

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

СОВРЕМЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии, 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 10.03.01 Информационная безопасность, 44.03.01 Педагогическое образование

Оренбург
2018

УДК 519.8(076.5)
ББК 22.18я7
С54

Рецензент – доктор технических наук, профессор, А.И. Сердюк.

Авторы: И.П. Болодурина, Л.М. Анциферова, О.В. Острая,
А.А. Нугуманова

С54 Современные математические подходы в моделировании:
методические указания / И.П. Болодурина, Л.М. Анциферова, О.В.
Острая, А.А. Нугуманова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург:
ОГУ, 2018. – 33 с.

Методические указания содержат рекомендации к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Современные математические подходы в моделировании». Методические указания предназначены для студентов направлений подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии, 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 10.03.01 Информационная безопасность, 44.03.01 Педагогическое образование, а так же студентам других специальностей и направлений, изучающим дисциплину.

УДК 519.8(076.5)
ББК 22.18я7

© Болодурина И.П.,
Анциферова Л.М.,
Острая О.В.,
Нугуманова А.А., 2018
© ОГУ, 2018

Содержание

Введение	5
1 Практическое занятие №1. Качественная теория динамических систем	7
1.1 Физический маятник	7
1.1.1 Содержание практической работы.....	7
1.1.2 Приведение уравнений к безразмерному виду	9
1.1.3 Задание к практической работе	10
1.1.4 Содержание письменного отчета	10
1.1.5 Вопросы для самоконтроля	11
1.2 Двойной маятник	11
1.2.1 Содержание практической работы.....	11
1.2.2 Задание к практической работе	13
1.2.3 Содержание письменного отчета	13
1.2.4 Вопросы для самоконтроля	13
2 Практическое занятие №2. Динамика биологических популяций.....	14
2.1 Модель Мальтуса.....	14
2.2. Моделирование развития изолированной популяции.....	16
2.3 Задание к практической работе	20
2.4 Содержание письменного отчета	20
2.5 Вопросы для самоконтроля	21
3 Практическое занятие №3. Полет сверхзвукового самолета.....	21
3.1 Математическая модель полета сверхзвукового самолета	21
3.2 Задание к практической работе	23
3.3 Содержание письменного отчета	23
3.4 Вопросы для самоконтроля	23
4 Практическое занятие №4. Стыковка космического корабля	24
4.1 Математическая модель стыковки космического корабля.....	24
4.2 Задание к практической работе	25
4.3 Содержание письменного отчета	25

4.4 Вопросы для самоконтроля	26
5 Практическое занятие №5. Форма капли жидкости	26
5.1 Математическая модель формы капли воды.....	26
5.2 Задание к практической работе	28
5.3 Содержание письменного отчета	29
5.4 Вопросы для самоконтроля	29
Список использованных источников	30
Приложение А	33

Введение

Методические указания предназначены для практических занятий по дисциплине «Современные математические подходы в моделировании».

Целью данного курса является формирование у обучающихся умения самостоятельно применять знания математических методов и основных принципов и понятий математического моделирования, базирующихся на интенсивном использовании информационных технологий и вычислительной техники для решения конкретных исследовательских задач.

Методические указания содержат модели, которые описывают природные процессы, используемые в физике и технике. С помощью этих моделей можно предвидеть, рассчитать и понять природу того или иного явления.

Дисциплина «Современные математические подходы в моделировании» относится к блоку факультативных дисциплин и формирует у обучающихся следующие компетенции:

- способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат;
- готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности;
- способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Методические указания содержат теоретический материал к практическим занятиям, задания для практических работ, вопросы для самоконтроля и список рекомендованной литературы.

1 Практическое занятие №1. Качественная теория динамических систем

1.1 Физический маятник

1.1.1 Содержание практической работы

Физический маятник – это осциллятор, представляющий собой твёрдое тело, совершающее колебания в поле каких-либо сил относительно точки, не являющейся центром масс этого тела, или неподвижной оси, перпендикулярной направлению действия сил и не проходящей через центр масс этого тела.

Обозначения:

- φ – угол отклонения маятника от равновесия;
- m – масса маятника;
- l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника;
- J – момент инерции тела относительно оси вращения;
- g – ускорение свободного падения.

Движение тела описывается уравнением динамики вращательного движения

$$J\varepsilon = M,$$

где M – момент всех сил, действующих на тело, $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ – угловое ускорение тела (две точки обозначают вторую производную по времени). Единственная сила создающая вращательный момент – сила тяжести. Ее вращательный момент равен: $M = -mg \cdot l \sin\varphi$. Тогда пренебрегая сопротивлением среды дифференциальное уравнение, описывающее колебание физического маятника в поле силы тяжести, записывается следующим образом:

$$J\ddot{\varphi} = -mg \cdot l \sin\varphi. \quad (1)$$

Ведём обозначение $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) не может быть проинтегрировано в элементарных функциях, однако, важнейшие черты поведения системы могут быть определены качественно.

Если разложить $\sin\varphi$ в ряд Тейлора и ограничиться только первым членом разложения $\sin\varphi \approx \varphi$, то уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) называется уравнением малых колебаний. Введем обозначение $\varphi \doteq z$, тогда уравнение второго порядка (3) превращается в систему двух уравнений первого порядка

$$\frac{d\varphi}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -\omega_0^2 \varphi. \quad (4)$$

Для решения системы разделим второе уравнение на первое, тем самым, исключив время.

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{\omega_0^2 \varphi}{z}. \quad (5)$$

Полученное уравнение (5) является уравнением с разделяющимися переменными.

$$\frac{z^2}{\omega_0^2} + \varphi^2 = C^2. \quad (6)$$

Геометрически общее решение (6) уравнения (5) представляет собой семейство интегральных кривых – эллипсы, описанные около начала координат. При различных значениях C , получаем различные частные решения. В частном случае, когда $C = 0$, эллипс вырождается в точку $(0; 0)$.

