Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Н.А. Гамова, Н.В. Кулиш

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 01.03.04 Прикладная математика,15.03.01 Машиностроение,15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 24.03.04 Авиастроение, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 08.03.01Строительство

Оренбург
2018

УДК 510.2:517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7
Г 18

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук И.К. Зубова

Гамова, Н.А.

Г 18 Дифференциальное исчисление функции многих переменных: методические указания к выполнению индивидуальных контрольных работ / Н.А. Гамова, Н.В. Кулиш,; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 49 с.

Методические указания дают возможность использовать их в процессе аудиторной и самостоятельной работы, подготовиться по изучаемому разделу.

Содержат необходимые теоретические сведения, примеры решения задач, вопросы для самопроверки, теоретические упражнения и 25 вариантов индивидуальных заданий.

Данные методические указания могут быть использованы обучающимися по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 01.03.04 Прикладная математика,15.03.01 Машиностроение,15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 24.03.04 Авиастроение, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 08.03.01Строительство

УДК 510.2:517.5(076.5)
ББК 22.161.5я7

Содержание

Введение

Методические указания составлены в соответствии с программой изучения дисциплины «Математический анализ» для студентов первого курса дневного и заочного отделения и предназначены в помощь студентам при изучении раздела «Дифференциальное исчисление функции многих переменных».

Методические указания содержат теоретический материал по основным понятиям теории функций многих переменных и позволяют познакомить студентов с основными понятиями теории дифференциального исчисления функций многих переменных, сформировать правильный научный подход к решению различных задач по дифференциальному исчислению функции многих переменных.

Дифференциальное исчисление функции многих переменных позволяет студентам овладеть фундаментальными понятиями и методами современной математики, без знания которых невозможна дальнейшая профессиональная подготовка. При освоении данного курса у студентов формируются навыки грамотной постановки научных задач, решения задач с применением математического аппарата, систематизации полученных знаний.

1 Дифференцирование функции нескольких переменных

1.1 Краткий теоретический материал

Если каждому набору n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторого множества X соответствует вполне определенное значение переменной z, то говорят, что задана *функция нескольких переменных* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множество X называется *областью определения функции* и обозначается D. Если $n = 2$ и $x_1 = x$, а $x_2 = y$, то $z = f(x, y)$ – это функция двух переменных.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ есть множество точек трехмерного пространства (x, y, z) и представляет собой некоторую поверхность. Поэтому $z = f(x, y)$ – это уравнение поверхности, являющейся графиком функции $z = f(x, y)$.

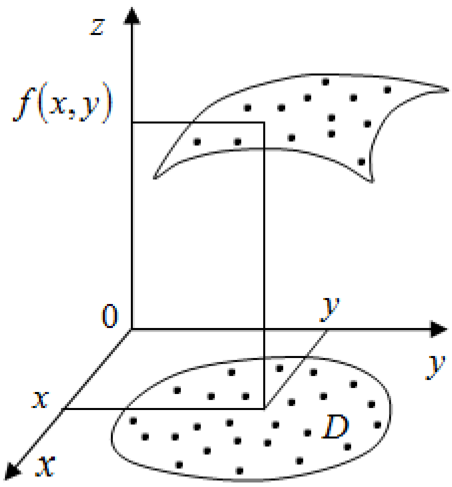

Рисунок 1

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости таких, что во всех точках значение функции принимает одно и то же значение равное C, т.е. $f(x, y) = C$. Число C в этом случае называется уровнем.

Область определения называется замкнутой, если она включает в себя граничные точки, и – незамкнутой, если граничные точки не включены в область.

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, определенная в области D. Точка $M_0(x_0, y_0)$ – это произвольно взятая точка в области D. Тогда δ – окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ будем называть множество точек $M(x, y)$ круга радиуса δ с центром точке $M_0(x_0, y_0)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta,$$

и являются точками окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

В случае функции трех переменных $f(x, y, z)$ δ – окрестностью точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будем называть внутренность шара радиуса δ с центром в точке M_0. Следовательно, точки $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta$, являются точками окрестности точки M_0.

Число A называется пределом функции $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при $M(x_1, x_2, ..., x_n) \to M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для как угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такую δ-окрестность точки M_0, что для всех M из этой окрестности выполняется неравенство

$$\left| f(x_1, x_2, ..., x_n) - A \right| < \varepsilon.$$

Из данного определения следует, что предел A не зависит от пути стремления точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ к точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. По всем направлениям к точке M_0 пределы функции существуют, конечны и равны друг другу.

Например ,пусть функция двух переменных $z = \frac{x}{x+y}$. Найдем предел при $x \to 0$ и $y \to 0$, т.е. при $M(x, y) \to M_0(0,0)$ по прямой $y = x$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y} = \frac{1}{2}$. Теперь пусть по прямой $y = 2x$. В этом случае $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$. Если при изменении пути, по которому точка M стремится к точке M_0, получаются разне значения предела, то предел функции в данной точке M_0 не существует.

Функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется непрерывной в области *D*, если в каждой точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in D$ выполняются следующие два условия:

1) значение $f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ определено как некоторое конечное число;

2) в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ существует конечный предел и он равен значению функции в ней, т.е. $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

1.1.1 Частные производные, градиент, дифференциал

Частными производными $z = f(x, y)$ по x и по y называются пределы вида:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x};$$
$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Величины $f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$, $f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ называются частыми приращениями функции $z = f(x, y)$.

Полным приращением функции называется величина $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$.

Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращение независимых переменных

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y,$$

или, учитывая, что $dx = \Delta x, dy = \Delta y$,

$$dz = z'_x dx + z'_y dy .$$

Производной z'_l *по направлению* $\overline{l} = (l_x, l_y)$ функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последней к нулю, т.е.

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Производная по направлению может быть выражена через частные производные по формуле

$$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta -$ значения косинусов направляющих углов вектора $\overline{l} = (l_x, l_y)$, $\cos\alpha = \dfrac{l_x}{|l|}$, $\cos\beta = \dfrac{l_y}{|l|}$.

Градиентом функции $z = f(x, y)$ называется вектор с координатами (z'_x, z'_y), т.е. $grad\, z = z'_x \overline{i} + z'_y \overline{j}$.

Градиент функции в точке $M\;\; x, y$ – это отличный от нуля вектор, направленнй по нормали к линии уровня, проходящей через точку $M\;\; x, y$.

Из физического смысла производной следует, что:

1. Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ определяют скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в направлении соответственно оси $\overrightarrow{OX}$ и оси $\overrightarrow{OY}$.
2. Скорость изменения функции в любом выбранном направлении $\overline{l} = (l_x, l_y)$ определяется производной по направлению $\dfrac{\partial z}{\partial l}$.
3. Направление наибольшего изменения функции $z = f(x, y)$ определяется градиентом функции $grad\, z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\overline{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\overline{j}$.

Градиент направлен по нормали к линии уровня, определяемой уравнением $f(x, y) = C$.

