной: $f=f^*$.

Например, самодвойственны функции: x, $\overline{x}$, $xy \vee xz \vee yz$, $xy \oplus xz \oplus yz$.

Функции: 0, 1, $x\,|\,y$, $x \downarrow y$, $x \oplus y$, $x \leftrightarrow y$, $x \,\&\, y$, $x \vee y$, $x \to y$ не являются самодвойственными.

Примеры решения задач

13) Построить функцию, двойственную данной.

Решение. Рассмотрим, что происходит с таблицей двойственной функции. Замена набора $(x_1,...,x_n)$ на $(\overline{x_1},...,\overline{x_n})$ соответствует «переворачиванию» таблицы. Действительно, наборы $(x_1,...,x_n)$ и $(\overline{x_1},...,\overline{x_n})$ расположены симметрично относительно середины таблицы. Теперь остаётся применить операцию отрицания к результату функции, т.е. поменять 0 на 1 и 1 на 0. Т.о. вектор значений функции, двойственной к исходной, получается из вектора исходной функции переворачиванием и заменой 0 на 1, а 1 на 0.

14) Является ли функция f(x, y, z)=(0,0,0,1,0,1,1,1) самодвойственной?

Решение. Действуем по следующему алгоритму:

1. Строим в одной таблице функции *f(x, y, z)*, $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ и $f^* = \overline{f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})}$.
2. Убедимся, что на одинаковых наборах $f = f^*$.

В данном примере, как видно из таблицы, функция является самодвойственной.

x	***y***	***z***	***f***	$f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$	$f^* = \overline{f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})}$
0	0	0	**0**	1	**0**
0	0	1	**0**	1	**0**
0	1	0	**0**	1	**0**
0	1	1	**1**	0	**1**
1	0	0	**0**	1	**0**
1	0	1	**1**	0	**1**
1	1	0	**1**	0	**1**
1	1	1	**1**	0	**1**

Задачи для самостоятельного решения

15) Найдите функции, двойственные к функциям:

a) $(x \downarrow y) \leftrightarrow (y \mid z) \rightarrow (x \,\&\, z)$.b) $x \downarrow y$;c) $x \mid y$.

16) Являются ли функции самодвойственными?

a) f(x, y, z)=(0,0,0,1,0,1,1,1)

b). f(x, y, z)=(1,1,0,1,0,1,0,0)?

1.1.4 Разложение функций по переменным. Нормальные формы

Часто при разработке устройств инженер получает задание: вот таблица входных и выходных значений, нужно создать схему устройства. Существует два стандартных способа представления функций: СДНФ, СКНФ и полином Жегалкина. Одну и ту же булеву функцию можно задать различными формулами. Нормальная форма – это синтаксически однозначный способ записи заданной функции.

Введём обозначение: $x^{\alpha} = \begin{cases} \overline{x}, если\ \alpha = 0, \\ x, если\ \alpha = 1 \end{cases}$

Элементарной конъюнкцией называется произведение переменных или их отрицание, где переменные не повторяются.

Дизъюнктивная нормальная форма это дизъюнкция элементарных конъюнкций, где слагаемые не повторяются. Например, $\overline{x} \vee yz, xyz \vee \overline{y}z \vee \overline{z}$.

Теорема. (Совершенная дизъюнктивная нормальная форма). Любую функцию *f(x₁,...,xₙ)≠ 0* для любого *n* можно представить в виде:

$$\bigvee_{\substack{по\ всем \\ наборам \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ на \\ которых \\ f(\alpha_1,\ldots\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \ldots \& x_n^{\alpha_n} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Теорема. (Совершенная конъюнктивная нормальная форма). Любую функцию $f(x_1,\ldots,x_n) \neq 1$ для любого *n* можно представить в виде

$$\underset{\substack{по\ всем \\ наборам \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ на \\ которых \\ f(\alpha_1,\ldots\alpha_n)=0}}{\&} x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}.$$

Таким образом, любая булева функция может быть представлена суперпозицией конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Разложение по всем переменным в дизъюнкцию называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)*** функции, а в конъюнкцию – ***совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)***.

Алгоритм приведения к СДНФ:

1. Построить таблицу значений функции.

2. Выделить все наборы переменных, где $f=1$.

3. Для каждого такого набора построить произведение $x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \ldots \& x_n^{\alpha_n}$.

4. Полученные конъюнкции объединить знаком дизъюнкции.

Алгоритм приведения к СКНФ:

1. Построить таблицу значений функции.

2. Выделить все наборы переменных, где $f=0$.

3. Для каждого такого набора построить дизъюнкции $x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}$

4. Полученные дизъюнкции объединить знаком конъюнкции.

Примеры решения задач

17) Построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму функции, заданной следующей таблицей.

x	*y*	*z*	**f**	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	**1**	**1**	1	$x^0\&y^1\&z^1=\bar{x}\&y\&z$
1	0	0	0	
1	**0**	**1**	1	$x^0\&y^1\&z^1=x\&\bar{y}\&z$
1	**1**	**0**	1	$x^0\&y^1\&z^1=x\&y\&\bar{z}$
1	**1**	**1**	1	$x^0\&y^1\&z^1=x\&y\&z$

Решение. Наборы, на которых функция равна 1 – это (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1). Первый набор даёт конъюнкцию $\bar{x}\&y\&z$, второй – $x\&\bar{y}\&z$, третий – $x\&y\&\bar{z}$, четвёртый – $x\&y\&z$. В результате получаем $\bar{x}\&y\&z \vee x\&\bar{y}\&z \vee x\&y\&\bar{z} \vee x\&y\&z = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

18) Используя СДНФ, найдите булеву функцию, принимающую значение 1 на следующих наборах переменных, и только на них:

$$f\ 0,1,0\ = f\ 1,0,1\ = f\ 1,1,1\ = 1\ .$$

Решение. Алгоритм построения СДНФ.

1. Наборам 010; 101; 111 соответствуют конъюнкции:

$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$; $x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$; $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.Напомним, что для каждого набора из нулей и единиц τ_1, τ_2, τ_3 выписываем конъюнкцию $x_1^{\tau_1} \wedge x_2^{\tau_2} \wedge x_3^{\tau_3}$, причем, если $\tau_i = 1$, то соответствующая переменная x_iвходит в конъюнкцию без отрицания.

2. Составим дизъюнкцию полученных конъюнкций, т. е. составляем СДНФ функции: $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$.

19) Составьте СКНФ функции $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$.

Решение.

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. Выпишем $f(0,0) = 0$; $f(1,1) = 0$, булева функция принимает значение 0 на наборах (0;0) и (1;1).

2. Составим дизъюнкции, соответствующие этим наборам: $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ (если $\overline{\tau} = 0$, то переменная входит в дизъюнкцию без отрицания, если $\overline{\tau} = 1$, то переменная в дизъюнкции берется с отрицанием).

3. Составим конъюнкцию полученных дизъюнкций, т. е. составляем СКНФ функции

$f(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$.

20) Постройте КНФ функций и доказать тождественную истинность с помощью таблицы истинности:

а) $f_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \to x_3$;

б) $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge (x_2 \to x_3)) \to x_4$.

Решение. Напомним процедуру построения КНФ.

1. Исключаем связку $\to$ с помощью законов преобразования переменных: $(x \to y) = \overline{x} \vee y$.

2. Исключение двойное отрицания с помощью правила $\overline{\overline{x}} = x$ и используем законы де Моргана: $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$ или $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$.

3. Для получения нормальной формы используем дистрибутивные законы: $x_1 \vee \; x_2 \wedge x_3 \; = \; x_1 \vee x_2 \; \wedge \; x_1 \vee x_3$, $x_1 \wedge \; x_2 \vee x_3 \; = \; x_1 \wedge x_2 \; \vee \; x_1 \wedge x_3$.

а) $f \; x_1, x_2, x_3 \; = \; x_1 \vee \overline{x_2} \; \to x_3 = \overline{x_1 \vee \overline{x_2}} \vee x_3 = \overline{x_1} \wedge \overline{\overline{x_2}} \; \vee x_3 =$ $\overline{x_1} \wedge x_2 \; \vee x_3 = \overline{x_1} \vee x_3 \; \wedge \; x_2 \vee x_3$.

б) $f \; x_1, x_2, x_3 \; = \; x_1 \wedge \; x_2 \to x_3 \; \to x_4 = \; x_1 \wedge \; \overline{x_2} \vee x_3 \; \to x_4 =$

$$= \overline{x_1 \wedge \; \overline{x_2} \vee x_3} \; \vee x_4 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2 \to x_3} \; \vee x_4 = \overline{x_1} \vee \; \overline{\overline{x_2}} \wedge \overline{x_3} \; \vee x_4 =$$

$$= \overline{x_1} \vee \; x_2 \wedge \overline{x_3} \; \vee x_4 = \; \overline{x_1} \vee x_2 \; \wedge \; \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \; \vee x_4$$

$$= \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4 \; \wedge \; \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \; .$$

Таблица истинности для функции (б):

x_1	x_2	x_3	x_4	f_1 $x_2 \to x_3$	f_2 $x_1 \wedge f_1$	$f_2 \to x_4$	$\overline{x_1}$	f_3 $\overline{x_1} \vee x_2$	f_6 $f_3 \vee x_4$	$\overline{x_3}$	f_4 $\overline{x_1} \vee \overline{x_3}$	f_5 $f_4 \vee x_4$	$f_6 \wedge f_5$
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1

21) Приведите к ДНФ формулу $f = \; x \to y \; \downarrow \overline{\; y \to z \;}$.

Решение. Выразим логические операции → и ↓ через ∧,∨ и $\overline{}$:

$$f = \; \overline{x} \vee y \; \downarrow \overline{\; \overline{y} \vee z \;} \; = \; \overline{\overline{x} \vee y \; \vee \overline{\overline{y} \vee z}} \; .$$

Используя закон дистрибутивности, приводим формулу к ДНФ:

$$f = (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z)$$

22) Приведите к КНФ формулу $f = (x \to y) \wedge ((\overline{y} \to z) \to \overline{x})$.

Решение. Преобразуем формулу f к формуле, не содержащей ⟶:

$$f = \overline{x} \vee y \ \wedge \ \overline{\overline{y} \to z} \ \wedge \overline{x} \ = \ \overline{x} \vee y \ \wedge \ \overline{\overline{\overline{y}} \vee z} \ \vee \overline{x} \ .$$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

$$f = \overline{x} \vee y \ \wedge \ \overline{y} \wedge \overline{z} \ \vee \overline{x}$$

По закону дистрибутивности получим: $f = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{z})$, являющейся КНФ.

Замечание. Если полученную формулу упростить, используя законы дистрибутивности, эквивалентности и поглощения, то получим:

$$\overline{x} \vee y \ \wedge \ \overline{x} \vee \overline{y} \ \wedge \ \overline{x} \vee \overline{z} \ = \overline{x} \vee \ y \wedge \overline{y} \ \wedge \ \overline{x} \vee \overline{z} \ = \overline{x} \wedge \ \overline{x} \vee \overline{z} \ = \overline{x}$$

Таким образом, мы получили формулу, которая является одновременно ДНФ и КНФ.

23) Найдите СДНФ и СКНФ функции $f \ x_1, x_2, x_3$, заданной следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	$f \ x_1, x_2, x_3$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение. По теореме о функциональной полноте СДНФ имеет вид:

$$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \ \vee \ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \ \vee \ \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \ \vee \ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \ ,$$

СКНФ имеет вид:

$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \ \wedge \ x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \ \wedge \ \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \ \wedge \ \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \ .$$

Описанный способ нахождения СДНФ и СКНФ по таблице истинности бывает часто более трудоемким. Для нахождения СДНФ данную формулу приводим сначала к ДНФ, а затем преобразовываем ее конъюнкции с помощью следующих действий:

А) если в конъюнкцию входит некоторая переменная со своим отрицанием, то мы удаляем эту конъюнкцию из ДНФ;

Б) если в конъюнкцию одна и та же переменная входит несколько раз, то все они удаляются, кроме одной;

В) если в конъюнкцию не входят некоторые переменные, то для каждой из них к конъюнкции добавляется соответствующая формула вида$(x \vee \overline{x})$;

Г) если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конъюнкций, то оставляем только одну из них.

В результате получается СДНФ.

24) Найдите СДНФ для ДНФ $x \vee \overline{x} \ \vee x \vee \ y \wedge z \wedge y$.

Решение.

1. Удаляем конъюнкцию $x \vee \overline{x}$, так как здесь переменная вместе со своим отрицанием. Остается $x \vee \ y \wedge z \wedge y$.

2. Из конъюнкции $y \wedge z \wedge y$ удаляем переменную y, так как она входит сюда два раза. Остается $x \vee \ y \wedge z$.

3. В первой конъюнкции нет переменной у, поэтому к ней добавляется формула $y \vee \overline{y}$, а во второй конъюнкции нет переменной x, поэтому к ней добавляется формула $x \vee \overline{x}$ **.** Получаем: $x \wedge \ y \vee \overline{y} \ \ \vee \ y \wedge z \wedge \ x \vee \overline{x}$ **.**

4. Используем дистрибутивные законы: $x \wedge y \ \vee \ x \wedge \overline{y} \ \vee \ x \wedge y \wedge z \ \vee \ \overline{x} \wedge y \wedge z$.

5. К первой и второй конъюнкциям добавляем$(z \vee \overline{z})$и получаем:

$$x \wedge y \wedge (z \vee \overline{z}) \ \vee (x \wedge \overline{y} \wedge (z \vee \overline{z})) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z)$$

6. Используем дистрибутивные законы:

$$x \wedge y \wedge z \ \vee \ x \wedge y \wedge \overline{z} \ \vee \ x \wedge \overline{y} \wedge z \ \vee \ x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \ \vee \ x \wedge y \wedge z \ \vee \ \overline{x} \wedge y \wedge z$$

7. В полученной формуле имеется две одинаковые конъюнкции: $x \wedge y \wedge z$. Удалив одну из них, получим: $x \wedge y \wedge z \ \vee \ x \wedge y \wedge \overline{z} \ \vee \ x \wedge \overline{y} \wedge z \ \vee \ x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \ \vee \ \overline{x} \wedge y \wedge z$

В итоге мы получили соответствующую СДНФ.

25) Найдите СКНФ для КНФ$(x \vee z \vee \overline{y}) \wedge (x \vee z) \wedge y$.

Решение. Опишем алгоритм приведения КНФ к СКНФ аналогично вышеизложенному приведению ДНФ к СДНФ.

1. Во второй дизъюнкции не хватает переменной y, поэтому в дизъюнкцию добавим$(y \wedge \overline{y})$и, используя дистрибутивные законы, получаем:

$x \vee z = x \vee z \vee\ \ y \wedge \overline{y}\ \ = (x \vee z \vee y) \wedge (x \vee z \vee \overline{y})$.

2. В третью дизъюнкцию добавим $x \vee \overline{x}$ и получим две дизъюнкции: $y = y \vee\ \ x \wedge \overline{x}\ \ =\ \ y \vee x\ \ \wedge\ \ y \vee \overline{x}$. Добавив в каждую из них $z \wedge \overline{z}$, получим: $y \vee x \vee\ \ z \wedge \overline{z}\ \ \wedge\ \ y \vee \overline{x} \vee\ \ z \wedge \overline{z}\ \ =\ \ y \vee x \vee z\ \ \wedge\ \ y \vee x \vee \overline{z}\ \ \wedge\ \ y \vee \overline{x} \vee \overline{z}\ \ \wedge$ $y \vee \overline{x} \vee z$.

