Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра геометрии и компьютерных наук

О.Н. Казакова, Т.А. Фомина

МАТЕМАТИКА

Часть 3

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 18.03.01 Химическая технология, 18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии, 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания

Оренбург
2017

УДК 510(076.5)
ББК 22.1я7
К 14

Рецензент – кандидат педагогических наук Л.Б. Усова

Казакова, О.Н.

К 14 Математика: методические указания к выполнению индивидуальных работ в 3 ч. Ч. 3/ О.Н. Казакова, Т.А. Фомина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2017. – 43 с.

Методические указания содержат материал, предназначенный для выполнения индивидуальных работ по курсу «Математика».

Методические указания предназначены для обучающихся по направлениям подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 18.03.01 Химическая технология, 18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии, 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания заочной формы обучения, составлены в соответствии с утвержденными рабочими программами дисциплины «Математика». Материалы могут быть полезны преподавателям высших учебных заведений, ведущим соответствующую дисциплину, и изучающим эту дисциплину студентам.

УДК 510(076.5)
ББК 22.1я7

Содержание

Введение

Математика играет важную роль в естественно-научных, экономических, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она является не только орудием количественного исчисления, но и методом точного исследования и средством четкой формулировки понятий и проблем. Цель преподавания математики в вузе, где ведется подготовка специалистов инженерно-технических направлений – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать представление о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре; развить навыки математического исследования прикладных вопросов и умения сформулировать задачу на математическом языке. Все это понадобится для успешной работы и для ориентации в будущей профессиональной деятельности. Знания, умения и навыки, приобретенные при изучении математики, используются при изучении таких дисциплин, как: информатика, физика, начертательная геометрия, техническая механика, конструирование и расчет элементов оборудования отрасли, спецглавы математики, электротехника и промышленная электроника, вычислительные методы расчета химико-технологических систем и других.

В методических указаниях показаны примеры решения основных (типовых) задач математики, изучаемых в третьем учебном семестре, а также задания для индивидуального решения. Материалы могут быть полезны преподавателям высших учебных заведений, ведущим соответствующую дисциплину, и изучающим эту дисциплину студентам.

1 Выписка из рабочей программы учебной дисциплины

Дисциплина «Математика» изучается в течение трех семестров и включает лекционные и практические занятия, выполнение индивидуальных заданий (домашней контрольной работы).

В третьем семестре студенты изучают следующие разделы:

1) Теория вероятностей

Элементы комбинаторики: правила сложения и умножения, размещения, перестановки, сочетания. Комбинации с повторениями. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Понятие случайного события. Классическое, аксиоматическое и геометрическое определение вероятности.

Несовместные и независимые события. Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Полная вероятность. Формула Байеса.

Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы (локальная и интегральная) в схеме Бернулли.

Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения, многоугольник распределения, функция распределения и ее свойства, график функции распределения. Плотность распределения непрерывной случайной величины: определение, свойства, вероятностный смысл. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.

Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты, мода, медиана, асимметрия, эксцесс. Их определение, свойства, формулы для вычисления.

Виды распределений непрерывных и дискретных случайных величин (биноминальное, равномерное, Пуассона, показательное, логарифмическое). Нормальное распределение, его свойства, график. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины. Правило трех сигм. Оценка отклонения теоретического отклонения от нормального.

Система двух случайных величин: закон распределения, функция распределения и ее свойства, плотность совместного распределения, условные законы распределения, условное математическое ожидание. Корреляционный момент, ковариация, коэффициент корреляции, коррелированность и зависимость случайных величин. Нормальный закон распределения на плоскости. Линейная регрессия, линейная корреляция, нормальная корреляция.

Понятие о различных формах закона больших чисел. Неравенство Чебышева. Теоремы Бернулли и Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова.

2) Элементы математической статистики

Задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма и полигон частот. Эмпирическая функция распределение. Числовые характеристики выборки.

Итоговой формой контроля в третьем семестре является экзамен.

2 Рекомендации по выполнению и оформлению контрольной работы

Особенностью заочной формы обучения является то, что больший объем учебного материала студент осваивает самостоятельно по учебникам и учебным пособиям, в том числе электронным. При этом он имеет право обращаться за помощью и консультацией к преподавателю. Студенту рекомендуется вести рабочую тетрадь, конспектировать в ней основные понятия, свойства, теоремы, правила и методы решение типовых задач. Для того чтобы хорошо усвоить теоретический материал, необходимо решать как можно больше задач, а не только те, которые предложены для индивидуального решения. При подготовке к выполнению индивидуальной расчетной работы студент должен изучить соответствующие разделы по пособиям и учебникам (список литературы прилагается).

К экзамену допускаются студенты, выполнившие индивидуальную расчетную работу и прошедшие по ней собеседование.

При выполнении работы и ее оформлении необходимо придерживаться следующих правил:

– работа должна быть выполнена в тонкой тетради в клетку, имеющей поля для замечаний преподавателя;

– титульный лист оформляется в соответствии со стандартом оформления студенческих работ СТО 02069024.101–2015 Работы студенческие (http://www.osu.ru/docs/official/standart/standart_101-2015_.pdf); на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, группа, название дисциплины;

– вариант индивидуальных заданий студента соответствует его списку в группе или определяется иным способом преподавателем и сообщается студентам;

– перед решением каждой задачи нужно привести полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера;

– следует придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в задании, строго сохраняя при этом нумерацию заданий;

– в работу должны быть включены все задачи, указанные в задании по своему варианту;

– при решении заданий можно использовать различные методы решений; решения задач должны сопровождаться необходимыми пояснениями: используемые формулы, объяснение проводимых вычислений и преобразований, необходимые чертежи;

– если работа не зачтена преподавателем, то ее необходимо в соответствии с замечаниями частично или полностью переделать. Повторную работу надо выполнять в той же тетради. Вносить исправления в первоначальный текст работы после ее проверки не рекомендуется.

3 Примеры решения задач

Задание 1

Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно с вероятностями $p_1 = 0{,}851,\ p_2 = 0{,}751$ и $p_3 = 0{,}701$. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя: а) только один элемент; б) хотя бы один элемент.

Решение.

а) Рассмотрим события: A_1 – первый элемент выходит из строя; A_2 – второй элемент выходит из строя; A_3 – третий элемент выходит из строя; A – за время T выходит из строя только один элемент. Тогда $A = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$. Учитывая, что слагаемые – несовместные события, а сомножители – независимые события, получаем $P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3)$.