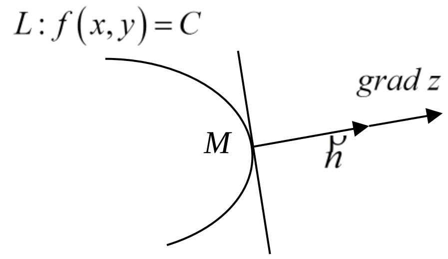

Рисунок 2

1.1.2 Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

Пусть дана функция двух переменных $z=f(x,y)$, определенная в некоторой области *D*.

Графиком этой функции является некоторая поверхность. Поэтому $z=f(x,y)$ – это уравнение поверхности. Изобразим ее. На этой поверхности возьмем точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Требуется составить уравнение касательной к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

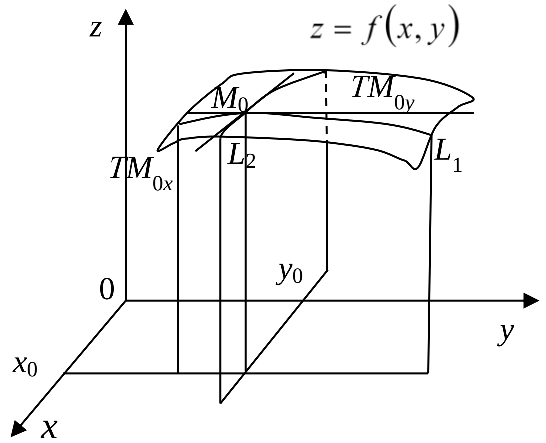

Рисунок 3

Воспользуемся определением касательной плоскости.

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ называется плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и содержащая в себе все касательные, построенные в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ко всевозможным кривым, расположенным на поверхности и проходим через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Из данного определения следует, что для решения задачи надо на поверхности построить любые кривые, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, провести к ним касательные прямые, т.е. найти уравнение касательных. Тогда плоскость, проходящая через эти касательные прямые и точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будет касательной плоскостью. Поэтому:

1. Пересечем поверхность двумя плоскостями $x = x_0,\ y = y_0$.

Результатом пересечения будут кривые

$$L_1: \begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x, y) \end{cases}, \quad L_2: \begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x, y) \end{cases}.$$

2. В точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ проведем к этим кривым касательные прямые *TM_{0x}* и *TM_{0y}*. Эти касательные прямые образуют две пересекающиеся прямые, через которые проходит касательная плоскость. Запишем уравнение этих касательных прямых

$$TM_{Ox}: \begin{cases} y = y_0 \\ z - z_0 = f'_x(x - x_0) \end{cases}, \quad TM_{Oy}: \begin{cases} x = x_0 \\ z - z_0 = f'_y(y - y_0) \end{cases}.$$

3. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0). \qquad (1)$$

Чтобы эта плоскость была касательной плоскостью надо, чтобы прямые *TM_{0x}* и *TM_{0y}* лежали в ней. А это означает, что координаты точек касательных прямых *TM_{0x}* и *TM_{0y}* удовлетворяли уравнению (1), т.е. при $x = x_0 \Rightarrow z - z_0 = B(y - y_0)$ и $z - z_0 = f'_y(y - y_0)$ или $B = f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, а при $y = y_0 \Rightarrow z - z_0 = A(x - x_0)$ и $z - z_0 = f'_x(x - x_0)$ или $A = f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Теперь при найденных значениях коэффициентов A и B плоскость (1) является касательной плоскостью в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности $z = f(x, y)$ и ее уравнение имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Чтобы составить уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, нужно заметить, что нормаль – это в первую очередь прямая. Поэтому ее уравнение в общем виде является каноническим уравнением прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где m, n, p – это проекции направляющего вектора $\vec{s} = \{m, n, p\}$. Во-вторых, нормаль – это перпендикулярная прямая к касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

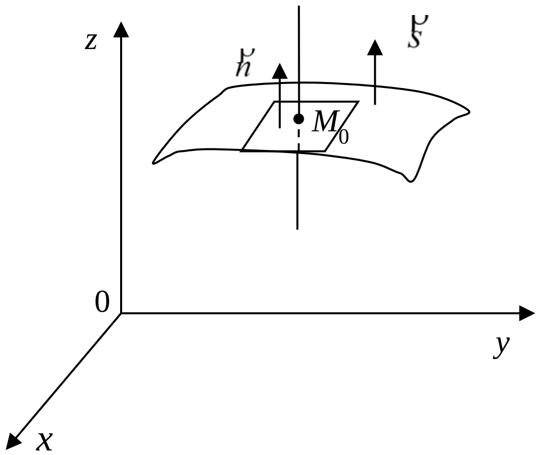

Рисунок 4

Значит, ее направляющий вектор $\vec{s}$ и нормальный вектор касательной плоскости $\vec{n} = \{f'_x, f'_y, -1\}$ параллельны. Поэтому за вектор $\vec{s} = \{m, n, p\}$ можно взять вектор $\vec{n} = \{f'_x, f'_y, -1\}$, и тогда $m = f'_x$, $n = f'_y$, $p = -1$ и уравнение нормали принимает вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Например, составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности шара $x^2+y^2+z^2=14$ в точке $M_0(1,2,3)$.

Решение:

1. Запишем уравнение сферической поверхности в виде $z=\sqrt{14-x^2-y^2}$, так как точка $M_0(1,2,3)$ принадлежит полупространству $z>0$.

2. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{14-x^2-y^2}}=\frac{-x}{\sqrt{14-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1\cdot(-2y)}{2\sqrt{14-x^2-y^2}}=\frac{-y}{\sqrt{14-x^2-y^2}}.$$

3. Вычисляем их числовые значения в точке $M_0(1,2,3)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}=\frac{-1}{\sqrt{14-1-4}}=-\frac{1}{3},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}=\frac{-2}{\sqrt{14-1-4}}=-\frac{2}{3}.$$

4. Составим уравнение касательной плоскости

$$z-3=-\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{3}(y-2)\Rightarrow (x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0.$$

5. Составим уравнение нормали

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{3}}=\frac{y-2}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-3}{-1}\Rightarrow 3(x-1)=\frac{3(y-2)}{2}=z-3\Rightarrow 6(x-1)=3(y-2)=2(z-3).$$

1.1.3 Дифференцирование неявной функции

Теорема. Пусть функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывна в некоторой области D переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, задана в неявном виде, т.е. определена уравнением:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, z) = 0. \qquad (2)$$

где $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n, z)$, $(i = \overline{1,n})$ и $\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, x_2, ..., x_n, z)$ непрерывные функции в области G, содержащей точку $M_0 \ x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z^0$, координаты которой удовлетворяют уравнению (2), кроме того в этой точке $\frac{\partial F}{\partial z} \ x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z^0 \ \neq 0$, то тогда функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, …, $\frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Доказательство. Пусть значениям $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ соответствует значение z^0, при этом

$$F \ x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z^0 \ = 0. \qquad (2')$$