Определим, как изменяется система (4) с течением времени. Из уравнения (5) следует, что если $z > 0$, то и $\varphi > 0$. Эта последовательность изменений состояния системы показана на рисунке 1 стрелками. Интегральные кривые, на которых указано направление движения, называются **фазовыми траекториями** (см. рисунок 1), а координатная плоскость **фазовой**. Замкнутые фазовые траектории соответствуют

ограниченному движению, а точка $(0; 0)$ является особой точкой и называется *центром*.

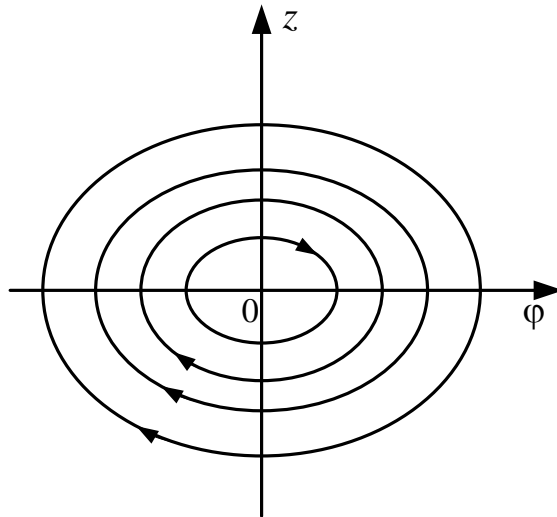


Рисунок 1 – Фазовые траектории

1.1.2 Приведение уравнений к безразмерному виду

Уравнение (6), определяющее форму фазовой траектории, содержит один параметр – ω_0 . Этот параметр влияет только на форму эллипса, или иными словами, на соотношение масштаба рисунка по различным осям. Таким образом, независимо от величины параметра движение будет оставаться периодическим. Поскольку нас интересует только качественное поведение системы, можно попытаться избавиться от этого параметра. Такой подход широко применяется при исследовании моделей. Далее будем измерять время не в секундах, а в единицах периода колебаний гармонического осциллятора. Обозначим это безразмерное время τ :

$$\tau = 2\pi \frac{t}{T} = \omega_0 t.$$

Множитель 2π введен для удобства. Если учесть, что

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} \omega_0,$$

тогда с использованием безразмерного времени уравнение колебаний (2) примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \sin\varphi = 0. \quad (7)$$

Полученное уравнение является универсальным, так как не содержит параметров. Его можно использовать для описания физического маятника с любыми параметрами, помня о том, что время следует измерять в особых безразмерных единицах. Уравнения, записанные в безразмерном виде, проще поддаются анализу, так как содержат меньшее число параметров. При этом безразмерное уравнение сохраняет все свойства и особенности исходного уравнения.

1.1.3 Задание к практической работе

Используя исходные числовые данные: $x_{max} = 0.3$ м, $l = 1$ м, $t_{max} = 10$ с, $\varphi = 30^\circ$, вывести формулы, позволяющие рассчитать период, частоту колебаний, а также интервал времени Δt . Количество значащих цифр в ускорении свободного падения ($g \approx 9,80665$ м/с²) и числе π ($\pi \approx 3,14159265358979$) выбирается в соответствии с данными задачи. Начальный момент времени удобно принять равным нулю.

По результатам расчетов необходимо построить три графика: $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$. Все вычисления произвести в пакете MathCAD.

1.1.4 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 с титульным листом (см. Приложение А), оформленным соответствующим образом, и содержать следующее:

- 1) постановку задачи;
- 2) исходные данные для анализа,
- 3) краткое изложение теории;
- 4) результаты выполнения практической работы.

1.1.5 Вопросы для самоконтроля

- 1 Дайте определение физического маятника.
- 2 Запишите уравнение, описывающее динамику вращательного движения.
- 3 Запишите дифференциальное уравнение колебаний физического маятника в поле силы тяжести.
- 4 Запишите разложение функции $y = \sin x$ в ряд Тейлора.
- 5 Определите уравнение малых колебаний.
- 6 Дайте определение фазовых траекторий.
- 7 Сформулируйте понятие безразмерного времени τ .
- 8 Как привести уравнение к безразмерному виду?
- 9 Почему уравнение записанное в безразмерном виде является универсальным?
- 10 Сохраняет ли, уравнение в безразмерном виде все свойства и особенности исходного уравнения?

1.2 Двойной маятник

1.2.1 Содержание практической работы

Колебания простого маятника имеют регулярный характер. При малых отклонениях от равновесия такие колебания являются гармоническими и описываются функцией синус или косинус. В случае нелинейных колебаний период зависит от амплитуды, но регулярность движения сохраняется.

Двойной маятник «ведет себя» совершенно иначе. Уже в режиме малых колебаний у двойного маятника возникает такое новое явление как *эффект биений*. А при увеличении энергии характер колебаний маятников меняется принципиально – колебания становятся *хаотическими*.

Представим себе два маятника примерно с одинаковым периодом колебаний, из которых один тяжелый, а другой легкий. Легкий маятник подвешен к тяжелому так, как это изображено на рисунке 2.

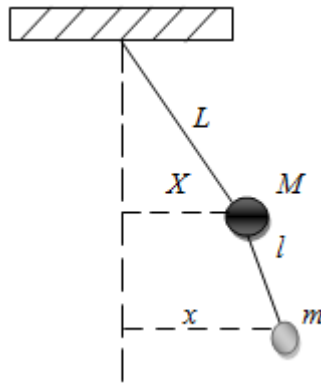


Рисунок 2 – Двойной маятник

Если отклонить слегка тяжелый маятник и отпустить его, то колебания его внезапно прекращаются. Одновременно легкий маятник приходит в быстрое движение, которое спустя некоторый промежуток времени прекращается, что сопровождается возникновением колебаний тяжелого маятника. Такие чередующиеся колебания двух колебательных систем, сопровождающиеся обменом энергиями, носят название *биений*.

