Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра геометрии и компьютерных наук

О.Н. Казакова, Т.А. Фомина

МАТЕМАТИКА

Часть 2

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 18.03.01 Химическая технология, 18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии, 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания

Оренбург
2017

УДК 510 (076.5)
ББК 22.1я7
К 14

Рецензент – кандидат педагогических наук Л.Б. Усова

Казакова, О.Н.
К 14 Математика: методические указания к выполнению индивидуальных работ в 3 ч. Ч. 2/ О.Н. Казакова, Т.А. Фомина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2017. – 45 с.

Методические указания содержат материал, предназначенный для выполнения индивидуальных работ по курсу «Математика».

Методические указания предназначены для обучающихся по направлениям подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 18.03.01 Химическая технология, 18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии, 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания заочной формы обучения, составлены в соответствии с утвержденными рабочими программами дисциплины «Математика». Материалы могут быть полезны преподавателям высших учебных заведений, ведущим соответствующую дисциплину, и изучающим эту дисциплину студентам.

УДК 510 (076.5)
ББК 22.1я7

© Казакова О.Н.,
Фомина Т.А, 2017
© ОГУ, 2017

Содержание

Введение

Математика играет важную роль в естественно-научных, экономических, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она является не только орудием количественного исчисления, но и методом точного исследования и средством четкой формулировки понятий и проблем. Цель преподавания математики в вузе, где ведется подготовка специалистов инженерно-технических направлений – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать представление о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре; развить навыки математического исследования прикладных вопросов и умения сформулировать задачу на математическом языке. Все это понадобится для успешной работы и для ориентации в будущей профессиональной деятельности. Знания, умения и навыки, приобретенные при изучении математики, используются при изучении таких дисциплин, как: информатика, физика, начертательная геометрия, техническая механика, конструирование и расчет элементов оборудования отрасли, спецглавы математики, электротехника и промышленная электроника, вычислительные методы расчета химико-технологических систем и других.

В методических указаниях показаны примеры решения основных (типовых) задач математики, изучаемых во втором учебном семестре, а также задания для индивидуального решения. Материалы могут быть полезны преподавателям высших учебных заведений, ведущим соответствующую дисциплину, и изучающим эту дисциплину студентам.

1 Выписка из рабочей программы учебной дисциплины

Дисциплина «Математика» изучается в течение трех семестров и включает лекционные и практические занятия, выполнение индивидуальных заданий (домашней контрольной работы).

Во втором семестре студенты изучают следующие разделы:

1) Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Множества точек пространства R^n. Способы задания функции многих переменных. Геометрическое представление функции двух и трех переменных. Локальные экстремумы. Предел и непрерывность функции в точке. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных в замкнутой ограниченной области.

Частные производные. Геометрический смысл частной производной первого порядка от функции двух переменных. Независимость смешанных частных производных от порядка дифференцирования. Дифференцируемость функции в точке. Необходимое условие, необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Дифференциал. Уравнение касательной плоскости к поверхности, уравнение нормали. Производная по данному направлению. Градиент функции, его свойства.

Дифференцирование неявных функций. Производная сложной функции.

Дифференциалы высших порядков. Символическая формула для дифференциала n-го порядка.

Необходимое условие, достаточное условие локального экстремума. Нахождение глобального экстремума функции.

2) Интегральное исчисление функции одной переменной

Первообразная функция. Общий вид первообразной для данной функции. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Интегрирование заменой переменной и по частям.

Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций.

Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование с помощью тригонометрических подстановок.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл Римана: определение, необходимое условие интегрируемости функции, критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций. Основные свойства интеграла. Теорема о среднем. Интеграл с переменным верхним пределом, его непрерывность и дифференцируемость как функции верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление интеграла заменой переменной и по частям.

Вычисление площадей, длин дуг, объемов тел, работы силы, длины пути и другие геометрические и физические приложения определенного интеграла (в различных системах координат).

Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственный интеграл от неограниченных функций. Их сходимость.

3) Интегральное исчисление функции двух переменных

Задача, приводящая к понятию двойного интеграла. Его определение и условия существования. Свойства двойного интеграла и его вычисление по различным областям. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярной системе координат. Геометрические и физические приложения двойных интегралов.

4) Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка: основные понятия, задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, теорема существования и единственности решения задачи Коши, понятие общего и частного решений, их геометрический смысл. Решение дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, однородных, линейных, уравнения в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения второго порядка: основные понятия, теорема существования и единственности решения, общее и частное решения, их геометрический смысл. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

Понятие о линейной независимости (зависимости) системы функций на множестве. Определитель Вронского: определения, свойства. Критерии линейной независимости решений однородного линейного уравнения второго порядка. Теорема о структуре общих решений однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывными коэффициентами.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, фундаментальная система решений однородного уравнения, частное решение неоднородного уравнения. Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Линейные уравнения высших порядков.

5) Числовые и функциональные ряды

Понятие числового ряда. Сходимость и сумма. Гармонический и геометрический ряды. Свойства сходящихся рядов. Остаток ряда. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (сравнения, Даламбера, Коши, интегральный). Знакочередующийся ряд. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Функциональные ряды: область сходимости, равномерная сходимость. Непрерывность суммы, почленное дифференцирование и интегрирование равномерно сходящегося ряда. Теорема Абеля. Интервал, радиус и область сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость, непрерывность суммы, почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда. Постановка задачи о разложении функций в степенный ряд. Ряд Тейлора. Условия разложимости функции в степенной ряд. Разложение некоторых элементарных функций в степенные ряды. Вычисление интегралов.

Итоговой формой контроля в первом семестре является зачет.

2 Рекомендации по выполнению и оформлению контрольной работы

Особенностью заочной формы обучения является то, что больший объем учебного материала студент осваивает самостоятельно по учебникам и учебным пособиям, в том числе электронным. При этом он имеет право обращаться за помощью и консультацией к преподавателю. Студенту рекомендуется вести рабочую тетрадь, конспектировать в ней основные понятия, свойства, теоремы, правила и методы решение типовых задач. Для того чтобы хорошо усвоить теоретический материал, необходимо решать как можно больше задач, а не только те, которые предложены для индивидуального решения. При подготовке к выполнению индивидуальной расчетной работы студент должен изучить соответствующие разделы по пособиям и учебникам (список литературы прилагается).

К зачету допускаются студенты, выполнившие индивидуальную расчетную работу и прошедшие по ней собеседование.

При выполнении работы и ее оформлении необходимо придерживаться следующих правил:

– работа должна быть выполнена в тонкой тетради в клетку, имеющей поля для замечаний преподавателя;

– титульный лист оформляется в соответствии со стандартом оформления студенческих работ СТО 02069024.101–2015 Работы студенческие (http://www.osu.ru/docs/official/standart/standart_101-2015_.pdf); на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, группа, название дисциплины;

– вариант индивидуальных заданий студента соответствует его списку в группе или определяется иным способом преподавателем и сообщается студентам;

– перед решением каждой задачи нужно привести полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера;

– следует придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в задании, строго сохраняя при этом нумерацию заданий;

– в работу должны быть включены все задачи, указанные в задании по своему варианту;

– при решении заданий можно использовать различные методы решений; решения задач должны сопровождаться необходимыми пояснениями: используемые формулы, объяснение проводимых вычислений и преобразований, необходимые чертежи;

– если работа не зачтена преподавателем, то ее необходимо в соответствии с замечаниями частично или полностью переделать. Повторную работу надо выполнять в той же тетради. Вносить исправления в первоначальный текст работы после ее проверки не рекомендуется.