Дадим аргументам $x_1, x_2, ..., x_n$ приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ в точке $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$. Тогда функция z получит приращение Δz, т.е. иметь значение $z_0 + \Delta z$ и соотношение $(2')$ принимает следующий вид

$$F \ x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_n^0 + \Delta x_n, z^0 + \Delta z \ = 0. \qquad (3)$$

Вычтем из (3) $(2')$

$$F \ x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_n^0 + \Delta x_n, z^0 + \Delta z \ - F \ x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z^0 \ = 0. \qquad (4)$$

Левую часть (4), являющуюся полным приращением функции $n+1$ переменных можно записать так:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}\Delta x_2+...+\frac{\partial F}{\partial x_n}\Delta x_n+\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z+\gamma_1\Delta x_1+\gamma_2\Delta x_2+...+\gamma_n\Delta x_n+\gamma_{n+1}\Delta z=0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\Delta x_i+\gamma_{n+1}\Delta z=0\,, \qquad (5)$$

где γ_i, $(i=\overline{1,n})$ и Δz – бесконечно малые при $\Delta x_i\to 0$ $(i=\overline{1,n})$ и $\Delta z\to 0$.

Главную часть полного приращения функции $F(x_1,x_2,...,x_n,z)$ составляет полный дифференциал этой функции, который равен нулю.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0\,, \qquad (6)$$

где $dx_1=\Delta x_1$, $dx_2=\Delta x_2$, …, $dx_n=\Delta x_n$, $dz=\Delta z$.

Определим из (6) dz

$$dz=\left(\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right)dx_1+\left(\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right)dx_2+...+\left(\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right)dx_n\,, \qquad (7)$$

где $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

Но полный дифференциал функции $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ определяется соотношением вида

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n\,. \qquad (8)$$

Сравним выражения (7) и (8), получаем искомые производные функции z аргументов $x_1,x_2,...,x_n$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}};\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}};\ \ldots;\ \frac{\partial z}{\partial x_n}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}. \tag{9}$$

Замечаем, что если непрерывная функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$ и функция $F(x,y)$ удовлетворяет условиям рассмотренной теоремы, то в этом случае получаем формулу дифференцирования неявной функции одной независимой переменной

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}. \tag{10}$$

Например. Найти производную неявной функции $y=f(x)$, заданную уравнением $2y(x+1)^3-tg\,xy=0$.

Решение.

1. Устанавливаем, что $F\left(x,y\right)=2y(x+1)^3-tg\,xy$.

2. Находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y(x+1)^3-\operatorname{tg}xy\right)=6y(x+1)^2-\frac{y}{\cos^2 xy},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2y(x+1)^3-\operatorname{tg}xy\right)=2(x+1)^3-\frac{x}{\cos^2 xy}.$$

3. Согласно формуле (10), записываем

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{6y(x+1)^2-\dfrac{y}{\cos^2 xy}}{2(x+1)^3-\dfrac{x}{\cos^2 xy}}=\frac{6y(x+1)^2\cos^2 xy-y}{2(x+1)^3\cos^2 xy-x}.$$

Если непрерывная функция двух переменных $z=f(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, и функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям рассмотренной теоремы, то в этом случае получаем формулы вычисления частных производных неявной функции двух независимых переменных

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{11}$$

Например. Найти частные производные неявной функции $z=f(x,y)$, заданную уравнением $x+2y+3z-e^z=0$.

Решение.

1. Устанавливаем, что $F(x,y,z)=x+2y+3z-e^z$.

2. Находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x+2y+3z-e^z\right)=1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x+2y+3z-e^z\right)=2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(x+2y+3z-e^z\right)=3-e^z.$$

3. Согласно формуле (11) записываем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{3-e^z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2}{3-e^z}.$$

4. Замечаем, что из $x+2y+3z-e^z=0$ можно определить, что $e^z-3=x+2y+3z-3$. Тогда получим, что:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x+2y+3z-3},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2}{x+2y+3z-3}.$$

1.1.4 Дифференцирование сложной функции нескольких переменных

Рассмотрим вначале дифференцирование сложной функции двух переменных.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная в области D, при этом $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ являются функциями от переменного t, определенного на множестве T. В этом случае $z = f(x, y)$ называется сложной функцией:

$$z = f(\varphi(t), \psi(t)) = \Phi(t). \tag{12}$$

Пусть существуют непрерывные частные производные f'_x и f'_y и производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Требуется найти производную $\frac{\partial z}{\partial t} = z'_t$.

Дадим аргументу t приращение Δt. Тогда $y = \psi(t)$ получит приращение Δy, а $x = \varphi(t)$ получит приращение Δx. Функция $z = f(x, y)$, как функция двух переменных, получит полное приращение Δz, определяемое формулой

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y.$$

Найдем:

$$z'_t = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} +$$

$$+\lim_{\Delta t \to 0}\gamma_1\cdot\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\gamma_2\cdot\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + 0\cdot\frac{dx}{dt} + 0\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \tag{13}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Выражение (13) является формулой вычисления производной.

Например, $z = f(x, y)$, $x = \ln t$, $y = \sin t$. Тогда $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\ln t)' + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin t)' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cos t$

.

Теперь рассмотрим случай, когда в $z = f(x, y)$ $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$, т.е. x и y также являются функциями двух переменных u и v. В этом случае функция z есть сложная функция от переменных u и v. Требуется найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$. Можно z выразить непосредственно через u и v, т.е. $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

Например, $z = x^3 y + x + 1$, $x = u^2 + v^2$, $y = e^{u+v+1}$.

Тогда $z = (u^2+v^2)^3 e^{u+v+1} + u^2 + v^2 + 1$ и нахождение частных производных будет проходить по обычным правилам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3(u^2+v^2)^2 2u \cdot e^{u+v+1} + (u^2+v^2)^3 \cdot e^{u+v+1} + 2u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 3(u^2+v^2)^2 2v \cdot e^{u+v+1} + (u^2+v^2)^3 \cdot e^{u+v+1} + 2v.$$

Однако, существует достаточное количество задач, в которых требуется найти непосредственно $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned} \tag{14}$$

Примеры:

1. $z = xy + x^2 y^2$, $x = u\sin v$, $y = u^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = (y + 2xy^2)\sin v + (x + 2x^2 y)2u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = (y + 2xy^2)u\cos v + (x + 2x^2 y)\cdot 0 = (y + 2xy^2)u\cos v.$$

2. Дано дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{15}$$

которое называется уравнением Лапласа. Требуется записать его в полярных координатах (r,φ), где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = u_r \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x + u_\phi \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$= u_r \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - u_\varphi \cdot \frac{y}{x^2+y^2} = u_r \cdot \frac{r\cos\varphi}{r} - u_\varphi \cdot \frac{r\sin\varphi}{r^2} = u_r \cdot \cos\varphi - u_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r},$$

