Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра геометрии и компьютерных наук

О.Н. Казакова, Т.А. Фомина

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 18.03.01 Химическая технология, 18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии, 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания

Оренбург
2017

УДК 510(076.5)
ББК 22.1я7
К 14

Рецензент – кандидат педагогических наук Л.Б. Усова

Казакова, О.Н.
К 14 Математика: методические указания к выполнению индивидуальных работ в 3 ч. Ч. 1/ О.Н. Казакова, Т.А. Фомина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2017. – 47с.

Методические указания содержат материал, предназначенный для выполнения индивидуальных работ по курсу «Математика».

Методические указания предназначены для обучающихся по направлениям подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 18.03.01 Химическая технология, 18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии, 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания заочной формы обучения, составлены в соответствии с утвержденными рабочими программами дисциплины «Математика». Материалы могут быть полезны преподавателям высших учебных заведений, ведущим соответствующую дисциплину, и изучающим эту дисциплину студентам.

УДК 510(076.5)
ББК 22.1я7

Содержание

Введение

Математика играет важную роль в естественно-научных, экономических, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она является не только орудием количественного исчисления, но и методом точного исследования и средством четкой формулировки понятий и проблем. Цель преподавания математики в вузе, где ведется подготовка специалистов инженерно-технических направлений – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать представление о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре; развить навыки математического исследования прикладных вопросов и умения сформулировать задачу на математическом языке. Все это понадобится для успешной работы и для ориентации в будущей профессиональной деятельности. Знания, умения и навыки, приобретенные при изучении математики, используются при изучении таких дисциплин, как: информатика, физика, начертательная геометрия, техническая механика, конструирование и расчет элементов оборудования отрасли, спецглавы математики, электротехника и промышленная электроника, вычислительные методы расчета химико-технологических систем и других.

В методических указаниях показаны примеры решения основных (типовых) задач математики, изучаемых в первом учебном семестре, а также задания для индивидуального решения. Материалы могут быть полезны преподавателям высших учебных заведений, ведущим соответствующую дисциплину, и изучающим эту дисциплину студентам.

1 Выписка из рабочей программы учебной дисциплины

Дисциплина «Математика» изучается в течение трех семестров и включает лекционные и практические занятия, выполнение индивидуальных заданий (домашней контрольной работы).

В первом семестре студенты изучают следующие разделы:

1) Элементы теории множеств и математической логики

Понятие множества, виды множеств, способы задания множеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Свойства операций над множествами. Декартово произведение множеств. Основные числовые множества. Отображения и функции. Сравнение множеств по числу элементов.

Кванторы, импликация. Условия: необходимое, достаточное, необходимое и достаточное. Теоремы: прямая, обратная, противоположная, обратная противоположной. Эквивалентность теорем. Доказательство от противного.

2) Основные алгебраические структуры

Алгебраические операции. Свойства операций. Понятие группы, кольца и поля. Свойства, примеры.

Поле комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Действия над комплексными числами в различных формах. Возведение в степень и извлечение корней из комплексных чисел.

Многочлены. Основная теорема алгебры. Каноническое разложение многочленов над действительным и комплексным полями. Разложение рациональных дробей на сумму простейших.

3) Определители и матрицы, решение систем

Определители: определение, миноры и алгебраические дополнения элементов, вычисление, свойства.

Матрицы: определение, виды матриц, линейные и специальные операции, построение обратной матрицы.

Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы,

Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Теорема Кронекера-Капелли. Решение систем n линейных уравнений с m неизвестными методом Гаусса. Построение общего решения системы.

Решение однородных систем линейных уравнений. Фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений.

4) Аналитическая геометрия

Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат.

Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов: определение, свойства, вычисление, геометрический смысл. Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы вектора.

Линии на плоскости. Линии и поверхности в пространстве. Алгебраические линии и поверхности, их порядок.

Различные способы задания прямой на плоскости, взаимное расположение прямых, метрические соотношения на плоскости.

Различные способы задания прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости в пространстве. Метрические соотношения.

Линии второго порядка на плоскости (эллипс, гипербола, парабола): определение, построение, основные характеристики.

Линии в полярной системе координат. Параметрическое задание линий.

Поверхности второго порядка в пространстве: цилиндрические, конические, поверхности вращения. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

5) Ведение в математический анализ

Действительные числа: алгебраические свойства, числовые промежутки, модуль числа, окрестность точки и бесконечности. Ограниченность, верхняя и нижняя грани числового множества.

Числовой последовательности: понятие числовой последовательности, предел и его геометрический смысл, единственность предела, основные свойства и признаки существования предела; Второй замечательный предел: сходимость последовательности $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$, число e.

Определение предела функции. Свойства предела функции. Предельный переход в неравенствах. Односторонние пределы. Пределы функции при $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$. Бесконечно малая и бесконечно большая функция, их связь. Свойства эквивалентных бесконечно малых функций. Первый замечательный предел. Сравнение бесконечно малых.

Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций. Точки разрыва функции, их классификация. Непрерывность сложной функции. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: первая и вторая теоремы Больцано-Коши, первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Теорема о монотонности и непрерывности обратной функции.

Обзор основных элементарных функций.

6) Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Задача, приводящая к понятию производной и ее определение. Непрерывность функции, имеющей производную. Геометрический и физический смысл первой и второй производной. Производные сложной и обратной функции. Дифференцирование неявной и параметрически заданной функции. Дифференцируемость и дифференциал функции. Геометрический и физический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Приложение дифференциала для приближенных вычислений. Дифференциалы высших порядков.

Основные теоремы о дифференцируемых функциях: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора с различными формами остаточного члена.

Нахождение глобального экстремума функции. Задачи на максимум и на минимум. Наклонные и вертикальные асимптоты функции. Экстремум функции. Условия возрастания и убывания функции. Необходимое условие, достаточные условия локального экстремума. Достаточные условия выпуклости. Необходимое условие и достаточное условие точки перегиба. Общая схема исследования функции и построения графика.

Итоговой формой контроля в первом семестре является зачет.

2 Рекомендации по выполнению и оформлению контрольной работы

Особенностью заочной формы обучения является то, что больший объем учебного материала студент осваивает самостоятельно по учебникам и учебным пособиям, в том числе электронным. При этом он имеет право обращаться за помощью и консультацией к преподавателю. Студенту рекомендуется вести рабочую тетрадь, конспектировать в ней основные понятия, свойства, теоремы, правила и методы решение типовых задач. Для того чтобы хорошо усвоить теоретический материал, необходимо решать как можно больше задач, а не только те, которые предложены для индивидуального решения. При подготовке к выполнению индивидуальной расчетной работы студент должен изучить соответствующие разделы по пособиям и учебникам (список литературы прилагается).

К зачету допускаются студенты, выполнившие индивидуальную расчетную работу и прошедшие по ней собеседование.

При выполнении работы и ее оформлении необходимо придерживаться следующих правил:

– работа должна быть выполнена в тонкой тетради в клетку, имеющей поля для замечаний преподавателя;

– титульный лист оформляется в соответствии со стандартом оформления студенческих работ СТО 02069024.101–2015 Работы студенческие (http://www.osu.ru/docs/official/standart/standart_101-2015_.pdf); на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, группа, название дисциплины;

– вариант индивидуальных заданий студента соответствует его списку в группе или определяется иным способом преподавателем и сообщается студентам;

– перед решением каждой задачи нужно привести полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера;

– следует придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в задании, строго сохраняя при этом нумерацию заданий;

– в работу должны быть включены все задачи, указанные в задании по своему варианту;

– при решении заданий можно использовать различные методы решений; решения задач должны сопровождаться необходимыми пояснениями: используемые формулы, объяснение проводимых вычислений и преобразований, необходимые чертежи;

– если работа не зачтена преподавателем, то ее необходимо в соответствии с замечаниями частично или полностью переделать. Повторную работу надо выполнять в той же тетради. Вносить исправления в первоначальный текст работы после ее проверки не рекомендуется.