3 Примеры решения задач

Задание 1

Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ и $v=zx+xy+yz-18x-6z-y$ в точке $M\left(3;5;4\right)$.

Решение.

Найдём градиенты скалярных полей:

$$\overline{grad}\,U=\left\{\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right\},\quad \overline{grad}\,V=\left\{\frac{\partial v}{\partial x};\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial v}{\partial z}\right\};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)_x'=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)_y'=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)_z'=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(zx+xy+yz-18x-6z-y\right)_y'=z+y-18,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\left(zx+xy+yz-18x-6z-y\right)_y'=x+z-1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\left(zx+xy+yz-18x-6z-y\right)_z'=x+y-6.$$

Градиенты скалярных полей в произвольной точке равны:

$$\overline{grad}\,U=\left\{-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2y}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right\},$$

$$\overline{grad}\,V=\left\{z+y-18;\ x+z-1;\ x+y-6\right\}.$$

Найдем значения частных производных в заданной точке, получим, что градиенты скалярных полей в точке $M(3;5;4)$ равны:

$$\overline{grad}\,U\left(M\right)=\left\{\frac{6}{50};\ \frac{10}{50};\ \frac{8}{50}\right\},\quad \overline{grad}\,V\left(M\right)=\left\{-9;\ 6;\ 2\right\}.$$

Обозначим угол между градиентами скалярных полей через α. Найдём угол между градиентами скалярных полей, используя скалярное произведение векторов:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{grad}\,U(M)\cdot\overline{grad}V(M)}{\left|\overline{grad}\,U(M)\right|\cdot\left|\overline{grad}\,V(M)\right|};$$

$$\overline{grad}\,U(M)\cdot\overline{grad}\,V(M) = \frac{6}{50}\cdot(-9)+\frac{10}{50}\cdot 6+\frac{8}{50}\cdot 2 = \frac{22}{50};$$

$$\left|\overline{grad}\,U(M)\right| = \sqrt{\left(\frac{6}{50}\right)^2+\left(\frac{10}{50}\right)^2+\left(\frac{8}{50}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5},$$

$$\left|\overline{grad}\,V(M)\right| = \sqrt{(-9)^2+6^2+2^2} = 11;$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{22}{50}}{\frac{\sqrt{2}}{5}\cdot 11} = \frac{\sqrt{2}}{10}, \quad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Задание 2

Исследовать функцию $f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + x + y$ на экстремум.

Решение.

Найдём стационарные точки, используя необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-x^2 - xy - y^2 + x + y\right)_x' = -2x - y + 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(-x^2 - xy - y^2 + x + y\right)_y' = -x - 2y + 1;$$

$$\begin{cases} -2x - y + 1 = 0, \\ -x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Получаем одну стационарную точку $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Исследуем функцию на экстремум в точке *M,* используя достаточные условия экстремума.

Обозначим: $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M)$, $\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,dy}(M)$, $\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(-2x-y+1\right)_x'=-2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,dy}=\left(-2x-y+1\right)_y'=-1,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(-x-2y+1\right)_y'=-2.$

Тогда: $A=-2,\ B=-1,\ C=-2$.

Вычислим $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}:\Delta=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=4-1=3.$

Так как $\Delta=3>0$, то в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ экстремум есть. Так как $A=-2<0$, то в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ функция $f(x,y)=-x^2-xy-y^2+x+y$ имеет строгий локальный максимум.

Найдем значение функции в этой точке: $f\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $f_{\max}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

Задание 3

Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием:

а) $\int\frac{6x+arctg\,4x}{1+16x^2}dx$,

б) $\int x\cdot arctg\,x\,dx$,

в) $\int\frac{3x^2-x+2}{\left(1+x^2\right)\cdot(x-1)}dx$,

г) $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$,

д) $\int\frac{dx}{\sin 3x+3}$.

Решение.

а) $\int \frac{6x+arctg\,4x}{1+16x^2}dx$ – разделим почленно числитель на знаменатель, получим сумму двух интегралов.

$$\int \frac{6x+arctg\,4x}{1+16x^2}dx = \int \frac{6x}{1+16x^2}dx + \int \frac{arctg\,4x}{1+(4x)^2}dx = \frac{6}{32}\int \frac{32x}{1+16x^2}dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int arctg\,4x \cdot d(arctg\,4x) = \frac{6}{32}\cdot \ln\left|1+16x^2\right| + \frac{1}{4}\int \frac{(arctg\,4x)^2}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{16}\cdot \ln\left|1+16x^2\right| + \frac{1}{8}(arctg\,4x)^2 + C.$$

При решении использован метод подведения под знак дифференциала и правило: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx = \ln\left|f(x)\right| + C.$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{16}\cdot \ln\left|1+16x^2\right| + \frac{1}{8}(arctg\,4x)^2 + C\right)' = \frac{3}{16}\cdot \frac{1}{1+16x^2}\cdot 32x + \frac{1}{8}\cdot 2arctg\,4x\frac{1}{1+16x^2}\cdot 4 + 0 =$$

$$= \frac{6x}{1+16x^2} + \frac{arctg\,4x}{1+16x^2} = \frac{6x+arctg\,4x}{1+16x^2}.$$

б) $\int x\cdot arctg\,x\,dx = \begin{vmatrix} u = arctg\,x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\,dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = arctgx\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= arctg\,x\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = arctg\,x\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$$arctg\,x\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg\,x\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}arctg\,x =$$

$$arctg\,x\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctg\,x + C.$$

При решении использован метод интегрирования по частям: $\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du.$

Проверка:

$$\left(arctg\, x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot arctg\, x+C\right)'=(arctg\, x)'\cdot\frac{x^2}{2}+arctg\, x\left(\frac{x^2}{2}\right)'-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+0=$$

$$=\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{2}+arctg\, x\frac{2x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+x^2)}=\frac{x^2}{2(1+x^2)}+x\cdot arctg\, x-\frac{1+x^2-1}{2(1+x^2)}=$$

$$=\frac{x^2}{2(1+x^2)}+x\cdot arctg\, x-\frac{x^2}{2(1+x^2)}=x\cdot arctg\, x.$$

в) $\int\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}dx$. Представим дробь $\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)\cdot(x-1)+C(1+x^2)}{(1+x^2)\cdot(x-1)}\quad\Leftrightarrow$$

$$3x^2-x+2=(Ax+B)\cdot(x-1)+C(1+x^2),$$

$$3x^2-x+2=Ax^2+Bx-Ax-B+C+Cx^2.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^2: $3=A+C$

x^1: $-1=B-A$

x^0: $2=-B+C.$

Отсюда $A=1$, $B=0$, $C=2$.

Получаем: $\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{x-1}$.

Тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}dx=\int\left(\frac{x}{(1+x^2)}+\frac{2}{(x-1)}\right)dx=\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}+2\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+2\ln|x-1|+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+2\ln|x-1|+C\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x+2\frac{1}{x-1}+0=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{x-1}=$$

$$=\frac{x(x-1)+2(1+x^2)}{(1+x^2)\cdot(x-1)}=\frac{x^2-x+2+2x^2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}=\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}.$$

г) $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\left|\begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5\ dt\end{array}\right|=\int\frac{t}{1+t^2}\cdot 6t^5\,dt=6\int\frac{t^6}{1+t^2}\,dt=$

$$=6\int\left(t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-arctg\,t\right)+C=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-2t^3+6t-6arctg\,t+C=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\,arctg\sqrt[6]{x}+C.$$

При решении использован метод замены переменной для интегралов от иррациональных функций вида $R\left(x;\ (ax+b)^{\alpha},\ (ax+b)^{\beta},\ ...\right)$.