3. Соберем в конъюнкцию все дизъюнкции: $x \vee \overline{y} \vee z\ \ \wedge\ \ x \vee y \vee z\ \ \wedge$ $x \vee z \vee \overline{y}\ \ \wedge\ \ y \vee x \vee z\ \ \wedge\ \ x \vee y \vee \overline{z}\ \ \wedge\ \ \overline{x} \vee y \vee z\ \ \wedge\ \ \overline{x} \vee y \vee \overline{z}$.

4. Избавимся от одинаковых дизъюнкций, оставляя только одну. В результате получаем СКНФ: $x \vee y \vee z\ \ \wedge\ \ x \vee z \vee \overline{y}\ \ \wedge\ \ x \vee y \vee \overline{z}\ \ \wedge\ \ \overline{x} \vee y \vee z\ \ \wedge$ $\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$.

26) Задана булева функция трех переменных:

$$f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = \overline{x_2} \wedge\ \ \ x_1 \vee x_3\ \ \ \overline{\overline{x_2}\ \overline{x_3}}\ \ \ ;$$

А) Постройте таблицу истинности, найдите двоичную форму F булевой функции и приведите функцию к СДНФ и СКНФ.

Б) найдите двумя способами многочлен Жегалкина.

Решение. *А)* $f_1 = x_1 \vee x_3$; $f_2 = \overline{x_2} | \overline{x_3}$; $f_3 = \overline{\overline{x_2}\ \overline{x_3}} = \overline{f_2}$;

$f_4 =\ \ x_1 \vee x_3\ \ \ \overline{\overline{x_2}\ \overline{x_3}} = f_1\ \ f_3$; $f_5 = \overline{x_2} \wedge\ \ \ x_1 \vee x_2\ \ \ \overline{\overline{x_2}\ \overline{x_3}}\ \ = \overline{x_2} \wedge f_4$.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0

Двоичная форма F=11000100.

Наборы $N_1 =\ \ 000, 001, 101$, где $f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = 1$ СДНФ функции $f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ =\ \ \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}\ \ \vee\ \ \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\ \ \vee\ \ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$.

Наборы $N_1 =\ \ 010, 011, 100, 110, 111$, где $f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = 0$.

СКНФ функции $f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

Б) Построим многочлен Жегалкина первым способом:

выписываем СДНФ функции $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}\ \ \vee\ \ \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\ \ \vee\ \ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$

заменяем знак дизъюнкции на знак суммы Жегалкина $\oplus$

$$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}\ \oplus\ \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\ \oplus\ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$$

Вынесем из первой и второй конъюнкции $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$:

$$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}\ \ \wedge\ \ \overline{x_3} \oplus x_3\ \oplus\ \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\ \ =\ \ \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}\ \oplus\ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\ ;$$

Проделаем замены: $\overline{x_1} = x_1\quad 1$; $\overline{x_2} = x_2\quad 1$, получаем:

$(\ x_1 \oplus 1\ \ \wedge\ \ x_2 \oplus 1\ ) \oplus ((x_1 \wedge (x_2 \oplus 1) \wedge x_3)$.

Далее раскроем скобки: $x_1 \wedge x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

Итак, мы получили многочлен Жегалкина:

$$f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$$

Построим многочлен Жегалкина методом неопределенных коэффициентов, для этого составим следующие восемь уравнений:

$$f\ \ 0,0,0\ \ = a_0 = 1;\quad a_0 = 1;$$

$$f\ \ 0,0,1\ \ = a_0 \oplus a_3 = 1;\ \ 1 \oplus a_3 = 1;\ \ a_3 = 0;$$

$$f\ \ 0,1,0\ \ = a_0 \oplus a_2 = 0;\ \ 1 \oplus a_2 = 0;\ \ a_2 = 1;$$

$$f\ \ 0,1,1\ \ = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 0;\ \ 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{23} = 0;\ \ a_{23} = 0$$

$$f\ \ 1,0,0\ \ = a_0 \oplus a_1 = 0;\ \ 1 \oplus a_1 = 0;\ \ a_1 = 1$$

$$f\ \ 1,0,1\ \ = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1;\ \ 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{13} = 1;\ \ a_{13} = 1;$$

$$f\ \ 1,1,0\ \ = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 0;\ \ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{12} = 0;\ \ a_{12} = 1;$$

$$f\ \ 1,1,1\ \ = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 0;$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123} = 0;\ \ a_{123} = 1$$

Составим многочлен Жегалкина:

$$f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$$

27) Проверьте на линейность функцию $f\ \ x_1, x_2, x_3$, если ее двоичный набор *F*=11100001.

Решение. Применяем к функции $f\ x_1, x_2, x_3$ алгоритм проверки на линейность.

1. Вычисляем коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 многочлена Жегалкина для данной функции:

$$a_0 = f\ \ 0{,}0{,}0\ \ = 1; \quad a_1 = f\ \ 0{,}0{,}0\ \oplus f\ \ 1{,}0{,}0\ \ = 1\oplus 0 = 1;$$

$$a_2 = f\ \ 0{,}0{,}0\ \oplus f\ \ 0{,}1{,}0\ \ = 1 \oplus 1 = 0 \quad a_3 = f\ \ 0{,}0{,}0\ \ \oplus f\ \ 0{,}0{,}1\ \ = 1 \oplus 1 = 0.$$

2. Вычисляем многочлен $\Phi\ x_1, x_2, x_3\ \ = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 = x_1 \oplus 1$.

Очевидно, что двоичный набор *F=11110000* многочлена $\Phi\ x_1, x_2, x_3\ \ = x_1 \oplus 1$ не совпадает с двоичным набором булевой функции, следовательно, функция $f\ \ x_1, x_2, x_3$ не линейна.

28) Задана булева функция трех переменных

$$f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = \overline{x_2} \wedge (\ \ x_1 \vee x_3\ \ |\ \overline{\overline{x_2}\ \overline{x_3}}\ .$$

С помощью эквивалентных преобразований приведите функцию к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

Решение. Заменяем, $\overline{\overline{x_2}\ \overline{x_3}}\ \ = \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} = \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$,

$$(x_1 \vee x_3)|\ \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}\ \ = \ \overline{\ x_1 \vee x_3\ \ \wedge\ \ \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}\ }\ = \ \overline{\ x_1 \vee x_3\ }\ \vee\ \overline{\ \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}\ }\ =$$

$$= \ \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}\ \ \vee\ \ x_2 \vee x_3\ \ =\ \ \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}\ \ \vee\ \ x_2 \vee x_3\ \ .$$

$f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = \overline{x_2} \wedge\ \ \ \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}\ \ \vee\ \ x_2 \vee x_3$,тогда

ДНФ $f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ =\ \ \overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}\ \ \vee\ \ x_2 \wedge \overline{x_2}\ \ \vee\ \ \overline{x_2} \wedge x_3$,

КНФ $f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = \overline{x_2} \wedge\ \ \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\ \ \wedge\ \ \overline{x_3} \vee x_3 \vee x_2$.

Строим СДНФ, для этого из ДНФ удаляем вторую конъюнкцию $x_2 \wedge \overline{x_2}$, а в третью конъюнкцию добавляем $x_1 \vee \overline{x_1}$, тогда:

$\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}\ \ \vee\ \ \overline{x_2} \wedge x_3\ \ \vee\ \ x_1 \vee \overline{x_1}\ \ = (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_1) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_1})$,

Т.е. получили СДНФ функции

$$f\ \ x_1, x_2, x_3\ \ =\ \ \overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}\ \ \vee\ \ \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_1\ \ \vee\ \ \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}\ .$$

Строим СКНФ, для этого из КНФ удаляем третью дизъюнкцию, а к первой добавляем $x_1 \wedge \overline{x_1}$:

$$\overline{x_2} \vee\ \ x_1 \wedge \overline{x_1}\ \ \ \wedge\ \ \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\ \ =\ \ \overline{x_2} \vee x_1\ \ \wedge\ \ \overline{x_2} \vee \overline{x_1}\ \ \wedge\ \ \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\ ,$$

Добавляем к первой и второй дизъюнкциям $x_3 \wedge \overline{x_3}$

$$\overline{x_2} \vee x_1 \;\; \vee \;\; x_3 \wedge \overline{x_3} \;\;\; \wedge \;\;\; \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \;\; \vee \;\; x_3 \wedge \overline{x_3} \;\; \wedge \;\; \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \;\;\; =$$

$$= \;\overline{x_2} \vee x_1 \vee x_3 \;\; \wedge \;\; \overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_3} \;\; \wedge \;\; \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_3 \;\; \wedge \;\; \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \;\; \wedge \;\; \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \;\; .$$

Получили СКНФ функции

$$f \;\; x_1, x_2, x_3 \;\; = \;\; \overline{x_2} \vee x_1 \vee x_3 \;\; \wedge \;\; \overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_3} \;\; \wedge \;\; \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_3 \;\; \wedge \;\; \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3}$$
$$\wedge \;\; \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \;\; .$$

СДНФ и СКНФ проверить в задаче 12.

Задачи для самостоятельного решения

29) Найдите совершенную дизъюнктивную нормальную форму следующих функций:

a. $f_1(x,y,z) = (1,1,0,1,0,0,0,0);$

b. $f_2(x,y,z) = x \,\&\, y \,\&\, z;$

c. $f_4(x,y,z) = \overline{(x \,\&\, y) \to z}\,.$

d. $f_1(x,y,z) = (0,0,0,1,0,1,0,1);$

e. $f_3(x,y,z) = x \oplus y \oplus z\,.$

30) Найдите совершенную конъюнктивную нормальную форму следующих функций:

f. $f_1(x,y,z) = (1,1,0,1,0,0,0,0),$

g. $f_3(x,y,z) = x \oplus y \oplus z\,.$

h. $f_1(x,y,z) = (0,1,0,1,0,0,1,0),$

i. $f_2(x,y,z) = x \vee y \vee z\,.$

31) Найдите количество дизъюнктивных членов в совершенных дизъюнктивных нормальных формах следующих функций:

j. $f_1(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n\,.$

k. $f_1(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n\,,$

l. $f_2(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \,\&\, (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee \overline{x_n})\,.$

1.1.5 Минимизация нормальных форм. Карты Карно

Зачем минимизировать схемы? Обычно на предприятиях микросхемы производятся огромными тиражами. Если сэкономить хотя бы один элемент, то весь тираж удешевляется ощутимо.

Минимальная или сокращенная ДНФ получается из совершенной нормальной формы удалением некоторых элементарных конъюнкций.

Для представления булевой функции таком виде необходимо сначала представить ее в совершенном виде и только затем минимизировать.

Карты Карно являются одним из наиболее удобных способов минимизации. Это специальные таблицы, дающие возможность упростить процесс поиска минимальной формы булева выражения с помощью графического представления для $n \leq 6$. Они имеют вид прямоугольника, разделенного на 2^n клеток, в каждой из которых — двоичный n-мерный набор значений функции F из таблицы истинности. Для $n = 2$ карта Карно имеет вид таблицы, состоящей из $2^2 = 4$ клеток.

	$\overline{x}_1$	x_1
$\overline{x}_2$		
x_2		

Логическая функция на карте Карно представлена совокупностью клеток, заполненных единицами (1) или пустотами (0), если известны ее значения при всем наборе аргументов, т.е. известна таблица истинности или СДНФ. При $n = 3$ карты Карно имеют вид таблицы с $2^3 = 8 = 2 \cdot 4$ клетками.

Для построения минимальной ДНФ производится «склеивание» единиц. Склеиваются только соседние клетки, которые *отличаются значением только одной* переменной. Процесс сводится к объединению в группы единичных клеток карт Карно. При этом общие переменные сохраняются, а различные опускаются.

Алгоритм «склеивания» с помощью карт Карно.

1. Нанести единицы на карту Карно.
2. Объединить соседние единицы контурами, охватывающими 2^m клеток, где m = 0, 1, 2, 3. При этом может оказаться, что единица попадает одновременно в два контура. Если контур охватывает более одной пары единиц одновременно, то предпочтительнее его не дробить на пары, а рассматривать как единый целый контур, например квадрат.

3. Провести упрощения, т.е. исключить члены, дополняющие друг друга до 1 внутри контура, следя за тем, чтобы переменные внутри контура были связаны операцией конъюнкции.
4. Объединить оставшиеся члены (по одному в каждом контуре) функцией дизъюнкцией.
5. Записать полученное упрощенное булево выражение в ДНФ.

Примеры решения задач

32) Найдите минимальную ДНФ для булевой функции с помощью карт Карно: f(x,y,z)= $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz \vee xy\bar{z}$

Решение. Нанесем единицы на карту (рис. 28) и обведем их сначала попарно двумя контурами. Такое действие соответствует заключению в скобки слагаемых $(\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz)$ и $(xy\bar{z} \vee xyz)$. Вынося за скобки одинаковые конъюнкции согласно распределительному закону, в скобках получаем дизъюнкцию противоположных значений одной из переменных. В данном примере этому шагу соответствуют конъюнкции $\bar{x}y(\bar{z} \vee z)$ и $xy(\bar{z} \vee z)$.. Поэтому объединение двух соседних единиц всегда приводит к закону инверсии, согласно которому дизъюнкция противоположных значений переменной равна 1.

Поэтому при записи ответа после применения карты Карно переменные, заключенные в общий контур, связываются конъюнкцией (как и общий множитель при вынесении за скобки), а такие отдельные конъюнкции, т.е. различные контуры, объединяются между собой дизъюнкцией.

Если записать полученный результат, то, очевидно, к нему вновь можно применить то же правило: $f(x,y,z) = \bar{x}y \vee xy = y$.

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
z		1	1	
$\bar{z}$		1	1	

Рисунок1

Однако в данном примере удобнее рассмотреть целиком весь квадрат из четырех единиц и сравнить переменные, записанные на горизонтальных и вертикальных клетках. Очевидно,

общие множители сохранятся после упрощения (ведь их можно было вынести за скобки), а инвертируемые уйдут согласно закону инверсии.

Задачи для самостоятельного решения

33) Найдите минимальную ДНФ для булевой функции с помощью карт Карно.

m. $f(xyzt) = x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt \vee x\bar{y}\bar{z}t;$

n. $f(x_1x_2x_3x_4) = x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4;$

o. $f(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4;$

p. $f(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4;$

q. $f(x_1x_2) = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2;$

r. $f(x_1x_2x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3;$

s. $f(xyzt) = \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}yz;$

Вопросы для повторения

1. Понятие булева функция. Булевы функции от двух переменных, их таблицы истинности.

2. Способы задания булевых функций. Определения эквивалентных формул. Примеры.

3. Основные тождества булевой алгебры. Примеры их использования.

4. Понятие функции, двойственной к данной. Пример нахождения функции, двойственной к данной.

5. Понятие самодвойственной функции. Алгоритм проверки, является ли функция самодвойственной. Пример.

6. Понятие элементарной дизъюнкции. Теорема о представлении функции в виде СКНФ. Алгоритм приведения булевой функции к СКНФ. Пример.

7. Понятие элементарной конъюнкции. Теорема о представлении функции в виде СДНФ Алгоритм приведения булевой функции к СДНФ. Пример.

8. Понятие минимальной ДНФ. Способы получения минимальной ДНФ. Пример.

1.2 Полные системы функций

1.2.1 Полнота множества функций. Примеры полных систем

Система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называется ***полной***, если любую функцию булевой алгебры можно реализовать в виде формулы над этой системой функций. Система $\{\vee,\&,\neg\}$ - полная. Это следует из теоремы о представлении функции в виде СДНФ.