Составим математическую модель движения двойного маятника. Опустим математическое описание колебания двойного маятника и сразу приведем систему дифференциальных уравнений для данного процесса в случае малых колебаний.

$$\frac{dv_X}{dt} = -\omega^2(1 + 2\mu)X + \mu\omega^2x; \quad \frac{dX}{dt} = v_X;$$

$$v_X(0) = 0; \quad X(0) = X_0;$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega^2x + \omega^2X; \quad \frac{dx}{dt} = v_x;$$

$$v_x(0) = 0; \quad x(0) = x_0.$$

где X и x – отклонения тяжелого и легкого маятников от положения равновесия; $\mu = \frac{m}{M}$ – малое число; m и M – массы легкого и тяжелого маятников соответственно; $\omega^2 = \frac{g}{l}$, где g – ускорение свободного падения; l – длина легкого маятника.

Предполагается, что приведенные длины маятников равны, т.е. $L=l$.

1.2.2 Задание к практической работе

1) Привести систему дифференциальных уравнений к безразмерному виду.

2) По результатам расчетов необходимо построить колебания двойного маятника (зависимость координат от времени) и изменение скорости колебания двойного маятника (зависимость скорости от времени). Все вычисления произвести в пакете MathCAD. Принять: $\Delta t = 1$ с, $l = 1$ м, $x = 0,5$ м, $X = 0,3$ м.

1.2.3 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 с титульным листом (см. Приложение А), оформленным соответствующим образом, и содержать следующее:

- 1) постановку задачи;
- 2) исходные данные для анализа,
- 3) краткое изложение теории;
- 4) результаты выполнения практической работы.

1.2.4 Вопросы для самоконтроля

- 1 Дайте определение двойного маятника.
- 2 Какие колебания называются нелинейными?
- 3 Дайте понятие малых колебаний.
- 4 Что называется биением?
- 5 Когда у двойного маятника возникает эффект биения?
- 6 Какие колебания называются хаотическими?

2 Практическое занятие №2. Динамика биологических популяций

2.1 Модель Мальтуса¹

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого либо объекта либо невозможно прямо указать физические законы, которым он подчиняется, либо с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями. Что, казалось бы общего между радиоактивным распадом и динамикой популяций, в частности изменением численности населения нашей планеты? Однако на простейшем уровне такая аналогия вполне просматривается, о чем свидетельствует одна из простейших моделей популяций, называемая моделью Мальтуса. В ее основу положено простое утверждение – скорость изменения населения со временем t пропорциональна его текущей численности $N(t)$, умноженной на сумму коэффициентов рождаемости $\alpha(t) \geq 0$ и смертности $\beta(t) \geq 0$. В результате приходим к уравнению

$$N'(t) = (\alpha(t) - \beta(t)) \cdot N(t), \quad (1)$$

которое похоже на уравнение радиоактивного распада и совпадающего с ним при $\alpha < \beta$ (если α и β – постоянные). Это не удивительно, так как при их выводе использовались одинаковые соображения. Интегрирование выше приведенного уравнения дает

$$N(t) = N_0 e^{\int_{t_0}^t (\alpha(t) - \beta(t)) dt}, \text{ при } t \geq t_0,$$

где $N_0 = N(t_0)$ – численность населения в момент $t = t_0$ (начальная численность).

¹ Томас Роберт Мэлтус (1766-1834) - английский священник и учёный, демограф и экономист, согласно которой неконтролируемый рост народонаселения должен привести к голоду на Земле.

На рисунке 3 приведены графики функции $N(t)$ при постоянных α и β (разным подобным друг другу кривыми соответствуют разные t_0 – значения времени начала процесса). При $\alpha = \beta$ численность остается постоянной, т.е. в этом случае решением уравнения является равновесная величина $N(t) = N_0$. Равновесие между рождаемостью и смертностью неустойчиво в том смысле, что даже небольшое нарушение равенства $\alpha = \beta$ приводит с течением времени ко все большему отклонению функции $N(t)$ от равновесного значения N_0 . При $\alpha < \beta$ численность населения убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а при $\alpha > \beta$ растет по экспоненциальному закону, обращаясь в бесконечность при $t \rightarrow \infty$. Последнее обстоятельство и послужило основанием для опасений Мальтуса о грядущем перенаселении Земли со всеми вытекающими отсюда последствиями.

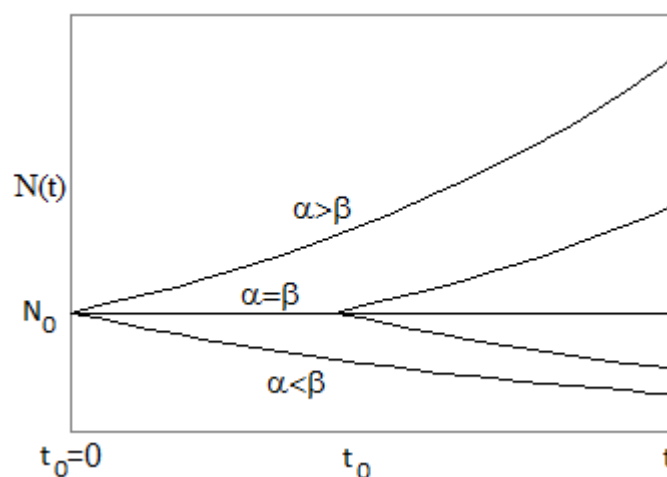


Рисунок 3 – Изменение численности популяции со временем в модели Мальтуса

В данном примере можно указать немало очевидных ограничений применимости построенной модели. Конечно же, самый сложный процесс изменения численности населения, зависящий к тому же от сознательного вмешательства самих людей, не может описываться какими-либо простыми закономерностями. Даже в идеальном случае изолированной биологической популяции предложенная модель не отвечает реальности в полной мере хотя бы из-за ограниченности ресурсов, необходимых для ее существования.