По условию $P(\overline{A}_1) = 0{,}851$, $P(\overline{A}_2) = 0{,}751$, $P(\overline{A}_3) = 0{,}701$. Тогда $P(A_1) = 1 - 0{,}851 = 0{,}149$, $P(A_2) = 1 - 0{,}751 = 0{,}249$, $P(A_3) = 1 - 0{,}701 = 0{,}299$.

Получаем:

$P(A) = 0{,}149 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 + 0{,}851 \cdot 0{,}249 \cdot 0{,}701 + 0{,}851 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}299 = 0{,}418$.

б) Пусть событие B – за время T выходит из строя хотя бы один элемент. Рассмотрим противоположное событие $\overline{B}$ – за время T не выйдет из строя ни один элемент, т.е. все элементы работают безотказно. Получаем: $\overline{B} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$. Тогда $P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3)$, т.е. $P(\overline{B}) = 0{,}851 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 = 0{,}448$

Окончательно $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}448 = 0{,}552$.

Ответ: а) 0,418, б) 0,552.

Задание 2

В первой урне 6 белых шаров и 4 черных шара, а во второй урне 5 белых и 7 черных шаров. Из первой урны вынимают случайным образом 3 шара, из второй – 2 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров:

а) все шары одного цвета;

б) только три белых шара;

в) хотя бы один белый шар.

Решение.

Шары вынимаются из урн независимо друг от друга. Испытаниями является извлечение 3 шаров из первой урны и 2 шаров из второй урны. Элементарными событиями будут различные наборы вынутых шаров.

Рассмотрим события:

– для первой урны: B_1 – вынули 3 белых шара; B_2 – вынули 2 белых шара и 1 черный шар; B_3 – вынули 1 белый шар и 2 черных шара; B_4 – вынули 3 черных шара;

– для второй урны: C_1 – вынули 2 белых шара; C_2 – вынули 1 белый и 1 черный шар; C_3 – вынули 2 черных шара.

Найдем вероятности этих событий.

Для первой урны:

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 120;$$

для события B_1 получаем $m_1 = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3!} = 20$;

для события B_2 получаем $m_2 = C_6^2\cdot C_4^1 = \dfrac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\dfrac{4!}{1!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{4}{1} = 60$;

для события B_3 получаем $m_3 = C_6^1\cdot C_4^2 = \dfrac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot\dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = \dfrac{6}{1}\cdot\dfrac{3\cdot 4}{1\cdot 2} = 36$;

для события B_4 получаем $m_4 = C_4^3 = \dfrac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$.

Тогда $P(B_1)=\frac{20}{120}$, $P(B_2)=\frac{60}{120}$, $P(B_3)=\frac{36}{120}$, $P(B_4)=\frac{4}{120}$.

Для второй урны:

$$n=C_{12}^2=\frac{12!}{2!\cdot(12-2)!}=\frac{12!}{2!\cdot 10!}=\frac{10!\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 10!}=66;$$

для события C_1 получаем $m_1=C_5^2=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!}=10$;

для события C_2 получаем $m_2=C_5^1\cdot C_7^1=\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\frac{7!}{1!\cdot 6!}=\frac{5}{1}\cdot\frac{7}{1}=35$;

для события C_3 получаем $m_3=C_7^2=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{5!\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 5!}=21.$

Тогда $P(C_1)=\frac{10}{66}$, $P(C_2)=\frac{35}{66}$, $P(C_3)=\frac{21}{66}$.

а) Пусть событие A – все вынутые из двух урн шары одного цвета, т.е. все белые или все черные. Тогда $A=B_1\cdot C_1+B_4\cdot C_3$. Учитывая, что слагаемые несовместные, а сомножители независимые события, получаем $P(A)=P(B_1)\cdot P(C_1)+P(B_4)\cdot P(C_3)=\frac{20}{120}\cdot\frac{10}{66}+\frac{4}{120}\cdot\frac{21}{66}=\frac{71}{1980}$.

б) Пусть событие D – среди извлеченных шаров только три белых. В этом случае $D=B_1\cdot C_3+B_2\cdot C_2+B_3\cdot C_1$. Учитывая, что слагаемые несовместные, а сомножители независимые события, получаем $P(D)=P(B_1)\cdot P(C_3)+P(B_2)\cdot P(C_2)+P(B_3)\cdot P(C_1)=\frac{20}{120}\cdot\frac{21}{66}+\frac{60}{120}\cdot\frac{35}{66}+\frac{36}{120}\cdot\frac{10}{66}=\frac{4}{11}$.

в) Пусть событие F – среди извлеченных шаров имеется по крайней мере один белый. Рассмотрим противоположное событие $\overline{F}$ – среди извлеченных шаров нет ни одного белого. Тогда $\overline{F}=B_4\cdot C_3$, $P(\overline{F})=P(B_4)\cdot P(C_3)=\frac{4}{120}\cdot\frac{21}{66}=\frac{7}{660}$.

Окончательно: $P(F)=1-P(\overline{F})=1-\frac{7}{660}=\frac{653}{660}$.

Ответ: а) $\frac{71}{1980}$, б) $\frac{4}{11}$, в) $\frac{653}{660}$.

Задание 3

В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов в количестве 19, 6 и 11 штук соответственно, которые могут работать до конца гарантийного срока с вероятностями 0,85; 0,76 и 0,71 соответственно. Рабочий берет случайно электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом.

Решение.

Рассмотрим событие A, которое заключается в том, что электродвигатель работает безотказно до конца гарантийного срока. И гипотезы H_1, H_2, H_3, заключающиеся в том, что электродвигатель поставлен с первого, второго или третьего завода соответственно.

Всего имеется 36 электродвигателей. Тогда вероятности того, что электродвигатель поставлен с первого, второго или третьего завода соответственно, будут равны:

$$P(H_1) = \frac{19}{36} = 0,528, \quad P(H_2) = \frac{6}{36} = 0,167, \; P(H_3) = \frac{11}{36} = 0,306 .$$

Из условия задачи известны условные вероятности:

$P_{H_1}(A) = 0{,}85$ – вероятность того, что поставленный первым заводом двигатель работает безотказно;

$P_{H_2}(A) = 0{,}76$ – вероятность того, что поставленный вторым заводом двигатель работает безотказно;

$P_{H_3}(A) = 0{,}71$ – вероятность того, что поставленный третьим заводом двигатель работает безотказно;

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$

$= 0{,}85 \cdot 0{,}528 + 0{,}76 \cdot 0{,}167 + 0{,}71 \cdot 0{,}306 = 0{,}792$ – вероятность того, что электродвигатель проработает безотказно до конца гарантийного срока.