Теорема. Пусть даны две системы функций: F=$\{f_1,f_2,\ldots\}$ и G=$\{g_1,g_2,\ldots\}$. Если система F полна и все функции из F можно выразить в виде суперпозиции функций системы G, то система G тоже полна.

Примеры решения задач

34) Доказать, что система функций $\{\vee,\neg\}$ - полная.

Доказательство: Известно, что F= $\{\vee,\&,\neg\}$ - полна. Чтобы доказать, что G= $\{\vee,\neg\}$ - полна, нужно выразить любую функцию $f_i \in F$ через функции системы G: $x \& y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$, а дизъюнкция и отрицание из F есть в системе G.

35) Доказать, что система функций $\{x \mid y\}$ полна.

Решение. Известно, что F= $\{\&,\neg\}$-полная. Выразим конъюнкцию и отрицание через штрих Шеффера: $\overline{x} = x \mid x, \quad x \& y = \overline{x \mid y} = (x \mid y) \mid (x \mid y)$.

Задачи для самостоятельного решения

36) Доказать, что следующие системы функций полные:

a) $\{1, \&, \oplus\}$;

b) $\{\vee,\neg\}$;

c) $\{0, 1, \&, \oplus\}$.

d) $\{\to,\neg\}$.

1.2.2 Базисы

Полная система функций F=$\{f_1, f_2, \ldots\}$ является ***базисом***, если она минимальная, то есть F – полная, а F'=$F \setminus \{f_i\}$ – не полна для любой $f_i \in F$.

Например, $\{\vee, \&, \neg\}$ - полна, но не базис, так как $\{\vee, \neg\}$ - также полна.

Примеры решения задач

37) Выясните, является ли система функций $\{\&, \neg\}$ базисом.

Решение. $\{\&, \neg\}$ - базис. Так как $\{\&, \neg\}$ - полна и $\{\neg\}$ и $\{\&\}$ не полны.

Задачи для самостоятельного решения

38) Выясните, являются ли системы функций базисами.

a) $\{1, \&, \oplus\}$;

b) $\{\vee, \neg\}$;

c) $\{\rightarrow, \neg\}$;

d) $\{x \downarrow y\}$;

e) $\{\vee, \&, \neg\}$.

1.2.3 Полином Жегалкина. Алгоритм построения для произвольных функций

Алгебру <M, F>, где M={x_1, x_2, x_3, …} и F= $\{0, 1, \&, \oplus\}$ будем называть алгеброй Жегалкина.

В алгебре Жегалкина выполняются следующие тождества:

1. $x \,\&\, y = y \,\&\, x$; $x \oplus y = y \oplus x$;
2. $x \,\&\, (y \oplus z) = (x \,\&\, y) \oplus (x \,\&\, z)$;
3. $x \,\&\, (y \,\&\, z) = (x \,\&\, y) \,\&\, z$; $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;
4. $x \& x = x$; $x \oplus x = 0$
5. $x \oplus 0 = x$; $x \,\&\, 0 = 0$
6. $x \oplus 1 = \bar{x}$; $x \,\&\, 1 = x$.

Полиномом в булевой алгебре называют любое выражение, состоящее из суммы произведений переменных, где слагаемые не повторяются, переменные записаны без степеней и в произведениях не повторяются.

Теорема. Любую функцию булевой алгебры можно выразить в виде полинома Жегалкина. Представление функции в виде полинома Жегалкина единственно.

Алгоритм нахождения полинома Жегалкина для произвольной функции с помощью СДНФ:

1) Построить СДНФ для данной функции.

2) Произвести в СДНФ следующую замену: $x_i \vee x_j \to x_i \oplus x_j$; $\overline{x_i} \to (x_i \oplus 1)$.

3) Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

Алгоритм нахождения полинома Жегалкина для произвольной функции методом неопределенных коэффициентов:

1) Записываем общий вид полинома Жегалкина:

$f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_1x_2$ для двух переменных;

$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_4x_1x_2 \oplus a_5x_1x_3 \oplus a_6x_2x_3 \oplus a_7x_1x_2x_3$. для трех переменных.

2) Берем нулевой набор (0,0,0) и находим a_0.

3) Рассматриваем все наборы с одной единицей: (1,0,0), (0,1,1), (0,0,1) и находим a_1, a_2, a_3.

4) Рассмотрим все наборы с двумя единицами: (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1) и находим a_4, a_5, a_6..

5) Рассматриваем набор (1,1,1) и находим коэффициент a_7.

Примеры решения задач

39) Построить полином Жегалкина для функции х→у методом неопределенных коэффициентов.

Решение. $x \to y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x \cdot y$.

(0,0): $0 \to 0 = 1 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 \cdot 0 \Rightarrow a_0 = 1$.

(1,0): $1 \to 0 = 0 = 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow a_1 = 1$.

(0,1): $0 \to 1 = 1 = 1 + 1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 \cdot 1 \Rightarrow 1 = 1 + a_2 \Rightarrow a_2 = 0$.

(1,1): $1 \to 1 = 1 = 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow a_3 = 1$.

Следовательно, $x \to y = 1 + x + x \cdot y$.

40) Докажите, что булева функция $f\ x_1, x_2, x_3$, заданная таблицей истинности линейна.

x_1	x_2	x_3	$f\ x_1, x_2, x_3$	$x_2 \oplus x_3 \oplus 1$
0	*0*	*0*	*1*	*1*
0	*0*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*1*	*1*

1	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*0*	*0*
1	*1*	*0*	*0*	*0*
1	*1*	*1*	*1*	*1*

Решение. Снова применим алгоритм определения линейности булевой функции.

1. Вычисляем коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 многочлена Жегалкина функции $f\ \ x_1, x_2, x_3\ : a_0 = f\ \ 0{,}0{,}0\ \ = 1;$

$$a_1 = f\ \ 0{,}0{,}0\ \oplus f\ \ 1{,}0{,}0\ \ = 1\oplus 1 = 0;$$

$$a_2 = f\ \ 0{,}0{,}0\ \oplus f\ \ 0{,}1{,}0\ \ = 1\oplus 0 = 1;$$

$$a_3 = f\ \ 0{,}0{,}0\ \oplus f\ \ 0{,}0{,}1\ \ = 1\oplus 0 = 1.$$

2. Таким образом, $\Phi\ \ x_1, x_2, x_3\ \ = x_2 \oplus x_3 \oplus 1$.

3. Достроим в таблице истинности последний столбик для $\Phi\ \ x_1, x_2, x_3$, напомним, что $0\oplus 0 = 0;\ \ 1\oplus 0 = 1;\ \ 1\oplus 1 = 0$.

4. Столбики для $\Phi\ \ x_1, x_2, x_3$ и $f\ \ x_1, x_2, x_3$ совпали. Следовательно, функция $f\ \ x_1, x_2, x_3$ -линейна.

41) Постройте таблицу истинности функции. С помощью эквивалентных преобразований приведите функцию к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ. Составьте двумя способами полином Жегалкина и проверьте линейность функции.

a) $x \vee \neg y \vee z\ \ \ \neg x \neg y \neg z$;

b) $xy \vee x\ \ z \vee y\ \ z$;

c) $x \rightarrow\ \ x \rightarrow z$;

d) $x \rightarrow\ \ x \rightarrow y\ \ \ \rightarrow z$;

e) $x \equiv y\ \ \equiv z$;

f) $\neg x \rightarrow \neg y\ \ \rightarrow\ \ xy \rightarrow xz$;

g) $x \rightarrow y\ \ \rightarrow \neg x\ \ \rightarrow\ \ x \rightarrow yx$;

h) $\neg\ \ \ x \wedge y\ \ \rightarrow \neg x\ \ \neg\ \ xy \rightarrow \neg y$;

i) $z \rightarrow x\ \ \rightarrow\ \ \neg\ \ y \vee z\ \ \rightarrow x$;

j) $\neg\ \ xy \rightarrow x\ \ \vee\ \ x\ \ y \vee x$;

k) $\neg\ x\ y \vee z \quad \to \quad xy \vee z$;

l) $\quad x \to y \quad \to \quad z \to \neg x \quad \to \quad \neg y \to \neg z$;

m) $\quad x \to \quad y \to z \quad \to \quad x \to \neg z \quad \to \quad x \to \neg y$.

Задачи для самостоятельного решения

42) По заданной СДНФ функций построить полином Жегалкина:

a. $\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$;

b. $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xyz$.

43) Построить полином Жегалкина с помощью СДНФ для функций:

c. $x \vee y$;

d. $x \to y$;

e. $(x \leftrightarrow y) \to z$;

f. $((\overline{x \vee y}) \vee (\bar{x} \cdot z)) \downarrow (x \leftrightarrow y)$.

44) Построить полином Жегалкина двумя способами для функций:

g. $(x_1 \leftrightarrow x_2) \oplus x_1$;

h. $((\overline{xy}) \mid (\bar{x} \vee z)) \leftrightarrow (x \vee y)$;

i. $x_1 x_2 (x_1 \oplus x_2)$;

j. *f(x, y, z)=(1,0,0,1,0,0,0,1).*

45) Заданы следующие функции:

1) *f(x,y)=(0,1,0,1)*;

2) $(x \leftrightarrow y) \to z$; $((\overline{x \vee y}) \vee (\bar{x} \cdot z)) \downarrow (x \leftrightarrow y)$.

a) Построить для них полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов.

b) Выясните, имеют ли построенные полиномы следующий вид: $a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, $a_i \in \{0,1\}$.

c) Построить для заданных функций двойственные им. Выясните, являются ли они самодвойственными.

Вопросы для повторения

1. Алгебра Жегалкина. Свойства операций. Пример.

2. Алгоритмы представления булевой функции в виде многочлена Жегалкина. Примеры.

3. Понятие полной системы функций. Теорема о полноте системы функций. Примеры полных и неполных систем.

4. Понятие базиса полной системы функций. Примеры.

1.3 Пять важнейших замкнутых классов. Теорема Поста

1.3.1 Понятие замкнутых классов

Пусть дано множество функций $F=\{f_1, f_2, \ldots\}$. ***Замыканием*** этого множества называют множество [F], полученное из данного с помощью операции суперпозиции. Множество функций К называют ***замкнутым классом***, если K=[K]. Например, класс {0,1} – замкнут. Замкнуты классы: {0,1,x}, $\{\bar{x}, x\}$, множество всех функций булевой алгебры. Незамкнуты классы: $\{\bar{x}\}$, $\{0, \bar{x}, x\}$, $\{x \mid y\}$.

1.3.2 Классы T_0, T_1, L, S, M

Класс T_0. Будем говорить, что функция $f\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ***сохраняет ноль***, если $f(0,0,\ldots,0)=0$. В класс T_0 включим все функции, сохраняющие ноль. Чтобы выяснить, принадлежит ли функция классу T_0, нужно убедиться, что значение этой функции на нулевом наборе равно нулю.

Теорема. Класс T_0 замкнут.

Сохраняют ноль функции: $0, x, x \vee y, x \& y, x \oplus y$.

Не сохраняют ноль функции: $1, \bar{x}, x \to y, x \leftrightarrow y, x \mid y, x \downarrow y$.

Класс T_1. Будем говорить, что функция $f\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ***сохраняет единицу***, если $f(1,1,\ldots,1)=1$. В класс T_1 включим все функции, сохраняющие единицу. Чтобы выяснить, принадлежит ли функция классу T_1, нужно убедиться, что значение этой функции на единичном наборе равно единице.

Теорема. Класс T_1 замкнут.

Сохраняют единицу функции: $1, x, x \vee y, x \& y, x \to y, x \leftrightarrow y$.

Не сохраняют ноль функции: $0, \bar{x}, x \mid y, x \downarrow y, x \oplus y$.

Класс L. В класс L включим все функции булевой алгебры, для которых полиномы Жегалкина не содержат произведения переменных, то есть полином Жегалкина имеет вид: $a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, $a_i \in \{0, 1\}$. Чтобы выяснить вопрос принадлежности заданной функции классу L, нужно построить полином Жегалкина и посмотреть, имеет ли он нужный вид.

Теорема. Класс L замкнут.

Принадлежат данному классу L: $1, 0, x, \bar{x}, x \oplus y, x \leftrightarrow y$.

Не принадлежат данному классу: $x \& y,\ x \vee y,\ x \mid y,\ x \downarrow y, x \to y$.

Класс S. Функция *f* называется ***самодвойственной***, если она равна своей двойственной: $f=f^*$.

В класс *S* включим все самодвойственные функции.

Алгоритм проверки принадлежности функции к классу *S* состоит в нахождении функции, двойственной к данной (этот алгоритм был рассмотрен ранее) и проверке равенства $f=f^*$.

Теорема. Класс *S* замкнут.

К самодвойственным функциям относятся: x, $\bar{x},\ xy \vee xz \vee yz,\ xy \oplus xz \oplus yz$. А функции: 0, 1, $x \mid y,\ x \downarrow y,\ x \oplus y,\ x \leftrightarrow y$, $x \& y,\ x \vee y,\ x \to y$ не являются таковыми.

Класс M. На множестве всех двоичных наборов введем частичный порядок. Будем говорить, что набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ***предшествует*** набору $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ (т.е. $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$), если $\alpha_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le \beta_2, ..., \alpha_n \le \beta_n$.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является ***монотонной***, если для любых наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ из того, что $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$ следует, что $f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})$.

В класс *M* включим все монотонные функции.

Теорема. Класс *M* замкнут.

Алгоритм выяснения факта монотонности некоторой функции неэффективен. Но если указать на два набора $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$, для которых $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$, то можно сделать вывод, что заданная функция не монотонна.

Принадлежат данному классу М: $1, 0,\ x,\ x \& y,\ x \vee y$.

Не принадлежат данному классу: $\bar{x},\ x \oplus y,\ x \leftrightarrow y, x \to y, x \mid y, x \downarrow y$.

Задачи для самостоятельного решения

46) Даны функции. Принадлежат ли данные функции классам T_0, T_1, L, S, M?

k. $f=(1,1,0,1,1,1,1,0)$;

l. $x_1 x_2 (x_1 \oplus x_2)$;

m. $f=(0,1,1,1,1,1,1,1)$;

n. $(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \leftrightarrow x_3$.

47) Принадлежат ли функции классам $T_0 \cup T_1, T_0 \cap T_1, T_0 \setminus T_1, T_1 \setminus T_0, \overline{T_0}, \overline{T_1}$?

a) $(x \to y)(y \downarrow z) \vee (z \to y)$

b) $((x \vee y) \to (x \mid yz)) \downarrow ((y \leftrightarrow z) \to x)$

1.3.3 Теорема Поста

Сформулируем следующую задачу: можно ли любую функцию выразить через имеющиеся или существует ли минимальный набор функций, с помощью которого можно выразить любую функцию? Эту задачу в 1921 году решил Пост.

Теорема. Система булевых функций F полна тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль, хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу, хотя бы одну не самодвойственную функцию, хотя бы одну не монотонную функцию и хотя бы одну нелинейную функцию.

Примеры решения задач

48) Выясните, полна ли система функций $\{x \to y, x \to \overline{y}\, z\}$?

Решение. данной задачи будем оформлять в виде таблицы.

В соответствующей ячейке будем ставить *, если функция не принадлежит указанному классу.

	T_0	T_1	L	S	M
$x \to y$	*	-	*	*	*
$x \to \overline{y}\, z$	*	*	*	*	*

Получили, что в каждом столбце есть хотя бы одна звездочка, т.е. нашлась хотя бы одна функция, не сохраняющая ноль, хотя бы одна функция, не сохраняющая единицу, хотя бы одна не самодвойственная функция, хотя бы одна не монотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция. Следовательно, по теореме Поста, система функций полна.

