

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

В.Н. Афанасьев, Н.С. Еремеева
Т.В. Лебедева

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕТОДОЛОГИЯ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

Оренбург
2017

УДК 311(075.8)
ББК 60.60я73
А 94

Рецензент – доктор экономических наук, профессор В.Н. Шепель

Афанасьев, В.Н.

А 94 Статистическая методология в научных исследованиях: учебное пособие для аспирантов / В.Н. Афанасьев, Н.С. Еремеева, Т.В. Лебедева; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2017. - 245 с.
ISBN 978-5-7410-1703-6

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, подготовлено в соответствии с рабочей программой курса «Статистическая методология в научных исследованиях» для аспирантов, в т.ч. и для самостоятельного обучения. Междисциплинарная направленность содержания пособия, на наш взгляд, полезна и для руководителей аспирантов.

Даны краткие методические указания по основным разделам курса. Помимо теоретического материала, в пособии представлены индивидуальные задания различного уровня сложности, а также вопросы для самоконтроля и тестовые задания.

УДК 311(075.8)
ББК 60.60я73

ISBN 978-5-7410-1703-6

© Афанасьев В.Н.
Еремеева Н.С.,
Лебедева Т.В., 2017
© ОГУ, 2017

Содержание

Введение	6
1 Единая статистическая методология исследования массовых явлений в обществе и природе.....	8
1.1 Статистическое наблюдение как этап статистического исследования	8
1.2 Программно-методологические и организационные вопросы статистического наблюдения	9
1.3 Формы, способы и виды статистического наблюдения	12
1.4 Точность статистического наблюдения	16
1.5 Вопросы для самоконтроля к разделу 1	18
1.6 Задания к разделу 1	19
1.7 Тесты для самоконтроля к разделу 1	20
2 Статистические распределения и статистические закономерности.....	24
2.1 Вариационные ряды и их числовые характеристики.....	24
2.2 Дискретные случайные величины и их распределения.....	37
2.3 Непрерывные случайные величины и их распределения.....	40
2.4 Закон больших чисел.....	46
2.5 Вопросы для самоконтроля к разделу 2.....	48
2.6 Задания к разделу 2.....	49
2.7 Тесты для самоконтроля к разделу 2.....	50
3 Статистическая теория выборки. Статистическая проверка гипотез.....	56
3.1 Основные понятия и определения выборочного метода.....	56
3.2 Статистическое оценивание.....	58
3.3 Ошибки выборки.....	61
3.4 Определение численности выборки.....	64
3.5 Интервальное оценивание.....	65
3.6 Статистическая проверка гипотез.....	70
3.7 Вопросы для самоконтроля к разделу 3.....	88
3.8 Задания к разделу 3.....	90

3.9 Тесты для самоконтроля к разделу 3.....	91
4 Планирование эксперимента и дисперсионный анализ.....	98
4.1 Классификация экспериментальных исследований.....	98
4.2 Основы математического планирования эксперимента. Дисперсионный анализ.....	101
4.3 Вопросы для самоконтроля к разделу 4.....	106
4.4 Задания к разделу 4.....	106
5 Теория корреляции и регрессии. Парная корреляция и регрессия.....	107
5.1 Задачи и проблемы корреляционного и регрессионного анализа.....	107
5.2 Парная линейная регрессионная модель.....	112
5.3 Исходные предпосылки регрессионного анализа и свойства оценок.....	118
5.4 Нелинейная парная корреляция.....	120
5.5 Непараметрические методы обнаружения взаимосвязей.....	129
5.6 Вопросы для самоконтроля к разделу 5.....	131
5.7 Задания к разделу 5.....	132
5.8 Тесты для самоконтроля к разделу 5.....	132
6 Множественная регрессия.....	139
6.1 Спецификация множественной линейной модели.....	139
6.2 Оценка параметров уравнения множественной регрессии.....	142
6.3 Множественная и частная корреляция.....	143
6.4 Оценка надежности результатов множественной регрессии и корреляции.....	145
6.5 Вопросы для самоконтроля к разделу 6.....	146
6.6 Задания к разделу 6.....	146
6.7 Тесты для самоконтроля к разделу 6.....	148
7 Анализ временных рядов. Особенности корреляции и регрессии временных рядов.....	151
7.1 Временные ряды и их предварительный анализ.....	152
7.2 Исследование тенденции временных рядов.....	158