3 Примеры решения задач

Задание 1

а) Выполнить действия над комплексными числами: $(4+5i)^2\cdot(5-4i)$;

б) Записать комплексное число $z=\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Найти z^3 и $\sqrt[3]{z}$.

Решение.

а) $(4+5i)^2\cdot(5-4i)=(16+40i+25\cdot i^2)(5-4i)=(-9+40i)(5-4i)=$
$=-45+200i+36i+160=115+236i$;

б) Представим комплексное число в алгебраической форме, для чего умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$z=\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}=\frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)}{(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)}=\frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)}{4}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i.$$

Получили $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ – алгебраическая форма комплексного числа.

Найдем модуль и аргумент данного комплексного числа:

$$r=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2;$$

Аргумент φ найдем из соотношения $\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Получаем $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Тогда в тригонометрической форме комплексное число имеет вид $z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, в показательной – $z=2e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$.

Для нахождения z^3 и $\sqrt[3]{z}$ будем использовать тригонометрическую форму комплексного числа.

$$z^3 = 2^3\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right) + i\cdot sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)\right) = 8\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\pi/4 + 2\pi k}{3} + sin\frac{\pi/4 + 2\pi k}{3}\right)$, где $k = 0,1,2$. Получаем три различных корня:

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\cdot sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi/4 + 2\pi}{3} + \sin\frac{\pi/4 + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{9\pi}{12}\right);$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\pi/4 + 4\pi}{3} + sin\frac{\pi/4 + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{17\pi}{12} + i\cdot sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Ответ:

а) $115 + 236i$;

б) $\frac{4}{\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\cdot sin\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$; $z^3 = 8\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

$\sqrt[3]{z}$: $z_0 = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\cdot sin\frac{\pi}{12}\right)$; $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{9\pi}{12} + i\cdot sin\frac{9\pi}{12}\right)$;

$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{17\pi}{12} + i\cdot sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

Задание 2

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ 3x + 3y - 2z = 8, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Требуется:

а) найти её решения с помощью формул Крамера;

б) записать систему в матричном виде и решить её средствами матричного исчисления;

в) решить систему методом Гаусса.

Решение.

а) Рассмотрим матрицу системы линейных уравнений $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем главный определитель матрицы:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 = 5$$

(вычислили по правилу треугольника).

Так как $d = 5 \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое и можно найти по формулам Крамера.

Для системы трех уравнений с тремя неизвестными формулы Крамера имеют вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{d_1}{d}, \\ y = \dfrac{d_2}{d}, \\ z = \dfrac{d_3}{d}, \end{cases}$$ где d_1, d_2 и d_3 – получаются из определителя d заменой, соответственно, первого, второго и третьего столбца на столбец из свободных членов. Составим и вычислим эти определители, используя, например, правило треугольника.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot 6 + 1 \cdot 8 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \cdot 6 - 1 \cdot (-2) \cdot 5 - 1 \cdot 8 \cdot 1 = 15,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 8 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 1 = 5,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 8 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 8 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 6 = 10.$$

По формулам Крамера получаем: $x = \dfrac{d_1}{d} = \dfrac{15}{5} = 3$, $y = \dfrac{d_2}{d} = \dfrac{5}{5} = 1$, $z = \dfrac{d_3}{d} = \dfrac{10}{5} = 2$.

б) Данную систему можно представить в матричном виде: $A{\cdot}X{=}B$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица системы уравнений, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из неизвестных, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из свободных членов.

Решение матричного уравнения $A{\cdot}X{=}B$ будем искать в виде $X{=}A^{-1}\cdot B$, где A^{-1} – матрица, обратная матрице A.

Так как определитель матрицы A не равен нулю ($d{=}5$), то обратная матрица существует и равна: $A^{-1}=\dfrac{1}{d}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ji}– алгебраическое дополнение для элементов исходной матрицы.

Найдем алгебраические дополнения для элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot1-(-2)\cdot1=5;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(3\cdot1-(-2)\cdot1)=-5;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(3\cdot1-3\cdot1)=0;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(1\cdot1-(-1)\cdot1)=-2;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot1-(-1)\cdot1=3;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(2\cdot1-1\cdot1)=-1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)-(-1)\cdot3=1;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-(2\cdot(-2)-(-1)\cdot3)=1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot3-1\cdot3=3.$$

Получаем $A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&-2&1\\-5&3&1\\0&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\8\\6\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\cdot5+(-2)\cdot8+1\cdot6\\-5\cdot5+3\cdot8+1\cdot6\\0\cdot5+(-1)\cdot8+3\cdot6\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15\\5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

в) Решим систему методом Гаусса, для этого расширенную матрицу системы $\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&5\\3&3&-2&8\\1&1&1&6\end{array}\right)$ с помощью элементарных преобразований приведем ступенчатому виду. Для удобства поменяем местами первую и последнюю строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\3&3&-2&8\\2&1&-1&5\end{array}\right)\begin{matrix}(-3)&(-2)\\ +& \\ &+\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&0&-5&-10\\0&-1&-3&-7\end{array}\right)$$ – поменяем местами вторую и третью строки, получим: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&-1&-3&-7\\0&0&-5&-10\end{array}\right)$.

Этой матрице соответствует система $\begin{cases}x+y+z=6\\-y-3z=-7\\-5z=-10\end{cases}$.

Из последнего уравнения находим $z=2$. Подставляя данное значение во второе уравнение, находим $y=1$. Подставляя найденные значения в первое уравнение, находим $x=3$

Ответ: x = 3; y = 1; z = 2.

Задание 3

Построить общее решение системы $\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3-9x_4=0,\\3x_1-2x_2+4x_3+x_4=0,\\x_1+18x_2-16x_3-37x_4=0.\end{cases}$ и найти ее фундаментальный набор решений.

Решение.

С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы системы. Для этого приведём матрицу к ступенчатому виду, число ненулевых строк и будет равно рангу матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & -9 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 18 & -16 & -37 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & -9 \\ 0 & -14 & 13 & 28 \\ 0 & 14 & -13 & -28 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & -9 \\ 0 & -14 & 13 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу, в которой только две ненулевые строки. Значит ранг $r = 2$. Число неизвестных в системе $n = 4$. Так как $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от $n - r = 4 - 2 = 2$ параметров. Пусть x_1 и x_2 – базисные неизвестные, т. к. коэффициенты перед ними образуют базисный минор, x_3 и x_4 – параметры. Обозначим для удобства $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$ и выразим базисные неизвестные через параметры, решая систему $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3C_1 + 9C_2 \\ -14x_2 = -13C_1 - 28C_2 \end{cases}$.

Их второго уравнения получаем $x_2 = \frac{13}{14}C_1 + 2C_2$.

Из первого уравнения:

$$x_1 = -4 \cdot (\frac{13}{14}C_1 + 2C_2) + 3C_1 + 9C_2 = -\frac{5}{7}C_1 + C_2.$$

Общее решение исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2}C_1 + C_2 \\ x_2 = \frac{13}{14}C_1 + C_2 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$$

или $\left\{-\frac{5}{7}C_1 + C_2, \frac{13}{14}C_1 + 2C_2, C_1, C_2\right\}$, параметры могут принимать любые действительные значения.

Фундаментальный набор решений однородной системы состоит из $n-r=4-2=2$ линейно-независимых между собой частных решений системы.

Частные решения системы линейных уравнений получаем из общего, придавая параметрам конкретные числовые значения.

Чтобы частные решения были линейно-независимы, подставляемые наборы значений параметров также должны быть линейно-независимы.

Придадим параметрам C_1 и C_2 поочередно следующие значения: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ и $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, и подставим их в общее решение системы.