где $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\ u_x\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_r\cos\varphi - u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\cos\varphi - u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(u_r\,\mathrm{co}\,\varphi - u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} =$$

$$= \left(u_{rr}\cos\varphi - u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} + u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\cos\varphi + \left(u_{r\varphi}\cos\varphi - u_r\sin\varphi - u_{\varphi\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} - u_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) =$$

$$= u_{rr}\cos^2\varphi - u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} - u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + u_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + u_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} =$$

$$= u_{rr}\cos^2\varphi - 2u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + 2u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + u_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}.$$

Находим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = u_r\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y + u_\varphi\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = u_r\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + u_\varphi\cdot\frac{x}{x^2+y^2} =$$

$$= u_r\cdot\frac{r\sin\varphi}{r} + u_\varphi\cdot\frac{r\cos\varphi}{r^2} = u_r\cdot\sin\varphi + u_\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{r},$$

где $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\ u_y\ = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_r\cdot\sin\varphi + u_\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\cdot\sin\varphi + u_\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(u_r\cdot\sin\varphi + u_\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} =$$

$$= \left(u_{rr}\sin\varphi + u_{r\varphi}\frac{\cos\varphi}{r} - u_\varphi\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)\sin\varphi + \left(u_{r\varphi}\sin\varphi + u_r\cos\varphi + u_{\varphi\varphi}\frac{\cos\varphi}{r} - u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cdot\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right) =$$

$$= u_{rr}\sin^2\varphi + u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + u_r\frac{\cos^2\varphi}{r} + u_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} - u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} =$$

$$= u_{rr}\sin^2\varphi + 2u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - 2u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u_r\frac{\cos^2\varphi}{r} + u_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}.$$

Вычисляем:

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\frac{u_r}{r}\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)+\frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2}\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=0\Rightarrow$$

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0 \text{ или } r^2u_{rr}+ru_r+u_{\varphi\varphi}=0 \tag{16}$$

– уравнение Лапласа в полярных координатах.

Пусть дана функция $z=f(x)=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, определенная в области $D\subset R^n$, при этом $x_1=\varphi_1\left(t_1,t_2,...,t_n\right)$, $x_2=\varphi_2\left(t_1,t_2,...,t_n\right)$, $\ldots$, $x_n=\varphi_n\left(t_1,t_2,...,t_n\right)$ являются функциями переменных $t_1,t_2,...,t_n$, определенных на множестве T. В этом случае функция $z=f\left(\varphi_1\left(t_1,t_2,...,t_n\right),\varphi_2\left(t_1,t_2,...,t_n\right),...,\varphi_n\left(t_1,t_2,...,t_n\right)\right)$ называется сложной функцией n-переменных $t_1,t_2,...,t_n$. Согласно формулам (2) и (3) ее частные производные по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial t_i}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+...+\frac{\partial z}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_i},\ i=\overline{1,n}. \tag{17}$$

1.1.5 Экстремум функции нескольких переменных

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется *точкой максимума (минимума) функции* $z=f(x,y)$, если существует окрестность точки M_0, такая, что для всех точек (x,y) из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0,y_0)\geq f(x,y)\ \left(f(x_0,y_0)\geq f(x,y)\right).$$

Если в точке максимума или минимума обе частные производные существуют и непрерывны, то они равны нулю в этой точке (*необходимое условие экстремума*).

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными.

Следует заметить, что есть функции, которые в данной точке имеют экстремум, но частные производные в ней могут не существовать. Примером может служить функция $z^2 = x^2 + y^2$. В точке (0,0) данная функция имеет минимум, а частные производные не существуют (рисунок 5).

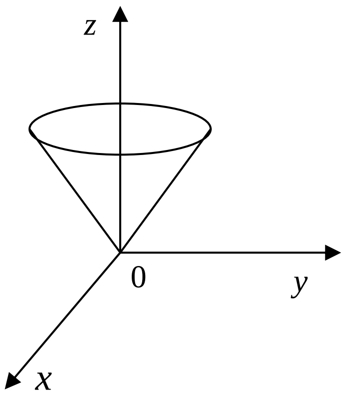

Рисунок 5

Поэтому, также как и в случае функции одной переменной, точки, в которых производные равны нулю или не существуют, будем называть критическими.

Если в точке (x_0, y_0) обе частые производные обращаются в нуль, то характер этой точки определяется величиной $\Delta = AC - B^2$, где $A = z''_{xx}, B = z''_{xy}, C = z''_{yy}$.

При $\Delta > 0$ имеется экстремум (максимум при A<0 и минимум при A>0).

При $\Delta < 0$ функция в данной точке экстремума не имеет.

При $\Delta = 0$ вопрос о наличии экстремума остается открытым (*достаточное условие экстремума*).

Наибольшее (наименьшее) значение функции (глобальный максимум (минимум)) $z = f(x, y)$ определяется как наибольшее (наименьшее) значение функции в замкнутой области из ее значений в критических точках внутри области и на ее границе.

При исследовании функции на экстремум рекомендуется пользоваться следующей схемой:

1. Найти частные производные z'_x и z'_y.
2. Решить систему уравнений $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ и найти критические точки функции.

3. Найти частые производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.

4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

1.2 Примеры решения задач

Задача 1. Найти область определения функции:

а) $z=\dfrac{\sin(2x+3y)}{\sqrt{1-y^2}}$.

Решение. Т.к. функция задается дробью, то ее знаменатель должен быть отличным от нуля, и т.к. в знаменателе стоит квадратный корень, то D_z определяется неравенством: $1-y^2>0$, $(1-y)(1+y)>0$, т.е. $y\in(-1;1)$.

б) $z=\ln\left(x+\sqrt{6-2y}-2\right)$.

Решение. Выражение $\ln\left(x+\sqrt{6-2y}-2\right)$ имеет смысл для значения переменных x и y, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x+\sqrt{6-2y}-2>0, \\ 6-2y\geq 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Система (18) эквивалентна совокупности следующих трех систем:

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ 6-2y>(2-x)^2, \\ 3-y\geq 0; \end{cases} \qquad (19)$$

$$\begin{cases} 2-x<0, \\ 3-y\geq 0; \end{cases} \qquad (20)$$

$$\begin{cases} 2-x=0, \\ 3-y>0. \end{cases} \qquad (21)$$

Область определения функции $z=\ln\ x+\sqrt{6-2y}-2$ представляет собой объединение трех множеств точек x, y, координаты x и y которых удовлетворяют собственно системам (19), (20), (21). Заменим неравенства системы (20) равенствами: $2-x=0$, $6-2y=\ 2-x\ ^2$, $y=3$. Вершина параболы $y-3=-\frac{1}{2}\ 2-x\ ^2$ находится в точке (2;3), причем точки параболы x, y, для которых $x\le 2$ не входят в область определения (среди них точка(2,3)).

Задача 2. Найти частные производные первого и второго порядков функции $z=e^{xy}+y\sin x$.