7.3 Виды, свойства и оценка параметров основных видов тренда.....	169
7.4 Статистическое изучение колеблемости во временных рядах.....	175
7.5 Корреляция рядов динамики.....	181
7.6 Регрессия по рядам динамики и прогнозирования на её основе.....	184
7.7 Вопросы для самоконтроля к разделу 7.....	187
7.8 Задания к разделу 7.....	188
7.9 Тесты для самоконтроля к разделу 7.....	189
8 Статистические методы в прогнозировании явлений и процессов.....	196
8.1 Статистический анализ и прогнозирование периодических колебаний.....	196
8.2 Использование адаптивных методов прогнозирования в экономических исследованиях.....	207
8.3 Прогнозирование с помощью ARMA и ARIMA –процессов.....	214
8.4 Вопросы для самоконтроля к разделу 8.....	229
8.5 Задания к разделу 8.....	230
8.6 Тесты для самоконтроля к разделу 8.....	231
Список использованных источников.....	239

Введение

Данное учебное пособие является учебно-методической разработкой по дисциплине «Статистическая методология в научных исследованиях».

Цель данного пособия – дать студентам глубокое понимание статистических методов и их применения в научных исследованиях, экспериментальных работах и повседневной жизни, а также дать понятие, что статистика – это живой предмет, в стохастической среде, а не набор цифр и формул.

Статистика как область научного знания призвана дать методологическую основу и инструментарий, позволяющий представить всю логическую последовательность работы с информацией: от сбора и накопления ее первичных единиц до построения и анализа агрегированных показателей, моделей, отражающих сущность и закономерности функционирования различных систем.

Работа с данными, их систематизация и анализ важны во всех сферах профессиональной деятельности. Контроль качества, эксперимент в медицине и биологии, предсказание результатов выборов, прогнозы потребительских предпочтений, закономерности динамики экономических, финансовых индикаторов – все это области приложения статистики.

Изучение статистики становится основой современного образования, научных исследований. Необходимо учиться статистике, чтобы читать и понимать постоянно увеличивающиеся данные (big data). Статистика учит, как собрать, систематизировать и анализировать числовые данные во всех сферах деятельности, дает широкий спектр инструментов, в том числе и для оценки риска, что особенно актуально в вероятностной среде.

Учебное пособие состоит из восьми разделов: Раздел 1 - Единая статистическая методология исследования массовых явлений в обществе и природе; Раздел 2 - Статистические распределения и статистические закономерности; Раздел 3 - Статистическая теория выборки. Статистическая проверка гипотез; Раздел 4 - Планирование эксперимента и дисперсионный анализ; Раздел 5 - Теория корреляции

и регрессии. Парная корреляция и регрессия; Раздел 6 - Множественная регрессия; Раздел 7 - Анализ временных рядов. Особенности корреляции и регрессии временных рядов; Раздел 8 - Статистические методы в прогнозировании явлений и процессов.

Составители учебного пособия старались учесть разнонаправленность научных исследований, по возможности, разный уровень математической подготовки по различным направлениям в университете, предшествующих аспирантуре. В пособие, в связи с этим, не включались теоремы и современные специализированные пакеты прикладных программ, что не исключено в индивидуальном порядке, в виде консультаций.

Все разделы построены по единому принципу: вначале дается перечень тем, которые будут представлены в разделе, затем предшествует краткое изложение теоретических понятий и основных вычислительных приемов. Кроме того, приводятся задания различного уровня сложности, которые можно использовать как в аудиторной, так и в самостоятельной работе, основные понятия разделов закрепляются вопросами для самоподготовки и тестовыми заданиями.

Надеемся, что настоящее учебное пособие позволит будущим ученым продвинуть свои направления в науке и практическом применении.

Статистика каждому очень нужна,

Ведь методов всех, королева она!

В пустые слова она учит не верить,

А все, что возможно, учесть и измерить!

С уважением,

авторский коллектив кафедры статистики и эконометрики Оренбургского государственного университета.

Замечания и предложения ждем по адресу: vAfanassyev@gmail.com.

1 Единая статистическая методология исследования массовых явлений в природе и обществе

1.1 Статистическое наблюдение как этап статистического исследования

1.2 Программно-методологические и организационные вопросы статистического наблюдения

1.3 Формы, способы и виды статистического наблюдения

1.4 Точность статистического наблюдения

1.1 Статистическое наблюдение как этап статистического исследования

В любом статистическом исследовании, статистической работе можно выделить несколько этапов.

Статистическое изучение тех или иных явлений предполагает как обязательное условие наличие информации, сведений об этих явлениях. Начало статистического исследования сводится к сбору необходимой информации.