Проверка:

$$\left(\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C\right)'=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot x^{\frac{1}{6}}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+6\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{5}{6}}-$$

$$-6\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{5}{6}}=x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{5}{6}}-\frac{x^{-\frac{5}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{\left(x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{5}{6}}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)-x^{-\frac{5}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\frac{x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{5}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{x^{\frac{1}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

д) $\int\frac{dx}{\sin 3x+3}=\left|\begin{array}{l} t=3x,\ x=\frac{1}{3}t \\ dx=\frac{1}{3}dt\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sin t+3}=\left|\begin{array}{l} z=tg\,\frac{t}{2},\ \sin t=\frac{2z}{1+z^2} \\ dt=\frac{2dz}{1+z^2}\end{array}\right|=$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{2dz}{(1+z^2)\left(\frac{2z}{1+z^2}+3\right)}=\frac{2}{3}\int\frac{dz}{2z+3+3z^2}=\frac{2}{9}\int\frac{dz}{z^2+\frac{2}{3}z+1}=\frac{2}{9}\int\frac{dz}{\left(z+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}arctg\,\frac{z+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}}+C=\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\,\frac{3z+1}{\sqrt{8}}+C=\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\,\frac{3tg\,\frac{t}{2}+1}{\sqrt{8}}+C=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{3tg\,\frac{3x}{2}+1}{\sqrt{8}}+C\;.$$

При решении использовали универсальную тригонометрическую подстановку.

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{3tg\,\frac{3x}{2}+1}{\sqrt{8}}+C\right)'=\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{3tg\,\frac{3x}{2}+1}{\sqrt{8}}\right)^{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot 3\cdot\frac{1}{\cos^{2}\frac{3x}{2}}\cdot\frac{3}{2}+0=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{8+\left(3tg\,\frac{3x}{2}+1\right)^{2}}\cdot\frac{1}{\cos^{2}\frac{3x}{2}}=3\cdot\frac{1}{9tg^{2}\frac{3x}{2}+6tg\,\frac{3x}{2}+9}\cdot\frac{1}{\cos^{2}\frac{3x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(tg^{2}\frac{3x}{2}+\frac{2}{3}tg\,\frac{3x}{2}+1\right)\cdot\cos^{2}\frac{3x}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin^{2}\frac{3x}{2}+\frac{2}{3}\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}+\cos^{2}\frac{3x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}\sin 3x}=\frac{1}{3+\sin 3x}\;.$$

Ответ:

а) $\frac{3}{16}\cdot\ln\left|1+16x^{2}\right|+\frac{1}{8}\left(arctg\,4x\right)^{2}+C$; б) $arctg\,x\,\frac{x^{2}}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctg\,x+C$;

в) $\frac{1}{2}\ln\left|1+x^{2}\right|+2\ln\left|x-1\right|+C$; г) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^{5}}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\,arctg\sqrt[6]{x}+C$;

д) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{3tg\,\frac{3x}{2}+1}{\sqrt{8}}+C$.

Задание 4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^{2}$ и $y=x^{2}-2x$.

Решение.

Построим графики функций: $y = 4 - x^2$ парабола, ветви направлены вниз, $y = x^2 - 2x$ парабола, ветви направлены вверх.

Определим точки их пересечения: $4 - x^2 = x^2 - 2x$, $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Две точки пересечения парабол $A(-1;3)$ и $B(2;0)$. Построим эти точки и параболы (рисунок 1).

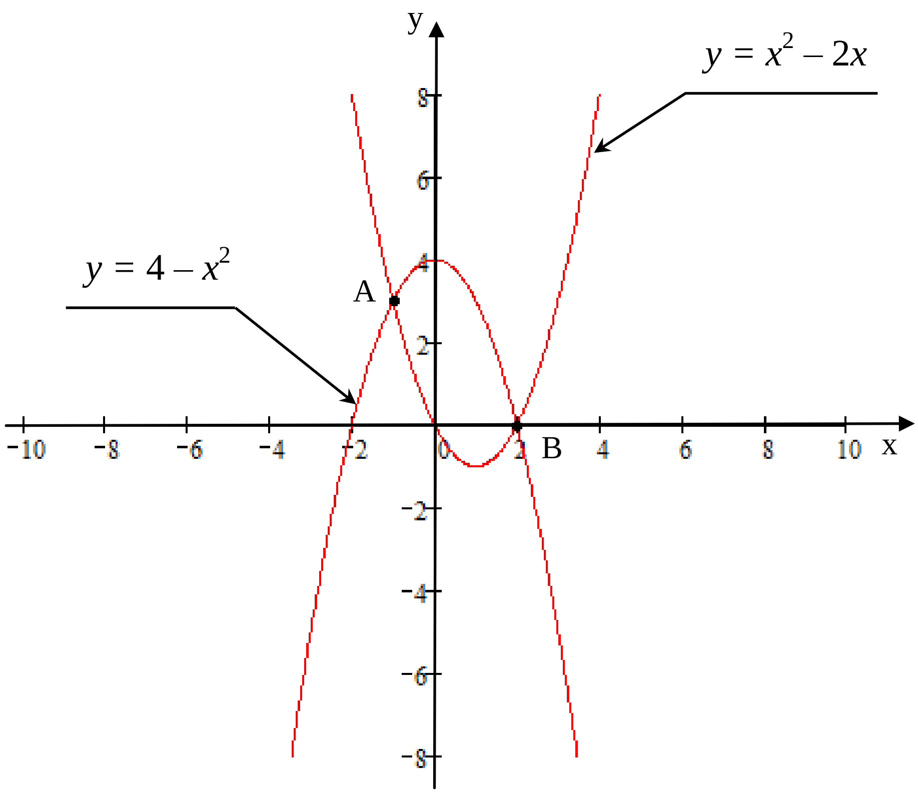

Рисунок 1 – График фигуры

Искомую площадь S можно найти по формуле: $S = \int_{-1}^{2} \left(f(x) - \varphi(x) \right) dx$,

где $f(x) = 4 - x^2$, $\varphi(x) = x^2 - 2x$.

$$S = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\, dx = \int_{-1}^{2} \left((4 - x^2) - (x^2 - 2x) \right) dx = \int_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)\, dx.$$

Отсюда $S = \int_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)\, dx = \left(4x^2 + x^2 - \frac{2}{3} x^2 \right) \Big|_{-1}^{2} = 9.$

Ответ: 9 кв. ед.

Задание 5

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

Подынтегральная функция чётная, поэтому: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$, т.е. несобственный интеграл сходится.

Ответ: интеграл сходящийся, π.

Задание 6

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями: $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$. Сделать чертеж области интегрирования.

Решение.

Построим графики функций $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$. Область интегрирования ограничена этими графиками (рисунок 2).