Задачи для самостоятельного решения

49) Пользуясь теоремой Поста, Выясните: полна ли система, является ли она базисом, если нет, то выделить базис.

а) $\{x \to y, x \to \overline{y}\, z\}$; б) $\{0, 1, x(y \leftrightarrow z) \vee \overline{x}(y \oplus z)\}$; в) $\{x\overline{y}, x \leftrightarrow yz\}$

Вопросы для повторения

1. Понятия класс функций, замкнутый класс. Примеры.

2. Класс функций, сохраняющих ноль: Понятия, примеры функций, сохраняющих и не сохраняющих ноль, алгоритм проверки на принадлежность функции данному классу. Теорема о замкнутости данного класса.

3. Класс функций, сохраняющих единицу: Понятия, примеры функций, сохраняющих и не сохраняющих единицу, алгоритм проверки на принадлежность функции данному классу. Теорема о замкнутости данного класса.

4. Класс самодвойственных функций: Понятия, примеры функций, принадлежащих и не принадлежащих данному классу, алгоритм проверки на принадлежность функции данному классу. Теорема о замкнутости данного класса.

5. Класс линейных функций: Понятия, примеры функций, принадлежащих и не принадлежащих данному классу, алгоритм проверки на принадлежность функции данному классу. Теорема о замкнутости данного класса.

6. Класс монотонных функций: Понятия, примеры функций, принадлежащих и не принадлежащих данному классу, алгоритм проверки на принадлежность функции данному классу. Теорема о замкнутости данного класса.

7. Теорема Поста. Пример её применения для определения полноты системы функций, для нахождения базиса данной системы.

1.4 Анализ и синтез $\pi -$ схем

1.4.1 Понятие $\pi -$ схемы

Рассмотрим как разновидность булевой алгебры – алгебру параллельно-последовательных контактных схем (так называемых π-схем). ***Контактная схема*** – математическая модель реального управляющего устройства, которое в зависимости от значений управляющих сигналов обладает или не обладает электрической проводимостью, т.е. устройство, также как и каждый его управляющий сигнал принимают одно из двух возможных состояний. Т.о., устройство такого рода реализует функциональное преобразование, сопоставляя любому набору значений двоичных управляющих сигналов двоичный выходной сигнал. Каждая π-схема реализует функцию алгебры логики. Всей схеме ставится в соответствие булева переменная *y*, которая равна 0, если схема не проводит ток и 1 –если проводит, т.о *y* является функцией от переменных x_1, x_2, …, x_n, соответствующих контактам. Эта функция называется ***функцией проводимости*** схемы, а её таблица – ***условиями работы***.

Две схемы называются ***равносильными***, если при одинаковых наборах значений управляющих сигналов они имеют одинаковые значения проводимостей. Из двух равносильных схем более простой считается та, в которой меньше контактов. Булева алгебра и алгебра переключательных схем одинаково устроены (изоморфны). Этот изоморфизм может быть использован при решении задач следующих двух типов, которые условно назовем анализ схем и синтез схем.

Примеры решения задач

50) Найдите функции проводимости следующих схем:

Рисунок 2

Решение. Объекты на рисунке 2 a-d - π-схемы. Они имеют по два полюса a и b, соединенные непосредственно (рисунок 2,a) или не соединенные (рисунок 2, b). Эти две схемы не имеют управляющих переменных, им соответствуют две логических константы: 0 и 1. Схема на рисунке 2,c проводит ток только в одном случае, когда оба контакта замкнуты, что соответствует функции $x \wedge y$. Схема на рисунке 2,d проводит ток тогда, когда хотя бы один контакт замкнут, что соответствует функции $x \vee y$.

Задачи для самостоятельного решения

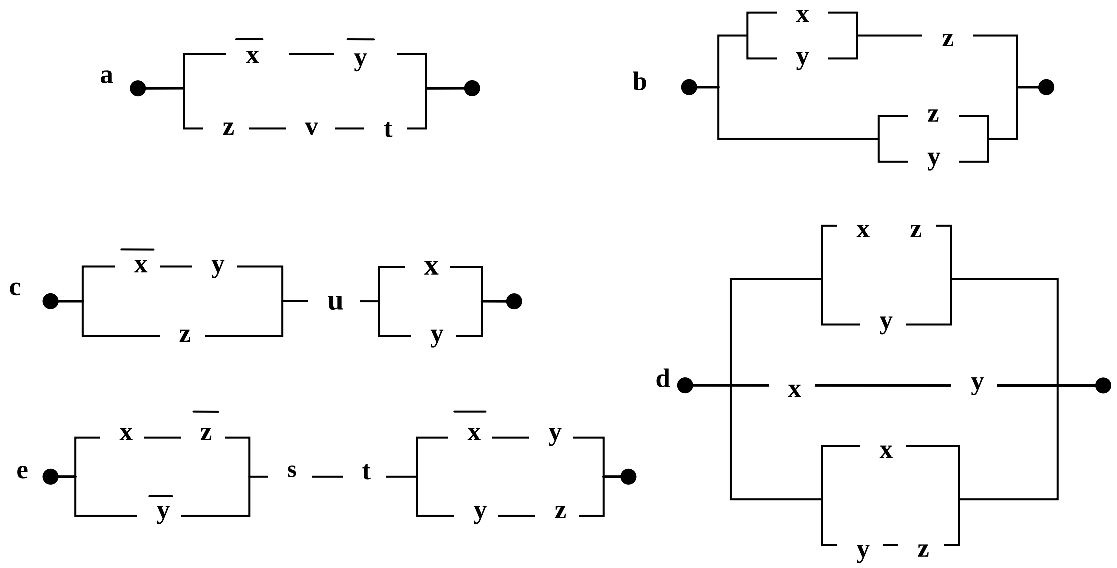


Рисунок 3

51) Найдите функции проводимости следующих π-схем:

52) Построить π-схемы с заданными условиями проводимости.

o. $\bar{x}(\bar{y}z \vee x \vee y)$;

p. $(x \to y) \to (\bar{x}(y \vee z))$.

q. $((\bar{x} \vee y)(yz \vee x)) \vee uz$;

r. $(x \to (y \to \bar{z})) \vee ((xy) \leftrightarrow z)$.

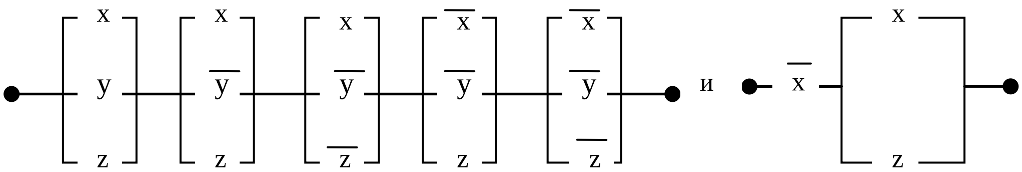


Рисунок 4

53) Проверить равносильность следующих схем (рисунок 4):

1.4.2 Задача анализа

Анализ схем заключается в следующем. Для данной схемы составляется соответствующая формула, которая на основании законов логики упрощается и для нее строится новая более простая схема, которая (в силу отмеченного выше изоморфизма алгебр) обладает теми же электрическими свойствами, что и исходная схема.

Примеры решения задач

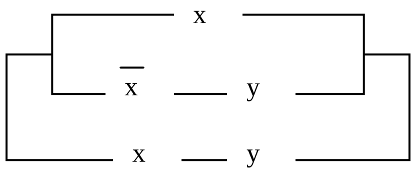


Рисунок 5

54) Минимизировать схему (рисунок 5):

Решение. Запишем соответствующую ей формулу и преобразуем ее равносильными преобразованиями.

$$(x \vee (\bar{x} \wedge y)) \vee (x \wedge y) \equiv x \vee \bar{x}y \vee xy \equiv x \vee xy \vee \bar{x}y \equiv x \vee \bar{x}y \equiv (x \vee \bar{x})(x \vee y) \equiv 1(x \vee y) \equiv x \vee y.$$

Таким образом, исходная схема равносильна изображенной на рисунке 6:

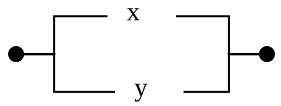


Рисунок6

Задачи для самостоятельного решения

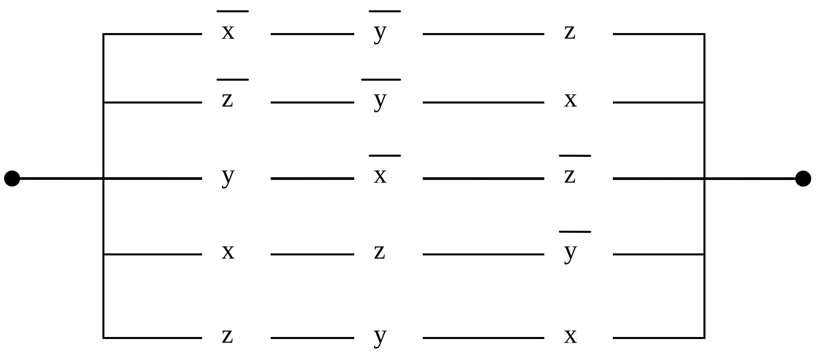
55) Построить наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным условиям работы:

а)f(0;0;0)=f(1;0;1)=1; б)*f(1;1;0)=f(0;0;0)=f(1;0;0)=1*.

56) Постройте наиболее простую РКС, реализующую формулы:

а) $(\bar{z} \to \bar{x}) \to (x \leftrightarrow y)$; б) $((x \to y) \to x) \to y$; в) $((x \vee y)\bar{z}) \vee (\bar{x}z \vee y)$.

57) Упростите релейно-контактную схему:



1.4.3 Задача синтеза

Синтез схем заключается в построении схем с заданными электрическими свойствами. Это делается так. На основании заданных электрических свойств строится формула алгебры высказываний, а по ней соответствующая схема.

Примеры решения задач

58) Актив студенческой группы, состоящий из трех человек, хочет применить электрическую схему для регистрации тайного голосования простым большинством голосов. Требуется построить такую схему, чтобы каждый голосующий "за" нажимал свою кнопку, а каждый голосующий "против" не нажимал соответствующей кнопки. В случае принятия решения должна загораться сигнальная лампочка.

Решение. Пусть x, y, z — обозначают соответственно высказывания "1 - ый за", "2 - ой за", "3 - ий за". Составим таблицу истинности формулы f(x,y,z), которой будет соответствовать искомая схема.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Т.к. в условии задачи задан принцип большинства, то сигнал должен загораться, если будет нажато две или три кнопки. В соответствии с этим, мы составим столбец значений функции: ставим 0, если в все значения аргументов нули или среди них есть одна единица, во всех остальных случаях ставим -1.

Выпишем функцию в виде СДНФ: $f = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz.$

И, наконец, составим схему, которая соответствует построенной формуле

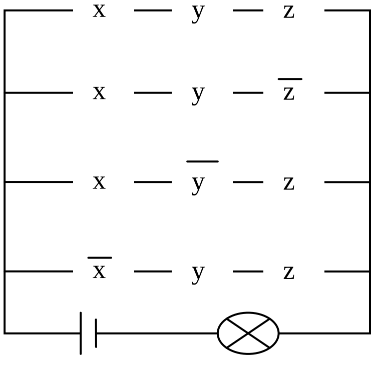


Рисунок7

(см. рисунок 7)

Полученную в этом примере схему можно упростить, осуществляя ее анализ. Равносильными преобразованиями упрощаем формулу:

$$f = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \equiv xy(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})(x \vee y)(x \vee z)(\bar{y} \vee \bar{x})(\bar{y} \vee y)(\bar{y} \vee z)(z \vee \bar{x})(z \vee y) \wedge$$
$$\wedge (z \vee z) \equiv xy \vee z(x \vee y)(x \vee z)(y \vee z)(\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv xy \vee z(x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv$$
$$\equiv xy \vee z(x \vee y)(\overline{xy}) \equiv (xy \vee z)(xy \vee x \vee y)(xy \vee \overline{xy}) \equiv (xy \vee z)(x \vee y).$$

Так как нам известен вектор значений функции, то упрощение можно было проводить, используя карты Карно:

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
x		1	1	1
$\bar{x}$			1	

Рассматривая выделенные контуры, получим минимальную ДНФ, $f = xz \vee xy \vee yz$. Преобразуем:
$f = xz \vee xy \vee yz = xy \vee z(x \vee y) = (xy \vee z)(xy \vee x \vee y) = (xy \vee z)(x \vee y)$.

Упрощенная схема приведена на рисунке 8

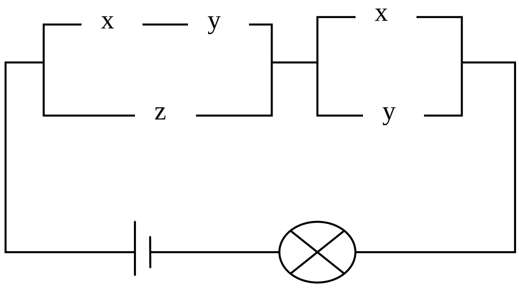


Рисунок 8

Задачи для самостоятельного решения

59) Постройте наиболее простую РКС с тремя переключателями, которая проводит ток тогда и только тогда, когда замыкается ровно 1 выключатель.

60) Постройте наиболее простую РКС с тремя переключателями, которая проводит ток тогда и только тогда, когда замыкается ровно два выключателя.

61) Постройте схему для машины голосования комитета из 4-х человек. Решение принято тогда и только тогда, когда не менее 3 членов комитета голосуют «за».

62) В распоряжении двух играющих имеется по одному пульту. На каждом установлен переключатель. Каждый игрок переводит выключатель в одно из положений «включено-выключено». Если оба переключателя находятся в одинаковом положении – выигрывает первый игрок, в противном случае – второй. Изобразить схему цепи, в которой бы при выигрыше первого игрока зажигалась бы лампочка h1, в другом случае – h2.

63) Комитет состоит из 4-х человек, один из которых председатель. Предложите схему цепи для «машин голосования». Каждый член комитета нажимает кнопку, если с решением согласен. Лампочка должна зажигаться, если за предложение подано большинство голосов или голоса разделились поровну, но «за» проголосовал председатель.

64) Жюри состоит из председателя и 4–х членов. Решение принято, если за него проголосовало не менее 3-х человек. Председатель имеет право «вето». Это значит, что решение не будет принято, если председатель проголосует «против». Построить схему цепи для машины голосования.

2 Элементы математической логики

2.1 Высказывания и операции над ними

2.1.1 Понятие высказывания

Основным объектом математической логики является высказывание. ***Высказыванием*** называется повествовательное предложение, про которое можно сказать истинно оно или ложно, но не то и другое вместе. Высказывание обозначают большими латинскими буквами: A, B, C…

Не являются высказываниями предложения, содержащие определения (геометрической фигурой называется множество точек плоскости), призывы (храните деньги в сберегательной кассе!), вопросы (который час?).

Содержание высказывания не существенно: лишь бы это предложение могло быть либо истинным, либо ложным. Если высказывание истинно, будем говорить, что его значение истинности – ***истина***; если ложно, то значение истинности – ***ложь***.

Примеры решения задач

65) Являются ли предложения высказываниями?

A: «Сегодня идет снег»;

B: «5>3»;

C: «3 делится на 8»;

D: « $10^{10^{10}}$ +1 – простое число»;

E: «Который час?»;

F: «Число 13 - несчастливое»;

G: «Существуют внеземные цивилизации»;

Решение. A: высказывание, может быть либо истинно, либо ложно;

B: всегда истинное высказывание;

C: всегда ложное высказывание;

D: высказывание, либо истинно, либо ложно, проверить нет возможности;

E: не высказывание, т.к. предложение не является повествовательным;

F: не высказывание, так как судить о его истинности или ложности невозможно;

G: высказывание, хотя в настоящее время неизвестно истинно оно или ложно.