Сделанное замечание тем не менее нисколько не умаляет роли аналогий в построении математических моделей очень сложных явлений. Применение аналогий основано на одном из важнейших свойств моделей – их универсальности, т.е. их приложимости к объектам принципиально различной природы. Так, предположения типа «скорость изменения величины (или некоторой функции от нее)» широко используется в далеких друг от друга областях знаний.

2.2. Моделирование развития изолированной популяции

Предположим, что в момент времени $t = t_0$, час, численность некоторого биологического вида составляет N_0 единиц.

Пусть $N(t)$ – запас этого вида в момент времени $t \geq t_0$. Тогда производная $N'(t)$ есть темп прироста, а отношение $\frac{N'(t)}{N(t)}$ представляет собой относительный темп прироста данного биологического вида.

Далее рассмотрим биологический вид со свободным (неограниченным) и ограниченным ростом. В первой модели допустим, что относительный темп прироста есть величина постоянная, не зависящая от текущего количества. Тогда $\frac{N'(t)}{N(t)} = r$ является постоянной величиной. Отсюда следует, что справедливо дифференциальное уравнение:

$$N'(t) = rN(t), \quad (2)$$

представляющее собой математическую модель изменения численности популяции со свободным ростом. Очевидно, это есть модель Мальтуса, в которой коэффициент рождаемости $\alpha(t) = r$ является постоянной величиной, а коэффициент смертности равен нулю $\beta(t) = 0$.

Общим решением этого уравнения является функция $N = Ce^{rt}$, где C – произвольная постоянная величина. Согласно начальному условию при $t = t_0$ должно быть $N = N_0$, и тогда $N_0 = Ce^{rt_0}$. Следовательно, $C = N_0e^{-rt_0}$. Окончательно получим, что численность популяции изменяется по экспоненциальному закону:

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}. \quad (3)$$

Даже эта простейшая модель заслуживает обсуждения. Очевидно, что неограниченно долго возрастая популяция не может. Простейший способ учета внутривидовой конкуренции связан с гипотезой о том, что коэффициент воспроизводства не есть константа, а зависит от численности популяции, спадая по мере ее роста.

Во второй модели предположим, что относительный темп прироста популяции замедляется с ростом ее количества, т.е. отношение $\frac{N'(t)}{N(t)}$ убывает с увеличением $N(t)$. Если это убывание линейно, то математически этот факт можно записать в виде $\frac{N'(t)}{N(t)} = r - bN(t)$, где постоянная $b > 0$.

Отсюда следует, что имеет место дифференциальное уравнение:

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k} \right), \quad (4)$$

где $k = \frac{r}{b}$.

Уравнение (4) является частным случаем известного в математике дифференциального уравнения Бернулли². Сделаем в уравнении (4) замену переменных $N(t) = \frac{1}{z(t)}$. Тогда получим $-\frac{z'}{z^2} = \frac{r}{z} \left(1 - \frac{1}{kz} \right)$ или $z' = -rz + \frac{r}{k}$.

Таким образом, уравнение (4) свелось к линейному дифференциальному уравнению первого порядка. Общим решением последнего уравнения является функция $z(t) = \frac{C}{k} e^{-yt} + \frac{1}{k}$. В этом можно убедиться путем непосредственной подстановки.

Следовательно, общим решением уравнения (4) является функция

$$N(t) = \frac{ke^{rt}}{C + e^{rt}}.$$

С учетом начального условия $N(t_0) = N_0$ получим, что $C = \frac{k - N_0}{N_0} e^{rt_0}$.

Тогда частным решением уравнения (4) будет функция

² Якоб Бернулли (1655-1705) – швейцарский математик. Один из основателей теории вероятностей и математического анализа.

$$N(t) = \frac{kN_0 e^{r(t-t_0)}}{k + N_0(e^{r(t-t_0)} - 1)}. \quad (5)$$

Графики функций (3) и (5) изображены на рис.2 для значений $r = 0,05$, $k = 40$ и начальных условий $t_0 = 0$, $N_0 = 5$.

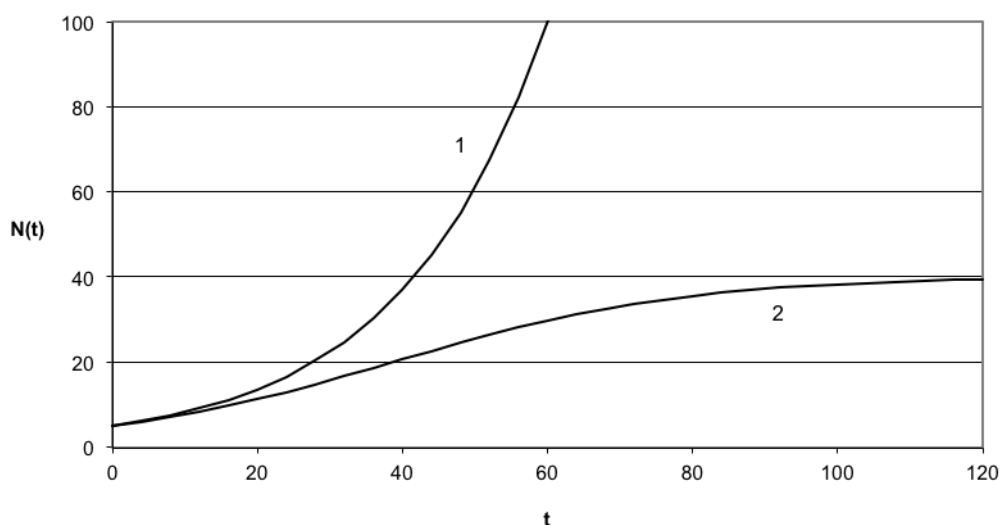


Рисунок 4 – Свободный (кривая 1) и ограниченный (кривая 2) рост популяции

Из рисунка 4 видно, что кривая 1 неограниченно возрастает, а кривая 2 с увеличением времени приближается к стационарному значению, равному $k = 40$.