Теперь воспользуемся формулами Байеса: $P_A\ (H_i) = \dfrac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$, где $P\ (A)$ – полная вероятность.

Получаем:

$P_A\ (H_1) = \dfrac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}528 \cdot 0{,}85}{0{,}792} = 0{,}566$ – вероятность того, что работающий безотказно двигатель поставлен первым заводом;

$P_A\ (H_2) = \dfrac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}167 \cdot 0{,}76}{0{,}792} = 0{,}160$ – вероятность того, что работающий безотказно двигатель поставлен вторым заводом;

$P_A\ (H_3) = \dfrac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}306 \cdot 0{,}71}{0{,}792} = 0{,}274$ – вероятность того, что работающий безотказно двигатель поставлен третьим заводом.

Ответ: $P_A(H_1) = 0{,}566$, $P_A(H_2) = 0{,}160$, $P_A(H_3) = 0{,}274$.

Задание 4

Вероятность появления события *A* в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна *p* = 0,8. Найти вероятность того, что событие появится:

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;

б) не менее 75 раз;

в) не более 74 раз.

Решение.

а) Согласно интегральной теореме Лапласа, если вероятность появления события *A* в каждом из *n* независимых испытаний постоянна и равна *p*, то вероятность того, что во всех этих испытаниях событие *A* появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно определяется формулой $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

По условию задачи $n = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $k_1 = 75$, $k_2 = 90$. Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{75 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{90 - 80}{\sqrt{16}} = \frac{10}{4} = 2{,}5.$$

По таблице значений функции Лапласа, учитывая нечетность этой функции, находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}3944;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(2{,}5) = 0{,}4938.$$

Тогда

$$P_{100}(75{,}90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}4938 - (-0{,}3944) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

б) Требование, что событие A появится не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76, либо 77, …, либо 100 (больше 100 быть не может по условию задачи). Значит, в рассматриваемом случае следует принять, что $k_1 = 75$, $k_2 = 100$, тогда

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{75 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{100 - 80}{\sqrt{16}} = \frac{20}{4} = 5.$$

По таблице значений функции Лапласа, учитывая нечетность этой функции, находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}3944;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(5) = 0{,}5.$$

Тогда $P_{100}(75{,}100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}5 - (-0{,}3944) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944.$

в) События «A появится не более 74 раз» и «A появится не менее 75 раз» противоположны, поэтому

$$P_{100}(0;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$$

Ответ: а) 0,8882; б)0,8944; в) 0,1056

Задание 5

Дискретная случайная величина задана таблицей:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	p_5

Найти p_5, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

Решение.

Для любой дискретной случайной величины $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Получаем: 0,1+0,2+0,3+0,25+ p_5 =1. Отсюда p_5 =1-0,85=0,15.

То есть закон распределения имеет вид:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Математическое ожидание найдем по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Получаем

$M(X) = -1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}15 = -0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}45 = 1{,}15$.

Дисперсию найдем по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

Получаем:

$$M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 3^2 \cdot 0{,}15 = 0{,}1+0{,}3+1{,}0+1{,}35 = 2{,}75.$$

Тогда $D(X) = 2{,}75-1{,}15^2 = 1{,}427$.

Среднее квадратическое отклонение найдем по формуле $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$.

Получаем $\sigma_x = \sqrt{1{,}427} \approx 1{,}195$.

Максимальное значение вероятности 0,25 достигается, когда случайная величина принимает значение 2. Поэтому мода $M_o = 2$.

Построим многоугольник распределения (рисунок 1)

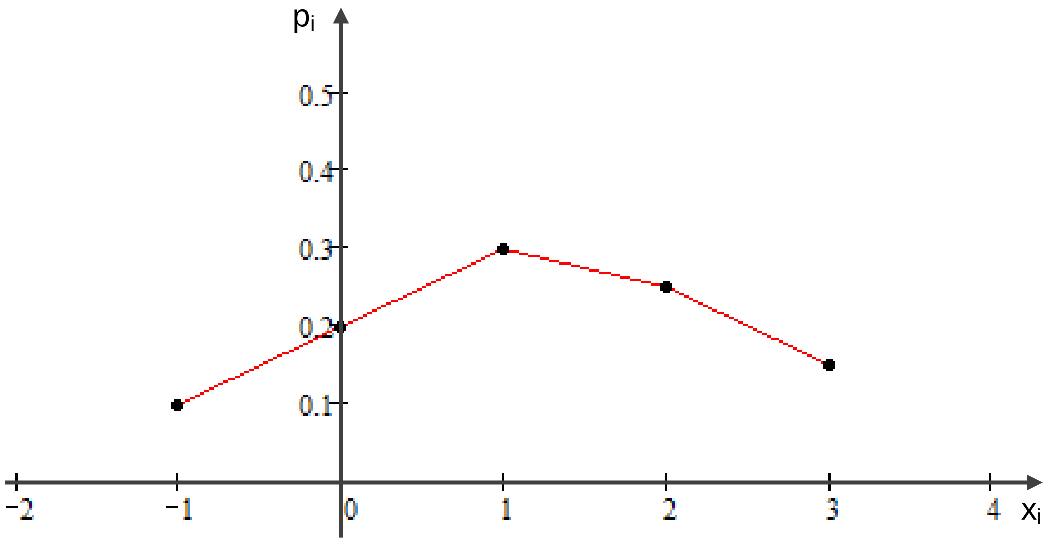

Рисунок 1 – Многоугольник распределения

Функция распределения (интегральная функция распределения) задается формулой $F(x) = P(X < x)$.

Будем задавать различные значения x и находить соответствующие значения функции.

Если $x \le -1$, то $F(x) = 0$ (в том числе и при $x = -1$, так как $F(-1) = P(X< -1) = 0$).

Если $-1 < x \le 0$, то $F(x) = P(X < 0) = P(X = -1) = 0{,}1$.

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < 1) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0{,}1+0{,}2 = 0{,}3$.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X < 2) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}1+0{,}2+0{,}3 = 0{,}6$.

Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < 3) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) =$
$= 0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}25=0{,}85$.