Решение. Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+y\cos x\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+\sin x\,.$$

Затем найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}-y\sin x\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}\,.$$

Для смешанных производных имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\ ye^{xy}\ +\cos x=e^{xy}+xye^{xy}+\cos x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{dy}\right).$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+\cos x$.

Задача 3. Вычислить приближенно $(1{,}02)^{2{,}98}$.

Решение. Для этого нужно:

1) записать вид самой функции по виду данного выражения, т.е. $z=x^y$;

2) записать значения x и y, т.е. $x=1{,}02$; $y=2{,}98$ и представить их в виде:

$$x=x_0+\Delta x\,,\ y=y_0+\Delta y\,,\ \text{т.е. } x=1+0{,}02,\ y=3-0{,}02,$$

тогда $x_0=1$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=-0{,}02$;

3) найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, т.е. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^y)=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$;

4) вычислить $f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ f(x_0,y_0)$:

$f(x_0,y_0)=1^3=1,\ f'_x(x_0,y_0)=3\cdot 1^2=3,\ f'_y(x_0,y_0)=1^3\cdot\ln 1=0$;

5) вычислить x^y, т.е. $(1,02)^{2,98}\approx 1+3\cdot 0,02+0\cdot(-0,02)=1,06$.

Задача 4. Используя дифференциал, вычислить приближенные значения функции $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точках (3,1;3,9) и (2,9;4,1).

Решение. Рассматриваемые точки лежат вблизи точки (3;4), в которой легко вычисляется значение функции: $f(3,4)=5$. Найдем дифференциал данной функции в точке (3;4):

$$f'_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_x(3,4)=\frac{3}{5}=0,6;\ f'_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y(3,4)=\frac{3}{5}=0,8.$$

следовательно, $df(3,4)=f'_x(3,4)\Delta x+f'_y(3,4)\Delta y=0,6\Delta x+0,8\Delta y$.

Из формулы (3) следует, что $f(3+\Delta x,4+\Delta y)\approx f(3,4)+0,6\Delta x+0,8\Delta y$. Для точки (3,1;3,9) имеем $\Delta x=0,1$, $\Delta y=-0,1$ и поэтому $f(3,1;3,9)\approx 5+0,6\cdot 0,1-0,8\cdot 0,1=4,98$.

Для точки (2,9;4,1) имеем $\Delta x=-0,1$, $\Delta y=0,1$ и поэтому $f(2,9;4,1)\approx 5-0,6\cdot 0,1+0,8\cdot 0,1=5,02$.

Задача 5. Найти полный дифференциал функции $z=\ln\left(xy+\frac{5}{y}\right),\ \begin{cases}x=u\cdot v\\ y=\frac{v}{u}\end{cases}$.

Решение. По общей формуле имеем: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, но т.к. $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$, то получаем:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial y}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial u}{\partial v}dv\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv.$$

Вычислим: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{xy+\frac{5}{y}}\cdot\left(xy+\frac{5}{y}\right)'_x=\frac{1}{xy+\frac{5}{y}}\cdot y=\frac{y}{xy+\frac{5}{y}}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot\left(xy+\frac{5}{y}\right)_y^{'}=\frac{1}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot\left(x-\frac{5}{y^2}\right)=\frac{x-\dfrac{5}{y^2}}{xy+\dfrac{5}{y}};\quad \frac{\partial x}{\partial u}=v;\frac{\partial x}{\partial v}=u;\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{v}{u^2};\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{u}.$$

$$dz=\left(\frac{y}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot v+\frac{x-\dfrac{5}{y^2}}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot\left(-\frac{v}{u^2}\right)\right)du+\left(\frac{y}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot u+\frac{x-\dfrac{5}{y^2}}{xy+\dfrac{5}{y}}\cdot\frac{1}{u}\right)dv=$$

$$=\left(\frac{yv}{xy+\dfrac{5}{y}}-\frac{v\left(x-\dfrac{5}{y^2}\right)}{u^2\left(xy+\dfrac{5}{y}\right)}\right)du+\left(\frac{yu}{xy+\dfrac{5}{y}}+\frac{x-\dfrac{5}{y^2}}{u\left(xy+\dfrac{5}{y}\right)}\right)dv.$$

Задача 6. Найти экстремумы функции $z=2x^2+xy-y^2+x$.

Решение. Находим точки "подозрительные" на экстремум:

$$\begin{cases} z'_x=4x+y-1=0,\\ z'_y=x-2y=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2y,\\ 5y+1=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2y,\\ y=-\dfrac{1}{5},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-\dfrac{2}{5},\\ y=-\dfrac{1}{5}.\end{cases}$$

Вычисляем в точке $\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$ значение Δ.

$z''_{xx}=4,\ z''_{xy}=1,\ z''_{yy}=-2,\ \Delta=4\cdot\ -2\ -1=-9<0$ во всех точках, следовательно, экстремумов функция не имеет.

Задача 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=4x^2++16y^2+2x+1$ на множестве $M=\ x,y\ |0\le x\le 2,-x\le y\le 0\ $.

Решение. Рассмотрим вопрос о нахождении наибольших и наименьших значений функции $z=f\ x,y$ на заданном замкнутом множестве *M*. Известно, что ограниченно и замкнутое множество не плоскости компактно. Тогда по теореме Вейерштрасса непрерывная функция $z=f\ x,y$, заданная на компактном множестве, достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Во внутренних точках множества *M* наибольшее и наименьшее значения могут достигаться только в экстремальных точках, следовательно, в этих точках z'_x и z'_y

или равны нулю, или не существуют. На границе области во всех предлагаемых случаях функцию $f(x,y)$ можно представить как функцию одного аргумента, меняющуюся на некотором замкнутом отрезке $[a, b]$. Наибольшее и наименьшее значения такой функции достигаются или в точках, где производная равна нулю или не существует, или на концах отрезка.

Итак, получаем следующую схему для решения задачи:

1) находим точки M_1, M_2, ... M_n, в которых z'_x и z'_y равны нулю или не существуют;

2) на границе области выражаем функцию z как функцию одной переменой, изменяющуюся на $[a, b]$. Находим точки N_1, N_2, ... N_k, в которых производная этой функции равна нулю или не существует;

3) вычисляем значения функции $z_1 = f(M_1)$, $z_2 = f(M_2)$, ...для точек M_1, M_2, ... $M_n \in$ M и $z^1 = f(N_1)$, $z^2 = f(N_2)$, ... для точек N_1, N_2, ... $N_k \in [a, b]$, $z(a)$, $z(b)$.

Выбираем среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Эти числа будут искомыми.

1) Найдем z'_x и z'_y: $\begin{cases} z'_x = 8x + 2 = 0, \\ z'_y = 32y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}, \\ y = 0. \end{cases}$

Тогда $\left(-\dfrac{1}{4};0\right) \in M$.

Точек, в которых z'_x и z'_y не существуют, нет. Таким образом, наибольшее и наименьшее значения достигаться внутри области M не могут.