При $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ получим $E_1=\left(-\frac{5}{7};\frac{13}{14};1;0\right)$, при $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ получим $E_2=(1;2;0;1)$ – два частных решения системы, линейно-независимых между собой.

Решения E_1 и E_2 образуют фундаментальный набор решений данной системы. Общее решение можно записать в виде $X_{о.о.}=C_1\cdot E_1+C_2\cdot E_2$, где C_1 и C_2 принимают произвольные значения.

Ответ: $\left\{-\frac{5}{7}C_1+C_2,\frac{13}{14}C_1+2C_2,C_1,C_2\right\}$, $E_1=\left(-\frac{5}{7};\frac{13}{14};1;0\right)$, $E_2=(1;2;0;1)$.

Задание 4

По координатам вершин A (3; – 2; 2), B (1; – 3; 1), C (2; 0; 4), D (6; – 4; 6) пирамиды ABCD найти:

а) длины ребер AB и AC;

б) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

в) объем пирамиды ABCD;

г) высоту, опущенную из вершины D на грань ABC;

д) уравнение прямой AB;

е) уравнение плоскости *BCD*;

ж) синус угла между прямой *AB* и плоскостью *BCD*;

з) косинус угла между плоскостью *xOy* и плоскостью *BCD*.

Решение.

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$\overline{AB} = (1-3;\ -3-(-2);\ 1-2) = (-2;\ -1;\ -1);$

$\overline{AC} = (2-3;\ 0-(-2);\ 4-2) = (-1;\ 2;\ 2);$

$\overline{AD} = (6-3;\ -4-(-2);\ 6-2) = (3;\ -2;\ 4).$

а) Длины ребер AB и AC найдем как длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$, $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$,

т.е. $AB = \sqrt{6}$ (ед.), $AC = 3$ (ед.).

б) Угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ найдём, используя скалярное произведение векторов: $\cos\left(\overline{AB}\,^\wedge\,\overline{AC}\right) = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$, тогда

$\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{6}\cdot 3 = 3\sqrt{6}$, $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = -2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 2 = -2;$

$\cos\left(\overline{AB}\,^\wedge\,\overline{AC}\right) = \dfrac{-2}{3\sqrt{6}}.$

в) Объём пирамиды равен $1/6$ объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$, как на сторонах. Объём параллелепипеда найдём, используя смешанное произведение векторов:

$$\left(\overline{AB}\ \ \overline{AC}\ \ \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -30.$$

Объём параллелепипеда равен $V = |-30| = 30$ (ед^3).

Тогда объём пирамиды равен $V = \dfrac{1}{6}\cdot 30 = 5$ (ед^3).

г) Из школьного курса известна формула объёма пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$.

Отсюда $h = \dfrac{3V}{S_{осн.}}$.

Площадь основания найдём, используя векторные произведения векторов:

$\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=5\bar{j}-5\bar{k}$, то есть вектор векторного произведения имеет координаты (0, 5, -5).

Тогда $S_{осн}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+5^2+\left(-5^2\right)}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (ед.^{2}).

$$h=\frac{3\cdot 5}{\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\cdot 2}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\text{ (ед.).}$$

д) Для нахождения уравнения прямой AB используем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Имеем: $\frac{x-3}{1-3}=\frac{y+2}{-3-(-2)}=\frac{z-2}{1-2}$, отсюда $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ – каноническое уравнение искомой прямой.

$$\begin{cases}\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{-1}\\ \frac{x-3}{-2}=\frac{z-2}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1(x-3)=-2(y+2)\\ -1(x-3)=-2(z-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y-7=0\\ x-2z+1=0\end{cases}$$ – общее уравнение искомой прямой.

е) Для нахождения уравнения плоскости BCD используем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

Имеем: $\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 2-1 & 0+3 & 4-1 \\ 6-1 & -4+3 & 6-1 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0,$

т.е. $18\cdot(x-1)+10\cdot(y+3)-16\cdot(z-1)=0,\ 18x-18+10y+30-16z+16=0.$

$18x+10y-16z+28=0$ – искомое уравнение, или $9x+5y-8z+14=0$.

ж) синус угла между прямой AB и плоскостью BCD (это угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости) находится по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|A\alpha+B\beta+C\gamma|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\lambda^2}}.$$

Получаем:

$$\sin\varphi=\frac{|9\cdot(-2)+5(-1)+8(-1)|}{\sqrt{9^2+5^2+8^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{31}{\sqrt{170}\sqrt{6}}=\frac{31}{2\sqrt{255}}=\frac{31\sqrt{255}}{510}.$$

з) косинус угла между плоскостью xOy и плоскостью BCD найдем по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Получаем

$$\cos\varphi=\frac{|0\cdot9+0\cdot5+1\cdot8|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{9^2+5^2+8^2}}=\frac{8}{\sqrt{170}}=\frac{8\sqrt{170}}{170}=\frac{4\sqrt{170}}{85}.$$

Ответ:

а) $\sqrt{6}$; 3; б) $\frac{-2}{3\sqrt{6}}$; в) 5; г) $3\sqrt{2}$; д) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$;

е) $9x+5y-8z+14=0$; ж) $\frac{31\sqrt{255}}{510}$; з) $\frac{4\sqrt{170}}{85}$.

Задание 5

Составить канонические уравнения:

а) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5},0)$;

б) гиперболы с мнимой полуосью равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13},0)$;

в) параболы, имеющей директрису $x=-3$.

Решение.

а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

По условию задачи $a=3$, $c=\sqrt{5}$. Для эллипса справедливо равенство $b^2=a^2-c^2$.

Для нашей задачи получаем: $b^2=3^2-\sqrt{5}^2=9-5=4$.

Подставляя в каноническое уравнение эллипса, поучаем: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

По условию задачи $b=2$, $c=\sqrt{13}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2=c^2-a^2$.

Для нашей задачи получаем: $b^2=\sqrt{13}^2-2^2=13-4=9$.

Подставляя в каноническое уравнение гиперболы, поучаем: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

в) Каноническое уравнение параболы в нашем случае имеет вид $y^2=2px$, а уравнение ее директрисы $x=-p/2$.

По условию задачи уравнение директрисы $x=-3$. Поэтому $-p/2=-3\Rightarrow p=6$.

Подставляя в каноническое уравнение параболы, поучаем $y^2=12x$.

Ответ: а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; в) $y^2=12x$.

Задание 6

Найти пределы функций:

а) – в) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$, при $a=2;-1;\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-4}\right)^{1+2x}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3 2x-1}{x^4+2x+1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-4-1}{16+4+1}=\dfrac{3}{21}$.

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-1+2-1}{1-2+1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ – неопределенность.

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^3-2x-1=(x+1)(x^2-x-1); \quad x^4+2x+1=(x+1)(x^3-x^2+x+1).$$

Получаем:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^3-x^2+x+1)}=\lim_{n\to -1}\frac{x^2-x-1}{x^3-x^2+x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1+1-1}{-1-1-1+1}=$$

$$=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ – неопределенность.

Вынесем в числителе и знаменателе общую старшую степень:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}{1+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}=\frac{0}{1}=0.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2-x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ – неопределенность, надо избавиться от иррациональности в числителе. Для этого умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}{x(x-1)(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-9}{x(x-1)(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(x-1)(\sqrt{x^2+9}+3)}=\frac{0}{-6}=0$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ – неопределенность.

Воспользуемся тем, что при $\alpha\to 0$: $\sin\alpha\sim\alpha$, $tg\alpha\sim\alpha$.

Получаем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-4}\right)^{1+2x}=\left(1^{\infty}\right)$ – неопределенность. Воспользуемся замечательным пределом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-4}\right)^{1+2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x-4}{3}}\right)^{\frac{x-4}{3}}\right)^{(1+2x)\cdot\frac{3}{x-4}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3+6x}{x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+6x}{x-4}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(\frac{3}{x}+6)}{x(1-\frac{4}{x})}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+6}{1-\frac{4}{x}}}=e^{6}.$$

Ответ: а) $\frac{3}{21}$, б) -1/2, в) 0, г) 0, д) $\frac{3}{2}$, е) e^{6}.