Задачи для самостоятельного решения

66) Какие из следующих предложений являются высказываниями? Какие из высказываний истинные, а какие — ложные?

1) Москва — столица СССР.

2) Студент физико-математического факультета педагогического института.

3) Треугольник ABC подобен треугольнику A'B'C'.

4) Луна есть спутник Марса.

5) $2+\sqrt{3}-\sqrt[3]{5}$.

6) Кислород — газ.

7) Каша — вкусное блюдо.

8) Математика — интересный предмет.

9) Картины Пикассо слишком абстрактны.

10) Железо тяжелее свинца.

11) Да здравствуют музы!

12) Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны.

13) Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.

14) Сегодня плохая погода.

15) В романе А. С. Пушкина «Евгений Онегин» 136 245 букв.

16) Река Ангара впадает в озеро Байкал.

67) Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны?

s. «Сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°.»;

t. «У всех кошек есть хвост.»;

u. «Найдется целое число *x,* удовлетворяющее соотношению $x^2=2$.»;

v. «Существует простое четное число».

Примеры решения задач

68) Рассмотрим предложение: «Если 2·2=5, то 7делится на 8». Определите его истинность.

Решение. Обозначим высказывание «2·2=5» буквой А, а высказывание «7делится на 8» буквой В. Тогда исходное предложение С=А→В. А – ложно, В – ложно, а С – истинно.

69) Составное высказывание V: «Если в треугольнике медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний.» запишите символически, введя буквенные обозначения для простых их составляющих:

Решение. Выделим и следующим образом обозначим простейшие составляющие высказывания:

А: «В треугольнике медиана является высотой»;

В: «В треугольнике медиана является биссектрисой»;

С: «Этот треугольник равнобедренный»;

D: «Этот треугольник равносторонний».

Тогда данное высказывание символически записывается так: $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \rightarrow (\overline{C} \wedge \overline{D})$.

Задачи для самостоятельного решения

70) Что можно сказать об истинности составного высказывания: “либо луна делается из зеленого сыра, и Генрих VIII имел шесть жен, или не верно, что динозавры вымерли”?

71) Пусть P – высказывание “1=5”, Q – высказывание “3=7” и R – утверждение “4=4”. Покажите, что условные высказывания: “если P, то Q” и “если P, то R”, - оба истинны.

72) Установите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие — нет (объясните почему):

а) $2 < 0, 2 > 0$.

б) $6 < 9, 6 \geq 9$.

в) «Треугольник ABC прямоугольный», «Треугольник ABC тупоугольный».

г) «Натуральное число n четно», «Натуральное число n нечетно».

д) «Функция f нечетна», «Функция f четна».

е) «Все простые числа нечетны», «Все простые числа четны».

ж) «Все простые числа нечетны», «Существует простое четное число».

з) «Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле», «На Земле существует вид животных, не известный человеку».

и) «Существуют иррациональные числа», «Все числа рациональные».

73) Обозначим через P высказывание “логика - забава”, а через Q – “сегодня пятница”. Требуется выразить каждое из следующих составных высказываний в символьной форме.

w. Логика – не забава, и сегодня пятница.

x. Сегодня не пятница, да и логика - не забава.

y. Либо логика – забава, либо сегодня пятница.

74) Пусть P, Q, R определенные следующим образом высказывания:

P: “Я умираю от жажды.”

Q: “Мой стакан пуст.”

R: “Сейчас три часа.”

Запишите каждое из следующих высказываний как логическое выражение, включающее P, Q, R.

a. «Я умираю от жажды и мой стакан не пуст.»;
b. «Сейчас три часа, а я умираю от жажды.»;
c. «Если сейчас три часа, то я умираю от жажды.»;
d. «Если я умираю от жажды, то мой стакан пуст.»;
e. «Если я не умираю от жажды, то мой стакан не пуст.».

75) Обозначив через A высказывание: «розы красные», а через B – «фиалки синие», запишите каждое из следующих высказываний как логическое выражение:

a. «Если розы не красные, то фиалки не синие»;
b. «розы красные или фиалки не синие»;
c. «либо розы красные, либо фиалки синие (но не одновременно)»;

76) Пусть C= «Сегодня ясно», R= «Сегодня идет дождь», S= «Сегодня идет снег», Y= «Вчера было пасмурно». Перевести на русский язык следующие высказывания:

1. $C \Rightarrow \neg(R \vee S)$;
2. $Y \Leftrightarrow C$;
3. $Y \wedge (C \vee R)$;
4. $Y \Rightarrow R \vee C$.

77) Запишите высказывания на языке логики с помощью логических связок и определите их истинность.

1. Завтра не пойдет дождь.
2. Дважды два – четыре или Париж – столица Англии.
3. Сегодня четверг и Шекспир – это группа авторов.
4. Если функция f взаимно однозначна, то красный конь купается.
5. Если 2+2=5, то 3+3=10.
6. Если Аннушка пролила масло, то будет дорожное происшествие.
7. Если 7 – простое число, то 2x2=4.
8. Если 8 – простое число, то 2x2=4.

9. Если 8 – простое число, то 2х2=5.

10. Если 7 – простое число, то 2х2=5.

11. Треугольники подобны тогда и только тогда, когда их углы равны.

12. Луна живое существо тогда и только тогда, когда Маккартни поет колыбельную.

13. 7 – простое число тогда и только тогда, когда 2х2=4.

14. 8 – простое число тогда и только тогда, когда 2х2=5.

15. Если завтра будет дождь или снег, то я возьму зонт и надену пальто или свитер.

78) Запишите высказывания на языке логики с помощью логических связок и определите их истинность.

1. Идет дождь или кто-то не выключил душ.

2. Если вечером будет туман, то Сергей или останется дома, или должен будет взять зонт.

3. Петр сядет, и он или Сергей будет ждать.

4. Ни Север, ни Юг не победил в гражданской войне.

5. Если я устал или голоден, я не могу заниматься.

6. Если Маша встанет и пойдет в школу, она будет довольна, а если она не встанет, она не будет довольна.

7. Если мыши живут на Марсе, а мыши, читающие Толкиена, говорят по-английски, то мыши не живут на Марсе.

79) Пусть через А обозначено высказывание «9 делится на 3», а через В — высказывание «8 делится на 3». Определите значения истинности следующих высказываний:

$а). A \to B$; $б). B \to A$; $в). \overline{A} \to B$; $г). \overline{B} \to A$; $д). \overline{A} \to \overline{B}$; $е). \overline{B} \to \overline{A}$; $ж). A \to \overline{B}$; $з). B \to \overline{A}$; $и). A \leftrightarrow B$; $к). \overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$; $л). \overline{A} \leftrightarrow B$; $м). A \leftrightarrow \overline{B}$.

80) Найдите отрицание каждой из следующих формул:

$a)\ (X \wedge (Y \vee \overline{Z})) \vee (\overline{X} \wedge Y)$; $c)\ (((\overline{X} \wedge (\overline{Y} \vee Z)) \vee P) \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{R} \wedge (S \vee \overline{T}))$;

$b)\ ((\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee R) \wedge \overline{U} \wedge \overline{V} \wedge \overline{W}$; $d)\ ((X \wedge (\overline{Y} \vee (\overline{Z} \wedge P))) \vee \overline{Q}) \wedge R$.

2.1.2 Понятие формулы в математической логике

Условимся называть ***высказывательной переменной*** высказывание *p*, которое не выражается через другие посредством операций над высказываниями. Будем обозначать их малыми латинскими буквами. Символы И и Л будем называть ***логическими константами***.

Определим понятие ***формулы*** логики:

1) Все высказывательные переменные считаем формулами.

2) Логические константы считаем формулами.

3). Если А и В – формулы, то формулами считаем: $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \leftrightarrow B$ и $A \rightarrow B$.

При записи формул используются скобки, чтобы однозначно определить порядок выполнения операций. Для упрощения записи формул определим приоритет операций друг перед другом: отрицание, конъюнкция и дизъюнкция, импликация, эквиваленция.

Таблицей истинности формулы называется таблица, в которой каждому набору истинности высказывательных переменных, входящих в формулу, сопоставляется истинностное значение высказывания, заданного этой формулой. Такая таблица содержит 2^n строк, где n – количество высказывательных переменных.

Примеры решения задач

81) Построить таблицу истинности для формулы: $\varphi = p \vee q \rightarrow \overline{p}$

Решение.

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	φ
Л	Л	И	Л	И
Л	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л
И	И	Л	И	Л

Задачи для самостоятельного решения

82) Составить таблицы истинности для следующих высказываний:

1. $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$;
2. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \overline{P} \vee Q$;
3. $P \rightarrow \overline{(Q \vee R)}$;
4. $(P \rightarrow Q \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q)$;

5. $(A \to B \to C) \leftrightarrow (A \wedge B)$;

6. $A \to ((B \to A) \wedge \overline{B})$;

7. $(A \wedge \overline{B}) \to \overline{A})$.

2.1.3 Отношение равносильности логических формул

Две формулы логики высказываний А и В называются ***равносильными***, если при любых наборах истинностных значений переменных, входящих в эти формулы, они принимают одинаковые истинностные значения. Равносильные формулы обозначают $A \equiv B$.

Теорема. Имеют место следующие равносильности:

1. $A \vee B \equiv B \vee A$; $A \wedge B \equiv B \wedge A$ – коммутативный закон;
2. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$; $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ – ассоциативный закон;
3. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$; $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ - дистрибутивный;
4. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$; $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ - законы де Моргана;
5. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$; $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ – законы поглощения;
6. $A \vee A \equiv A$; $A \wedge A \equiv A$;
7. $A \vee \overline{A} \equiv И$; $A \wedge \overline{A} \equiv Л$;
8. $A \vee И \equiv И$; $A \wedge И \equiv A$;
9. $A \vee Л \equiv A$; $A \wedge Л \equiv Л$;
10. $\overline{\overline{A}} \equiv A$.

Легко заметить аналогию со свойствами операций над множествами. Так, высказываниям поставим в соответствие множества, отношению равносильности высказываний - отношение равенства множеств, операциям дизъюнкции, конъюнкции и отрицания – соответственно операции объединения, пересечения и дополнения, а тавтологии и противоречию – соответственно универсальное и пустое множества.

Как и для множеств, справедлив ***принцип двойственности***: если два высказывания логически равносильны и в них заменить дизъюнкцию на конъюнкцию, тавтологию на противоречие и наоборот, полученные высказывания также будут равносильны.

Теорема. Формулы A и B равносильны тогда и только тогда, когда формула A↔B является законом логики.

Следующая теорема дает еще один способ получения законов логики.

Теорема. Пусть в формулу A, являющуюся законом логики, входят высказывательные переменные p, q, …, r. Если в этой формуле заменить переменные любыми формулами B, C, …, D, то вновь полученная формула будет также законом логики.

Примеры решения задач

83) Убедиться, что $p \equiv p \wedge (q \vee \bar{q})$.

Решение. Доказательство всех равносильностей следует из таблиц истинности. Построим таблицу истинности:

p	q	$q \vee \bar{q}$.	$p \wedge (q \vee \bar{q})$
Л	Л	И	Л
Л	И	И	Л
И	Л	И	И
И	И	И	И

Сравним в таблице столбцы со значениями левой и правой частей заданной формулы. Они совпадают, следовательно, $p \equiv p \wedge (q \vee \bar{q})$.

84) Докажите эквивалентность функций: $f\ x,y,z\ = x \wedge\ x \vee z\ \wedge (y \vee z)$ и $f\ x,y,z\ =\ x \wedge z\ \vee\ x \wedge z$.

Решение. Для доказательства необходимо построить таблицы истинности этих функций, и если их двоичные наборы совпадут, то эквивалентность будет доказана.

x	y	z	$x \vee z$	$x \vee y$	$x \wedge (x \vee z)$	$x \wedge\ x \vee z\ \wedge (y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

x	y	z	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$x \wedge y \ \vee (x \wedge z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Получаем $F_1 = 00000111$ и $F_2 = 00000111$. Значит, функции эквивалентны.

Задачи для самостоятельного решения

85) Покажите, что высказывание $\overline{(P \wedge \overline{Q})}$ логически эквивалентно утверждению $\overline{P} \vee Q$.

86) Докажите следующие равносильности.

a). $P \vee \overline{P} \equiv 1;\ P \wedge \overline{P} \equiv 0;$

b). P∨(Q∧R) ≡(P∨Q)∧(P∨R);

c). $P \to Q \equiv \overline{P} \vee Q;$

d). P↔Q≡P→Q∧Q→P;

e). $\overline{(P \wedge Q)} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}.$

87) Применяя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к возможно более простой форме:

$a)\ \overline{(\overline{P} \vee Q)} \to ((P \vee Q) \to P);$

$b)\ \overline{(\overline{P} \wedge \overline{Q})} \vee ((P \to Q) \wedge P);$

$c)\ (P \to Q) \wedge (Q \to P) \wedge (P \vee Q);$

$d)\ (P \to Q) \wedge (Q \to \overline{P}) \wedge (R \to P);$

$e)\ (P \wedge R) \vee (P \wedge \overline{R}) \vee (Q \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R);$

$f)\ \overline{(P \to Q) \wedge (Q \to \overline{P})}.$

88) Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только операции отрицания и конъюнкции:

$a)\ (X \vee Y) \to (\overline{X} \to Z);$

$b)\ (\overline{X} \to Y) \vee \overline{(X \to Y)};$

$c)\ ((X \vee Y \vee Z) \to X) \vee Z;$

$d)\ ((X \to Y) \to Z) \to \overline{X};$

$e)\ (X \vee (Y \to Z)) \to X.$

89) Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только операции отрицания и дизъюнкции:

$a)$ $(X \to Y) \to (Y \wedge Z)$;

$b)$ $(\overline{X} \wedge \overline{Y}) \to (X \wedge Y)$;

$c)$ $((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee Z) \to (Z \wedge \overline{Y})$;

$d)$ $((X \to (Y \wedge Z)) \to (\overline{Y} \to \overline{X})) \to \overline{Y}$;

$e)$ $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$.

90) Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы отрицание было отнесено только к пропозициональным переменным и не стояло бы перед скобками:

$a)$ $\overline{((X \wedge (\overline{Y} \vee \overline{Z}))\vee Z}$;

$b)$ $\overline{((X \wedge Y) \vee \overline{Z}) \to \overline{X \wedge Z}}$;

$c)$ $\overline{U \to \overline{Z \wedge \overline{Y \wedge \overline{X}}}}$;

$d)$ $\overline{\overline{\overline{X \wedge Y} \to Y} \to (\overline{X} \wedge Z)}$;

$e)$ $\overline{\overline{X \vee (\overline{Y} \wedge Z) \vee \overline{Z}} \vee (Y \wedge Z)}$.

91) Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только операции $\wedge$, $\vee$, $\urcorner$:

$a)$ $((X \to Y) \wedge (Y \to X)) \to (X \vee Y)$;

$b)$ $((X \to Y) \wedge (Y \to \overline{X})) \to (Z \to X)$;

$c)$ $((X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y})) \to ((X \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y}))$;

$d)$ $((X \leftrightarrow \overline{Y}) \to Z) \to (X \leftrightarrow \overline{Z})$;

$e)$ $(X \to (Y \leftrightarrow Z)) \leftrightarrow ((X \to Y) \leftrightarrow Z)$.