2) Рассмотрим участок границы $\begin{cases} y = 0 \\ x \in [0, 2] \end{cases}$. На этом участке $z = 4x^2 + 2x + 1$,

$z'_x = 8x + 2 = 0$, $x = -\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{4} \notin [0, 2]$.

Так как z'_x существует при всех $x \in (-\infty; +\infty)$, а точка $-\dfrac{1}{4} \notin [0, 2]$, то внутри этого отрезка границы наибольшее и наименьшее значения функции не достигаются. Они могут достигаться лишь в точках (0; 0) и (2; 0).

Рассмотрим участок границы $\begin{cases} x=2 \\ y\in -2,0 \end{cases}$.

$z=16+16y^2+4+1=21+16y^2$, $z'_y=32y=0$, $y=0$.

Производная z'_y существует при всех $y\in -\infty;+\infty$, следовательно, точками, в которых могут достигаться наибольшее и наименьшее значения на этой части границы являются точки (2; 0) и (2; -2).

На участке границы $\begin{cases} y=-x \\ x\in 0,2 \end{cases}$

$z=4x^2+16x^2+2x+1=20x^2+2x+1$, $z'_x=40x+2=0$, $x=-\dfrac{1}{20}\notin 0,2$, z'_x существует при всех $x\in -\infty;+\infty$. Точки, соответствующие концам промежутка изменения $x\in 0,2$ есть (0; 0) и (2; -2).

Итак, наибольшее и наименьшее значения могут достигаться лишь в одной из точек (0; 0), (2; -2), (2; 0). Вычислим значения функции в каждой из этих точек и выберем наибольшее и наименьшее из них. Так как $z(0,0)=1$, $z(2,0)=16+4+1=21$, $z(2,-2)=16+64+4+1=85$, то $z=1$ - наименьшее, $z=85$ – наибольшее значения данной функции.

Задача 8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2y(2-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Решение. Найдем стационарные точки, лежащие внутри данного треугольника:

$$z'_x=4xy-3x^2y-2xy^2=xy(4-3x-2y),$$

$$z'_y=2x^2-x^3-2x^2y=x^2(2-x-2y).$$

Приравнивая производные нулю, можно на x и y сократить, так как внутри треугольника и $x>0$, и $y>0$, тогда

$$\begin{cases} 4-3x-2y=0 \\ 2-x-2y=0 \end{cases}.$$

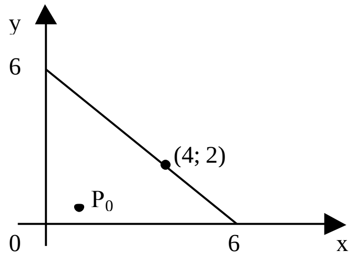

Рисунок 6

Решение этой системы: $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}$. Стационарная точка $P_0\left(1, \frac{1}{2}\right)$ лежит внутри треугольника. Значение функции z в этой точке:

$$z_0 = z\ \ P_0\ \ = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

На сторонах треугольника $x = 0$ и $y = 0$ значения функции равны нулю.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на стороне $x + y = 6$. На этой стороне $y = 6 - x$ $(0 \le x \le 6)$ и $z = z(x) = x^2(6 - x)\cdot(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$.

На концах интервала $z\ \ 0\ \ = z\ \ 6\ \ = 0$. Стационарные точки находим из уравнения $z'\ \ x\ \ = 0$:

$$-48x + 12x^2 = 0,\ 12x\ \ x - 4\ \ = 0.$$

Отсюда $x = 4$ (так как $x = 0$ – граничная точка); при этом $y = 2$, $z = -4 \cdot 16 \cdot\ \ 6 - 4\ \ = -128$.

Итак, наибольшее и наименьшее значения функции z в данном треугольнике надо искать среди следующих ее значений:

$z = \frac{1}{4}$ - внутри треугольника, в точке $\left(1, \frac{1}{2}\right)$;

$z = 0$ – на сторонах $x = 0$ и $y = 0$ (в том числе и в вершинах);

$z = -128$ – на стороне $x + y = 6$, в точке (4, 2).

Отсюда видно, что наибольшее значение $z=\frac{1}{4}$ данная функция принимает внутри треугольника, в точке $P_0\left(1,\frac{1}{2}\right)$, а наименьшее $z=-128$ – на его границе, в точке (4, 2).

1.3 Вопросы для самопроверки

1.Определение функции нескольких переменных.

2.Область определения функции нескольких переменных.

3.График функции двух переменных.

4.Линия уровня функции двух переменных.

5.Частные производные функции нескольких переменных.

6.Дифференциал функции нескольких переменных.

7.Производная по направлению, градиент функции.

8.Точки экстремума функции двух переменных.

9.Необходимое и достаточное условия экстремума.

1.4 Теоретические упражнения

1. Показать, что функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ является непрерывной в точке (0; 0) по каждой переменной xи yи не является непрерывной в точке (0; 0) по совокупности переменных.

2. Доказать, что если $F(x,y,z)=0$ и функция F дифференцируема, то $\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}=-1$.

Указание: найти производные $\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$ по правилу дифференцирования неявно заданной функции.

3. Найти $f(x,y)$, если $f(x+2y,x-2y)=xy$.

Указание: ввести новые переменные $u = x + 2y$, $v = x - 2y$.

4. Установить, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy = 0 \\ 1, & \text{если } xy \neq 0 \end{cases},$$

имеет в точке $M(0,0)$ частные производные $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = 0$, но не дифференцируема в точке по совокупности переменных.

5. Показать, что для функции

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = y = 0, \end{cases}$$

в точке $M(0,0)$ $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M \neq \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_M$.

6. Найти все производные второго порядка функции $\int\limits_x^{x^2+y^2} e^t dt$ в точке $M(1,2)$.

7. Показать, что функция $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$, где $a \in R$, $x_0 \in R$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

8. Показать, что функция $u = A \sin \lambda x \cdot \cos \lambda a t$, где $a \in R$, $\lambda \in R$ удовлетворяет уравнению колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

9. Почему нельзя определить касательную плоскость к поверхности по аналогии с определением касательной к кривой как предельное положение плоскости, проходящей через единую точку и две другие точки, достаточно близкие к данной?

10. Функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Имеет ли поверхность $z = f(x,y)$ касательную плоскость в точке (x_0, y_0, z_0)?

1.5 Индивидуальные задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x-2y}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin\ \ x^2+y^2\ \ \cos\ \ x^2+y^2}{x^2+y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=e^{x^2+3y^5}$, где $x=\sin 2t$, $y=t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно $x^2+z^2-2y^2-5x^z+10z^3-5=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\sin^2\ \ 2x+y$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ \ x,y\ \ =x^y$ в точке (1,04; 2,05).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=t$, $y=t^2$, $z=1-\dfrac{t}{2}$ в точке (2; 4; 0).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-6x^2-y^2+4y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=\ \ x-2\ \ ^2+2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$.