Уравнение (4) называется *логистическим уравнением*. Оно известно также как уравнение Ферхюльста³. Изначально это уравнение появилось при рассмотрении модели роста численности населения.

Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом:

- скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях
- скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях.

³ Пьер Франсуа Ферхюльст (1804-1849) — бельгийский математик, известен работами в области моделирования численности населения.

Таким образом, второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.

Параметр r характеризует скорость роста (размножения), а k – емкость среды, то есть максимально возможную численность популяции.

Отметим некоторые свойства логистической функции (4):

$$1 \lim_{n \rightarrow \infty} N(t) = k;$$

2 в ситуации «достаточного объёма ресурсов», то есть пока $N(t)$ много меньше k , логистическая функция поначалу растёт приблизительно экспоненциально: $\frac{N(t)}{N_0 e^{r(t-t_0)}} = \frac{1}{1 + \frac{N_0}{k}(e^{r(t-t_0)} - 1)}$;

3 аналогично, при «исчерпании ресурсов» $t \rightarrow \infty$ разность $k - N(t)$ экспоненциально убывает с таким же показателем. Действительно, $k - N(t) = k \left(\frac{k - N_0}{k + N_0(e^{r(t-t_0)} - 1)} \right)$, и, следовательно, $(k - N(t))e^{r(t-t_0)} = \frac{k}{\frac{N_0}{k - N_0} + e^{-r(t-t_0)}}$.

Отсюда следует, что при $t \rightarrow \infty$ произведение $(k - N(t))e^{r(t-t_0)}$ стремится к постоянной величине, а это означает, что разность $k - N(t)$ убывает по экспоненциальному закону с показателем r .

В данном случае дифференциальное уравнение (4) имеет достаточно простое аналитическое решение вида (5).

Как правило, дифференциальные уравнения данного вида не имеют аналитического решения, и тогда следует находить приближенное численное решение, одним из самых простых методов решения дифференциальных уравнений первого порядка является метод Эйлера.

Рассмотрим этот метод применительно к уравнению вида $N'(t) = f(t; N)$ с начальным условием $N(t_0) = N_0$.

Правая часть уравнения имеет вид $f(t; N) = rN \left(1 - \frac{N}{k} \right)$. Выберем достаточно малый шаг интегрирования h и пусть $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_1 + h$, ..., $t_i = t_{i-1} + h$ – узлы интегрирования. Тогда $N_0 = N(t_0)$, а значения искомой

функции в узлах $N_1 = N(t_1)$, $N_2 = N(t_2)$, ..., $N_i = N(t_i)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0 + h \cdot f(t_0; N_0), \\ N_2 &= N_1 + h \cdot f(t_1; N_1), \\ &\dots, \\ N_i &= N_{i-1} + h \cdot f(t_{i-1}; N_{i-1}). \end{aligned} \tag{6}$$

В результате будет получаться таблица значений искомой функции.

t_0 , час	N_0	r , час ⁻¹	k
21	40	0,29	90

Полученные значения следует принять в качестве исходных данных.

2.3 Задание к практической работе

1) Составить математическую модель свободного роста популяции в виде линейного дифференциального уравнения, найти аналитическое решение уравнения.

2) Составить математическую модель ограниченного роста популяции в виде дифференциального уравнения Бернулли, определить аналитическое и численное решение уравнения при заданных начальных условиях.

3) Привести графическую иллюстрацию изменения численности для моделей свободного и ограниченного роста популяции.

4) Все расчеты выполнить в пакете MathCad, взять в качестве шага $h = 0,1$ и считать изменение времени от t_0 до $2t_0$.

2.4 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 с титульным листом (см. Приложение А), оформленным соответствующим образом, и содержать следующее:

- 1) постановку задачи;
- 2) исходные данные для анализа,

- 3) краткое изложение теории;
- 4) результаты выполнения практической работы.

2.5 Вопросы для самоконтроля

- 1 Какое утверждение положено в основу модели Мальтуса?
- 2 Что рассматривается в модели Мальтуса?
- 3 Как выглядит математическая модель Мальтуса?
- 4 Что такое модель логистического роста?
- 5 Какие вопросы рассматриваются в модели логистического роста?
- 6 Что означает коэффициент k в модели Ферхюльста?

3 Практическое занятие №3. Полет сверхзвукового самолета

3.1 Математическая модель полета сверхзвукового самолета

Рассмотрим траекторию движения при полете сверхзвукового турбореактивного самолета.

На рисунке 5 представлены силы, действующие на самолет.

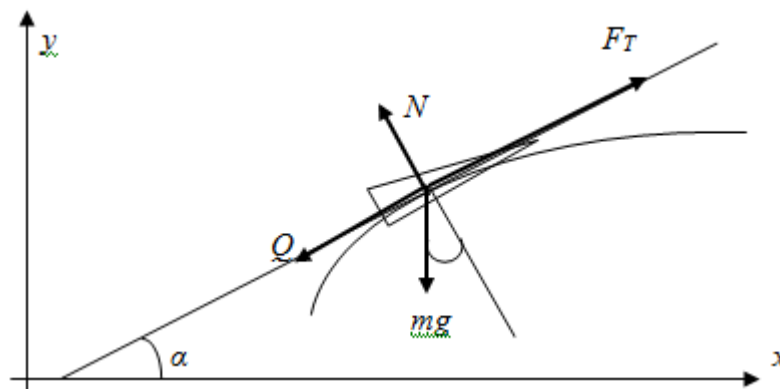


Рисунок 5 – Силы, действующие на самолет

Здесь mg – сила тяжести; Q – сопротивление воздуха; F_T – сила тяги; N – подъемная сила.