2.1.4 Законы логики

Формула логики называется ***законом логики***, если она принимает значение «истина» при любых истинностных значениях входящих в нее высказывательных переменных.

Законы логики называются общезначимыми формулами или ***тавтологиями***.

Формула называется ***тождественно ложной или противоречием***, если ее отрицание тождественно истинная формула.

Примеры решения задач

92) Докажите тождественную истинность формулы $\overline{x} \to (x \to y)$.

Решение. Необходимо показать, что двоичный набор данной формулы F=1111.

Составим таблицу истинности:

x	y	$\overline{x}$	$x \to y$	$\overline{x} \to (x \to y)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

93) Дана формула: A=(p→q)→($\overline{q} \to \overline{p}$). Убедиться, что она является тавтологией.

Решение.

p	q	p→q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{q} \to \overline{p}$	A
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	И	И	Л	Л	И	И

Так как для любых наборов переменных значение формулы «истина», то формула является законом логики или тавтологией.

94) С помощью равносильных преобразований докажите, что следующая формула является тождественно ложной (противоречием): $(X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge ((X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Y))$.

Решение. а) Покажем, что эта формула равносильна 0 (ложному высказыванию):

$$(X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge ((X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Y)) \equiv (\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \wedge ((X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Y)) \equiv$$

$$\equiv ((\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \wedge (X \wedge \overline{Y})) \vee ((\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \wedge (\overline{X} \wedge Y)) \equiv$$

$$\equiv ((\overline{X} \vee Y) \wedge \overline{(\overline{X} \vee Y)} \wedge (X \vee \overline{Y})) \vee (\overline{(X \vee \overline{Y})} \wedge \overline{(X \vee \overline{Y})} \wedge (\overline{X} \vee Y)) \equiv$$

$$\equiv (0 \wedge (X \vee \overline{Y})) \vee (0 \wedge (\overline{X} \vee Y)) \Leftrightarrow 0 \vee 0 = 0$$

Задачи для самостоятельного решения

95) С помощью равносильных преобразований докажите, что следующие формулы являются тождественно ложными (противоречиями):

$a)$ $((X \wedge \overline{Y}) \to (\overline{X} \vee (X \wedge Y))) \wedge ((\overline{X} \vee (X \wedge Y)) \to (X \wedge \overline{Y}))$;

$b)$ $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to \overline{(X \to Z)}$;

$c)$ $(X \to Y) \wedge (X \to \overline{Y}) \wedge X$;

$d)$ $((X \wedge \overline{Y}) \vee (X \wedge \overline{Z})) \leftrightarrow ((X \to Y) \wedge (X \to Z))$.

96) Составив таблицы истинности, докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

1). $P \vee \overline{P}$ (*закон исключенного третьего*);

2). $\overline{(P \wedge \overline{P})}$ (*закон отрицания противоречия*);

3). $\overline{\overline{P}} \leftrightarrow P$ (*закон двойногоотрицания*);

4). $P \to P$ (*закон тождества*);

5). $(P \to Q) \leftrightarrow (\overline{P} \to \overline{Q})$ (*законконтрапозиции*);

6). $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$ (*правилоцепногозаключения*);

7). $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\overline{P} \leftrightarrow \overline{Q})$ (*закон противоположности*);

8).$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$ (*коммутативность конъюнкции*);

9). $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$ (*коммутативность дизъюнкции*);

10). $((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$ (*ассоциативность конъюнкции*);

11). $((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$ (*ассоциативность дизъюнкции*);

12). $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ (*дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции*);

13). $(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ (*дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции*);

14). $(P \wedge P) \leftrightarrow P$ (*идемпотентность конъюнкции*);

15). $(P \vee P) \leftrightarrow P$ (*идемпотентность дизъюнкции*);

16). $(P \to Q) \leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$;

17). $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$;

18). $(P \wedge (Q \vee P)) \leftrightarrow P$ (*первый закон поглощения*);

19). $(P \vee (Q \wedge P)) \leftrightarrow P$ (*второй законе поглощения*);

20). $\overline{(P \wedge Q)} \leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$ (*первый закон де Моргана*);

21). $\overline{(P \vee Q)} \leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$ (*второй закон де Моргана*);

22). $(P \vee Q) \leftrightarrow (\overline{P} \to Q)$.

23). $(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$;

24). $P \to (Q \to (P \wedge Q))$;

25). $(P \to (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (P \to R))$;

26). $((P \to Q) \wedge (P \to \overline{Q})) \to \overline{P}$;

27). $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$;

28). $(P \to Q) \to ((P \to \overline{Q}) \to \overline{P})$;

29). $(P \to Q) \to ((Q \to P) \to (P \leftrightarrow Q))$;

30). $(P \to R) \to ((P \vee Q) \to (R \vee Q))$;

31). $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$;

32). $(F_1 \to (F_2 \to G)) \leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2) \to G)$;

33). $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$.

2.1.5 Правило логического вывода

Задача математической логики – дать принцип рассуждения, т.е. теорию вывода, критерии для решения механическим путем вопроса о том, можно ли некоторую цепочку рассуждений считать правильной. При этом важна только форма высказываний, составляющих цепочку, а не их содержание и смысл.

Высказывание В называется ***логическим следствием*** высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_m$, если В истинно всякий раз, когда каждое A_i, $i=1, 2, \ldots m$, истинно. Это записывается так:

$A_1, A_2, \ldots, A_m \models B.$

Высказывания A_1, A_2, …, A_m называются ***посылками*** логического следствия, а высказывание В – ***заключением***.

Большинство теорем в математике имеют именно такую структуру. Доказать теорему – значит доказать, что заключение действительно является логическим следствием посылок. Самый простой способ – составить совместную таблицу истинности посылок и заключения, Найдите в ней строки, в которых все посылки имеют значение «истина», и убедиться, что заключение в этих строках также имеет значение «истина».

Примеры решения задач

97) Покажите, что $A, C, A \wedge B \rightarrow \overline{C} \models \overline{B}$.

Решение. Для доказательства построим таблицу истинности:

A	B	C	$A \wedge B \rightarrow \overline{C}$	$\overline{B}$
Л	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	Л
Л	И	И	И	Л
И	Л	Л	И	И
И	Л	**И**	**И**	**И**
И	И	Л	И	Л
И	И	И	Л	Л

В таблице есть только одна строка (выделена), в которой все посылки принимают значение «истина». Видно, что заключение при этом также истинно. Таким образом, логическое следствие доказано.

98) Решите логическую задачу.

Один из трех братьев Витя, Толя, Коля разбил окно. В разговоре участвуют еще двое братьев — Андрей и Дима.

—Это мог сделать только или Витя, или Толя, — сказал Андрей.

— Я окно не разбивал, — возразил Витя, — и Коля тоже.

— Вы оба говорите неправду, — заявил Толя.

— Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой сказал неправду, — возразил Дима.

— Ты, Дима, неправ, — вмешался Коля.

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что трое братьев сказали правду. Кто разбил окно?

Решение. Введем обозначения для высказываний:

В: «Витя разбил окно»; .

Т: «Толя разбил окно»;

К: «Коля разбил окно».

Тогда высказывания братьев можно записать в символической форме следующим образом:

$$A = B \vee T;$$

$$V = \overline{B} \wedge \overline{K};$$

$$L = \overline{A} \wedge \overline{V} = \overline{B \vee T} \wedge \overline{\overline{B} \wedge \overline{K}} \equiv \overline{B} \wedge \overline{T} \wedge (B \vee K) \equiv \overline{T} \wedge ((\overline{B} \wedge B) \vee (\overline{B} \wedge K)) \equiv \overline{T} \wedge \overline{B} \wedge K;$$

$$D = (A \wedge \overline{V}) \vee (\overline{A} \wedge V) = ((B \vee T) \wedge \overline{\overline{B} \wedge \overline{K}}) \vee (\overline{B \vee T} \wedge (\overline{B} \wedge \overline{K})) \equiv ((B \vee T) \wedge (B \vee K)) \vee$$
$$\vee (\overline{B} \wedge \overline{T} \wedge \overline{K}) \equiv B \vee \underbrace{(T \wedge K)}_{0} \vee (\overline{B} \wedge \overline{T} \wedge \overline{K}) \equiv (B \vee \overline{B}) \wedge (B \vee \overline{T}) \wedge (B \vee \overline{K}) \equiv B \vee (\overline{T} \wedge \overline{K});$$

$$M = \overline{D} = \overline{B \vee (\overline{T} \wedge \overline{K})} \equiv \overline{B} \wedge (T \vee K).$$

Образуем из высказываний A, V, L, D, M всевозможные конъюнкции по три высказывания: $A \wedge V \wedge L,\ A \wedge V \wedge D,\ A \wedge L \wedge D,\ A \wedge L \wedge M,\ A \wedge D \wedge M,$ $V \wedge L \wedge D,\ V \wedge L \wedge M,\ V \wedge D \wedge M,\ L \wedge D \wedge M$. Поскольку из высказываний A, V, L, D, M только три истинны, то из десяти конъюнкций истинна лишь одна. Проверьте самостоятельно, что конъюнкции $A \wedge L, V \wedge L\ u\ L \wedge D$ ложны, а поэтому восемь из перечисленных конъюнкций ложны. Остаются две конъюнкции $A \wedge V \wedge D\ u\ A \wedge V \wedge M$. Рассмотрим их:

$$A \wedge V \wedge D = (B \vee T) \wedge \overline{B} \wedge \overline{M} \wedge (B \vee (\overline{T} \wedge \overline{M})) \equiv (B \vee (T \wedge \overline{T} \wedge \overline{M})) \wedge \overline{B} \wedge \overline{M} \equiv B \wedge \overline{B} \wedge \overline{M} \equiv 0;$$

$$A \wedge V \wedge M = (B \vee T) \wedge \overline{B} \wedge \overline{M} \wedge (T \vee M) \equiv T \wedge \overline{B} \wedge \overline{M} \wedge T \equiv T \wedge \overline{B} \wedge \overline{M}.$$

Итак, заключаем, что истинно высказывание $T \wedge \overline{B} \wedge \overline{M}$, т. е. истинны высказывания Т, $\overline{B}$, $\overline{M}$. Следовательно, окно разбил Толя.

Задачи для самостоятельного решения

99) Докажите, что заключение действительно является логическим следствием посылок:

1. A, $A\wedge(C\leftrightarrow D)\rightarrow\overline{B}$, B $\models \overline{C \leftrightarrow D}$.

2. Пусть x – делится на 5 и на 4. Известно, что нечетные числа, кратные 5, не делятся на 4. Значит x – четно.

3. $A\rightarrow B$, $\overline{B \vee C} \models \overline{A}$.

4. Пусть Δ ABC – равнобедренный и равносторонний. Если равнобедренный треугольник является прямоугольным, то он - не равносторонний. Значит, Δ ABC не прямоугольный.

100) Правильно ли выполнено умозаключение?

Про некоторое число известно, что оно делится на 6 или на 15. Но если это число делится на 15, то оно делится на 5. А если число делится на 6, то оно делится на 2. Если же это число делится и на 2, и на 5, то оно делится и на 10. Значит, это число делится на 10.

Решите «логические» задачи:

101) На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и второй, но не верно, что если изучал третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал логику?

102) При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания: математик просил поставить ему или первый, или второй урок; историк—или первый, или третий; учитель литературы — или второй, или третий. Как составить расписание уроков, чтобы учесть все пожелания?

103) Андрей, Ваня и Саша собрались в поход. Учитель, хорошо знавший этих ребят, высказал следующие предположения:

a) Андрей пойдет в поход только тогда, когда пойдут Ваня и Саша;

b) Андрей и Саша друзья, а это значит, что они пойдут вместе или же оба останутся дома;

c) чтобы Саша пошел в поход, необходимо, чтобы пошел Ваня.

Когда ребята пошли в поход, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два. Кто из названных ребят пошел в поход?

104) Некий остров населен жителями, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжет и которые отвечают на вопросы только посредством «да» или «нет». К развилке дорог, из которых одна ведет в столицу острова, а другая туда не приводит, подходит путешественник. Никаких знаков, указывающих, какая из дорог куда ведет, у развилки нет. Но здесь стоит местный житель, некто N. Какой вопрос, предусматривающий ответ «да» или «нет», должен задать ему путешественник, чтобы определить, какая дорога ведет в столицу острова?

Вопросы для повторения

1. Понятия высказывание, истинностное значение высказывания. Примеры.

2. Операции над высказываниями. Приоритет выполнения операций. Определения. Примеры.

3. Свойства операций над высказываниями. Примеры их применения.

4. Понятия формула, равносильные формулы. Примеры. Способы доказательства равносильности формул.

5. Понятия тавтология и противоречие. Примеры.

6. Правило логического вывода. Пример.

2.2 Предикаты

2.2.1 Понятие предиката

В математике и других науках наряду с высказываниями приходится иметь дело с различными утверждениями (предложениями), зависящими от одной или нескольких переменных. В логике их называют ***предикатами***.

Уравнения и неравенства также являются такого рода предложениями.

Предикаты будем обозначать $A(n)$, $B(x)$, $C(x,y)$ и т.д. Для каждого предложения должно быть указано, на каком множестве оно рассматривается или, как еще говорят, на каком множестве оно определено или задано. $A(n)$, $B(x)$ будем называть ***одноместными предикатами***, а $C(x,y)$ – ***двуместным***.

Предложение $A(x)$, $x\in M$, не является высказыванием, если оно рассматривается на всем множестве M. Но если $A(x)$ рассмотреть при некотором конкретном значении $x=x_0$, то утверждение $A(x_0)$ будет либо истинно, либо ложно, т.е. будет высказыванием.

Множество M, На котором задано предложение $A(x)$, можно разбить на два подмножества. Одно содержит те элементы M, для которых $A(x)$ истинно. Оно называется ***множеством истинности*** предиката $A(x)$. Будем обозначать его M^+. Другое подмножество содержит те и только те элементы M, для которых $A(x)$ ложно. Обозначим его M^- и очевидно, что $M^+\cup M^-=M$, а $M^+\cap M^-=\varnothing$.

Примеры решения задач

105) Приведите примеры предикатов.

Решение.

1. Неравенство $x-2>0$ можно рассматривать как предложение, зависящее от переменной x. Истинность или ложность этого предложения зависит от того, какое именно значение переменной x выбрать. Если $x=3$, то предложение истинно, если $x=0$, то ложно.

2. Уравнение $x+y=1$ является предложением, зависящим от двух переменных x и y. При $x=y=½$ предложение $x+y=1$ истинно, при $x=y=0$ оно, очевидно, ложно.

106) Дан предикат A(x): «$x^2-x<0$». Найдите его множество истинности.

Решение. M=R, $M^+=(0;1)$, $M^-=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

107) Какие из следующих выражений являются предикатами, а какие высказываниями? Определите значение истинности там, где это возможно.

1)	$x\,\vdots\,5$;	2)	x^2+2x+4;
3)	$x^2+2x+4=0$;	4)	Крокодилы живут в Африке;
5)	Красота!	6)	Река x впадает в озеро Байкал;
7)	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$;	8)	ctg 45°=1;
9)	$(\forall x)\ (\exists y)\ (x^2+y^2=1)$;	10)	Который час?

108) Найдите множество истинности предиката «x делится на 3», заданного на указанных множествах:

a. M={1,2,3,4,5,6,7,8,9};

b. M={3,6,9,12}.

109) Изобразите множество истинности предикатов:

1. $x^2\le y$;
2. $2x+6y<13$;
3. $xy=0$;
4. $\frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$;
5. $|x>5|\to|x<6|$.
6. $|x|=|y|$;
7. $x^2+y^2-4x+6y+12\le 0$;
8. $y=|\sin x|$;
9. $(|x|<3)\vee(|x|\ge 4)$;
10. $(|x|<3)\wedge(|x|\ge 4)$.