Статистическая информация – это первичный статистический материал, формирующийся в процессе статистического наблюдения, который затем подвергается систематизации, сводке, обработке, анализу и обобщению.

Статистическое исследование включает в себя три этапа или стадии:

- статистическое наблюдение;
- первичная обработка, сводка и группировка результатов наблюдения;
- анализ сводных данных с помощью обобщающих показателей и особых приемов (методов).

Научно организованный сбор сведений, заключающейся в регистрации тех или иных фактов, признаков, относящихся к каждой единице изучаемой совокупности, именуют статистическим наблюдением.

В результате статистического наблюдения образуется масса первичной информации (сведений) о каждой единице совокупности. Чтобы получить

характеристику всей исследуемой совокупности в целом, первичные данные должны быть подвергнуты обработке и обобщению. Обработка собранных данных, включающая их группировку, обобщение и оформление в таблицах, составляет второй этап статистического исследования, который именуют сводкой.

Для подготовки статистического наблюдения необходимо рассмотреть разные виды работ. Сначала решить методологические вопросы, важнейшие из которых – это определение цели и объекта статистического наблюдения, состава признаков, подлежащих регистрации; разработка документов для сбора статистических данных; выбор отчетной единицы, относительно которой будет проводиться статистическое наблюдение, а также определение методов и средств получения данных. На следующем этапе статистического наблюдения необходимо решить вопросы организационного характера.

После того, как собраны данные, они подвергаются арифметическому и логическому контролю. Оба эти контроля основываются на знании взаимосвязей между показателями и качественными признаками.

И наконец, на основе итоговых данных сводки осуществляется научный анализ исследуемых явлений: рассчитываются различные обобщающие показатели в виде средних и относительных величин, выявляются определенные закономерности в распределениях, динамике показателей и т.п. Это третий этап статистического исследования.

Требования статистического наблюдения:

1 Изучаемые явления должны иметь научную или практическую ценность, выражать определенные социально-экономические явления и процессы.

2 Сбор массовых данных должен обеспечить полноту фактов, в случае отсутствия данных, анализ и выводы могут быть ошибочными, так как явления находятся в постоянном изменении, развитии.

3 Одной из важнейших характеристик статистического наблюдения является обеспечение достоверности статистических данных. Для этого необходима тщательная и всесторонняя проверка качества собираемых фактов.

4 Для того, чтобы создать наилучшие условия для получения объективных материалов необходима научная организация статистического наблюдения.

Таким образом, любое законченное статистическое исследование проходит три этапа, между которыми могут быть разрывы во времени.

Все этапы работы, несомненно, важны. Но поскольку статистическое наблюдение является начальным, то оно во многом определяет успех всей работы. От того, насколько полными и качественными окажутся собранные первичные данные, зависят в значительной степени и конечные результаты работы, и выводы исследователей. Поэтому статистическому наблюдению всегда уделялось и уделяется большое внимание в статистических исследованиях.

1.2 Программно-методологические и организационные вопросы статистического наблюдения

Цель статистического наблюдения – это получение достоверной информации для выявления закономерностей развития социально-экономических явлений и процессов.

Точное определение цели каждого конкретного статистического наблюдения позволяет наметить признаки, которыми должна быть охарактеризована каждая исследуемая единица для решения поставленной задачи, а также форму организации данного наблюдения, его вид и способ проведения.

Совокупность предметов или явлений, объединенных каким-либо общим признаком или свойством качественного или количественного характера, называется объектом наблюдения.

Всякий объект статистического наблюдения состоит из отдельных элементов – единиц наблюдения.

Единица совокупности – это та первичная ячейка, от которой должны быть получены необходимые статистические данные.

Результаты статистического наблюдения представляют собой числовую информацию – данные.

Статистические данные – это сведения о том, какие значения принял интересующий исследователя признак в статистической совокупности.

Одним из основных вопросов статистического наблюдения является его программа.

Программой статистического наблюдения называется перечень показателей, подлежащих изучению. От того, насколько хорошо разработана программа статистического наблюдения, во многом зависит качество собранного материала, его ценность.