Если $x > 3$, то $F(x) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 4) =$
$= 0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}25+0{,}15 =1$.

Получаем:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \textit{при}\ x\le -1,\\ 0{,}1,\ \textit{при}\ \ -1<x\le 0,\\ 0{,}3,\ \textit{при}\ \ 0<x\le 1,\\ 0{,}6,\ \textit{при}\ \ 1<x\le 2,\\ 0{,}85,\textit{при}\ \ 2<x\le 3,\\ 1,\textit{при}\ \ x>3.\end{cases}$$

Построим график функции распределения (рисунок 2).

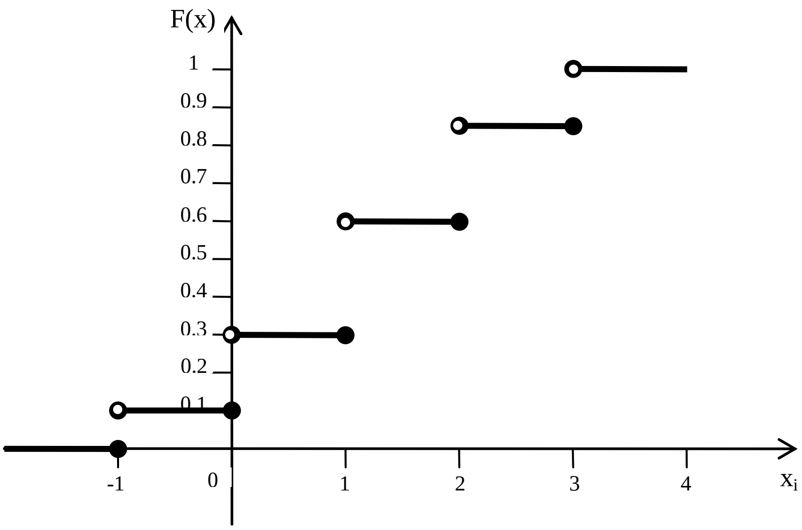

Рисунок 2 – График функции распределения

Задание 6

Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения

$$P(x)=\begin{cases}0,\ \text{при}\quad x\le 0\\ \dfrac{x}{2},\ \text{при}\quad 0<x\le 2\\ 0,\ \text{при}\quad x>2\end{cases}.$$

а) Найти функцию распределения $F(x)$, построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

б) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

в) Найти вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[1;2]$.

Решение.

а) Функции $p(x)$ и $F(x)$ связаны соотношением $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$.

Если $x \le 0$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0$.

Если $0<x\le 2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} p(t)dt+\int\limits_{0}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int\limits_{0}^{x}\frac{t}{2}dt=0+\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^x=\frac{x^2}{4}$.

Если $x>2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} p(t)dt+\int\limits_{0}^{2} p(t)dt+\int\limits_{2}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int\limits_{0}^{2}\frac{t}{2}dt+\int\limits_{2}^{x}0dt=\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^2=1$.

Получаем:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Графики плотности распределения и функции распределения представлены на рисунке 3.

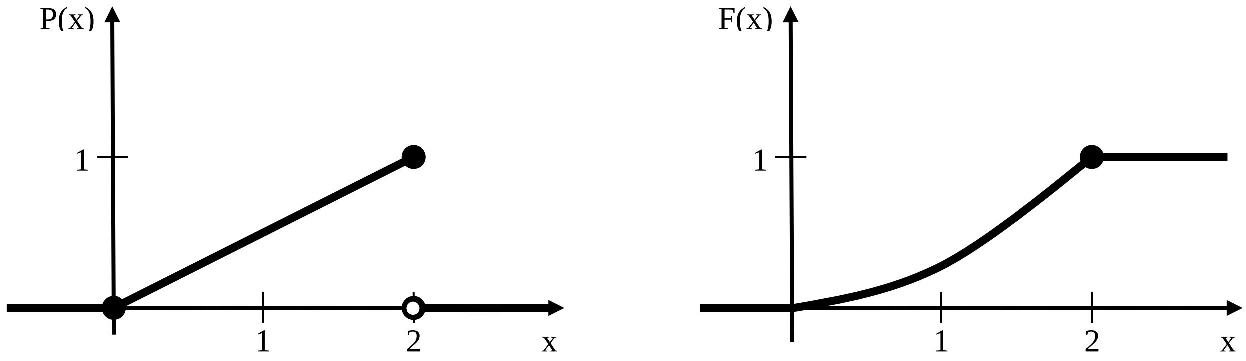

Рисунок 3 – Графики плотности распределения и функции распределения

б) Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение найдем по формулам:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,\quad D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx-(M(x))^2,\quad \sigma(x)=\sqrt{D(x)}\,.$$

Получаем:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}x\cdot\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty}0dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^2dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};$$

$$D(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}x^2\cdot\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty}0dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^3dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{8}-\frac{16}{9}=\frac{2}{9};$$

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

в) Вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[1;2]$ найдем по формуле $P(a\le X\le b)=\int_a^b p(x)dx$.

Получаем:

$$P(1\le X\le 2)=\int_{1}^{2}\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $M(x)=\frac{4}{3}$; $D(x)=\frac{2}{9}$; $\sigma(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}$; $P(1\le X\le 2)=\frac{3}{4}$.

Задание 7

Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 18, а вероятность ее попадания в интервал (16, 20) равна 0,98. Найти среднее квадратическое отклонение σ случайной величины.

Решение.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ определяется через функцию Лапласа по формуле $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - M}{\sigma}\right)$.

По условию задачи вероятность $P(16 < X < 20) = 0{,}98$. Тогда

$$P(16 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-18}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{16-18}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}98.$$

Так как функция Лапласа является нечетной функцией, для нее $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \left(-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}98.$$

Откуда $\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right) = 0{,}49$. Найдем значение аргумента $z = \dfrac{2}{\sigma}$ функции Лапласа. Из таблицы значений функции Лапласа (приложение В) получаем $z = 2{,}33$. Значит, $\dfrac{2}{\sigma} = 2{,}33$, а $\sigma = \dfrac{2}{2{,}33} = 0{,}86$.

Ответ: 0,86.

Задание 8

Выборка задана интервальным вариационным рядом:

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	1-5	10
2	5-9	20
3	9-13	50
4	13-17	12
5	17-21	8

Построить гистограмму выборочной оценки плотности вероятности.

Решение.