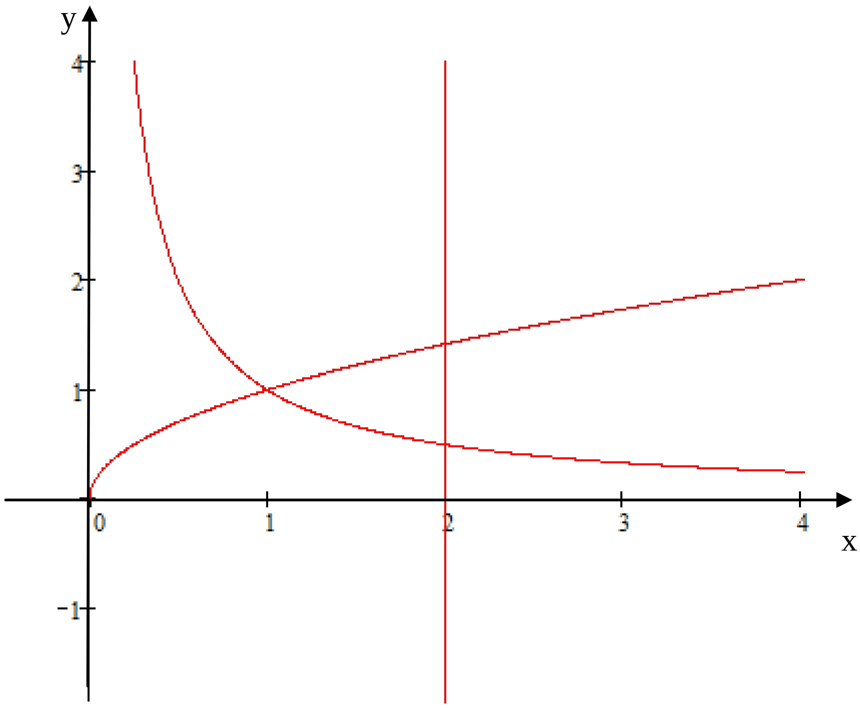

Рисунок 2 – Область интегрирования

Т.к. область интегрирования правильная в направлении оси Oy, то

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x dy = \int\limits_1^2 \frac{y^2}{2}\ln x \Big|_{1/x}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_1^2 \left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\ln x\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Вычислим получившиеся интегралы:

1) $\int x\ln x dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ – использовали метод интегрирования по частям.

Тогда $\int\limits_1^2 x\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

2) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} \ln x = t; & x = e^t; \\ dt = \frac{1}{x}dx; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{txdt}{x^2} = \int \frac{tdt}{x} = \int e^{-t}tdt = \left\{\begin{matrix} u = t; & du = dt; \\ dv = e^{-t}dt; & v = -e^{-t}; \end{matrix}\right\} =$

$= -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ – использовали метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Тогда $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right)\Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$;

Окончательно получаем

$$\iint\limits_{\Delta} y \ln x dx dy = \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\ln 2}{2} - \frac{5}{4} \right) = \frac{5\ln 2}{4} - \frac{5}{8}.$$

Ответ: $\frac{5\ln 2}{4} - \frac{5}{8}$.

Задание 7

Решить уравнение $y' - y\cos x = \sin 2x$.

Решение.

Нам дано линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Сделаем замену: $y = u \cdot v$, где $u(x)$ и $v(x)$ – новые неизвестные функции. Тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим: $u'v + uv' - uv\cos x = \sin 2x$, или $u'v + u(v' - v\cos x) = \sin 2x$.

Так как одну из функций можно выбрать произвольно, то подберем, например, функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось условие $v' - v\cos x = 0$.

Тогда получаем два более простых дифференциальных уравнения: $v' - v\cos x = 0$ и $u' \cdot v = \sin 2x$. Решим их.

1) $v' - v\cos x = 0$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Нам достаточно найти любое частное решение этого уравнения.

$v' = v\cos x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = v\cos x \Rightarrow \frac{dv}{v} = \cos x\, dx \Rightarrow$

$\int \frac{dv}{v} = \int \cos x\, dx,\ \ln v = \sin x,\ v = e^{\sin x}$ – частное решение.

2) Подставим найденное решение во второе уравнение, получим: $e^{\sin x} \cdot u' = \sin 2x$.

Откуда $u' = e^{-\sin x} \sin 2x$, тогда $u(x) = \int e^{-\sin x} \sin 2x\, dx = \int e^{-\sin x} 2 \sin x \cos x\, dx$, так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Решим этот интеграл методом замены переменной: $\sin x = t,\quad \cos x\, dx = dt$, тогда $u = 2\int e^{-t} dt$. К полученному интегралу применим метод интегрирования по частям: $\int \bar{u} d\bar{v} = \overline{uv} - \int \bar{v} d\bar{u},\qquad \bar{u} = t, e^{-t} dt = d\bar{v}.$ Отсюда $\bar{v} = \int e^{-t} dt = -e^{-t}, d\bar{u} = dt$, значит: $u = 2\left(-te^{-t} + \int e^{-t} dt\right) = 2\left(-te^{-t} - e^{-t}\right) + C$,

$u(x) = 2\left(-\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x}\right) + C = -2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C.$

Следовательно, общее решение будет:

$y = u(x) \cdot v(x) = e^{\sin x}\left(-2e^{-\sin x}(\sin x + 1) + C\right) = -2\sin x - 2 + Ce^{\sin x}$.

Ответ: $y = -2\sin x - 2 + Ce^{\sin x}$.

Задание 8

Решить задачу Коши:

а) $y''' - 2y'' - 3y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 1;$

б) $y'' - 6y' + 9y = 25e^{x} \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.;$

Решение.

а) Нам дано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение имеет вид: $k^3 - 2k^2 - 3k = 0,\ k\left(k^2 - 2k - 3\right) = 0,$ отсюда получаем корни: $k_1 = 0,\ k_2 = -1,\ k_3 = 3$.

Общее решение имеет вид: $y_{oo} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-1x} + C_3 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$, где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\ y'(0)=3,\ y''(0)=1$. Для этого найдем первую и вторую производные от общего решения: $y'_{oo}=-C_2e^{-x}+3C_3e^{3x}$, $y''_{oo}=C_2e^{-x}+9C_3e^{3x}$.

Подставим начальные условия в $y_{oo}, y'_{oo}, y''_{oo}$: $\begin{cases} 0=C_1+C_2e^0+C_3e^0 \\ 3=-C_2e^0+3C_3e^0 \\ 1=C_2e^0+9C_3e^0 \end{cases}$.

Получаем систему

$$\begin{cases} 0=C_1+C_2+C_3 \\ 3=-C_2+3C_3 \\ 1=C_2+9C_3 \end{cases}.$$

Решение этой системы: $C_1=\dfrac{5}{3},\ C_2=-2,\ C_3=\dfrac{1}{3}$.

Тогда частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решение задачи Коши) имеет вид $y=\dfrac{5}{3}-2e^{-x}+\dfrac{1}{3}e^{3x}$.

б) Нам дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет вид: $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$ (общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения данного неоднородного уравнения).

Решим однородное уравнение $y''-6y'+9y=0$ – это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0,\ (k-3)^2=0,$ имеет корни $k_1=k_2=3.$

Общее решение однородного уравнения: $y_{oo}=C_1e^{3x}+xC_2e^{3x}=(C_1+C_2x)\cdot e^{3x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Частное решение однородного уравнения имеет вид: $y_{чн}=e^x(A\cos x+B\sin x)$ (приложение А), где A, B – некоторые постоянные, которые нам пока неизвестны. Так как данное выражение, по предположению, является решением дифференциального уравнения, то при подстановке должно получиться верное равенство.

$$y'_{чн}=e^{x}\left(A\cos x+B\sin x\right)+e^{x}\left(-A\sin x+B\cos x\right),$$

$$y''_{чн}=e^{x}\left(A\cos x+B\sin x\right)+2e^{x}\left(-A\sin x+B\cos x\right)+e^{x}\left(-A\cos x-B\sin x\right).$$

Подставляя $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ в исходное неоднородное уравнение, получим:

$e^{x}(3A-4B)\cos x+e^{x}(4A+3B)\sin x=25e^{x}\sin x$. Разделим обе части уравнения на e^{x}, т.к. $e^{x}\neq 0$, получим: $(3A-4B)\cos x+(4A+3B)\sin x=25\sin x$.