Требования к программе статистического наблюдения:

- программа содержит существенные признаки, характеризующие изучаемые явления или процессы, а также его тип, основные черты и свойства;

- в программу не следует включать признаки, которые имеют второстепенное значение по отношению к цели обследования, или признаки, значения которых будут заведомо недостоверны или отсутствовать;

- вопросы, включаемые в программу должны быть точными и недвусмысленными, а также легкими для понимания во избежание лишних трудностей при получении ответа;

- вопросы, включаемые в программу, должны быть представлены в логической определенной последовательности. Логический порядок вопросов поможет получить достоверные сведения о явлениях и процессах;

- необходимо в программу включать вопросы контрольного характера для проверки и уточнения собираемых статистических данных;

- вопросы в программе задаются в различной форме. Вопросы бывают закрытые и открытые. Закрытый вопрос – это вопрос альтернативный или же вопрос с выборочным ответом, где предлагаются три и более варианта ответа на выбор.

На открытые вопросы можно ответить практически бесчисленным количеством способов, если вопрос поставлен без заданной структуры ответа;

- для обеспечения получаемых сведений от каждой отчетной единицы программа статистического наблюдения оформляется в виде документа, называемого статистическим формуляром.

Статистические формуляры – это бланки определенных форм учета и отчетности.

Элементы статистического формуляра:

- титульная часть;
- адресная часть.

В данных частях указываются наименование наблюдения, кем и когда утверждена, дата представления сведений, наименование предприятий. Эти сведения необходимы, чтобы проверить все ли отчетные единицы представили сведения, и для последующей разработки материалов по отраслевому, территориальному и иным признакам.

В целях успешного проведения статистического наблюдения разрабатывается организационный план.

Организационный план - это основной документ, в котором отображаются важнейшие вопросы организации и проведения намеченных мероприятий.

В организационный план входит:

- выбор места и времени проведения статистического наблюдения;
- выбор формы, вида и способа статистического наблюдения;
- выбор вида и оформление статистического формуляра;
- выбор или разработка программного обеспечения статистического наблюдения;
- обучение кадров для проведения статистического наблюдения;
- подготовительная работа с респондентами;
- оценка затрат на проведение обследования.

Время наблюдения – это время, к которому относятся данные собранной статистической информации.

Для выбора времени наблюдения необходимо решить два вопроса:

- установить критический момент времени и интервал времени;
- определить срок статистического наблюдения.

Срок статистического наблюдения – это время, в течение которого происходит заполнение статистических формуляров, т.е. время, необходимое для проведения

массового сбора статистических данных. Срок наблюдения определяется исходя из объема работы, численности персонала, занятого сбором статистической информации.

К следующему этапу организационного вопроса обследования относится выбор программного обеспечения наблюдения или его разработка. Эта часть работы имеет место в масштабных обследованиях, когда приходится обрабатывать сотни, тысячи или даже миллионы, как при переписях населения, анкет. Если анкет не так уж и много, достаточно обработать их вручную.

1.3 Формы, способы и виды статистического наблюдения

К формам статистического наблюдения относят:

- отчетность;
- специально организованные наблюдения;
- регистры.

Отчетность – это основная форма статистического наблюдения, с помощью которой статистические органы в определенные сроки получают от предприятий, учреждений и организаций необходимые данные в виде установленных в законном порядке отчетных документов, скрепленных подписями лиц, ответственных за их предоставление и достоверность собираемых сведений. Следовательно, отчетность – это официальный документ, который содержит статистические сведения о работе предприятия, учреждения, организации и т.п.

Следующей формой статистического наблюдения является специально организованное наблюдение. Оно проводится с целью получения сведений, отсутствующих в отчетности, или для проверки ее данных. Примером такого наблюдения является перепись населения.

Перепись населения – это специально организованное наблюдение, повторяющееся, через равные промежутки времени с целью получения данных о численности, составе и состоянии объекта статистического наблюдения по ряду признаков.

Регистровое наблюдение – это форма непрерывного статистического наблюдения за долговременными процессами, имеющими фиксированное начало, стадию развития и фиксированный конец. Оно основано на ведении статистического регистра.

Регистр представляет собой систему, постоянно следящую за состоянием единицы статистического наблюдения и оценивающую силу воздействия различных факторов на изучаемые показатели.

Виды статистического наблюдения:

1 В зависимости от времени регистрации фактов статистическое наблюдение может быть непрерывным (текущим) и прерывным.

При непрерывном наблюдении изменения в отношении изучаемых явлений фиксируются по мере их наступления, например при регистрации рождения, смерти, состояния в браке. Данное наблюдение проводится с целью изучения динамики какого-либо социально-экономического явления или процесса.

К прерывным наблюдениям относят переписи и единовременные статистические обследования. В результате их проведения статистические данные фиксируются на определенный момент времени.

Выделяют следующие виды прерывных наблюдений: периодические, проводятся через определенные интервалы времени, например, как переписи каждые 10 лет, и единовременные обследования.