Интервальный вариационный ряд графически изображают с помощью гистограммы. Для ее построения в прямоугольной системе координат на оси x откладывают отрезки частичных интервалов варьирования и на этих отрезках как на основаниях строят прямоугольники с высотами, равными отношению частот m_i или w_i относительных частот к длине интервалов варьирования h. Величины $\frac{m_i}{h}$ называют плотностью частоты, а $\frac{w_i}{h}$ называют плотностью относительной частоты.

Длина каждого интервала равна $h = 4$.

Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{5} m_i = 10 + 20 + 50 + 12 + 8 = 100$.

Найдем значения относительных частот $w_i = \frac{m_i}{n}$ и занесем полученные результаты в таблицу 1.

Таблица 1 – Значения относительных частот

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i	w_i
1	1-5	10	0,1
2	5-9	20	0,2
3	9-13	50	0,5
4	13-17	12	0,12
5	17-21	8	0,08

Определим плотности относительных частот $\frac{w_i}{h}$ (таблица 2).

Таблица 2 – Значения плотности относительных частот

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	$\frac{w_i}{h}$
1	1-5	$25 \cdot 10^{-3}$
2	5-9	$50 \cdot 10^{-3}$
3	9-13	$125 \cdot 10^{-3}$
4	13-17	$30 \cdot 10^{-3}$
5	17-21	$20 \cdot 10^{-3}$

По результатам второго и третьего столбцов таблицы 1 построим гистограмму относительных частот (рисунок 4).

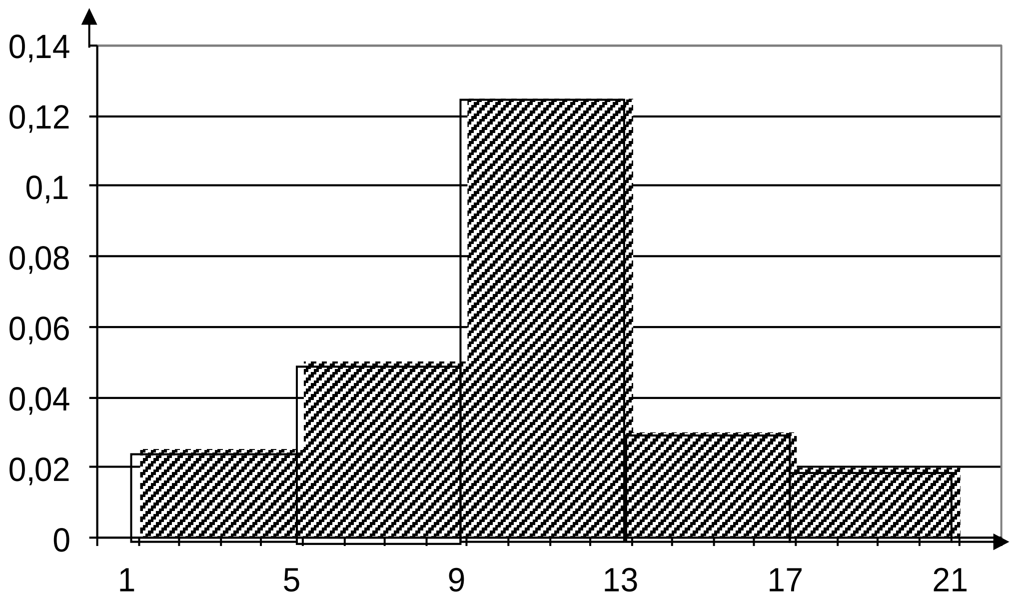

Рисунок 4 – Гистограмма относительных частот

4 Варианты заданий для индивидуальной работы

Задание 1

Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно с вероятностями p_1, p_2, p_3. Найти вероятность того, что за время Т выйдет из строя: а) только одни элемент; б) хотя бы один элемент.

Вероятности вычисляются по формулам: $p_1 = 1 - k$, $p_2 = 0{,}9 - k$, $p_3 = 0{,}85 - k$, где $k = \dfrac{|14{,}9 - V|}{100}$, V − номер варианта.

Задание 2

В первой урне K белых шаров и L черных шаров, а во второй урне M белых и N черных шаров. Из первой урны вынимают случайным образом P шаров, из второй – Q шаров.

Найти вероятность того, что среди вынутых шаров:

а) все шары одного цвета;

б) только три белых шара;

в) хотя бы один белый шар.

Значения K, L, M, N, P и Q даны в таблице 3.

Таблица 3 – Значения K, L, M, N, P и Q

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	7	5	7	5	5	5	5	6	6	6
L	4	5	3	4	6	7	8	3	5	6
M	8	4	6	7	7	6	7	5	5	5
N	5	8	3	4	3	4	5	6	3	5
P	3	2	3	1	3	2	4	3	2	4
Q	3	2	1	4	2	2	1	3	2	1

Продолжение таблицы 3

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K	3	5	4	4	4	4	4	4	4	7
L	4	3	9	8	7	6	5	4	3	2
M	6	4	7	7	8	7	7	7	7	4
N	7	9	3	4	3	5	6	7	8	8
P	2	2	3	2	4	2	3	3	1	4
Q	2	3	3	3	1	2	2	3	4	1

Задание 3

1) По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй группе – 15 из 25. найти вероятность того, наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

2) При проверке изделия на соответствие стандарту вероятность того, что оно пройдет через первого контролера, равна 0,55, а через второго – 0,45. Вероятность признания бездефектного изделия стандартным у первого контролера равна 0,9, а у второго – 0,98. Бездефектное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие прошло через второго контролера.

3) Два завода производят холодильники одной и той же марки, причем первый завод выпускает продукции вдвое больше, чем второй. Первый завод производит в среднем 70% холодильников высшего качества, а второй – 80%. Выбранный наугад холодильник оказался высшего качества. Найти вероятность того, что холодильник изготовлен на первом заводе.

4) В первом ящике содержится 7 синих и 5 красных шаров, во втором – 4 синих и 4 красных. Наудачу был выбран ящик и из него наудачу извлечен шар, который оказался красным. Найти вероятность того, что этот шар был извлечен из первого ящика.

5) В трех студенческих группах обучается 75 студентов, из них 25 в первой группе, 30 – во второй, остальные в третьей. Успешно сдали экзамен 22 студента из первой группы, 24 из второй и 15 из третьей. Наудачу выбранный студент сдал экзамен. Найти вероятность того, что он учится во второй группе.