Вариант 2

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \ln x + \ln \;\; y^2 - 4x \;\;$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1 - \cos \;\; x^2 + y^2}{x^2 + y^2 \;\; x^2 y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = 3z^2 + zy^5 + y^3$, где $z = \sin t$, $y = e^{2t^2}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $x^y - 5xyz = 20x^z$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = \cos^2 \;\; 3x + 5y \;\;$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f \;\; x, y \;\; = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (4,05; 2,95).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = \sin t$, $y = 2\cos t$, $z = 4t$ в точке (0; 2; 0).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$.

Вариант 3

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \sqrt{x - 2\sqrt{y}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \ln \arcsin \;\; x - y \;\;$, где $x = 3t^2$, $y = \dfrac{1}{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $z^3+5yz=a^3$, $a=\mathrm{const}$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=tg\ x+7y$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ x,y\ =arctg\left(\frac{x}{y}-1\right)$ в точке (1,98; 1,02).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ в точке (1; 0; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^2+4y^2+y-xy$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^2+4xy-2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

Вариант 4

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\frac{1}{\sqrt{2-x^2-\frac{1}{2}y^2}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=5x^3+4x^2-y$, где $x=\cos t$, $y=e^{2t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $e^z-xyz=3x^y$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=e^{xy}$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ x,y\ =x^{y+1}$ в точке (0,98; 2,02).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ в точке (2; 0; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^2+3y-xy+4$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$.

Вариант 5

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)^{-1}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \cos\left(x^2 + 5y\right)$, где $x = e^{3t}$, $y = \sin 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $\sin(xyz) - x^2 y + z = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = x\sin^2 y$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$ в точке (1,03; 0,98).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = \ln\cos t$ в точке (a; 0; 0).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 4y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 3$.

Вариант 6

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \arccos\dfrac{x^2 + y^2}{9}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2x - xy - 2y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\sin(2x^3+y^3)$, где $x=\ln 2t$, $y=t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $\cos(x^2yz)+xy+5z=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=y\cos^2 x$.

6. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^3y^4+1$ в точке (2,02; 0,97).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x=\sqrt{t}$, $y=t^3$, $z=\ln t$ в точке (1; 1; 0).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-xy$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $y=2x$, $y=x$, $x=1$.

Вариант 7

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+2xy)^{\frac{5}{xy}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\ln(e^x+e^y)$, где $x=t^5$, $y=\cos 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $(x^2+y^2+z^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\sin^2(x-y)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y})$ в точке(0; 3).

7. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 5$ в точке (0; 3; 5).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^2 + y^2 + 3x - 4y + 1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3\ln x + xy^2 - y^3$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$.

Вариант 8

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \sqrt{\ln \dfrac{9}{x^2 + y^2}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{xy}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \ln(e^t + e^x)$, где $x = t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $zxe^y + z^2xy = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = \ln(x^2 - y^2)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})$ в точке (4,02; 1,03).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z = 3x^2 + 4xy - y^2$ в точке (0;1; -1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $x = -2$, $y = 2$, $y = -2$.

Вариант 9

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{xy}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$, $k = \text{const}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln arctg\ \ tx$, где $x = e^t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $ye^{zx} + 2z^3x^2y = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = \ln\ \ xy$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ \ x, y\ \ = \ln\ \ \sqrt[3]{x} - \sqrt{y}$ в точке (8,03; 1,02).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z^2 = 2x^2 + 3y^2$ в точке (1; -1; 5).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = \ \ x - 1\ \ ^2 - 2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 3$, $y = 0$, $y = x$.

Вариант 10

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \sqrt{y \sin x}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{2x}{x + y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \arcsin\ \ 5t^2 + x$, где $x = \sqrt{t^2 + 1}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функциизаданной неявно $x^2e^{zy} + xyz = 3$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = arctg\ \ xy$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^{2y}$ в точке (1,02;2,02).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2-2y^2-z^2=3$ в точке (-2; 0; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=(x-1)^2+2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x^2+18xy+18y-8x+8$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=2$, $y=0$, $y=x$.

Вариант 11

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4-2y^4}{3x^4+y^4}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=tg\left(3t^2+4x^3-y\right)$, где $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $z\sin\left(x^2y\right)+xyz=5$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=(x-y)e^{xy}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=\sqrt{2x+y^2}$ в точке (8,01;3,03).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2-y^2-5z=0$ в точке (0; 5; -5).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=3x^2+18xy+18y-8x+8$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=(x-1)^2+2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $(x-1)^2+y^2=1$.

Вариант 12

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{tg\sqrt{xy}}{\sqrt{x}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\dfrac{e^{at}(y-z)}{a^2}$, где $y=a\sin t$, $z=a\cos t$, $a=\text{const}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции,заданной неявно $e^{xyz}+\sin(xy)+zx=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=y\ln\dfrac{x}{y}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^3y^2$ в точке (1,02; 0,98).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z^2+x^2=5$ в точке (-1; 6; 2).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=7x^2-6xy+3y^2-4x+7y-12$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=(x-1)^2-2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $(x-1)^2+y^2=1$.

Вариант 13

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2y^2}}{x^2+y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\sin(t^3+5x^2+y)$, где $x=e^t$, $y=2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $e^{xz} - \cos(2xz) + y^2 = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = arctg(x + 2y)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = x^5 y^4$ в точке (1,03; 0,99).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ в точке $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = xy - 3x^2 - y^2 + x - 12$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$.

Вариант 14

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta y}$, $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln \sin(xy)$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно $e^{zy} + 2\sin(x^2 y) + z = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = \arcsin(xy)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = x^2\sqrt{21 + y^2}$ в точке (2,03; 2,01).

7. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z+2x-3y+4=0$ в точке (1; 4; 6).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=6-3x^2-4y^2+x-y$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x^2+y^2-4y+1$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Вариант 15

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin\ 1-y$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1+x+y}-1}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\ln\cos\ xy$, где $x=\sqrt[5]{t^3}$, $y=e^t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $x^y+zx-yz=0$

.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\sin\ xy$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ x,y\ =\ln\ x^3+y^2$ в точке (0,04; 1,04).

7. Найти градиент функции $z=\sin^2 3x+e^{-y}$ в точке $\left(\dfrac{\pi}{6};2\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=3\ln x+xy^2-y^3$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-2y^2+4xy+4y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $y=0$, $y+2x=2$.

Вариант 16

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=\arccos\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \dfrac{2^{\frac{1}{m}}+1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = e^{x^2+3y^4+t}$, где $x = \sin t$, $y = 2t+5$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z\ln z \ln\ x+z\ -\dfrac{xy}{3}=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ x, y\ = 3x^2+5xy+4y^2$ в точке (1,04; 1,94).

7. Найти градиент функции $z = \ln\sqrt{x-y}$ в точке (2; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x - x^2 + 3y - 4y^2 + 234$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2+4y^2+4y+1$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $x^2+4y^2=1$.