Сравнивая коэффициенты при $\cos x, \sin x$, получим систему уравнений: $\begin{cases}3A-4B=0\\4A+3B=0\end{cases}$.

Решение этой системы $A=4,\ B=3$ и, следовательно:

$$y_{чн}=e^{x}\left(4\cos x+3\sin x\right).$$

Общее решение данного уравнения: $y_{он}=\left(C_1+xC_2\right)\cdot e^{3x}+e^{x}\cdot\left(4\cos x+3\sin x\right)$.

Найдём частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=2$, т.е. найдём значения произвольных постоянных C_1 и C_2. Для этого найдем первую производную от общего решения.

$$y'_{он}=c_2e^{3x}+\left(c_1+xc_2\right)e^{3x}+e^{x}\left(4\cos x+3\sin x\right)+e^{x}\left(-4\sin x+3\cos x\right).$$

Подставим заданные начальные условия в $y_{он}$ и $y'_{он}$:

$$\begin{cases}1=\left(C_1+0\right)e^{0}+e^{0}\left(4+0\right),\\2=C_2+\left(C_1+0\right)e^{0}+e^{0}\left(4+0\right)+e^{0}\left(0+3\right);\end{cases}\quad\begin{cases}C_1=-3,\\2=C_2+C_1+7;\end{cases}\quad\begin{cases}C_1=-3,\\C_2=-2,\end{cases}$$

т.е. частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y=\left(-3-2x\right)\cdot e^{3x}+e^{x}\cdot\left(4\cos x+3\sin x\right)=-e^{3x}(3+2x)+e^{x}\cdot\left(4\cos x+3\sin x\right)$$

Ответ:

а) $y_{оо}=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}$ – общее решение; $y=\dfrac{5}{3}-2e^{-x}+\dfrac{1}{3}e^{3x}$ – частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\ y'(0)=3,\ y''(0)=1$;

б) $y_{он} = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{3x} + e^x\left(4\cos x + 3\sin x\right)$ – общее решение;

$y = -e^{3x}\left(3 + 2x\right) + e^x\left(4\cos x + 3\sin x\right)$ – частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Задание 9

Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+1} \cdot \left(x+2\right)^n$.

Решение.

Для нахождения области сходимости воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+4)\cdot(x+2)^{n+1}\cdot(n^2+1)}{\left((n+1)^2+1\right)\cdot(n+3)\cdot(x+2)^n}\right| = |x+2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)\cdot(n^2+1)}{(n^2+2n+2)\cdot(n+3)} = |x+2|.$$

Ряд абсолютно сходится при $|x+2| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < x+2 < 1 \;\Rightarrow -3 < x < -1$.

Ряд расходится при $x \in (-\infty; -3)\bigcup(-1; +\infty)$.

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала:

$x = -1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-1+2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$ – числовой положительный ряд.

Воспользуемся признаком сравнения. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, он расходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+1} : \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+1} = 1$, то по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$ так же расходится. Значит исходный ряд при x= -1 – расходится.

$x = -3$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-3+2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-1)^n$ – знакочередующийся ряд.

Воспользуемся признаком Лейбница:

1) $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n^2+1} = 0$,

т.к. выполняются оба условия теоремы Лейбница, то этот знакочередующийся ряд сходится.

Т.к. соответствующий ряд из модулей расходится, то знакочередующийся ряд сходится условно. Значит исходный рад при х= -3 – сходится.

Ответ: $-3 \le x < -1$, в точке $x = -3$ ряд сходится условно.

Задание 10

Вычислить приближённо с точностью до 0,001 определённый интеграл $\int\limits_{-0,6}^{0}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

Решение.

Воспользуемся разложением функции в биномиальный ряд (приложение А):

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{3}} = 1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot x^4-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\cdot x^6+..., \quad |x|<1.$$

Так как отрезок интегрирования [–0,6; 0] находится внутри интервала сходимости биномиального ряда, то ряд можно почленно интегрировать.

Получаем:

$$\int\limits_{-0,6}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_{-0,6}^{0}\left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\cdot x^4-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\cdot x^6+...\right)dx =$$

$$=\left(x-\frac{1}{3\cdot 3}\cdot x^3+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 5}\cdot x^5-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 7}\cdot x^7+...\right)\Bigg|_{-0,6}^{0} =$$

$$=-\left(-0,6+\frac{(0,6)^3}{9}-\frac{2(0,6)^5}{45}+\frac{14(0,6)^7}{567}-...\right).$$

Вычислим эту сумму с точностью до 0,001.

$$a_1 = 0{,}6 > 0{,}001,\ \ a_2 = \frac{(0{,}6)^3}{9} = 0{,}024 > 0{,}001,\ \ a_3 = \frac{2\cdot(0{,}6)^5}{45} \approx 0{,}003 > 0{,}001,$$

$$a_4 = \frac{14\cdot(0{,}6)^7}{567} \approx 0{,}007 < 0{,}001.$$

Поэтому:

$$\int_{-0,6}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = -(-a_1 + a_2 - a_3) \pm 0{,}001 = 0{,}6 - \frac{(0{,}6)^3}{9} + \frac{2\cdot(0{,}6)^5}{45} \pm 0{,}001 = 0{,}579 \pm 0{,}001.$$

Ответ: $0{,}579 \pm 0{,}001.$

4 Варианты заданий для индивидуальной работы

Задание 1

Найти угол между градиентами скалярных полей $U(x;\ y;\ z)$ и $V(x;\ y;\ z)$ в точке M.

1) $u=\dfrac{1}{xyz},\quad v=x^2+9y^2+6z^2,\quad M\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right);$

2) $u=\dfrac{x}{yz^2},\quad v=x^2-y^2-3z^2,\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right);$

3) $u=\dfrac{x^2z}{y^3},\quad v=\dfrac{-3x^3}{\sqrt{2}}+\dfrac{2\sqrt{2}y^3}{3}+8\sqrt{3}z^3,\quad M\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}};\sqrt{\dfrac{3}{2}};\dfrac{1}{2}\right);$

4) $u=\dfrac{x}{y^2z^3},\quad v=\dfrac{1}{\sqrt{2}x}-\dfrac{2\sqrt{2}}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2z},\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right);$

5) $u=x^2yz,\quad v=\dfrac{-4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}z},\quad M\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right);$

6) $u=\dfrac{y^2z^3}{x^2},\quad v=\dfrac{x^3}{\sqrt{2}}-\dfrac{y^3}{\sqrt{2}}-\dfrac{8z^3}{\sqrt{3}},\quad M\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right);$

7) $u=x^2y\cdot z^3,\quad v=\dfrac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2,\quad M\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right);$

8) $u=\dfrac{xy^2}{z^3},\quad v=9\sqrt{2}\cdot x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}},\quad M\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right);$

9) $u=\dfrac{1}{xy^2z},\quad v=\sqrt{2}x^2-\dfrac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}\cdot z^2,\quad M\left(1;\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right);$

10) $u=\dfrac{z^2}{x^2y^2},\quad v=\dfrac{3x^2}{\sqrt{2}}-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cdot z^2,\quad M\left(\dfrac{2}{3};2;\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right).$