Задание 7

Найти производную:

а) $y=x^{3}-3x^{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, б) y=$\frac{x-15}{x^{2}+7}$, в) $y=\ln x\cdot\cos(3x-7)$,

г) $y=\ln(\sin\frac{2x+4}{x+1})$, д) $\begin{cases}x=ctgt\\ y=\sin t\end{cases}$, е) $y^{3}-4xy+x^{2}=0$, ж) $y=(x^{2}+3x)^{\cos x}$.

Решение.

а) $y=x^{3}-3x^{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ – воспользуемся непосредственно таблицей производных:

$$y'=(x^{3}-3x^{2}-x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}})'=3x^{2}-6x+x^{-2}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=3x^{2}-6x+\frac{1}{x^{2}}-\frac{1}{2\sqrt{x^{3}}}.$$

б) y=$\dfrac{x-15}{x^2+7}$ – воспользуемся формулой нахождения производной от частного двух функций: $y'=\dfrac{(x-15)'\cdot(x^2+7)-(x-15)\cdot(x^2+7)'}{(x^2+7)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2+7)^2-(x-15)\cdot 2x}{(x^2+7)^2}=$

$$=\frac{x^2+7-2x^2+30x}{(x^2+7)^2}=\frac{-x^2+30x+7}{(x^2+7)}.$$

в) $y=\ln x\cdot\cos(3x-7)$ – воспользуемся формулой нахождения производной от произведения двух функций:

$$y'=(\ln x)'\cdot\cos(3x-7)+\ln x\cdot\cos(3x-7)'=\frac{1}{x}\cdot\cos(3x-7)+\ln x\cdot(-\sin(3x-7))\cdot(3x-7)'=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\cos(3x-7)-3\ln x\cdot\sin(3x-7).$$

г) $y=\ln(\sin\dfrac{2x+4}{x+1})$ – воспользуемся формулой нахождения производной сложной функции:

$$y'=\left(\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}\right)'=\frac{1}{\sin\dfrac{2x+4}{x+1}}\cdot\left(\sin\frac{2x+4}{x+1}\right)'=\frac{1}{\sin\dfrac{2x+4}{x+1}}\cdot\cos\frac{2x+4}{x+1}\cdot\left(\frac{2x+4}{x+1}\right)'=$$

$$=ctg\,\frac{2x+4}{x+1}\cdot\frac{(2x+4)'(x+1)-(2x+4)(x+1)'}{(x+1)^2}=ctg\,\frac{2x+4}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)-(2x+4)\cdot 1}{(x+1)^2}=$$

$$=ctg\,\frac{2x+4}{x+1}\cdot\frac{2x+2-2x-4}{(x+1)^2}=ctg\,\frac{2x+4}{x+1}\cdot\frac{-2}{(x+1)^2}.$$

д) $\begin{cases}x=ctgt\\ y=\sin t\end{cases}$ – функция задана параметрически.

Производная параметрически заданной функции находится по формуле $y'_X=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

У нас: $y'_t=(\sin t)'_t=\cos t$; $x'_t=(ctgt)'_t=-\dfrac{1}{\sin^2 t}$.

Получаем: $y'_t=\dfrac{\cos t}{-\dfrac{1}{\sin^2 t}}=-\cos t\cdot\sin^2 t$.

е) $y^3 - 4xy + x^2 = 0$ – функция задана неявно.

Продифференцируем функцию по переменной *x*, считая, что *y = y(x)*:

$$3x^2 y' - 4y - 4xy' + 2x = 0,$$

отсюда $y'(3y^2 - 4x) = 4y - 2x$.

Окончательно получаем $y' = \dfrac{4e - 2x}{3y^2 - 4x}$.

ж) $y = (x^2 + 3x)^{\cos x}$ – применим логарифмическое дифференцирование, учитывая, что $\left(\ln\left|f(x)\right|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Получаем: $\ln y = \ln(x^2 + 3x)^{\cos x} = \cos x \cdot \ln\left(x^2 + 3x\right)$

$$\left(\ln y\right)' = \left(\cos x \cdot \ln\left(x^2 + 3x\right)\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\cos x\right)' \cdot \ln\left(x^2 + 3x\right) + \cos x \cdot \left(\ln\left(x^2 + 3x\right)\right)' = -\sin x \cdot \ln\left(x^2 + 3x\right) + \cos x \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

$$y' = \left(-\sin x \cdot \ln\left(x^2 + 3x\right) + \cos x \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}\right) \cdot y$$

$$y' = \left(-\sin x \cdot \ln\left(x^2 + 3x\right) + \cos x \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}\right) \cdot \left(x^2 + 3x\right)^{\cos x}$$

Ответ:

а) $3x^2 - 6x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$, б) $\dfrac{-x^2 + 30x + 7}{(x^2 + 7)}$, в) $\dfrac{1}{x} \cdot \cos(3x - 7) - 3\ln x \cdot \sin(3x - 7)$,

г) $ctg\,\dfrac{2x + 4}{x + 1} \cdot \dfrac{-2}{(x + 1)^2}$, д) $-\cos t \cdot \sin^2 t$, е) $\dfrac{4e - 2x}{3y^2 - 4x}$,

ж) $y' = \left(-\sin x \cdot \ln\left(x^2 + 3x\right) + \cos x \cdot \dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x}\right) \cdot \left(x^2 + 3x\right)^{\cos x}$.

Задание 8

Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$ и построить ее график.

Решение.

При исследовании функции целесообразно придерживаться следующей схемы:

– область определения функции;
– точки разрыва;
– исследование на четность, нечетность (для тригонометрических функций – на периодичность);
– поведение функции на концах области определения;
– интервалы возрастания и убывания функции;
– точки максимума и минимума;
– промежутки выпуклости и вогнутости функции;
– точки перегиба;
– горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты;
– точки пересечения графика функции с осями координат;
– при необходимости дополнительные точки;
– построение графика.

Проведем исследование данной функции.

1) Найдем область определения функции $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$: $x - 4 \neq 0$, $x \neq 4$.

Т.е. $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$. $x = 4$ – точка разрыва функции.

2) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность.

Так как область определения функции – множество, не симметричное относительно нуля, то функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не периодическая.

3) Найдем точки экстремума и интервалы монотонности функции.

$$y' = \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}\right)' = \frac{(2x-4)(x-4) - (x^2 - 4x + 1)}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 8x + 16 - x^2 + 4x - 1}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 8x + 15}{(x-4)^2}.$$

$y'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-8x+15=0$, решая квадратное уравнение, находим корни: $x_1=3$, $x_2=5$.

Областью определения первой производной является множество: $D(y')=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$. Критическими точками являются найденные точки: $x_1=3$, $x_2=5$ и $x_3=4$.

Рассмотрим интервалы $(-\infty;3)$; $(3;4)$; $(4;5)$; $(5;+\infty)$.

Применим теперь достаточное условие экстремума функции, для этого выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак производной. Экстремум будет в тех точках области определения, при переходе через которые производная меняет знак (рисунок 1).

Получаем, что в точке $x=3$ будет максимум, а в точке $x=5$ будет минимум. Найдем значения функции в этих точках: $y_{\min}(5)=6$, $y_{\max}(3)=2$.

При $x\in(-\infty;3)$ и $x\in(5;+\infty)$ функция возрастает, а при $x\in(3;4)$ и $x\in(4;5)$ функция убывает.