2 В зависимости от охвата единиц статистической совокупности наблюдения бывают сплошными и не сплошными.

Задачей сплошного наблюдения является получение информации о всех единицах изучаемой совокупности. При проведении сплошного наблюдения основной задачей является формирование перечня признаков, подлежащих обследованию. От этого в конечном итоге зависит качество и достоверность результатов обследования.

При не сплошном наблюдении обследованию подлежит лишь часть единиц изучаемой совокупности. При проведении не сплошного наблюдения следует заранее определить, какая часть совокупности должна быть подвергнута

наблюдению и каким образом следует отобрать те единицы, которые должны быть обследованы.

К основным видам не сплошного наблюдения относят:

– выборочное (выборочное наблюдение основано на принципе случайного отбора тех единиц изучаемой совокупности, которые должны быть подвергнуты наблюдению);

– наблюдение основного массива (обследованию подвергаются самые существенные, обычно наиболее крупные единицы изучаемой совокупности, которые по основному признаку имеют наибольший удельный вес в совокупности);

– монографическое (тщательному обследованию подвергаются отдельные единицы изучаемой совокупности, обычно представители каких-либо новых типов явлений. Оно проводится с целью выявления имеющихся или намечающихся тенденций в развитии данного явления);

– анкетное наблюдение (оно состоит в рассылке или личном вручении анкет респондентам без какой-либо предварительной договоренности с ними. Возврат анкет бывает неполным. Существенным недостатком этого метода является то обстоятельство, что в теории статистики не имеется какой-либо схемы, позволяющей количественно оценить возникающие при этом ошибки наблюдения);

– бизнес-обследование (в результате статистического наблюдения собирается количественная информация о единице наблюдения. В процессе проведения бизнес - обследований задаются вопросы качественного характера: руководству предприятий предлагается, например, оценить изменение экономического положения его предприятия в ближайшем будущем, или выясняется мнение о факторах, влияющих на инвестиционную деятельность, и т.п. Таким образом, бизнес обследования дополняют традиционные статистические обследования предприятий новой качественной информацией);

– цензовое наблюдение (при этом наблюдении отбор единиц проходит по определенному критерию, называемому цензом. Например, при обследованиях предприятий задается определенное критическое число работников. Предприятия с числом занятых больше этого критического числа в процессе исследования не

наблюдаются).

Способы статистического наблюдения.

- непосредственное наблюдение;
- способ, основанный на изучении документов;
- опрос.

При непосредственном наблюдении проводят подсчет, взвешивание, обмер единицы наблюдения и т. п.

В результате действия непосредственного наблюдения устанавливается некий факт, сведения о котором заносятся в статистический формуляр.

Способ наблюдения, основанный на изучении документов, является наиболее точным, особенно если документами учетного характера является бухгалтерская документация.

При опросе, регистрируемые сведения заносятся в статистический формуляр со слов опрашиваемого, как правило, никакими документами они при этом не подтверждаются.

Выделяют следующие виды сбора информации:

- устный (экспедиционный);
- саморегистрация;
- корреспондентский;
- анкетный;
- явочный;
- метод ведения дневников.

При устном опросе счетчик (человек, проводящий наблюдение) сам заполняет формуляр статистического наблюдения со слов опрашиваемого.

Саморегистрация предполагает заполнение формуляров респондентами (опрашиваемыми).

При корреспондентском способе сведения сообщаются в органы, проводящие статистическое наблюдение, штатом добровольных корреспондентов.

Анкетный способ заключается в анонимном заполнении анкет. При этом респондент вправе отказаться от их заполнения вовсе. Главное отличие анкетного

способа от саморегистрации состоит в том, что при саморегистрации счетчик сам раздает формуляры, следит за правильностью их заполнения и затем собирает их. При анкетном способе статистические формуляры могут не возвращаться.

При явочном способе наблюдения предоставление информации происходит в явочном порядке, т. е. человек сам приходит в органы, проводящие наблюдение, и сообщает нужные сведения. Так происходит учет родившихся и умерших людей, учет браков и разводов.

Метод ведения дневников широко применяется при статистических обследованиях бюджетов населения, использования времени и др. Суть этого метода заключается в том, что события регистрируются в «дневниках» респондентами сразу же по мере их наступления.

Выбор конкретного способа наблюдения зависит от специфики проводимого обследования: его цели, задач, условий проведения, охвата совокупности и т.д.