11) $u=\dfrac{yz^2}{x},\quad v=x^2-y^2-3z^2,\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right);$

12) $u=\dfrac{y}{xz^2},\quad v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3,\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}};0\right);$

13) $u=\dfrac{y^2z^3}{x}$, $\quad v=\dfrac{1}{\sqrt{2}x}-\dfrac{2\sqrt{2}}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2z}$, $\quad M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

14) $u=\dfrac{x^2}{y^2z^3}$, $\quad v=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $\quad M\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

15) $u=xyz$, $\quad v=x^2+9y^2+6z^2$, $\quad M\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

16) $u=\dfrac{y^3}{x^2z}$, $\quad v=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2y}-\dfrac{\sqrt{6}}{4z}$, $\quad M\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}};\sqrt{\dfrac{3}{2}};\dfrac{1}{2}\right)$;

17) $u=\dfrac{x^3y^2}{z}$, $\quad v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}\,z}$, $\quad M\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

18) $u=\dfrac{z^2}{xy^2}$, $\quad v=3\sqrt{2}\cdot x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$, $\quad M\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$;

19) $u=\dfrac{z}{x^3y^2}$, $\quad v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}\,z}$, $\quad M\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

20) $u=x^2yz^3$, $\quad v=\dfrac{4\sqrt{6}}{x}-\dfrac{\sqrt{6}}{9y}+\dfrac{3}{z}$, $\quad M\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Задание 2

Исследовать функцию $z=f(x,y)$ на экстремум.

1) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$;

2) $z=3xy-x^2-3y^2-6x+9y+2$;

3) $z=3xy-x^2-y^2-10x+5y+3$;

4) $z=3x^2+5xy+3y^2+4x+7y+1$;

5) $z=3xy-x^2-3y^2+x+3$;

6) $z=5+4x+10y-4xy-2x^2-3y^2$;

7) $z=1-x+y-5xy-3x^2-3y^2$;

8) $z=xy-2x^2-y^2+7x-7y-10$;

9) $z=x^2+3xy-2y^2+2x+3y+1$;

10) $z=3xy-x^2-4y^2+4x-6y+5$;

11) $z=x^2+3xy+y^2-x-4y+3$;

12) $z=x^2-xy+y^2+x+y+4$;

13) $z=x^2+xy+y^2-13x-11y+17$;

14) $z=x^2+xy+y^2+4x-y+5$;

15) $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-6$;

16) $z=3x^2+3xy+y^2-6x-2y+7$;

17) $z=x^2-xy+2y^2+2x-8y+3$;

18) $z=2x^2+3xy+2y^2-4x-10y+12$;

19) $z=2x^2-3xy+2y^2-9x+12y+10$;

20) $z=x^2+xy-y^2-5x+5y-2$.

Задание 3

Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1) а) $\int \frac{8x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}dx$; б) $\int \ln\left(x^2+4\right)dx$; в) $\int \frac{(x+3)}{x^3+x^2-2x}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 4x+4}$

2) а) $\int \frac{\operatorname{arctg}x+x}{1+x^2}dx$; б) $\int (4x-3)e^{-2x}dx$; в) $\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$; г) $\int \frac{3x}{\sqrt{(x+1)^3}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x+4}$

3) а) $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$; б) $\int \left(\sqrt{2}+3x\right)\sin 3x\,dx$; в) $\int \frac{x^2}{x^3-5x^2+8x+4}dx$; г) $\int \frac{1}{2+\sqrt[4]{x-1}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 5x+1}$

4) а) $\int \frac{4\operatorname{arctg}x-x}{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+5}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 3x+5}$

5) а) $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$; б) $\int \sqrt{x^3}\cdot \ln x\,dx$; в) $\int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{4-x}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 2x+5}$

6) а) $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int arctg\left(\sqrt{5x-1}\right)dx$; в) $\int \frac{3x^2+1}{x^2-1}dx$; г) $\int \frac{1}{5-\sqrt[3]{x^2}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 2x+1}$

7) а) $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int x^2\sin 3x\,dx$; в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; г) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 5x+4}$

8) а) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; б) $\int (1-\ln x)dx$; в) $\int \frac{x^2}{x^4-81}dx$; г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x+6}$

9) а) $\int \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^2}dx$; б) $\int \left(\sqrt{2}-8x\right)\sin 3x\,dx$; в) $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$; г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 4x+1}$

10) а) $\int \frac{x+(arctg\,x)^2}{1+x^2}dx$; б) $\int (x-3)\cos 2x\,dx$; в) $\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx$; г) $\int \frac{x}{\sqrt{(5-x)^3}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 3x+2}$

11) а) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+9}}dx$; б) $\int (7x-10)\sin 4x\,dx$; в) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}dx$; г) $\int \frac{1}{2-\sqrt{1+x}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 5x+5}$

12) а) $\int \frac{\arcsin x + 3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; б) $\int (4x+3)\sin 5x\,dx$; в) $\int \frac{x^3+4}{x^2-4x+3}\,dx$; г) $\int \frac{1}{8+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 4x+3}$

13) а) $\int \frac{2x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; б) $\int x\ln(1-3x)dx$; в) $\int \frac{2x+27}{x^2-x-12}\,dx$; г) $\int \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x+3}$

14) а) $\int \frac{2^{arctgx}+2x}{1+x^2}\,dx$; б) $\int xe^{-7x}dx$; в) $\int \frac{19-4x}{2x^2+x-3}\,dx$; г) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+7}}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 2x+6}$

15) а) $\int \frac{e^{\arcsin x}-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; б) $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx$; в) $\int \frac{x^3+6}{x^2-2x-3}\,dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{4+x}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 4x+2}$

16) а) $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+1}\,dx$; б) $\int \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)dx$; в) $\int \frac{x^3-4}{x^2-x-6}\,dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x-3}}{x}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 2x+4}$

17) а) $\int \frac{\sqrt{arctgx+3x}}{1+x^2}\,dx$; б) $\int (3x+4)e^{3x}dx$; в) $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}\,dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-6}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 3x+6}$

18) а) $\int \frac{x^3+3x^7}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$; б) $\int arctg\left(\sqrt{4x-1}\right)dx$; в) $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}\,dx$; г) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+7}}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x+4}$

19) а) $\int \frac{x^2-2x^5}{\sqrt{6+x^6}}\,dx$; б) $\int x\cdot\ln^2 x\,dx$; в) $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}\,dx$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 3x+3}$

20) а) $\int \frac{2+\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$; б) $\int x\cdot e^{3x}dx$; в) $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}\,dx$; г) $\int \frac{x}{\sqrt{3x-5}}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin 5x+2}$

Задание 4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Построить чертёж.

1) $y=(x-2)^3, \quad y=4x-8;$

2) $y=4-x^2, \quad y=x^2-2x;$

3) $y=x\sqrt{9-x^2}, y=0, (0\le x\le 3);$

4) $y=x\cdot\sqrt{36-x^2}, y=0, (0\le x\le 6);$

5) $y=4-x^2, \quad x=y^2-2y;$

6) $y^2=9x, \quad x^2=4y;$

7) $y^2=4x, \quad x^2=4y;$

8) $y=x^2+2, \quad x+y=4;$

9) $y=x^2, \quad y^2=4x;$

10) $xy=6, \quad x+y-7=0;$

11) $y=x^2, \quad y=2-x^2;$

12) $y=x^2+4x, \quad y=x=4;$

13) $y=\frac{1}{1+x^2}, \quad y=\frac{x^2}{2}$

14) $y = x^2 - 2x, \quad x - y + 4 = 0;$

15) $y = 4x - x^2, \quad y = x;$

16) $y = x^2, \quad xy = 8, \quad y = 9;$

17) $y = x^2 + 1, \quad y = x, \quad y = 5, x = 0;$

18) $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1;$

19) $y = 2^x, \quad y = 2, \quad x = 0;$

20) $y = x + 3, \ xy = 4, \ x = 0, \ x = 4, \ y = 0$

Задание 5

Исследовать несобственный интеграл на сходимость.

1) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

2) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx;$

3) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^4}}dx;$

4) $\int\limits_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx;$

5) $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx;$

6) $\int\limits_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{16-x^4}}dx;$

7) $\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx;$

8) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx;$

9) $\int\limits_0^1 \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}dx;$

10) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx;$

11) $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}dx;$

12) $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx;$

13) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

14) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx;$

15) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx;$

16) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{\left(x^4+1\right)^3}dx;$

17) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx;$

18) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx;$

19) $\int\limits_0^{+\infty} x \cdot e^{-x}dx;$

20) $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x}dx.$

Задание 6

Вычислить двойной интеграл. Сделать чертеж области интегрирования.

1) $\iint\limits_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy; \ D: x = 1, \ y = x^2, \ y = -\sqrt{x}$

2) $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; \ D: x = 1, \ y = -x^2, \ y = \sqrt{x}$

3) $\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = -x^3,\ y = \sqrt{x}$

4) $\iint\limits_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy; D:\ x = 1,\ \ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$

5) $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$

6) $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; D:\ x = 1,\ \ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$

7) $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$

8) $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$

9) $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = -x^3,\ y = \sqrt{x}$

10) $\iint\limits_D (4xy + 3x^2y^2)dxdy; D:\ x = 1,\ \ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$

11) $\iint\limits_D (12xy + 9x^2y^2)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$

12) $\iint\limits_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$

13) $\iint\limits_D (24xy + 18x^2y^2)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$

14) $\iint\limits_D (12xy + 278x^2y^2)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$

15) $\iint\limits_D (8xy + 18x^2y^2)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$

16) $\iint\limits_D (xy - 9x^5y^5)dxdy;\ D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$

17) $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$

18) $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy;\ D:\ x = 1,\ \ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$

19) $\iint\limits_D (44xy + 16x^3y^3)dxdy;\ D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$

20) $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$

Задание 7

Проинтегрировать уравнение.

1) $(x^2+2x-1)y'-(x+1)y=x-1$

2) $x\ln x\cdot y'-y=3x^3\ln^2 x$

3) $2xy'-y=3x^2$

4) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$

5) $y'-y\cdot tgx=\dfrac{1}{\cos x}$

6) $y'(x+1)-2y-(x+1)^4=0$

7) $(4-x^2)y'+xy=4$

8) $x'-x\cos y=\sin 2y$

9) $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$

10) $y'-2xy=2xe^{x^2}$

11) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

12) $y'\cos x+y\sin x=1$

13) $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

14) $y'-2\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+1}{x}$

15) $y'=2\ln x+\dfrac{y}{x}$

16) $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=2arcgx$

17) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{e^{-x^2}}{x}$

18) $x^2\dfrac{dy}{dx}=2xy-3,\quad y(-1)=1$

19) $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$

20) $y'-\dfrac{5}{x}y=e^x x^5$

Задание 8

Решить задачу Коши.

1) а) $y'''-y''-12y'=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=4,\ y''(0)=3;$

б) $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x},\quad y(0)=y'(0)=0;$

2) а) $y'''-y''-6y'=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=3,\ y''(0)=2;$

б) $y''+9y=6e^{3x},\quad y(0)=y'(0)=0;$

3) а) $y'''-4y''-5y'=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=4,\ y''(0)=5;$

б) $y''-4y'+5y=2x^2e^x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=3;$

4) а) $y''' + 3y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 4$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0$;

5) а) $y''' + 4y'' - 5y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 5$;

б) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9.$;

6) а) $y''' - 2y'' - 15y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = 3$;

б) $y'' + y = 2\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

7) а) $y''' - y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 1$;

б) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 8$;

8) а) $y''' = 2y'' - 8y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4$;

б) $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x), \quad y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$;

9) а) $y''' + y'' - 12y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 4$;

б) $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x), \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$;

10) а) $y''' - 3y'' - 10y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = 2$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\cos x, \quad y(\pi) = \pi e^{\pi}, \quad y'(\pi) = e^{\pi}$;

11) а) $y''' + 2y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 3$;

б) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

12) а) $y''' + y'' - 20y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = 5$

б) $y'' + y = \cos 3x, \quad y(\pi/2) = 4, \quad y'(\pi/2) = 1.$;

13) а) $y''' - 2y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 1$;

б) $2y'' - y' = 1, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$;

14) а) $y''' - 2y'' - 8y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = 2$;

б) $y'' + 4y = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 1$;

15) а) $y''' - y'' - 20y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = 4$;

б) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = \frac{1}{27}$;

16) а) $y''' + y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2$;

б) $y'' + y' = x^2 + x, \quad y'(0) = y(0) = 0$;

17) а) $y''' + 3y'' - 15y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 5$;

б) $y'' + y = 4x\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;

18) а) $y''' - 3y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = 1$;

б) $y'' + 2y' + 5y = e^{1+x}\sin 2x, \quad y(0) = -\dfrac{1}{10}, \quad y'(0) = 0$;

19) а) $y''' + y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$;

б) $y'' - y' = e^x \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$;

20) а) $y''' + 2y'' - 15y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 5$;

б) $y'' - 3y' + 2y = xe^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$.

Задание 9

Найти область сходимости степенного ряда.

1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n^2-6}{6^n}(x-6)^n$; 2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n^2-4}{4^n}(x-4)^n$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2+6}{6^n}(x+6)^n$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2+4}{4^n}(x+4)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-3}{3^n}(x-3)^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3}{3^n}(x+3)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{4^n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^n}{n^2\cdot 4^n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{5^n}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{2^n}$; 14) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{5^n}(x+5)^n$; 15) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n^2-5}{5^n}(x-5)^n$;

16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (3n-1)\cdot(x+2)^n$; 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2n^2-1\right)\cdot(x-2)^n$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$;

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2n-1}$; 20) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (3n-2)\cdot(x+2)^n$.

Задание 10

Вычислить приближенно с точностью до 0,001 определенный интеграл, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

1) $\int\limits_{0,3}^{0} \cos\frac{10x^2}{3}\,dx$; 2) $\int\limits_{-0,2}^{0} \frac{\ln\left(1-2x^3\right)}{x}\,dx$; 3) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}\,dx$;

4) $\int\limits_{-0,4}^{0} \sin\frac{5x^2}{2}\,dx$; 5) $\int\limits_{-\frac{1}{4}}^{0} \frac{\sin 2x}{x}\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{5}} \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx$;

7) $\int\limits_{0}^{0,16} e^{\sqrt{x}}\,dx$; 8) $\int\limits_{-1}^{0} \sin\left(\frac{x^2}{5}\right)dx$; 9) $\int\limits_{-0,5}^{0} arctg\, x^2\,dx$;

10) $\int\limits_{-0,5}^{0} x\cdot e^{-2x^3}\,dx$; 11) $\int\limits_{0}^{1} \cos\sqrt{2x}\,dx$; 12) $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{e^{-2x}-1}{x}\,dx$;

13) $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$; 14) $\int\limits_{0}^{0,8} \frac{\sin 0,8x}{x}\,dx$; 15) $\int\limits_{0}^{0,6} \frac{\sin 0,6x}{x}\,dx$;

16) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x}\,dx$; 17) $\int\limits_{-1}^{1} \sin x^2\,dx$; 18) $\int\limits_{0}^{0,5} e^{-x^3}\,dx$;

19) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}}\,dx$; 20) $\int\limits_{0}^{0,2} \frac{e^{-2x}-1}{x}\,dx$.