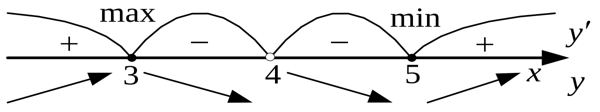

Рисунок 1 – Экстремумы функции

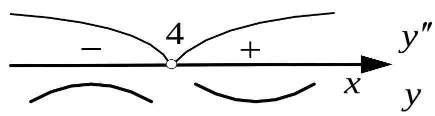

Рисунок 2 – Точки перегиба

4) Найдем точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

$$y''=\left(\frac{x^2-8x+15}{(x-4)^2}\right)'=\frac{(2x-8)(x-4)^2-\left(x^2-8x+15\right)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4}=$$

$$=\frac{2(x-4)\left((x-4)^2-x^2+8x-15\right)}{(x-4)^4}=\frac{2\left(x^2-8x+16-x^2+8x-15\right)}{(x-4)^3}=\frac{2}{(x-4)^3}.$$

Вторая производная функции не обращается в нуль ни в одной точке действительной оси, отсюда следует, что функция не имеет точек перегиба.

Областью определения второй производной является множество: $D(y'') = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

Точка $x = 4$ является критической точкой II рода. Отметим эту точку на числовой прямой и найдем знаки второй производной в каждом из интервалов: $(-\infty; 4)$ и $(4; +\infty)$ (рисунок 2).

При $x \in (-\infty; 4)$ $y'' < 0$, значит функция выпуклая на этом интервале. При $x \in (4; +\infty)$ $y'' > 0$, значит функции вогнутая на этом интервале.

5) Найдем асимптоты графика функции:

а) вертикальные асимптоты могут быть в точках разрыва функции, у нас это точка $x = 4$. Исследуем поведение функции слева и справа от этой точки:

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4} = -\infty, \ \lim_{x \to 4+0} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4} = +\infty.$$

Так как пределы оказались бесконечными, то $x = 4$ – вертикальная асимптота.

б) наклонные асимптоты имеют вид $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x(x - 4)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x}\right)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \infty}[y(x) - kx] = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4} - x\right] = (\infty - \infty) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{2.} - 4x + 1 - x(x - 4)}{x - 4} =$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x - 4} = 0.$$

Получили, что прямая $y = x$ – наклонная асимптота.

6) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

$y(0) = -\frac{1}{4}$, тогда $\left(0; -\frac{1}{4}\right)$ – точка пересечения графика функции с осью Oy.

$y(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$, решая квадратное уравнение, находим два корня: $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, т.е. $(2 + \sqrt{3}; 0)$ и $(2 - \sqrt{3}; 0)$ – точки пересечения графика функции с осью Ox.

7) Построим эскиз графика функции (рисунок 3).

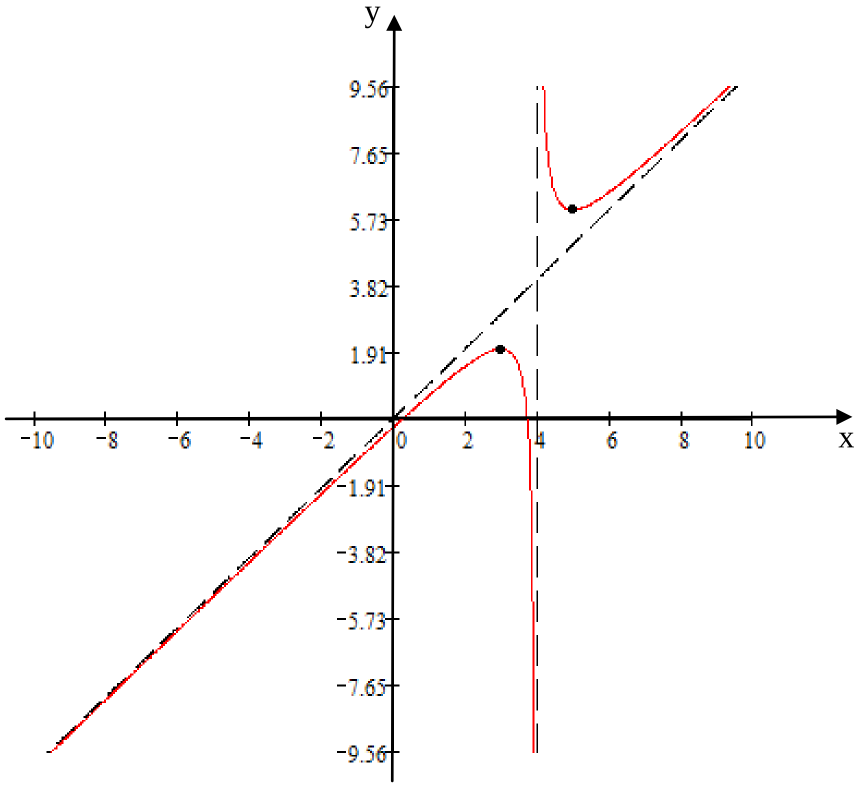

Рисунок 3 – График функции $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$

4 Варианты заданий для индивидуальной работы

Задание 1

а) выполнить действия над комплексными числами;

б) записать комплексное число z в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Найти z^3 и $\sqrt[3]{z}$.

1) а) $(4+3i)^2\cdot(3-4i)$; б) $z=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$;

2) а) $(3+2i)^2\cdot(2-3i)$; б) $z=\dfrac{4}{1+\sqrt{3}\,i}$;

3) а) $(5+i)^2\cdot(1-5i)$; б) $z=\dfrac{4}{1-i}$;

4) а) $(1+4i)^2\cdot(4-1i)$; б) $z=\dfrac{-8}{\sqrt{3}+i}$;

5) а) $(3+5i)^2\cdot(5-3i)$; б) $z=\dfrac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$;

6) а) $(2+3i)^2\cdot(3-2i)$; б) $z=\dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$;

7) а) $(4+i)^2\cdot(1-4i)$; б) $z=-\dfrac{4}{\sqrt{3}-i}$;

8) а) $(2+5i)^2\cdot(5-2i)$; б) $z=\dfrac{-8}{1-\sqrt{3}\,i}$;

9) а) $(1+2i)^2\cdot(2-i)$; б) $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}-i}$;

10) а) $(5+4i)^2\cdot(4-5i)$; б) $z=\dfrac{8}{\sqrt{3}+i}$;

11) а) $(4+2i)^2\cdot(2-4i)$; б) $z=\dfrac{-8}{1+\sqrt{3}\,i}$;

12) а) $(3+i)^2\cdot(1-3i)$; б) $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$;

13) а) $(5+4i)^2\cdot(4-5i)$; б) $z=\dfrac{8}{\sqrt{3}-i}$;

14) а) $(1+5i)^2\cdot(5-i)$; б) $z=\dfrac{4}{1+i}$;

15) а) $(3+4i)^2\cdot(4-3i)$; б) $z=-\dfrac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$;

16) а) $(2+i)^2\cdot(1-2i)$; б) $z=\dfrac{8}{1-\sqrt{3}\,i}$;

17) а) $(4+2i)^2\cdot(2-4i)$; б) $z=\dfrac{-4}{1+i}$;

18) а) $(2+4i)^2\cdot(4-2i)$; б) $z=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1-i}$;

19) а) $(5+4i)^2\cdot(4-5i)$; б) $z=-\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$;

20) а) $(1+2i)^2\cdot(2-i)$; б) $z=-\dfrac{4}{1-i}$.

Задание 2

Дана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Требуется:

а) найти её решение с помощью формул Крамера;

б) записать систему в матричном виде и решить её средствами матричного исчисления;

в) решить методом Гаусса.