6) В магазине продается 25 телевизоров, из них 9 выпущены первым заводом, 10 – вторым и остальные – третьим. Известно, что среди всех телевизоров, выпущенных первым, вторым и третьим заводом, имеют брак соответственно 5%, 12% и 10% телевизоров. Купленный телевизор оказался с дефектом. Найти вероятность того, что он был изготовлен третьим заводом.

7) В первом ящике содержится 8 шаров, из них 3 белых, во втором – 15, из которых 6 белых, в третьем – 10 шаров, из них 7 белых. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар извлечен из второго ящика.

8) Консервоперерабатывающий завод отправляет треть перерабатываемой продукции на первый склад, пятую часть – на второй и остальную продукцию – на третий. После хранения годным к употреблению является 90% продукции, хранившейся на первом складе, 80% продукции – на втором и 85% – на третьем. Наудачу взятая единица продукции оказалась годной. Найти вероятность того, что эта продукция хранилась на первом складе.

9) Пассажир за получением билета может обратиться в одну из трех касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, во вторую – 0,35 в третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3; для второй – 0,4; для третьей – 0,6. найти вероятность того, что купивший билет пассажир, приобрел его во второй кассе.

10) Имеется три урны. В первой из них 5 белых и 6 черных шаров, во второй 4 белых и 3 черных шара, в третьей 5 белых и 3 черных шара. Наугад выбирается урна и из нее вынимается шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из второй урны.

11) В магазин поступила обувь от двух поставщиков. Количество обуви, поступившей от первого поставщика, в два раза больше, чем от второго. Известно, что в среднем 20% обуви от первого поставщика и 35% обуви от второго поставщика имеют различные дефекты отделки. Из общей массы наугад выбирают одну упаковку с обувью. Оказалось, что обувь не имеет дефекта отделки. Найти вероятность того, что она изготовлена первым поставщиком.

12) К контролеру ОТК поступили изделия, изготовленные тремя рабочими. Причем первый предоставил 20 изделий, второй 15 и третий – 17. вероятность того, что изделие не имеет брака, равна: для первого рабочего – 0,6; для второго – 0,5; для третьего – 0,4. Контролер проверил одну деталь, она оказалась бракованной. Найти вероятность того, эту деталь изготовил первый рабочий.

13) Пассажир может приобрести билет в одной из двух касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4; а во вторую – 0,6. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира нужные ему билеты будут распроданы, равна 0,35 для первой кассы и 0,7 для второй. Пассажир посетил одну из касс и приобрел билет найти вероятность того, что он приобрел билет во второй кассе.

14) В магазин поступил одноименный товар, изготовленный двумя предприятиями. С первого предприятия поступило 150 единиц товара, из них 30 единиц первого сорта. Со второго предприятия – 200 единиц, из них 50 – первого сорта. Из общей массы извлекли единицу товара, который оказался первого сорта. Найти вероятность того, что извлеченный товар изготовлен на первом предприятии.

15) На автозаводе три конвейерных линии, причем на первой из них собирается 35% всех изделий, на второй 25%, на третьей – 45%. Вероятность брака для изделий, собранных на первой линии, равна 0,2; на второй – 0,1, на третьей – 0,15. Приобретенный покупателем автомобиль не имеет брака. Найти вероятность того, он собран на первой линии.

16) Покупатель желает приобрести электрическую лампочку. На полке в магазине лежат 200 лампочек, изготовленных на одном заводе и 150 на другом (все лампочки одинаковой мощности). Вероятность брака для первого завода составляет

0,01; для второго 0,005. Продавец взял лампочку для проверки, и она оказалась бракованной. Найти вероятность того, что лампочка изготовлена на втором заводе.

17) Преподаватель получил для проверки контрольные работы студентов трех групп: 28 работ студентов первой группы, 19 работ студентов второй группы и 20 работ студентов третьей группы. Вероятность того, что студент первой группы не допустит ни одной ошибки в контрольной работе, равна 0,4; второй – 0,35; третьей – 0,6. Выбранная случайным образом контрольная работа оказалась без единой ошибки. Найти вероятность того, что эта работа выполнена студентом третьей группы.

18) На автопредприятие поступили одноименные детали с двух заводов. Вероятность того, что деталь, изготовленная на первом заводе, не соответствует ГОСТу равна 0,9; для второго – 0,3. Первый завод поставил 2000 деталей, второй – 3000. Сборщик взял одну деталь, которая оказалась соответствующей ГОСТу. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на первом заводе.

19) В магазин поступили холодильники трех фирм в количестве 35, 20 и 4 соответственно. Вероятность того, что холодильник не откажет в период гарантийного срока равна: для первой фирмы 0,95; для второй – 0,8; для третьей – 0,9. Купленный холодильник оказался надежным. Найти вероятность того, что этот холодильник изготовлен второй фирмой.

20) В двух одинаковых коробках находятся карандаши. Известно, что 1/3 карандашей в первой коробке и 1/4 карандашей во второй коробке характеризуются твердостью ТМ. Наугад выбирается коробка и из нее наугад извлекается карандаш. Он оказался твердости ТМ. Найти вероятность того, что карандаш извлечен из первой коробки.

Задание 4

Вероятность возврата в срок потребительского кредита каждым из n заемщиков в среднем равна p. Найти вероятность того, что к назначенному сроку кредит вернут:

а) не менее k_1 человек и не более k_2 человека;

б) не менее k_2 человек;

в) не более k_3 человек.

Значения n, p, k_1, k_2, k_3 даны в таблице 4.