Система уравнений, описывающая движение самолета в проекции на оси координат имеет вид:

$$\begin{aligned}
m \frac{dv_x}{dt} &= F_T \cos \alpha - Q \cos \alpha - N \sin \alpha; \\
m \frac{dv_y}{dt} &= F_T \sin \alpha - Q \sin \alpha - N \cos \alpha - mg; \\
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{mv} (F_T \sin \alpha + N - mg \cos \alpha).
\end{aligned} \tag{1}$$

Проекции скоростей определяются как $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_y = v \sin \alpha$;
 $v_x = v \cos \alpha$.

Тогда систему уравнений (1) можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dy} &= \frac{F_T - Q - mg \sin \alpha}{mv \sin \alpha} = f(v; \alpha); \\
\frac{d\alpha}{dy} &= \frac{N - mg \cos \alpha}{mv^2 \sin \alpha} = \varphi(v; \alpha).
\end{aligned} \tag{2}$$

Известно, что силу сопротивления воздуха и подъемную силу можно определить по формулам:

$$Q = \frac{1}{2} k_1 \rho S v^2; N = \frac{1}{2} k_2 \rho S v^2.$$

где k_1 – коэффициент сопротивления воздуха, ρ – плотность воздуха, S – площадь крыльев, k_2 – коэффициент подъемной силы.

Плотность воздуха подчиняется закону распределения Больцмана⁴ с учетом температуры:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{mgy}{kT}} = \rho_0 e^{-\beta y \frac{T_0}{T_0 - \alpha y}}.$$

Сила тяги является функцией высоты и скорости и будем определять ее по полуэмпирической формуле:

$$F_T = \left(1 + \frac{1}{2} e^{-(0,001v-1,5)^2} \right) (10^4 - 0,27y).$$

Значение параметров самолета и внешней среды: $m = 8 \cdot 10^3$ кг,
 $k_1 = 0,02$, $k_2 = 0,2$, $S = 50$ м², $g = 9,8$ м/с².

⁴ Людвиг Больцман (1844-1906) – австрийский физик-теоретик, основатель статистической механики и молекулярно-кинетической теории.

3.2 Задание к практической работе

- 1) Решить систему уравнений (1).
- 2) Провести моделирование полета сверхзвукового полета при начальной скорости $v_0 = 450$ м/с и угле полета $\alpha_0 = 15^\circ$.
- 3) Провести исследования скорости полета и угла полета при начальных высотах $y = 1000, 2000, 3000, 4000, 5000$ и 6000 м.
- 4) Результаты моделирования представить в графическом виде. Сделать выводы.

3.3 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 с титульным листом (см. Приложение А), оформленным соответствующим образом, и содержать следующее:

- 1) постановку задачи;
- 2) исходные данные для анализа,
- 3) краткое изложение теории;
- 4) результаты выполнения практической работы.

3.4 Вопросы для самоконтроля

- 1 Объясните явление турбулентности.
- 2 Опишите поведение самолета в условиях турбулентности?
- 3 Запишите единицу измерения турбулентности.
- 4 Объясните явление, которое называется «воздушной ямой».
- 5 Запишите систему уравнений, которая описывает движение самолета.
- 6 Найдите проекции скоростей на координатные оси.
- 7 Покажите формулу, определяющую силу сопротивления воздуха. Какой смысл имеет коэффициент k_1 ?
- 8 По какой формуле определяется подъемная сила самолета. Какой физический смысл имеет коэффициент k_2 ?

9 Какому распределению подчиняется закон изменения плотности воздуха с учетом температуры?

10 Запишите формулу определяющую силу тяги самолета.

4 Практическое занятие №4. Стыковка космического корабля

4.1 Математическая модель стыковки космического корабля

Рассмотрим задачу стыковки космического корабля с орбитальной станцией.

При движении космического корабля в системе, связанной со станцией, на него действуют центробежная сила $F_{цб}$, сила Кариолиса⁵ F_K и сила тяжести F_m .

Уравнение движения в векторной форме запишется в виде:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_T + \vec{F}_K + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{двиг}. \quad (1)$$

Тогда в явном виде уравнение (1) имеет вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r} + 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] + m\omega^2 \vec{v} + m\vec{a}_k, \quad (2)$$

где $r = R + h + y$, R – радиус Земли; h – высота орбиты; y – относительная координата; v – относительная скорость.

Найдем проекции уравнения (2) на координатные оси x и y с учетом, что $\frac{GM}{(R+h)^2} = \omega^2(R+h)$ и получим:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\omega^2 R^3}{(R+h+y)^2} + \omega^2(R+h+y) - 2[\vec{v}, \vec{\omega}]_x + a_y, \quad (3)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 2[\vec{v}, \vec{\omega}]_y + a_x. \quad (4)$$

⁵ Гаспáр-Гюста́в де Кориоли́с (1792-1843) – французский математик, механик и инженер.

Если выполняется условие $y \ll h + R$, то имеем, что $\frac{R^2}{(R+h+y)^2} \approx 1 -$

$\frac{2y}{R+h}$, тогда:

$$\begin{aligned}\frac{dv_y}{dt} &= 3\omega^2 y - 2v_x \omega + a_y \\ \frac{dv_x}{dt} &= 2v_x \omega + a_x \\ \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y.\end{aligned}\tag{5}$$

где a_x и a_y – ускорения корабля, кратковременно задаваемые космонавтами для стыковки с орбитальной станцией. Начальные условия $v_{0x} = v_{0y} = 0$, $y = 0$, $x = x_0$.