1) $\begin{cases} x+3y-2z=-5 \\ x+9y-4z=-1 \\ -2x+6y-3z=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3x+5y-6z=-5 \\ 2x-3y+5z=8 \\ x+4y-z=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2x+y-3z=-4 \\ 4x+7y-2z=-6 \\ x-8y+5z=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x+7y-3z=-10 \\ 2x+9y-z=8 \\ -x+6y-3z=3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+2z=0 \\ x+4y+3z=2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+3y-2z=-5 \\ x+9y-4z=-1 \\ -2x+6y-3z=6 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+7y-2z=3 \\ 3x+5y+z=5 \\ -2x+5y-5z=-4 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x-5y+3z=-1 \\ 2x+4y+z=6 \\ -3x+3y-7z=-13 \end{cases}$

13) $\begin{cases} -2x+5y-6z=-8 \\ x+7y-5z=-9 \\ 4x+2y-z=-12 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 4x-y+5z=6 \\ x-2y+4z=9 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x+4y+3z=-10 \\ -x+5y-2z=5 \\ 3x-2y+4z=3 \end{cases}$

16) $\begin{cases} -x+2y+z=5 \\ 2x-3y+3z=1 \\ y-5z=-9 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 3x-9y+8z=5 \\ 2x-5y+5z=4 \\ 2x-y+z=-4 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=-8 \\ 2y+7z=17 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x-5y-3z=-17 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

20) $\begin{cases} -x+2z=5 \\ 2x+2y+5z=10 \\ 3x-2y+2z=-1 \end{cases}$

Задание 3

Найти общее решение и фундаментальный набор решений системы.

1) $\begin{cases} 3x_1-5x_2-x_3-2x_4=0 \\ 8x_1-6x_2+3x_3-7x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+5x_3-3x_4=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3-9x_4=0 \\ 5x_1-3x_2+4x_3-13x_4=0 \\ x_1+7x_2-6x_3-15x_4=0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4=0 \\ x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4=0 \\ x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4=0 \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4=0 \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4=0 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4=0 \\ 5x_1+7x_2-3x_3+x_4=0 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \\ -4x_1+5x_2-3x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-9x_2+2x_3+4x_4=0 \\ -x_1+5x_2-3x_3-x_4=0 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} x_1+3x_3+x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+8x_3+4x_4=0 \\ -x_1+2x_2-2x_3-2x_4=0 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} 3x_1-8x_2-7x_3-x_4=0 \\ -x_1+7x_2-5x_3-1{,}5x_4=0 \\ x_1+6x_2-3x_3+5x_4=0 \end{cases}$;

11) $\begin{cases} 3x_1+x_2-3x_3-10x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-7x_3-20x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \end{cases}$;

12) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-6x_4=0 \\ 7x_1-3x_2-7x_3-18x_4=0 \\ 4x_1-x_2-5x_3-12x_4=0 \end{cases}$;

13) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$;

14) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$;

15) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

16) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$;

17) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 20x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

18) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

19) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

20) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 20x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Задание 4

По координатам вершин пирамиды *ABCD* найти:

а) длины рёбер *AB* и *AC*;

б) косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

в) объём пирамиды *ABCD*;

г) высоту, опущенную из вершины *D* на грань *ABC*;

д) уравнение прямой *AB*;

е) уравнение плоскости *BCD*;

ж) синус угла между прямой *AB* и плоскостью *BCD*;

з) косинус угла между поскостью *xOy* и плоскостью *BCD*.

1) $A(-1;2;1)$, $B(-2;2;5)$, $C(-3;3;1)$, $D(-1;4;3)$;
2) $A(2;0;3)$, $B(1;0;7)$, $C(0;1;3)$, $D(2;2;5)$;
3) $A(-2;1;-1)$, $B(-3;1;3)$, $C(-4;2;-1)$, $D(-2;3;1)$;
4) $A(2;-1;2)$, $B(1;-1;6)$, $C(0;0;2)$, $D(2;1;4)$;
5) $A(1;1;2)$, $B(0;1;6)$, $C(-1;2;2)$, $D(1;3;4)$;
6) $A(-1;0;2)$, $B(-2;0;6)$, $C(-3;1;2)$, $D(-1;2;4)$;
7) $A(2;3;2)$, $B(1;3;6)$, $C(0;4;2)$, $D(2;5;4)$;

8) $A(-1;-2;1)$, $B(-2;-2;5)$, $C(-3;-1;1)$, $D(-1;0;3)$;
9) $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $C(0;-5;1)$, $D(3;2;-6)$;
10) $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$, $D(3;4;5)$;
11) $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-5;-2;0)$, $D(2;5;4)$;
12) $A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$, $C(3;0;1)$, $D(-4;3;5)$;
13) $A(-3;-5;6)$, $B(2;1;-4)$, $C(0;-3;1)$, $D(-5;2;-8)$;
14) $A(1;-1;2)$, $B(2;1;2)$, $C(1;1;4)$, $D(6;-3;8)$;
15) $A(3;10;-1)$, $B(-2;3;-5)$, $C(-6;0;-3)$, $D(1;-1;2)$;
16) $A(-2;-1;-1)$, $B(0;3;2)$, $C(3;1;-4)$, $D(-4;7;3)$;
17) $A(0;3;2)$, $B(-1;3;6)$, $C(-2;4;2)$, $D(0;5;4)$;
18) $A(-1;2;0)$, $B(-2;2;4)$, $C(-3;3;0)$, $D(-1;4;2)$;
19) $A(1;2;1)$, $B(0;2;5)$, $C(-1;3;1)$, $D(1;4;3)$;
20) $A(2;2;3)$, $B(1;2;7)$, $C(0;3;3)$, $D(2;4;5)$.

Задание 5

Составить канонические уравнения:

а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы,

для которых: A, B – точки, лежащие на кривой; F – фокус; a – большая (действительная), b – малая (мнимая) полуось; ε – эксцентриситет; $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы; D – директриса кривой; $2c$ – фокусное расстояние.

1) а) $b = 15$, $F(-10,0)$;
б) $a = 13$, $\varepsilon = 14/13$;
с) $D: x = -4$;

2) а) $b = 2$, $F(4\sqrt{2},0)$;
б) $a = 7$, $\varepsilon = \sqrt{85}/7$;
с) $D: x = 5$;

3) а) $b = 7$, $F(5,0)$;
б) $a = 11$, $\varepsilon = 12/11$;
с) $D: x = 10$;

4) а) $b = 5$, $F(-10,0)$;
б) $a = 9$, $\varepsilon = 4/3$;
с) $D: x = 12$;

5) а) $b = 7$, $F(13,0)$;
б) $b = 4$, $F(-11,0)$;
с) $D: x = 13$;

6) а) $A(3,0)$, $B(2,\sqrt{5}/3)$;
б) $k = 3/4$, $\varepsilon = 5/4$;
с) $D: y = -2$;

7) а) $A(0,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{14/3},1)$;
б) $k = \sqrt{21}/10$, $\varepsilon = 11/10$;

8) а) $A(-\sqrt{17/3},1/3)$, $B(\sqrt{21}/2,1/2)$;
б) $k = 1/2$, $\varepsilon = \sqrt{5}/2$;

c) $D: y=-4$;

c) $D: y=-1$;

9) а) $A(0,-2)$, $B(\sqrt{15}/2,1)$;
   б) $k=2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon=11/9$;
   c) $D: y=5$;

10) а) $A(-3,0)$, $B(1,\sqrt{40}/3)$;
   б) $k=\sqrt{2/3}$, $\varepsilon=\sqrt{15}/3$;
   c) $D: y=4$;

11) а) $2a=22$, $\varepsilon=\sqrt{57}/11$;
   б) $k=2/3$, $2c=10\sqrt{13}$;
   c) ось симметрии Ox и $A(27,9)$;

12) а) $2a=24$, $\varepsilon=\sqrt{22}/6$;
   б) $k=\sqrt{2/3}$, $2c=10$;
   c) ось симметрии Ox и $A(-7,-7)$;

13) а) $2a=22$, $\varepsilon=10/11$;
   б) $k=\sqrt{11}/5$, $2c=12$;
   c) ось симметрии Ox и $A(-7,5)$;

14) а) $2a=50$, $\varepsilon=3/5$;
   б) $k=\sqrt{29}/14$, $2c=30$;
   c) ось симметрии Oy и $A(4,1)$;

15) а) $2a=30$, $\varepsilon=17/15$;
   б) $k=\sqrt{17}/8$, $2c=18$;
   c) ось симметрии Oy и $A(4,-10)$;

16) а) $b=\sqrt{15}$, $\varepsilon=\sqrt{10}/25$;
   б) $k=3/4$, $2a=16$;
   c) ось симметрии Ox и $A(4,-8)$;

17) а) $b=2$, $\varepsilon=5\sqrt{29}/\sqrt{29}$;
   б) $k=12/13$, $2a=26$;
   c) ось симметрии Ox и $A(-5,15)$;

18) а) $b=5$, $\varepsilon=12/13$;
   б) $k=1/3$, $2a=6$;
   c) ось симметрии Oy и $A(-9,6)$;

19) а) $b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=7/8$;
   б) $k=5/6$, $2a=12$;
   c) ось симметрии Oy и $A(-2,3\sqrt{2})$;

20) а) $b=2\sqrt{2}$, $\varepsilon=7/9$;
   б) $k=\sqrt{2}/2$, $2a=12$;
   c) ось симметрии Oy и $A(-45,15)$.