Таблица 4 – Значения n, p, k_1, k_2, k_3

№ варианта	n	k_1	k_2	k_3	p
1)	120	100	115	114	0,75
2)	150	120	140	139	0,90
3)	220	180	200	199	0,95
4)	275	250	265	264	0,96
5)	110	70	95	94	0,8
6)	130	85	105	104	0,85
7)	135	100	120	119	0,97
8)	150	130	145	144	0,95
9)	160	145	155	154	0,9
10)	175	160	170	169	0,85
11)	200	175	195	194	0,98
12)	105	85	100	99	0,95
13)	125	85	105	104	0,85
14)	145	90	125	124	0,97
15)	180	155	170	169	0,9
16)	210	190	205	204	0,9
17)	140	120	135	134	0,85
18)	170	135	155	154	0,95
19)	115	95	110	109	0,9
20)	205	185	200	199	0,85

Задание 5

Дискретная случайная величина задана таблицей. Найти P_5, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

1)	x_i	-3	-2	-1	1	2	2)	x_i	-7	-4	0	4	7
	p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	p_5

3)	x_i	-5	-2	0	2	5	4)	x_i	-3	-1	0	4	5
	p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	p_5		p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	p_5

5)	x_i	-7	-4	0	4	7	6)	x_i	2	9	10	11	13
	p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	p_5

7)	x_i	-6	-4	-2	2	4	8)	x_i	1	3	5	7	9
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	p_5		p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	p_5

9)	x_i	-2	-1	0	3	5	10)	x_i	-3	-2	-1	1	2
	p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	p_5

11)	x_i	-5	-3	-1	1	5	12)	x_i	1	4	6	7	9
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,2	0,05	0,15	0,3	p_5

13)	x_i	1	3	5	7	9	14)	x_i	-2	0	3	6	8
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,3	0,15	0,3	0,2	p_5

15)	x_i	-5	-4	0	1	3	16)	x_i	2	4	5	10	12
	p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	0,1	0,15	0,3	0,2	p_5

17)	x_i	-1	0	1	2	3	18)	x_i	0	3	6	8	9
	p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	0,15	0,35	0,05	0,2	p_5

19)	x_i	-3	-2	1	2	7	20)	x_i	0	3	6	10	11
	p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,05	0,4	0,25	0,2	p_5

Задание 6

Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения $p(x)$.

а) Найти функцию распределения $F(x)$, построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

б) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

в) Найти вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[a,b]$.

1) $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ x-\dfrac{1}{2} & при \quad 1<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$$
$P(1{,}5\le X\le 1{,}75)-?$

2) $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ x-\dfrac{x^3}{4} & при \quad 0<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$$
$P(0{,}5\le X\le 1{,}5)-?$

3) $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 6\\ \dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{2} & при \quad 6<x\le 9\\ 0 & при \quad x>9\end{cases}$$
$P(3\le X\le 4)-?$

4) $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{2x-1}{6} & при \quad 0<x\le 3\\ 0 & при \quad x>3\end{cases}$$
$P(1\le X\le 2{,}5)-?$

5) $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 2\\ \dfrac{5}{4}-\dfrac{x}{4} & при \quad 2<x\le 4\\ 0 & при \quad x>4\end{cases}$$
$P(2{,}5\le X\le 3{,}5)-?$

6) $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{x}{36}+\dfrac{1}{18} & при \quad 1<x\le 7\\ 0 & при \quad x>7\end{cases}$$
$P(2\le X\le 5)-?$

7) $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{36} & при \quad 0<x\le 6\\ 0 & при \quad x>6\end{cases}$$
$P(0{,}5\le X\le 2{,}5)-?$

8) $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 5\\ \dfrac{4}{5}-\dfrac{2x}{25} & при \quad 5<x\le 10\\ 0 & при \quad x>10\end{cases}$$
$P(6\le X\le 9)-?$

9) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 1\\ \dfrac{11}{18}-\dfrac{x}{9} \quad при \quad 1<x\le 4\\ 0 \quad при \quad x>4\end{cases}$$

$P(2\le X\le 3)-?$

10) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 7\\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{27}{10} \quad при \quad 7<x\le 9\\ 0 \quad при \quad x>9\end{cases}$$

$P(8\le X\le 8{,}5)-?$

11) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 0\\ \dfrac{x}{32} \quad при \quad 0<x\le 8\\ 0 \quad при \quad x>8\end{cases}$$

$P(1\le X\le 7)-?$

12) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 0\\ \dfrac{3x^2}{64} \quad при \quad 0<x\le 4\\ 0 \quad при \quad x>4\end{cases}$$

$P(0\le X\le 2)-?$

13) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 6\\ \dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{2} \quad при \quad 6<x\le 9\\ 0 \quad при \quad x>9\end{cases}$$

$P(3\le X\le 4)-?$

14) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 0\\ \dfrac{2x-1}{6} \quad при \quad 0<x\le 3\\ 0 \quad при \quad x>3\end{cases}$$

$P(1\le X\le 2{,}5)-?$

15) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 1\\ \dfrac{2x-1}{2} \quad при \quad 1<x\le 2\\ 0 \quad при \quad x>2\end{cases}$$

$P(0{,}5\le X\le 1{,}5)-?$

16) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 0\\ 6x+2 \quad при \quad 0<x\le \dfrac{1}{3}\\ 0 \quad при \quad x>\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$P(0{,}1\le X\le 0{,}2)-?$

17) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 0\\ \dfrac{2x+1}{2} \quad при \quad 0<x\le 1\\ 0 \quad при \quad x>1\end{cases}$$

$P(\frac{1}{6}\le X\le \frac{5}{6})-?$

18) $$p(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 1\\ \dfrac{2x-1}{6} \quad при \quad 1<x\le 3\\ 0 \quad при \quad x>3\end{cases}$$

$P(1{,}5\le X\le 3{,}5)-?$

19) $p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 3x^2 & при \quad 0<x\le 1\\ 0 & при \quad x>1\end{cases}$

$P(0{,}5\le X\le 1)-?$

20) $p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 4\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{3} & при \quad 4<x\le 6\\ 0 & при \quad x>6\end{cases}$

$P(5\le X\le 6)-?$

Задание 7

Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно M, а вероятность ее попадания в интервал $(\alpha;\beta)$ равна p. Найти среднее квадратическое отклонение σ случайной величины. Значения $M,\alpha,\beta,\ p$ даны в таблице 5.

Таблица 5 – Значения $M,\alpha,\beta,\ p$

№ варианта	α	M	β	p		№ варианта	α	M	β	p
1)	36	40	44	0,966		11)	9	13	17	0,98
2)	40	42	44	0,98		12)	22	24	26	0,966
3)	51	56	61	0,97		13)	52	55	58	0,82
4)	17	20	23	0,96		14)	42	47	52	0,97
5)	23	26	29	0,81		15)	21	23	25	0,89
6)	15	18	21	0,88		16)	11	16	21	0,9
7)	18	22	26	0,97		17)	38	41	44	0,95
8)	30	32	34	0,99		18)	32	35	38	0,95
9)	41	45	49	0,98		19)	12	15	18	0,96
10)	29	33	37	0,966		20)	23	25	27	0,85

Задание 8

Рассчитать и построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным, представленным в таблице 6, где m_i – частота попадания вариант в промежуток $(x_i;x_{i+1}]$.