110) Найдите множества истинности предикатов:

c. $x-2>0$;

d. $x+y=1$;

e. $x^2+y^2=9$;

f. $|x|<6$;

g. $|x|<-3$;

h. $|x-3|<5$;

i. $x^2-2x-8 \le 0$.

j. $(|x-1| \ge 3) \wedge (|x+1| \ge 3)$;

k. $(x \ge 5) \to (|x| \le 10)$;

l. $(x+3)(4-x)>0$.

111) Найдите множества истинности предикатов: $x^2+y^2 \le 4$;

m. $|y|>12$;

n. $|x+2|>3$;

o. $|x+4|>3$;

p. $x^2+2x+1 \ge 0$;

q. $x^2+y^2+z^2-9 \le 0$.

r. $|3x+18|<6$;

s. $\sin x>0$;

t. $\frac{x-1}{7-x} \le 0$;

u. $\frac{x^2+1}{x^2-1} \le 0$;

v. $(x^2+y^2=1) \wedge (|x|<1)$.

112) На множестве всех действительных чисел даны два предиката:

1. A(x): уравнение $t+\frac{1}{t}=x$ имеет решение (относительно переменной t),

2. B(x): равенство $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$ верно.

Найдите множества истинности для предикатов *A(x), B(x), A(x)* $\cup$*B(x), A(x)*$\cap$*B(x)*.

2.2.2 Операции над предикатами

Два предложения *A(x)* и *B(x)*, заданные на одном и том же множестве, называются ***равносильными***, если их множества истинности совпадают.

Для предикатов, как и для высказываний, можно ввести логические операции. Отрицанием предиката *A(x),* $x \in M$, называется предикат, определенный на том же множестве *M* и обращающийся в истинное высказывание для тех и только тех значений *x*, для которых *A(x)* ложно.

Отрицание A(x) обозначается $\overline{A(x)}$. Ясно, что если M^+ множество истинности A(x), то множеством истинности $\overline{A(x)}$ будет M^-.

Аналогично определяются и другие логические операции.

Примеры решения задач

113) Даны два предиката *A(x): x-2>0, B(x): x+2 ≥0*, зависящие от переменной x, $x \in R$. В чем заключаются предикаты $A(x) \cup B(x)$ и $A(x) \to B(x)$?

Решение. Предикат $A(x) \cup B(x)$ заключается в том, что верно по крайней мере одно из двух данных неравенств. Очевидно, что множеством истинности $A(x) \cup B(x)$ является промежуток [-2;+∞).

Для импликации $A(x) \to B(x)$ $M^+ = R$.

114) Являются ли равносильными следующие предикаты?

Решение. Предикаты «$x^2(x-1)>0$» и «x-1>0» равносильны, так как множеством истинности каждого из них является промежуток (1;+∞).

Задачи для самостоятельного решения

115) Даны два предложения: *A(x): x-2>0, B(x): x+2≥0*, зависящие от переменной x, $x \in R$. В чем заключаются предикаты

a) $A(x) \cup B(x)$; b) $A(x) \to B(x)$.

116) Даны два предложения: *A(x): x-2>0, B(x): x+2≥0*, зависящие от переменной x, $x \in R$. В чем заключаются предикаты

a) $A(x) \cap B(x)$;

b) $B(x) \to A(x)$;

c) $A(x) \cap \overline{B(x)}$;

d) $\overline{B(x)} \to \overline{A(x)}$.

117) Являются ли предикаты равносильными?

1. x-1>0 и -2x<-2;
2. $x^2-2x-8 \le 0$ и $|x-1| \le 3$;
3. $x^2+2x-8 \ge 0$ и $|x+1|>3$;
4. $x^2+y^2=1$ и $y = \sqrt{1-x^2}$.

2.2.3 Кванторы

С предложениями, зависящими от переменной, связаны два вида часто встречающихся утверждений.

1. Предикат $A(x),\ x \in M$, обращается в истинное высказывание ***для всех*** элементов множества M.

2. Предикат $A(x),\ x \in M$, обращается в истинное высказывание ***хотя бы для одного*** элемента множества M, другими словами, существует элемент $x_0 \in M$, для которого $A(x_0)$ – истинное высказывание.

В математике принято записывать такие утверждения кратко, используя для этого специальные знаки: квантор общности $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова All - все) и квантор существования $\exists$ (перевернутая первая буква английского слова Exists - существует).

Используя кванторы общности и существования, утверждения 1 и 2 можно записать следующим образом:

1. $(\forall x)A(x)$, 2. $(\exists x)A(x),\ x \in M.$

$\neg, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

В этих формулах подформула A называется областью действия квантора по x. Обычно связки и кванторы упорядочивают по приоритету следующим образом: Лишние скобки при этом опускают. Переменные, к которым относится квантор, называются ***связанными***, остальные переменные – ***свободными***.

Формула, не содержащая свободных вхождений переменных, называется ***замкнутой***.

Необходимо подчеркнуть, что для того, чтобы опровергнуть высказывание вида $(\forall x)A(x),\ x \in M$, достаточно указать только один элемент $x \in M$ ***(контрпример),*** для которого A(x) ложно.

Примеры решения задач

118) Дан предикат $A(x)$: $x^2>0,\ x \in R$. Оцените истинность высказываний $(\forall x)A(x)$ *и* $(\exists x)A(x)$.

Решение. Высказывание $(\forall x)A(x)$ ложно, т.к. при x=0 высказывание ложно.А высказывание $(\exists x)A(x)$ истинно, например, x=5.

Задачи для самостоятельного решения

119) Обозначим через *x* слово «кошка», а через *P(x)* предикат «у *x* есть усы». Запишите каждое из высказываний в символьной форме:

w. «усы есть у всех кошек»;

x. «найдется кошка без усов»;

y. «не бывает кошек с усами».

120) Обозначим через *P(x)* предикат «*x* – целое число и $x^2=16$». Выразите словами высказывание: $\exists x : P(x)$ и определите его истинностное значение.

121) Пусть *P(x)* предикат «*x* – вещественное число и $x^2+1=0$». Выразите словами высказывание: $\exists x : P(x)$ и определите его истинностное значение.

122) Пусть A(x) означает «x высокий», а B(x) – «x - толстый», где x – какой-то человек. Прочитайте высказывание $\forall x\,(A(x)\ и\ B(x))$. Найдите его отрицание среди следующих утверждений:

a) «найдется некто короткий и толстый.»;

b) «нет никого высокого и худого.»;

c) «найдется некто короткий или худой.».

123) Предположим, что x и y – вещественные числа, а B(x,y) обозначает предикат «x+y=0». Выразите каждое из высказываний словами и определите их истинность.

a) $\forall x\, \exists y : B(x, y)$; b) $\exists y : \forall x\, B(x, y)$.

124) Определите истинность высказываний:

a) $(\forall x)\ (\sin x>3)$, $x\in R$;

b) $(\forall x)\ (x^2+x+1>0)$, $x\in R$;

c) $(\exists x)\ (x^2=11)$, $x\in Q$;

d) $(\exists x) \left(\dfrac{x+5}{x^2+4}<0\right)$, $x\in R$;

e) $(\forall x)\ (2\sin 3y>-3)$, $(x,y)\in R^2$;

f) $(\forall x)\ (\exists y)\ (x+y=7)$, $(x,y)\in R^2$;

g) $(\exists x)\ (\forall y)\ (x+y=7),\ (x,y)\in R^2$;

h) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x+y=7),\ (x,y)\in R^2$;

i) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x+y=7),\ (x,y)\in R^2$;

j) $(\exists x)\ (\forall y)\ (xy>0),\ (x,y)\in R^2$.

125) Определите истинность высказываний:

1. $(\forall x)\ (\cos x<1),\ x\in R$;
2. $(\exists x)\ (x^2>x^8),\ x\in R$;
3. $(\forall x)\ (\exists y)\ (xy>0),\ (x,y)\in R^2$;
4. $(\exists x)\ (\forall y)\ (xy\geq 0),\ (x,y)\in R^2$;
5. $(\forall x)\ (\forall y)\ (xy>0),\ (x,y)\in R^2$;
6. $(\exists x)\ (\exists y)\ (xy<0),\ (x,y)\in R^2$;
7. $(\exists x)\ (\forall y)\ (xy\leq 0),\ (x,y)\in R^2$;
8. $(\exists x)\ (\forall y)\ (xy\geq 0),\ (x,y)\in R^2$.

126) Определите истинность следующих высказываний:

1) $(\forall b)\ (\exists a)\ (\forall x)\ (x^2+ax+b>0)$;
2) $(\exists x)\ (x^2-4x+3=0 \wedge x<0)$;
3) $(\exists x)\ (x>0 \wedge \sin x>0)$;
4) $(\forall x)\ ((x>0)\rightarrow(\sin x>0))$;
5) $(\exists y)\ (\forall x)\ (x\geq y)$;
6) $(\exists y)\ (\forall x)\ (y=x^2)$;
7) $(\exists b)\ (\forall a)\ (\exists x)\ (x^2+ax+b=0)$;
8) $(\exists x)\ (x>0 \wedge x^2-3x+2<0)$;
9) $(\forall x)\ (100x^2>27x^3)$;
10) $(\forall x)\ (\exists y)\ (x\geq y)$;
11) $(\forall x)\ (\exists y)\ (y=x^2)$;
12) $(\exists y)\ (\forall x)\ (x^2>y)$.

127) Определите значение истинности следующих высказываний:

1. $(\exists x)\ (x>0 \wedge x^2-3x+2<0)$;
2. $(\forall x)\ (x^2-4x+3<0 \vee x=3)$;
3. $(\forall x)\ ((x^2>1) \rightarrow (x>1))$;
4. $(\forall x)\ (\exists y)\ (x \,\vdots\, y)$;
5. $(\exists y)\ (\forall x)\ (x \,\vdots\, y)$.

128) Даны предикаты на множестве всех четырехугольников плоскости:

$P_1(x)$: “четырехугольник является параллелограммом”;

$P_2(x)$: “четырехугольник является ромбом”;

$P_3(x)$: “четырехугольник является квадратом”;

$P_4(x)$: “четырехугольник является прямоугольником”.

Найдите значения утверждений: a). $(\forall x)\ (P_2(x) \to P_1(x))$; b). $(\forall x)\ (P_3(x) \to P_2(x))$;   c). $(\forall x)\ (P_3(x) \to P_4(x))$.

2.2.4 Формулы логики предикатов

Формулой называется выражение (слово), составленное из переменных предикатов с помощью логических операций и кванторов и обращающееся в конкретный предикат при подстановке вместо переменных конкретных предикатов.

Формула исчисления предикатов называется ***тавтологией*** если при подстановке вместо переменных предикатов любых конкретных предикатов она всегда обращается в тождественно истинный предикат.

Значение формулы логики предикатов определено тогда, когда задана какая-то интерпретация входящих в нее символов.

При заданной интерпретации считают, что переменные пробегают множество М, а логические символы и символы кванторов имеют свой обычный смысл.

Говорят, что формулы *Z* и *F* ***равносильны в данной интерпретации***, если они принимают одинаковые значения на любом наборе значений свободных переменных.

Рассмотрим правила перехода от одних формул к другим, им равносильным (во всех интерпретациях).

1. **Перенос квантора через отрицание.** Пусть *Ф(x)* — формула, содержащая свободную переменную *x*. Тогда справедливы равносильности:

$$\overline{(\forall x)}\Phi(x) \equiv (\exists x)\overline{\Phi(x)},$$
$$\overline{(\exists x)}\Phi(x) \equiv (\forall x)\overline{\Phi}(\bar{x}).$$

2. **Вынос квантора за скобки**. Пусть *Ф(x)* — формула, содержащая свободную переменную *x*, а формула *B* не содержит переменной *x*; *Ф(x)* и *B* удовлетворяют третьему правилу создания формул. Тогда справедливы равносильности:

$$(\exists x)(\Phi(x) \wedge B) \equiv (\exists x)\Phi(x) \wedge B; \quad (\forall x)(\Phi(x) \wedge B) \equiv (\forall x)\Phi(x) \wedge B;$$
$$(\exists x)(\Phi(x) \vee B) \equiv (\forall x)\Phi(x) \vee B; \quad (\forall x)(\Phi(x) \vee B) \equiv (\forall x)\Phi(x) \vee B.$$

3.**Перестановка одноименных кванторов**. Имеем

$$(\exists x)(\exists y)\Phi(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)\Phi(x,y);$$
$$(\forall x)(\forall y)\Phi(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)\Phi(x,y).$$

4.**Переименование связанных переменных.** Заменяя связанную переменную формулы Φ другой переменной, не входящей в формулу, в кванторе и всюду в области действия квантора получим формулу, равносильную Φ.

Примеры решения задач

129) Дана формула $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(x,y))$. Является ли она замкнутой?

Решение. Рассмотрим формулу $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(x,y))$ и её подформулы. В подформулу переменная x входит свободно, а оба вхождения переменной y связаны (квантором существования). Таким образом, эта подформула не замкнута. С другой стороны, то же самое вхождение переменной x в подформулу $Q(x,y)$ является связанным вхождением в исходной формуле. В ней все вхождения всех переменных связаны, а потому формула замкнута.

130) Дана формула $(\exists x_1)(\forall x_2)A_1(x_1,x_2) \wedge A_2(x_1,x_2)$ Является ли она замкнутой?

Решение. Выражение не является формулой.

Задачи для самостоятельного решения

131) Какие из следующих формул тождественно истинны?

a) $\forall x\,(\Phi(x) \to P(x)) \to (\forall x\,\Phi(x) \to \forall x\,P(x));$

b) $\forall x\,(\Phi(x) \to P(x)) \to (\exists x\,\Phi(x) \to \exists x\,P(x));$

c) $\exists x\,(\Phi(x) \to P(x)) \to (\forall x\,\Phi(x) \to \forall x\,P(x));$

d) $\exists x\,(\Phi(x) \to P(x)) \to (\exists x\,\Phi(x) \to \exists x\,P(x));$

e) $\forall x\,(\Phi(x) \to P(x)) \leftrightarrow (\exists x\,\Phi(x) \to \forall x\,P(x)).$

Вопросы для повторения

1. Понятие предикат. Операции над предикатами, их определения. Примеры.
2. Понятие множество истинности предиката. Примеры.
3. Виды кванторов. Определения. Примеры.

Тест по теме «Булева функция»

1) Булевой функцией от n аргументов называется отображение вида

а) $f:\{0,1,2,...,n-1\}^2 \to \{0,1,2,...,n-1\}$ б) $f:R \to R$ в) $f:R^n \to R$

г) $f:N_0 \to \{0,1\}$ д) $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

2) Таблица значений булевой функции от n аргументов содержит … строк.

а) 2 б) n в) 2n г) 2^n д) n^2

3) Число различных булевых функций от n аргументов равно …

а) n^2 б) n^{n^2} в) 2^{n^n} г) 2^n д) 2^{2^n}

4) Таблица значений булевой функции от 3 аргументов содержит … строк.

а) 3 б) 9 в) 8 г) 6 д) 27

5) Число различных булевых функций от 2 аргументов равно …

а) 5 б) 4 в) 8 г) 16 д) 32

6) Укажите таблицу значений импликации

7) Укажите таблицу значений суммы Жегалкина

8) Укажите таблицу значений дизъюнкции

9) Укажите таблицу значений штриха Шеффера

10) Укажите таблицу значений стрелки Пирса

11) Укажите верные тождества:

а) $x \cdot x = x$; б) $(x+y)+z=x+(y+z)$; в) $x \vee y = y \vee x$ г) $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (y \vee z)$ д) $(x \cdot y) \vee x = x$

12) Выберите правильный вид последнего столбца таблицы значений функции (x|y)|z (порядок значений соответствует лексикографическому порядку на наборах аргументов).