Задание 6

Найти пределы функций:

1)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$, где $a=1;-1;\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot \operatorname{ctg} 2x$;

2)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$, где a = -1; 2; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x-1}\right)^{4x+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)^{2x-1}$;

3)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$, где a = 1; 2; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{x+2}$;

4)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$, где a= -1; 1; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg 3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-3x}$;

5)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$,
где a= -2; -1; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}-2x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-4}\right)^{1-6x}$;

6)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$, где a= -1; 1; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg 5x}{\sin^2 3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-4}$;

7)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$, где a = 1; 2; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+5}\right)^{4-x}$;

8)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$, где a = -3; 3; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg 2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$;

9)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$, где a = -2; 2; ∞;

10)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$, где a = 1; 2; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x^2}-3}{\sqrt{-x^2+4}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{tg^2 3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{2x+1}-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4-x}$;

11)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$, где а = 1; 2; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg 4x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{3x+2}$;

12)

а)-в $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, где а = -1; 1; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2x-7}$;

13)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$, где а = -1; 1; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg 2x}{ctg 6x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x-4}\right)^{4x+2}$;

14)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$, где а = 1; 2; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+6}\right)^{x-3}$;

15)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$,

где а = -2; 2; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg 7x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-5}{4x-3}\right)^{3x+5}$;

16)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$,

где x_0 = -1; 1; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 5x}{tg 4x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{5x+3}$;

17)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$, где a = -3; 1; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+3}\right)^{4x-5}$;

18)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$, где a = -1; 1; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 8x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+6}\right)^{2x+3}$;

19)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^5+x^2}$, где a = 0; 1; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} tg 2x\cdot Ctg 3x$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+4}\right)^{x+4}$;

20)

а)-в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$, где a= -1; 2; ∞;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-Cos 4x}{\sin^2 3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)^{2x-1}$.

Задание 7

Найти производную.

1)

а) $y=x^2-4x^3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{x^2}$

б) $y=\cos(x-4)\sin(3x+5)$

в) $y=\dfrac{tgx}{17x-4}$

г) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$

д) $\begin{cases} x=3t^2+1 \\ y=\sin\dfrac{t^3}{3} \end{cases}$

е) $y^2-4x^2y+\dfrac{1}{x}=0$

ж) $y=x^{\sin 2x}$

2)

а) $y=x^3+\dfrac{1}{x^3}-3\ln x$

б) $y=tg3x\cdot e^{4x-1}$

в) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos 2x}$

г) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$

д) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=tgt \end{cases}$

е) $y+xy-x^2y=0$

ж) $y=(4x)^{\sin 2x}$

3)

а) $y = ctgx - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

б) $y = \log_5 x \cdot \log_7 (5x - 1)$

в) $y = \frac{\sin(3x - 5)}{e^{3x}}$

г) $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$

д) $\begin{cases} y = arcsin(t - 1) \\ x = t^2 + 1 \end{cases}$

е) $y^2 x^2 + xy - x = 0$

ж) $y = (3x)^{sin\,5x}$

4)

а) $y = \cos x + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

б) $y = tg(7x + 5) \cdot e^{3x}$

в) $y = \frac{17x - 4x^2 + 5}{3x - 7}$

г) $y = \ln \sin \frac{2x + 3}{2x + 1}$

д) $\begin{cases} x = ctgt \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

е) $x - y^2 + x^2 + xy = 0$

ж) $y = x^{sin\,5x}$

5)

а) $y = \arccos x + x^2 - 4x + \frac{1}{x}$

б) $y = \sin(3x + 1) \cdot tg(x + 3)$

в) $y = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$

г) $y = \lg \ln ctgx$

д) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

е) $x + y + x^2 + y^2 + xy = 0$

ж) $y = (2x)^{sin\,5x}$

6)

а) $y = x^3 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 2x^7$

б) $y = \ln(3x - 5) \cdot e^{3x - 5}$

в) $y = \frac{\log 3x}{\arcsin x}$

г) $y = \ln \ln^2 \ln^{3x}$

д) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

е) $x^2 y + xy^2 = 0$

ж) $y = (4x)^{sin\,3x}$

7)

а) $y = tgx + x^2 - \frac{1}{x^2}$

б) $y = \cos \frac{3x - 7}{2} \cdot 3^x$

в) $y = \frac{ctg\,3x}{\arcsin x}$

г) $y = \log_{16} \log_5 tgx$

д) $\begin{cases} x = e^{\frac{t}{2}} \\ y = \log_2 t \end{cases}$

е) $y^3 - x^3 + xy = 0$

ж) $y = (5x)^{sin\,4x}$

8)

а) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

б) $y = \arccos x \cdot tg(3x - 4)$

в) $y = \frac{2^x}{\sin x + \cos x}$

г) $y = \ln \ln \sin(1 + \frac{1}{x})$

д) $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \arcsin t \end{cases}$

е) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 0$

ж) $y = (3x)^{sin\,x}$

9)

а) $y = x^2 + \frac{1}{x^4} + \arccos x$

б) $y = 2^{3x-7} \cdot \log_3 2x$

в) $y = \frac{arctg(2x-1)}{x^2+4}$

г) $y = \ln \frac{\ln x}{\sin x}$

д) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = t+1 \end{cases}$

е) $x - y + x^2 - xy = 0$

ж) $y = (2x)^{sin\,4x}$

10)

а) $y = e^x + 2^x + \log_2 x$

б) $y = \arccos x \cdot arctgx$

в) $y = \frac{\cos 60x}{\sin 30x}$

г) $y = \lg \ln ctgx$

д) $\begin{cases} x = \sqrt{t+1} \\ y = \sqrt{t-1} \end{cases}$

е) $x^2 - y^2 - x^2 y = 0$

ж) $y = x^{sin\,3x}$

11)

а) $y = 1 + 4x - \frac{4}{x} - x^3 + \frac{1}{x^3}$

б) $y = 2^{3x-1} \cdot \cos 2x$

в) $y = \frac{tg(3x-4)}{\arcsin x}$

г) $y = \ln^2(x + \cos x)$

д) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln \sqrt{t} \end{cases}$

е) $x^3 + xy + \frac{y}{x} = 0$

ж) $y = (4x)^{sin\,5x}$

12)

а) $y = arctgx + x^2 + \frac{1}{x}$

б) $y = e^{3x} \cdot (4x + 5x^2 + 7)$

в) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}}$

г) $y = \ln^2(1 - \sin x)$

д) $\begin{cases} x = \frac{t}{t+1} \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$

е) $\frac{x}{y} - \frac{x^2}{y} + yx = o$

ж) $y = x^{sin\,2x}$

13)

а) $y = arcctgx + x^3 - \frac{1}{x^2}$

б) $y = 2^{3x} \cdot \arcsin x$

в) $y = \frac{tg(3x-4)}{\cos(4-3x)}$

г) $y = \ln \sin \frac{1}{x}$

д) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

14)