5 Вопросы к зачету

1) Дифференцирование функции двух переменных: частные производные, их геометрический смысл. Частные производные второго порядка.

2) Дифференциал функции двух переменных. Условия дифференцируемости функции двух переменных.

3) Скалярное поле. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению.

4) Вектор-градиент функции. Связь вектора-градиента с производной по направлению.

5) Экстремум функции двух переменных: определение, необходимое и достаточное условия.

6) Первообразная, теорема о первообразных. Неопределенный интеграл: определение, свойства.

7) Основные методы интегрирования: табличный, по частям, подстановкой.

8) Интегрирование рациональных дробей.

9) Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.

10) Определенный интеграл: определение, геометрический смысл. Свойства определенного интеграла.

11) Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

12) Несобственные интегралы первого и второго рода.

13) Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

14) Двойной интеграл как предел интегральных сумм. Свойства двойного интеграла.

15) Сведение двойного интеграла к повторному.

16) Дифференциальные уравнения первого порядка: определение, общее и частное решения, их геометрический смысл, теорема о существовании и единственности решения.

17) Решение дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородных, линейных).

18) Дифференциальные уравнения второго порядка: определение, общее и частное решения, их геометрический смысл, теорема о существовании и единственности решения.

19) Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

20) Линейная зависимость и независимость двух функций. Определитель Вронского. Структура общего решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка (однородных и неоднородных).

21) Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

22) Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

23) Числовой ряд, его сумма. Геометрический и гармонический ряды. Необходимое условие сходимости ряда.

24) Признаки сходимости рядов с положительными членами (признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши).

25) Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютно сходящиеся ряды, их свойства.

26) Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

27) Ряд Тейлора. Формулы для коэффициентов ряда Тейлора.

28) Разложение в степенной ряд функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$. Приложение рядов к приближенным вычислениям.

6 Литература

1 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / П.Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М.: Мир и Образование, 2012. – 368 с.

2 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / П.Е. Данко [и др.].– 6-е изд. – Москва: Оникс 21 век, 2007. – 416 с.

3 Шипачев, В.С. Высшая математика [Текст]: учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007, 2008. – 479 с.

Список использованных источников

1 Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002. – 992 с.

2 Мироненко, Е.С. Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов инженерно-технических специальностей вузов / Е.С. Мироненко. – М.: Высш. шк., 1998. – 110 с.

3 Зимина, О.В. Высшая математика / О.В. Зимина, А.И. Кириллов, Т.А. Сальникова. Под ред. А.И. Кириллова. – 3-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2003. – 368 с.

4 Казакова, О.Н. Математика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / О.Н. Казакова, О.Н. Конюченко, Т.А. Фомина; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009.

5 Кузнецов, Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л.А. Кузнецов. – 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2006. – 240 с.

6 Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных задач по высшей математике. Ч. 1/ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Минск: Изд-во «Вышейшая школа», 1990. – 271 с.

7 Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию: учебное пособие / А.С. Шапкин. – 3-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2006. – 432 с.

Приложение А
(справочное)

Таблица производных и правила дифференцирования

$(C)' = 0$

$(ax + b)' = a$

$(x^m)' = mx^{m-1}$

$(x)' = 1$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

$(U \pm V)' = U' \pm V'$

$(UV)' = U'V + UV'$

$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$y'_x = y'_u u'_x$, если $y = y(u)$, $u = u(x)$

Таблица эквивалентности бесконечно малых

При $\alpha \to 0$ будут эквивалентными:

$\sin\alpha$ и α

$1 - \cos\alpha$ и $\frac{\alpha^2}{2}$

$\mathrm{tg}\alpha$ и α

$\ln(1 + \alpha)$ и α

$\arcsin\alpha$ и α

$e^\alpha - 1$ и α

$\mathrm{arctg}\alpha$ и α

$a^\alpha - 1$ и $\alpha \ln a$

Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,\ m \neq -1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \mathrm{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \mathrm{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + x^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{a + x^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Правила и методы интегрирования

$$\int a\, f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$\int u dv = uv - \int v du$ – метод интегрирования по частям

$\int f(x) dx = \int f(x(t))\, x'_t dt$, если $y = y(x)$, $x = x(t)$ – метод подстановки

Виды подстановок

Подынтегральная функция	Подстановка
$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно синуса	$\cos x = t$
$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно косинуса	$\sin x = t$
$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ – четная относительно синуса и косинуса	$\mathrm{tg} x = t$ $(\mathrm{ctg} x = t)$, если есть знаменатель. Если нет знаменателя, то применяются формулы понижения степени.
$R(tgx)$	$\mathrm{tg} x = t,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$
Любые тригонометрические функции	$tg\dfrac{x}{2} = t, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ – универсальная тригонометрическая подстановка
$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \cdot \sin t \quad (a \cdot \cos t)$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = \dfrac{a}{\sin t} \quad \left(\dfrac{a}{\cos t}\right)$
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$x = a \cdot tgt \quad (a \cdot ctgt)$
$x^m \cdot (a + bx^n)^p$	*p – целое, то* $x = t^N$, *где* N *– общий знаменатель для* m *и* n; $\dfrac{m+1}{n}$ *– целое, то* $a + bx^n = t^N$, *где* N *– знаменатель дроби* p; $\dfrac{m+1}{n} + p$ *– целое, то* $\dfrac{a}{x^n} + b = t^N$, *где* N *– знаменатель лроби* p.
$R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$	$\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1} = t^N$, *где* N *– общий знаменатель дробей* $m, p, \ldots$
$R(x, x^\alpha, x^\beta, \ldots)$	$x = t^k$, *где* k *– общий знаменатель дробей* $\alpha, \beta, \ldots$

Вид частного линейного неоднородного дифференциального уравнения в зависимости от вида правой части

Вид правой части f(x)	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$P_m(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$R_m(x)$
	Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r R_m(x)$
$e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} R_m(x)$
	Число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r e^{\alpha x} R_m(x)$
$P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$	Число βi не является корнем характеристического уравнения	$R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x$
	Число βi является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r\left(R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x\right)$
$e^{\alpha x} \cdot \begin{bmatrix} P_m(x)\cos\beta x + \\ + Q_s(x)\sin\beta x \end{bmatrix}$	Число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} \cdot \begin{pmatrix} R_l(x)\cos\beta x + \\ + T_l(x)\sin\beta x \end{pmatrix}$
	Число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности *r*	$x^r e^{\alpha x} \cdot \begin{pmatrix} R_l(x)\cos\beta x + \\ + T_l(x)\sin\beta x \end{pmatrix}$

Здесь $P_m(x)$ *и* $Q_s(x)$ – известные многочлены степеней m и s.

$R_l(x)$ *и* $T_l(x)$ – неизвестные многочлены, определяемые подстановкой частного решения в дифференциальное уравнение, $l = \max\{m, s\}$.

Разложение элементарных функций в степенной ряд Тейлора

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad x \in (-1, +1];$$

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad x \in (-1, +1);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

$x \in (-1, +1)$