Корабль и орбитальная станция находятся на одной и той же орбите на расстоянии L .

Исходные данные: $h = 629$ км, $R = 6371$ км, $r = 7000$ км, $v = 7,5$ км/с, $m = 7000$ кг, $M = 14000$ кг, $a_x \approx a_y = 4$ м/с², $L = 276$ км.

4.2 Задание к практической работе

- 1) Выведите формулы для вычисления $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$.
- 2) Задав начальные условия, интервал и время наблюдения, вычислите $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, при заданных начальных условиях.
- 3) Постройте траекторию движения корабля в координатах x и y с момента начала движения корабля до стыковки.

4.3 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 с титульным листом (см. Приложение А), оформленным соответствующим образом, и содержать следующее:

- 1) постановку задачи;
- 2) исходные данные для анализа,
- 3) краткое изложение теории;
- 4) результаты выполнения практической работы.

4.4 Вопросы для самоконтроля

- 1 Перечислите силы действующие на космический корабль в системе, связанной со станцией?
- 2 Какая сила называется центробежной? Как направлена центробежная сила?
- 3 Укажите силу позволяющую учесть влияние вращения подвижной системы отсчёта на относительное движение материальной точки?
- 4 Запишите уравнение (1) в явном виде.
- 5 Найдите проекции уравнения (2) на координатные оси x и y .

5 Практическое занятие №5. Форма капли жидкости

5.1 Математическая модель формы капли воды

На каплю, лежащую на поверхности, действуют с одной стороны, силы поверхностного натяжения, с другой стороны, силы, связанные с атмосферным давлением и сила тяжести (см. рисунок 6). Иначе говоря, давление внешних сил равно давлению внутренних сил. Математически это равенство записывается в виде $P_0 + \rho gy = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$, где r_1, r_2 – главные радиусы кривизны в данной точке поверхности: r_1 – в плоскости рисунка, r_2 – в плоскости, перпендикулярной рисунку и проходящей через нормаль в точке, y – вертикальная координата, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

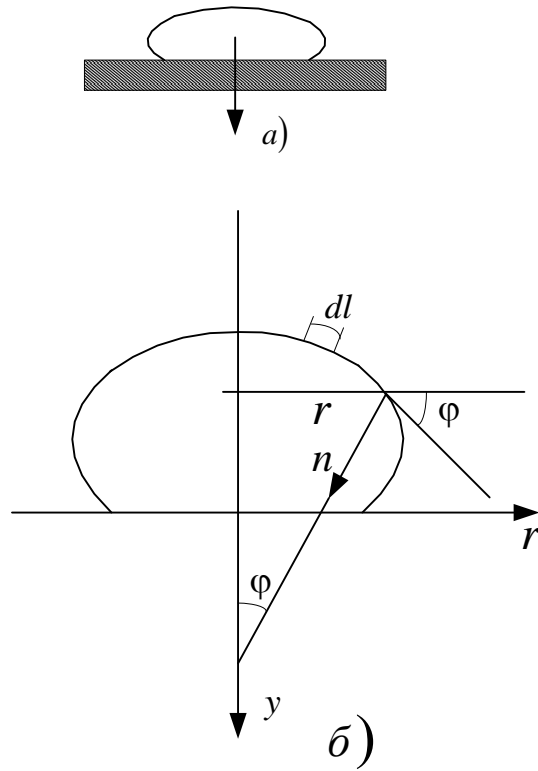


Рисунок 6 – Капля жидкости (а) и силы, действующие на неё (б)

Перейдем к полярной системе координат. Так как $dy = dr \sin \varphi$, то

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{dy}{dr} = \operatorname{tg} \varphi; \quad r'_\varphi = \frac{dr}{d\varphi}; \\
 y'' &= \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{r'_\varphi d\varphi} = \frac{1}{r'_\varphi \cos^2 \varphi}; \\
 y &= \int r'_\varphi \operatorname{tg} \varphi d\varphi.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{r}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}} = \frac{r \sqrt{1 + y'^2}}{y'^2} = \frac{r \sqrt{1 + r_y'^2}}{r_y'^2}; \\
 r_2 &= \frac{r'_\varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{(1 + y_r'^2)^3}}{y''_{rr}} = \frac{\sqrt{(1 + r_y'^2)^3}}{r''_{yy}},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

то получим $P_0 + \rho g y = \sigma \left(\frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} + \frac{y'}{r \sqrt{1 + y'^2}} \right)$ ИЛИ

$$y'' + \frac{y'}{r} - \frac{P_0 + \rho g y}{\sigma} \sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

В полярной системе координат

$$P_0 + \rho gy = \sigma \left(\frac{\cos \varphi}{r'} + \frac{\sin \varphi}{r} \right), \quad y = \int r'_\varphi t g \varphi d\varphi.$$

Уравнения в декартовой и полярной системах координат описывают форму капли, лежащую на горизонтальной поверхности. Для удобства построения профиля капли выразим эти уравнения через элемент длины профиля:

$$dy = dl \sin \varphi;$$

$$dr = dl \cos \varphi;$$

$$r'_\varphi = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dl} \frac{dl}{d\varphi} = l' \cos \varphi.$$

Тогда

$$P_0 + \rho gy = \sigma \left(\frac{1}{l'_\varphi} + \frac{\sin \varphi}{r} \right), \quad r = \int \cos \varphi dl; \quad y = \int \sin \varphi dl. \quad (3)$$

Так как $y=0$ при $\varphi=0$, то из (3) получим $P_0 = 2\sigma/R$, где R – радиус кривизны в верхней точке. Таким образом, для расчета профиля капли имеем следующую систему уравнений:

$$\rho gy = \sigma \left(\varphi'_l + \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{2}{R} \right) \Leftrightarrow \varphi'_l = \frac{\rho gy}{\sigma} + \frac{2}{R} - \frac{\sin \varphi}{r}; \quad (4)$$

$$r = \int_0^L \cos \varphi dl; \quad y = \int_0^L \sin \varphi dl; \quad V = \pi \int r^2 dy = \pi \int_0^L r^2 \sin \varphi dl; \quad S = \int_0^L 2\pi r dl$$

Исходные данные: $g=9,8$ м/с², $L=20$ мм (длина дуги капли жидкости), $\varphi=20^\circ$.