а) $y = e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

б) $y = \sin(3x+5) \cdot (x^2 - 1)$

в) $y = \frac{\log_3 x}{\cos 2x}$

г) $y = \arcsin e^{3x-1}$

д) $\begin{cases} x = 1 + cost \\ y = 1 - \sin^2 t \end{cases}$

е) $x - y + xy - x^2 y^2 = 0$

е) $x^2 + y^2 + xy^2 = 0$

ж) $y = (4x)^{\sin x}$

ж) $y = (2x)^{\sin 5x}$

15)

а) $y = \frac{1}{x} + x^3 - 13x^2 + 7x$

б) $y = \cos(4x - 1)\log_7(5x - 1)$

в) $y = \frac{\cos(4x+1)}{15x^2 - 3x + 1}$

г) $y = \arcsin e^{-3x-1}$

д) $\begin{cases} x = \ln(1-t) \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$

е) $y^3 - 3xy + x^3 = 0$

ж) $y = (3x)^{\sin 5x}$

16)

а) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^3}$

б) $y = \arccos x \cdot ctg(7x - 5)$

в) $y = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$

г) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$

д) $\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = \frac{1}{t+1} \end{cases}$

е) $y^2 + 4xy + x^7 = 0$

ж) $y = (2x)^{\sin 3x}$

17)

а) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} + x^2$

б) $y = ctg(3x - 7) \cdot e^{x+1}$

в) $y = \frac{1 + e^x}{e^{2x}}$

г) $y = \ln \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$

д) $\begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = \arccos t \end{cases}$

е) $y^3 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 0$

ж) $y = (5x)^{\sin x}$

18)

а) $y = e^{-x} + 3^x + \frac{1}{x}$

б) $y = 3^{x-4} \arccos x$

в) $y = \frac{\sin 60x}{\cos 30x + 1}$

г) $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

д) $\begin{cases} x = \sqrt{1 + t^2} \\ y = ctgt \end{cases}$

е) $x^3 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 0$

ж) $y = x^{\sin 4x}$

19)

а) $y = tgx + x^2 - \frac{1}{x^2}$

б) $y = \cos(5x - 1)\log_7(4x - 1)$

в) $y = \frac{ctg 5x}{\arcsin x}$

г) $y = \log_{12} \log_5 tgx$

20)

а) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

б) $y = 2^{7x-1} \cdot \cos 2x$

в) $y = \frac{4^x}{\sin x + \cos x}$

д) $\begin{cases} x = e^{\frac{t}{2}} \\ y = \log_2 t \end{cases}$

е) $y^3 - x^3 + xy = 0$

ж) $y = (5x)^{\sin 3x}$

г) $y = \ln\ln\sin(1 - \frac{1}{x})$

д) $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \arcsin t \end{cases}$

е) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 0$

ж) $y = (5x)^{\sin x}$

Задание 8

Исследовать функцию и построить ее график.

1) $y = \frac{x^3}{4 - x^2}$; 2) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$; 4) $y = \frac{3x - 9}{(x-1)^2}$;

5) $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$; 6) $y = \frac{x}{4x^2 - 1}$; 7) $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$; 8) $y = x + \frac{1}{2x^2}$;

9) $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$; 10) $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$; 11) $y = \frac{2x^2}{4x^2 - 1}$; 12) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$;

13) $y = \frac{4x^2}{x^3 - 1}$; 14) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$; 15) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$; 16) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$;

17) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$; 18) $y = x + \frac{4}{x+2}$; 19) $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$; 20) $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$.

5 Вопросы к зачету

1) Понятие множества, виды множеств, способы задания множеств.

2) Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность.

3) Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами.

4) Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Действия над комплексными числами.

5) Определители: понятие определителя, правила вычисления, свойства.

6) Матрицы: основные виды матриц, линейные операции над матрицами, свойства операций.

7) Специальные операции над матрицами: транспонирование, умножение, построение обратной матрицы.

8) Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными методом Крамера, матричным способом.

9) Ранг матрицы, элементарные преобразования матрицы.

10) Условие совместности системы m уравнений с n неизвестными. Построение общего решения системы линейных уравнений методом Гаусса.

11) Множество геометрических векторов на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами в геометрической и координатной формах.

12) Линейная зависимость и независимость векторов пространства. Базис, размерность, координаты вектора.

13) Скалярное произведение векторов: определение, свойства, геометрический смысл, координатное представление.

14) Векторное произведение векторов: определение, свойства, геометрический смысл, координатное представление.

15) Смешанное произведение векторов: определение, свойства, геометрический смысл, координатное представление.

16) Различные уравнения прямой на плоскости. Метрические соотношения на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.

17) Различные уравнения плоскости в пространстве. Метрические соотношения в пространстве.

18) Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

19) Понятие функции. Основные элементарные и элементарные функции: их свойства и графики.

20) Окрестность точки. Предел последовательности, предел функции. Основные свойства.

21) Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций. Замечательные пределы.

22) Непрерывность функции. Классификация точек разрыва функции.

23) Дифференцирование функции одной переменной: определение, геометрический и физический смысл. Правила дифференцирования, таблица производных. Уравнения касательной и нормали.

24) Дифференциал функции одной переменной: определение, геометрический и физический смысл. Свойство инвариантности дифференциала.

25) Дифференцирование сложной и обратной функции, параметрически заданной функции. Производные и дифференциалы высших порядков.

26) Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Их геометрический смысл. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ u $\left(\frac{0}{0}\right)$.

27) Экстремум функции одной переменной: определение, необходимое и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.

28) Исследование функции одной переменной и построение графика.

6 Литература

1 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов. Ч. 1. / П.Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М.: Мир и Образование, 2012. – 368 с.

2 Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учебник для вузов / Д.В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008, 2009. – 312 с.

3 Шипачев, В.С. Высшая математика [Текст]: учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007, 2008. – 479 с.

Список использованных источников

1 Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. М.: ООО «Издательство Астрель», 2002. – 992 с.

2 Мироненко, Е.С. Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов инженерно-технических специальностей вузов / Е.С. Мироненко. – М.: Высш. шк., 1998. – 110 с.

3 Зимина, О.В. Высшая математика / О.В. Зимина, А.И. Кириллов, Т.А. Сальникова. Под ред. А.И. Кириллова. – 3-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2003. – 368 с.

4 Зубова, И.К. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учеб. пособие / И.К. Зубова, О.В. Острая. – М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009.

5 Казакова, О.Н. Математика: учеб.- метод. пособие / О.Н. Казакова, О.Н. Конюченко, Т.А. Фомина. – М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009.

6 Кузнецов, Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты [Текст]: учеб. пособие / Л.А. Кузнецов. – 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2006. – 240 с.

7 Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных задач по высшей математике. Ч. 1/ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Минск: Изд-во «Вышейшая школа», 1990. – 271 с.

8 Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию: учебное пособие/ А.С. Шапкин. – 3-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2006. – 432 с.

Приложение А
(справочное)

Таблица производных и правила дифференцирования

$(C)'=0$

$(ax+b)'=a$

$(x^m)'=mx^{m-1}$

$(x\ )'=1$

$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x}\ )'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(e^x)'=e^x$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\mathrm{tg}\, x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}\, x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

$(U\pm V)'=U'\pm V'$

$(UV)'=U'V+UV'$

$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$

$y'_x=y'_u\,u'_x$, если $y=y(u)$, $u=u(x)$

Таблица эквивалентности бесконечно малых

При $\alpha\to 0$ будут эквивалентными:

$\sin\alpha$ и α	$1-\cos\alpha$ и $\frac{\alpha^2}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$ и α	$\ln(1+\alpha)$ и α
$\arcsin\alpha$ и α	$e^\alpha-1$ и α
$\mathrm{arctg}\alpha$ и α	$a^\alpha-1$ и $\alpha\ln a$