Таблица 6 – Таблица данных

№ варианта	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i	№ варианта	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
	1	2—4	5		1	10—12	4
	2	4—6	8		2	12—14	12
1)	3	6—8	16	11)	3	14—16	8
	4	8—10	12		4	16—18	8
	5	10—12	9		5	18—20	18
	1	3—7	4		1	3—7	6
	2	7—11	6		2	7—11	8
2)	3	11—15	9	12)	3	11—15	10
	4	15—19	10		4	15—19	12
	5	19—23	11		5	19—23	4
	1	-6- -2	2		1	5—7	4
	2	-2—2	8		2	7—9	14
3)	3	2—6	14	13)	3	9-11	12
	4	6—10	6		4	11—13	8
	5	10—14	10		5	13—15	2
	1	4—8	5		1	11—14	3
	2	8—12	7		2	14—17	8
4)	3	12—16	10	14)	3	17—20	14
	4	16—20	12		4	20—23	15
	5	20—24	6		5	23—26	10
	1	7—9	5		1	2—5	6
	2	9—11	4		2	5—8	24
5)	3	11—13	8	15)	3	8—11	13
	4	13—15	12		4	11—14	1
	5	15—17	11		5	14—17	6
	1	5—8	5		1	10—14	5
	2	8—11	7		2	14—18	14
6)	3	11—14	4	16)	3	18—22	26
	4	14—17	1		4	22—26	9
	5	17—20	3		5	26—30	6
	1	4—6	3		1	5—10	3
	2	6—8	9		2	10—15	9
7)	3	8—10	7	17)	3	15—20	18
	4	10—12	22		4	20—25	14
	5	12—14	9		5	25—30	16
	1	1—5	4		1	10—20	12
	2	5—9	5		2	20—30	17
8)	3	9—13	9	18)	3	30—40	46
	4	13—17	10		4	40—50	12
	5	17—21	2		5	50—60	13

Продолжение таблицы 6

9)	1	10—14	3		19)	1	15—30	8
	2	14—18	16			2	30—45	16
	3	18—22	8			3-	45—60	12
	4	22—26	7			4	60—75	4
	5	26—30	6			5	75—90	10
10)	1	20—22	4		20)	1	20—40	8
	2	22—24	6			2	40—60	14
	3	24—26	10			3	60—80	10
	4	26—28	4			4	80—100	9
	5	28—30	6			5	100—120	19

5 Вопросы к зачету

1) Пространство элементарных исходов. События: виды событий, операции над событиями.

2) Аксиоматическое определение вероятности. Классическое определение вероятности.

3) Совместные и несовместные события. Теорема сложения вероятностей.

4) Условная и безусловная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

5) Вероятность появления хотя бы одного события.

6) Формула полной вероятности. Формула Байеса.

7) Повторение испытаний. Формула Бернулли.

8) Предельные теоремы в схеме Бернулли.

9) Дискретные и непрерывные случайные величины: определение, закон распределения.

10) Функция распределения вероятностей случайной величины, ее свойства.

11) Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, ее свойства.

12) Математическое ожидание случайной величины, его свойства.

13) Дисперсия случайной величины, ее свойства. Среднее квадратичное отклонение.

14) Моменты случайных величин: начальные и центральные.

15) Законы распределения случайных величин: равномерное, биноминальное, показательное, распределение Пуассона.

16) Нормальное распределение: определение, свойства, график.

17) Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.

18) Правило трех сигм. Оценка отклонения теоретического распределения от нормального.

19) Закон распределения двумерной случайной величины.

20) Генеральная совокупность и выборка, способы отбора.

21) Вариационный ряд: дискретный и интервальный.

22) Виды и графики вариационных рядов: полигон, гистограмма.

23) Эмпирическая функция распределения, ее свойства.

24) Числовые характеристики выборки: среднее арифметическое, дисперсия, стандартное отклонение, мода, медиана.

6 Литература

1 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: в 2 ч. Ч. 2. / П.Е. Данко [и др.].– 6-е изд. – Москва: Оникс 21 век, 2007. – 416 с.

2 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. - Москва: Юрайт, 2014. – 479 с.

3 Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие для прикладного бакалавриата / В.Е. Гмурман.– 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2016. – 404 с.

Список использованных источников

1 Гусак, А.А. Теория вероятностей: справ. пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова.- 4-е изд., стер. - Минск : ТетраСистемс, 2003. - 288 с. - Библиогр.: с. 284. - ISBN 985-470-138-7.

2 Мироненко, Е.С. Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов инженерно-технических специальностей вузов/ Е.С. Мироненко. – М.: Высш. шк., 1998. – 110 с.

3 Казакова, О.Н. Математика: учеб.-метод. пособие / О.Н. Казакова, О.Н. Конюченко, Т.А. Фомина; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009.

4 Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных задач по высшей математике. Ч. 1/ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Минск: Изд-во «Вышейшая школа», 1990. – 271 с.

5 Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию: учебное пособие/ А.С. Шапкин. – 3-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2006. – 432 с.

6 Колде, Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учеб. пособие / Я.К. Колде. – М.: Высш. шк., 1991. – 157 с.

Приложение А
(справочное)

Таблица производных и правила дифференцирования

$(C)' = 0$

$(ax+b)' = a$

$(x^m)' = mx^{m-1}$

$(x)' = 1$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(U \pm V)' = U' \pm V'$

$(UV)' = U'V + UV'$

$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$

$y'_x = y'_u \, u'_x$, если $y = y(u)$, $u = u(x)$

Таблица интегралов

$\int dx = x + C$

$\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C, \ m \neq -1$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$

$\int \dfrac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\,ctgx + C$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

$\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}} dx = \ln\left| x + \sqrt{a+x^2} \right| + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Правила и методы интегрирования

$$\int a\, f(x)dx = a \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$\int u dv = uv - \int v du$ – метод интегрирования по частям

$\int f(x)dx = \int f(x(t))\, x'_t dt$, если *y* = *y(x)*, *x* = *x(t)* – метод подстановки

Приложение В

Таблица значений для функций $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040'	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3116
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	91	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	и	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	ЗОИ	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794 .	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830

Продолжение таблицы

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58'	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	49984
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	49993
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995

Продолжение таблицы

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	49999997
	0957	4545	38	0235	4913			