Вариант 17

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+x}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x^2-1\quad xy+1}{x^3y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \operatorname{arctg}\ 3x^2+5\sqrt{y}\ $, где $x = e^{2t}$, $y = 3t^3$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z^2\ln\ y+z\ -\dfrac{xz}{2}=1$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{\ x^2+y^2\ ^3}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=2x^3+3yx^2+y^2$ в точке (1,02; 1,05).

7. Найти градиент функции $z=arctg\dfrac{1-x}{y}$ в точке (2; 1).

8. Исследовать на экстремум функцию $z=yx-2x^2+6y-y^2+394$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^2+3y-xy+4$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x=0$, $y=0$, $y=x+1$.

Вариант 18

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z=arctg\sqrt{e^{-xy}-1}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to1}}\dfrac{x^2y^3-\sqrt{x}}{y\sqrt{x}-1}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\arcsin(5x+3y^2)$, где $x=2t^4+1$, $y=\dfrac{1}{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $xz-e^{\frac{z}{y}}+x^3+y^3=0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z=\sqrt{x^2+2y}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y)=x^4+2yx^2+y^4$ в точке (1,01; 1,97).

7. Найти градиент функции $z=\sqrt{\dfrac{2-y}{\sin 3x}}$ в точке $\left(\dfrac{\pi}{2};3\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=8x-6x^2+12y-y^2+343$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=9x^2+4y^2+y-3$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $9x^2+4y^2=1$.

Вариант 19

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \ln \; -x \; + \sqrt[3]{\sin xy}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2\arcsin \; x^2+y^2}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = arctg \; txy$, где $x = e^t$, $y = \sqrt{2t+1}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $yz - e^{\frac{x}{y}} + +z^2 + x^3 + 4y^3 = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = \; x^2 + y^2 \; ^{-\frac{1}{2}}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f \; x, y \; = \sqrt{x^3 + y^3}$ в точке (1,02; 1,97).

7. Найти градиент функции $z = \ln \; y^2 - \sqrt{x}$ в точке(1; 2).

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

Вариант 20

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = x + 2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{\sin \; xy}{x+y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = tg \; t + 3x^4 + y$, где $x = \ln t$, $y = e^{2t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $xyz - e^{\frac{z}{5}} + x^2 + y^2 = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = x\ln\dfrac{y}{x}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^3}$ в точке (1,02; 1,98).

7. Найти градиент функции $z = \cos^3(2y - x)$ в точке $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-2)^2 + 2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2 - 4x^2 - y^2 + 4y$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $4x^2 + y^2 = 1$.

Вариант 21

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \ln(5x^2 + 9y^2 - 30x + 9)$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{xy + \sin x}{xy - \sin y}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = ctg(tx + 2y^3 + y)$, где $x = \sqrt{t+1}$, $y = \ln 2t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $z^3 \ln\left(x + y - \dfrac{x^2 y}{3}\right) = 10$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y}$ в точке (2,025; 117,15).

7. Найти градиент функции $z = \arcsin(\ln(1-x) + \sqrt{y})$ в точке $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + 4xy - 2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - 3x^2 + x + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 1$, $y = 0$, $xy = 1$.

Вариант 22

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = x^2 y \sqrt[4]{x^2 + y^2 + y}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \dfrac{1}{5} e^{2t^2} \; x^3 - y$, где $x = \sqrt{t+1}$, $y = t^2 + 1$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $x^2 \ln \; yz \; + \dfrac{y}{z} - 7 = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = \; x + y \; e^{xy}$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f \; x, y \; = \sqrt{12 + x^2 y^3}$ в точке (2,02; 2,98).

7. Найти производную функции $z = 3\cos^2 3x + \ln \; 1 - y$ в точке (0;0) в направлении биссектрисы первого координатного угла.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 6 - 3x^2 + x - y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 2$, $x = y$.

Вариант 23

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \sqrt{x + \sqrt{6 - 2y} - 2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \dfrac{m^2 + 3n + 4 \;\; n}{m^2 \;\; n^3 + 1 - n}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = e^{t^2}(x^2 + y)$, где $x = e^t$, $y = \sin t$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $arctg(x - y) - zy + x = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = arctg(3x - y)$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x, y) = x^2\sqrt{13 + y}$ в точке (3,02; 3,03).

7. Найти производную функции $z = e^{-x^2}(1 - 3y)$ в точке (1; 1) в направлении вектора $\bar{a} = (1; -3)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 10 - x^2 + 6y - 4y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $x^2 + y^2 = 1$.

Вариант 24

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \ln(3 - 4\sqrt{x - 1} - y)$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (1 + xy)^{-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \arcsin(ty)$, где $y = t^{-\frac{1}{2}}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $arctg(2x - 3y) + xyz = 8$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = e^y \sin x$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f(x, y) = y\sqrt{7 + x^2}$ в точке (3,02; 0,04).

7. Найти производную функции $z = tg(2\sqrt{x} - 3y)$ в точке (4; 1) в направлении вектора $\bar{j} = (1; 0)$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{\frac{1}{2}\ \ x+y^2}$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4x - 2x^2 + 6y - y^2 + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 1$, $y = x$, $y = 2x$.

Вариант 25

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \arccos\dfrac{x^2}{y^2}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin\ \ x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \arcsin\ \ 5\sqrt{x}+2y$, где $x = e^t$, $y = \sqrt{t}$.

4. Найти производные z'_x и z'_y заданной неявно функции $arctg\ \ x+z\ \ - xy + 5 = 0$.

5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = e^x \sin y$.

6. Применяя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции $f\ \ x, y\ \ = \ln\ \ x^2 + y^2$ в точке (1,04; 0,04).

7. Найти производную функции $z = \dfrac{3x^3 - 4y}{x+y}$ в точке(1; 1) в направлении вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 - xy$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 8x - 2x^2 + 12y - y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $2\ \ x-2\ ^2 + \ \ y-6\ ^2 = 1$.

Список использованных источников

1 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / Л.Д. Кудрявцев.- 3-е изд., перераб. – Т.1: Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Ряды.- М.: Физматлит,2008.-400с.

2 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / Л.Д. Кудрявцев.- 3-е изд., перераб. – Т.2: Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных. Гармонический анализ.- М.: Физматлит,2008.-424с.

3 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа [Электронный ресурс]: учебник в 2-х т. / Л.Д. Кудрявцев.- 3-е изд., перераб. – Т.2: Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных. Гармонический анализ. – М.: Физматлит, 2010. – 425с.

4 Ильин, В.А. Основы математического анализа [Электронный ресурс] : учебник/В.А. Ильин,Э.Г. Позняк.- 7-е изд.,стер.- М.:Физматлит,2009.-Ч.1.-647 с. - URL:http://biblioclub.ru/index/php?page=book&id=76686 .

5 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч.: учеб. пособие для вузов/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: Оникс 21 век Мир и образование, 2003. – 416 с.

6 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс/ Д.Т. Письменный. – 5-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 608 с.