а) $(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^т$ б) $(1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)^т$ в) $(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 10)^т$ г) $(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)^т$

13) Функция $f(x) = x'$ принадлежит следующим замкнутым классам …

а) T_0 б) T_1 в) T_S г) T_L д) T_M

14) Функция $f(x,y) = x \vee y$ принадлежит следующим замкнутым классам

а) T_0 б) T_1 в) T_S г) T_L д) T_M

15) Функция $f(x,y) = x \to y$ принадлежит следующим замкнутым классам

а) T_0 б) T_1 в) T_S г) T_L д) T_M

16) Функция $f(x,y) = x|y$ принадлежит следующим замкнутым классам …

а) T_0 б) T_1 в) T_S г) T_L д) T_M е) она не принадлежит ни одному из них

17) Многочлен Жегалкина функции $f(x,y) = x \vee y$ имеет вид …

а) $xy+x+y$ б) $xy+x+1$ в) $xy+y+1$ г) $x+1$ д) $y+1$ е) $xy+x$

18) Если вектор значений функции $f(x,y,z)$ имеет вид (01100110), то вектор значений двойственной ей функции $f^*(x,y,z)$ имеет вид …

а) (01100110) б) (11111111) в) (00000000) г) (10011001)

19) Среди приведенных систем булевых функций являются полными …

а) $\{x \to y, x'\}$ б) $\{0, 1\}$ в) $\{x, x'\}$ г) $\{x|y\}$ д) $\{x \downarrow y\}$

20) СДНФ функции, заданной вектором значений (01000010), имеет вид

а) $x'y'z \vee xyz'$ б) $x' \vee y' \vee z \vee x \vee y \vee z'$ в) $(x' \vee y' \vee z) \cdot (x \vee y \vee z')$

г) $x'y'z' \vee xyz' \vee x'yz' \vee xyz \vee xyz' \vee xyz'$ д) нет правильного ответа

Тест по теме «Алгебра высказываний»

1) Даны утверждения:

1 Студент математического факультета университета

2 Луна – спутник Марса

3 Математика – интересный предмет

4 Река Ангара впадает в озеро Байкал

5 $x^2+4x+4=0$

6 Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.

Среди них высказываниями являются …

а) все приведенные утверждения б) 2, 4, 5 в) 2, 4) 2, 3, 4, 5, 6 д) 1, 2, 4, 6

2) Даны утверждения:

1 Сумма углов треугольника равна 120°;

2 $5+3 = 8$;

Число 28 не делится на 7;

4 $15 \le 90$;

5 Число 1 не является ни простым, ни составным.

Среди них составными высказываниями являются …

а) все приведенные утверждения б) 1, 3, 4, 5 в) 1, 3, 4 г) 2, 5   д) 1, 3

3) Таблица истинности для формулы $A \leftrightarrow B$ имеет вид

A	B	$A \leftrightarrow B$
и	*и*	
и	*л*	
л	*л*	
л	*и*	

4) Даны высказывания A, B, C логическими значениями A=0, B=1, C=1. Найдите логическое значение высказывания $((A\to B)\to C)\leftrightarrow ((B\wedge C)\vee(A\wedge B))$.

а) 1; б) 0;в) A;г) B; д) C.

5) Даны высказывания A, B, C логическими значениями A=0, B=0, C=0. Найдите логическое значение высказывания $((A\to B)\to C)\leftrightarrow ((B\wedge C)\vee(A\wedge B))$.

а) 1;б) 0;в) A;г) B; д) C.

6) Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений предыдущих: $A\vee B=1$, $A\to B=1$, $7B\to A=$

а) 1;б) 0;в) A;г) B.

7) Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений предыдущих: $A\wedge B=0$, $A\to B=1$, $B\to 7A=$ …

а) 1;б) 0;в) A;г) B.

8) Формула называется …. , если она превращается в истинное высказывание при всякой подстановке вместо переменных конкретных высказываний.

а) выполнимой; б) опровержимой; в) тавтологией; г) противоречием.

9) Формула называется …. , если она превращается в ложное высказывание при всякой подстановке вместо переменных конкретных высказываний.

а) выполнимой; б) опровержимой; в) тавтологией; г) противоречием.

10) Формула называется …., если существуют такие конкретные высказывания, которые превращают данную формулу в ложное высказывание.

а) выполнимой; б) опровержимой; в) тавтологией; г) противоречием.

11) Даны высказывания:

1 $A\wedge 0$; 2 $A\to 1$; 3 $A\to A$; 4 $A\vee 0$;5 $A\wedge 1$

От значения высказывания A не зависят значения следующих из них …

а) 1, 2, 3, 4, 5 б) 1, 2, 4, 5 в) 1, 4, 5 г) 3 д) 1, 2, 3

12) Формула $(7X\to Y)\to((X\to 7Y)\to 7X)$ является …

а) выполнимой; б) опровержимой; в) тавтологией; г) противоречием.

13) Признак логического следствия формулируется так: …

а) $F\models H \Leftrightarrow \models F\to H$; б) $F\models H \Leftrightarrow \models F\leftrightarrow H$; в) $F\models H \Leftrightarrow \models F\wedge H$; г) $F\models H \Leftrightarrow \models F\vee H$.

14) Даны формулы F_1: $(X\to Y)\to Z$ и F_2: $X\vee Y\vee Z$. Будет правильным сказать, что

а) F_1 – следствие $F_{2;}$ б) F_2 – следствие $F_{1;}$

в) формулы являются следствием друг друга;

г) ни F_1 не является следствием F_2, ни F_2 не является следствием $F_{1.}$

15) Выражение $P\to 0$ равносильно …

а) P; б) 7P; в) 0; г) 1.

16) Выражение $P\vee 0$ равносильно …

а) P; б) 7P; в) 0; г) 1.

17) Выражение $P\leftrightarrow 0$ равносильно …

а) P; б) 7P; в) 0; г) 1.

18) Выражение $P\wedge 0$ равносильно …

а) P; б) 7P; в) 0; г) 1.

19) Тавтология, называемая «modus ponens», имеет вид …

а) $X\vee 7X$; б) $7(X\wedge 7X)$; в) $((X\to Y)\wedge X)\to Y$; г) $(X\to Y)\leftrightarrow(7Y\to 7X)$;

д) $(X\to(Y\to Z))\leftrightarrow(Y\to(X\to Z))$; е) $((X\to Y)\wedge(Y\to Z))\to(X\to Z)$.

20) Равносильные формулы. Правило поглащения:

а) $X\vee Y\cong Y\vee X$; $X\wedge Y\cong Y\wedge X$; б) $(X\vee Y)\vee Z\cong X\vee(Y\vee Z)$; $(X\wedge Y)\wedge Z\cong Y\wedge(X\wedge Z)$;

в) $(X\wedge Y)\vee X\cong X$; $(X\vee Y)\wedge X\cong X$; г) $(X\vee Y)\wedge Z\cong(X\wedge Z)\vee(Y\wedge Z)$; $(X\wedge Y)\vee Z\cong(X\vee Z)\wedge(Y\vee Z)$;

д) $7(X\vee Y)\cong 7X\wedge 7Y$; $7(X\wedge Y)\cong 7X\vee 7Y$; е) $X\wedge 7X\cong 0$; $X\vee 7X\cong 1$;

ж) $X\wedge 0\cong$;0 $X\vee 0\cong X$; з) $X\wedge 1\cong X$; $X\vee 1\cong 1$.

21) Равносильные формулы. Законы *де Моргана*:

а) $X\vee Y\cong Y\vee X$; $X\wedge Y\cong Y\wedge X$; б) $(X\vee Y)\vee Z\cong X\vee(Y\vee Z)$; $(X\wedge Y)\wedge Z\cong Y\wedge(X\wedge Z)$;

в) $(X\wedge Y)\vee X\cong X$; $(X\vee Y)\wedge X\cong X$; г) $(X\vee Y)\wedge Z\cong(X\wedge Z)\vee(Y\wedge Z)$; $(X\wedge Y)\vee Z\cong(X\vee Z)\wedge(Y\vee Z)$;

д) $7(X\vee Y)\cong 7X\wedge 7Y$; $7(X\wedge Y)\cong 7X\vee 7Y$; е) $X\wedge 7X\cong 0$; $X\vee 7X\cong 1$;

ж) $X\wedge 0\cong$;0 $X\vee 0\cong X$; з) $X\wedge 1\cong X$; $X\vee 1\cong 1$.

22) Известно, что формула F(X, Y, Z) принимает значение 1 на наборах (0,0,1), (0,1,1), (1,0,1). Тогда ее СДНФ имеет вид …

а)$(X\wedge Y\wedge Z)\vee(X\wedge Y\wedge 7Z)\vee(7X\wedge 7Y\wedge 7Z)$; б)$(X\vee Y\vee Z)\wedge(X\vee Y\vee 7Z)\wedge(7X\vee 7Y\vee 7Z)$;

в)$(X\vee Y\vee Z)\wedge(7X\vee 7Y\vee Z)\wedge(7X\vee 7Y\vee Z)$; г)$(X\wedge 7Y\wedge Z)\vee(7X\wedge Y\wedge Z)\vee(7X\wedge 7Y\wedge Z)$.

23) Если вектор значений функции F(X, Y, Z) имеет вид (01100110), то вектор значений двойственной ей функции F*(X, Y, Z) имеет вид….

а) (1100110); б) (0011001); в) (1100100); г) (0011101).

24) Известно, что формула F(X, Y, Z) принимает значение 0 на наборах (0,0,0), (0,0,1), (1,1,1). Тогда ее СКНФ имеет вид …

а)$(X\wedge Y\wedge Z)\vee(X\wedge Y\wedge 7Z)\vee(7X\wedge 7Y\wedge 7Z)$; б)$(X\vee Y\vee Z)\wedge(X\vee Y\vee 7Z)\wedge(7X\vee 7Y\vee 7Z)$;

в)$(X\vee Y\vee Z)\wedge(7X\vee 7Y\vee Z)\wedge(7X\vee 7Y\vee 7Z)$;г)$(X\wedge Y\wedge Z)\vee(7X\wedge 7Y\wedge Z)\vee(7X\wedge 7Y\wedge 7Z$

Тест по теме «Логика предикатов»

1) Среди приведенных выражений выделите одноместные предикаты.

а) x^2+2x+4 ($x\in R$) б) $x^2+2x+4 = 6$ ($x\in R$)

в) Любое натуральное число у не меньше единицы

г) Число х делится на число у ($x, y\in N$)

д) Город х стоит на берегу реки Урал (переменная х «пробегает» множество названий городов)

2) Среди приведенных выражений выделите двухместные предикаты.

а) $x^2+2x+4y$ ($x, y \in R$) б) $x^2+2xy+y^2 = 0$ ($x,y \in R$)

в) Любое натуральное число у не меньше единицы

г) Число х делится на число у ($x, y\in N$)

д) Город х стоит на берегу реки Урал (переменная х «пробегает» множество названий городов)

3) Среди следующих высказываний укажите ложные (переменные принимают значения на множестве действительных чисел).

а) $\exists y\forall x\ (x+y=7)$ б) $\forall x\exists y\ (x+y=7)$ в) $\forall y\forall x\ (x+y=7)$ г) $\exists y\exists x\ (x+y=7)$

4) Среди следующих высказываний укажите истинные (переменные принимают значения на множестве действительных чисел).

а) $\exists y \forall x\ (x<y)$ б) $\forall x \exists y\ (x<y)$ в) $\forall y \forall x\ (x<y)$ г) $\exists y \exists x\ (x<y)$

5) Даны предикаты P(x): sin x = sin y и Q(x): x = y, определенные на множестве R. Верным является утверждение …

а) P – следствие Q б) Q – следствие P в) P и Q равносильны

г) P – не следствие Q д) Q – не следствие P

6) Дано высказывание «Все простые числа нечетны». Его отрицание звучит так

а) Все простые числа четны б) Существуют нечетные простые числа

в) Существуют четные простые числа г) Все составные числа четны

7) Если высказывание $\forall x P(x)$ истинно, то предикат P(x) …

а) выполнимый б) опровержимый в) тождественно истинный г) тождественно ложный

8) Если высказывание $\forall x P(x)$ ложно, то предикат P(x) …

а) выполнимый б) опровержимый в) тождественно истинный г) тождественно ложный

9) Если высказывание $\exists x P(x)$ ложно, то предикат P(x) …

а) выполнимый б) опровержимый в) тождественно истинный г) тождественно ложный

10) Если высказывание $\exists x P(x)$ истинно, то предикат P(x) …

а) выполнимый б) опровержимый в) тождественно истинный г) тождественно ложный

11) Формула ЛП $\forall x\ (P(x) \to Q)$, где выражение Q не зависит от x, равносильна следующей …

а) $\exists x\ P(x) \to Q$ б) $\forall x\ P(x) \to Q$ в) $Q \to \exists x\ P(x)$ г) $Q \to \forall x\ P(x)$

12) Формула ЛП $\forall x\ (Q \to P(x))$, где выражение Q не зависит от x, равносильна следующей …

а) $\exists x\ P(x) \to Q$ б) $\forall x\ P(x) \to Q$ в) $Q \to \exists x\ P(x)$ г) $Q \to \forall x\ P(x)$

Список использованных источников

1 Спирина., М.С. Дискретная математика: учебник для студентов СПО / М.С. Спирина., П.А. Спирин. –М.: ОИЦ «Академия», 2012.

2 Аляев, Ю.А. Дискретная математика: практическая дискретная математика и математическая логика: учебное пособие / Ю.А. Аляев, С.Ф. Тюрин. – М.: Финансы и статистика, 2010.

3 Галушкина, Ю. И. Конспект лекций по дискретной математике / Ю.И. Галушкина, А.Н. Марьямов. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 176 с.

4 Гринченков, Д.В. Математическая логика и теория алгоритмов для программистов/ Д.В. Гринченков, С.И. Потоцкий. – М.: КНОРУС, 2010.

5 Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В.И. Игошин. – М.: ОИЦ «Академия», 2008.

6 Игошин, В.И. Математическая логика и теория алгоритмов / В.И. Игошин. – М.: ОИЦ «Академия», 2010.

7 Канцедал, С.А. Дискретная математика: учебное пособие / С.А. Канцедал. – М.: ФОРУМ, 2013.

8 Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов: учебник для вузов / Ф.А. Новиков. – 3-е изд. – М. [и др.]: Питер, 2009.

9 Соболева, Т.С. Дискретная математика: учебник для студентов вузов / Т.С.Соболева, А.В. Чечкин. – М.: ОИЦ «Академия», 2012.

10 Судоплатов, С.В. Математическая логика и теория алгоритмов / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: Инфра-М, 2008.

11 Таран, Т.А. Основы дискретной математики / Т.А. Таран. – Киев: Просвіта, 2003. – 288 с.

12 Таран, Т.А. Сборник задач по дискретной математике / Т.А. Таран, Н.А. Мыценко, Е.Л. Темникова. – Киев: Инрес, 2005. – 64 с.

13 Молчанов, В.А. Дискретная математика: учебное пособие / В.А. Молчанов. − Саратов, 2013. − 132 с.

14 Молчанов, В.А. Математическая логика: учебное пособие / В.А. Молчанов. − Саратов: Изд-во СГСЭУ, 2011.