5.2 Задание к практической работе

1) Вычислить радиус (r) и высоту (y) капли, при заданных начальных условиях.

2) Вычислить объем и площадь поверхности капли жидкости с начальным радиусом кривизны $R=0,05$ см.

3) Найти зависимости радиуса капли от высоты и построить график этой зависимости (самостоятельно варьировать параметры L и φ).

5.3 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 с титульным листом (см. Приложение А), оформленным соответствующим образом, и содержать следующее:

- 1) постановку задачи;
- 2) исходные данные для анализа,
- 3) краткое изложение теории;
- 4) результаты выполнения практической работы.

5.4 Вопросы для самоконтроля

- 1 Перечислите силы действующие на каплю жидкости?
- 2 Какие физические величины относятся к внешним и внутренним силам?
- 3 Запишите уравнение сил, действующих на каплю, лежащей на горизонтальной поверхности.
- 4 Запишите уравнение сил, действующих на каплю, лежащей на горизонтальной поверхности в полярной системе координат.
- 5 Какую систему уравнений мы рассматриваем для расчета профиля капли?

Список использованных источников

- 1 Аверченков, В.И. Основы математического моделирования технических систем: учебное пособие / В.И. Аверченков, В.П. Федоров, М.Л. Хейфец. – 3-е изд., стереотип. – Москва: Издательство «Флинта», 2016. – 271 с. [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93344>.
- 2 Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – Москва: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.
- 3 Бешенков, С.А. Моделирование и формализация: метод. пособие / С.А. Бешенков, Е.А. Ракитина. – Москва: Лаборатория Базовых знаний, 2002. – 336 с.
- 4 Болодурина, И.П. Теория оптимального управления: учеб. пособие / И. П. Болодурина [и др] / Оренбург: ОГУ, 2016. – 146 с.
- 5 Бордовский, Г.А. Физические основы математического моделирования. / Г.А. Бордовский, А.С. Кондратьев, А.Д.Р. Чоудори. – Москва: Издательский центр «Академия», 2005. – 320 с.
- 6 Введение в математическое моделирование: учеб. пособие / под ред. Т.П. Трусова. – Москва: Логос, 2004. – 440 с.
- 7 Дьяконов, В.П. MATLAB 6: учебный курс / В.П. Дьяконов. – Санкт-Петербург: Питер, 2001.
- 8 Дьяконов, В.П. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник / В.П. Дьяконов, В.В. Круглов. – Санкт-Петербург: Питер, 2002.
- 9 Маликов, Р.Ф. Основы математического моделирования: учеб. пособие для вузов / Р.Ф. Маликов – Москва: Горячая линия-Телеком, 2010. – 368 с.

10 Назаров, Д.М. Сервисы MATHCAD 14: реализация технологий экономико-математического моделирования / Д.М. Назаров. - 2-е изд., исправ. – Москва: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016. – 226 с. : схем., ил. [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428813>.

11 Никулин, К.С. Математическое моделирование в системе Mathcad: лабораторный практикум: учеб. пособие / К.С. Никулин ; Министерство транспорта Российской Федерации, Московская государственная академия водного транспорта. – Москва: Альтаир: МГАВТ, 2008. – 128 с. [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=430749> .

12 Плис, А. И. MathCAD. Математический практикум для инженеров и экономистов: учеб. пособие для вузов / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.

13 Плохотников, К.Э. Метод и искусство математического моделирования: курс лекций / К.Э. Плохотников. – 2-е изд., стер. – Москва: Издательство «Флинта», 2017. – 520 с.: [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=363442>.

14 Поршневу, С.В. Компьютерное моделирование физических систем с использованием пакета MathCAD: учеб. пособие / С.В. Поршневу. – Москва: Горячая линия-Телеком, 2004. – 319 с.

15 Ремеев, И.С. Математическое моделирование физических процессов: учеб. пособие / И.С. Ремеев. – Уфа: Изд-во БашГУ, 1996. – 72 с.

16 Семененко, М.Г. Введение в математическое моделирование / М.Г. Семененко. – Москва: Солон-Р, 2002. – 112 с.

17 Семененко, М.Г. Математическое моделирование в MathCAD / М.Г. Семененко. – Москва: Альтекс-А, 2003. – 206 с.

18 Советов, Б.Я. Моделирование систем. Практикум: учеб. пособие для вузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – Москва: Высшая школа, 2005. – 295 с.

19 Теория подобия и размерностей. Моделирование. / П.М. Алабужев [и др.]. – Москва: Высшая школа, 1968. – 208 с.

Приложение А

(справочное)

Оформление титульного листа отчета по практической работе

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

_____ наименование факультета (института)

Кафедра _____

_____ наименование кафедры

ОТЧЕТ (16 pt, полужирный)

к практической работе №1

по «Современные математические подходы в моделировании»

_____ (16 pt, полужирный)

_____ наименование работы

Руководитель

канд. техн. наук, доцент

_____ подпись

_____ инициалы фамилия

« ____ » _____ 20__ г.

Студент группы _____

_____ подпись

_____ инициалы фамилия

« ____ » _____ 20__ г.

Оренбург 20__