1.4 Точность статистического наблюдения

Под точностью статистического наблюдения понимают степень соответствия значения наблюдаемого показателя, вычисленного по материалам обследования, его действительной величине. Расхождение, или разница, между показателями называется ошибкой статистического наблюдения.

Выделяют две группы ошибок:

- ошибки регистрации;
- ошибки репрезентативности.

Ошибки регистрации присущи любому статистическому наблюдению, как сплошному, так и несплошному.

Ошибки регистрации делятся:

- на случайные (ошибки, возникающие в следствии действия случайных факторов);
- на систематические.

Систематические ошибки регистрации чаще всего имеют одноправленность искажений: они либо увеличивают, либо уменьшают статистический показатель и, что характерно, подобная ситуация повторяется от обследования к обследованию.

Ошибки репрезентативности присущи только несплошному обследованию. Они делятся на случайные и систематические.

Случайные ошибки репрезентативности возникают из-за того, что обследованию подвергается не вся совокупность в целом, а только ее часть.

Для повышения точности статистического наблюдения необходимо:

1) правильно разработать статистический формуляр наблюдения: вопросы должны быть четкими, однозначными, не допускающими двойного толкования;

2) иметь хорошо обученный персонал для проведения обследования;

3) необходимо строго придерживаться выбранной технологии обследования (если проводится не сплошное наблюдение) и помнить, что, если не удастся опросить какую-то конкретную единицу, отобранную для наблюдения, замена ее на другую единицу может привести к возникновению систематической ошибки репрезентативности;

4) провести логический анализ данных, основанный на логических взаимосвязях показателей, после сбора всей статистической совокупности анкет или формуляров;

5) целесообразно провести арифметический контроль данных, т.е. заново пересчитать расчетные величины, если какие-либо показатели получаются в результате определенных арифметических действий;

6) предпринять меры по восстановлению данных при наличии незаполненных анкет или формуляров, либо при получении результатов обследования сделать поправку на не ответы респондентов.

1.5 Вопросы для самоконтроля к разделу 1

1 Этапы проведения статистического наблюдения.

2 Определите цель, объект и единицу статистического наблюдения за

фондовыми биржами России.

3 Отличительные черты объекта наблюдения от единицы статистического наблюдения?

4 Приведите примеры, в каких случаях единица наблюдения будет совпадать с отчетной единицей.

5 Как влияют закрытые вопросы на обработку результатов проведения статистического наблюдения?

6 Что такое программа наблюдения? Основные ее требования.

7 Что включает в себя организационные вопросы статистического наблюдения?

8 Основные виды статистических формуляров и их применение.

9 Формы статистического наблюдения.

10 Какова роль статистического наблюдения в получении информации по финансовому сектору экономики?

11 Почему наряду с ведением регистров населения проводится перепись населения?

12 Виды статистического наблюдения.

13 Основные преимущества не сплошного наблюдения перед сплошным наблюдением.

14 Способы статистического наблюдения вы знаете?

15 Понятие ошибки регистрации и их примеры.

16 Понятие ошибки репрезентативности и их примеры.

17 Какие мероприятия, позволяют повысить точность статистического наблюдения.

1.6 Задания к разделу 1

1.1 По теме научного исследования выбрать объект статистического наблюдения. Обосновать актуальность его изучения. Сформулировать проблему.

1.2 Определить перечень признаков единицы совокупности, которые необходимо включить в программу сбора данных и проанализировать при изучении данной проблемы, определите вид каждого из них.

1.3 Провести статистическое наблюдение. Сформировать массив статистической совокупности.

1.4 Построить систему макетов статистических таблиц.

При выполнении заданий по разделу особое внимание необходимо уделить составлению схемы проведения статистического наблюдения.

Схема (план) проведения статистического наблюдения может быть реализована в следующей последовательности:

- 1) формулировка цели статистического наблюдения;
- 2) определение объекта статистического наблюдения, единицы наблюдения, отчетной единицы;
- 3) разработка программы статистического наблюдения;
- 4) проектирование статистического формуляра, инструкции по заполнению статистического формуляра;
- 5) построение макетов статистических таблиц для подведения итогов статистического наблюдения;
- 6) определение критического момента, выбор места и времени наблюдения;
- 7) установление вида статистического наблюдения:
 - а) по степени охвата единиц совокупности
 - б) по учету факторов во времени
- 8) выбор способа статистического наблюдения: непосредственное, документальное, опрос;
- 9) указание формы статистического наблюдения
- 10) обозначение вопросов организационного характера.

1.7 Тесты для самоконтроля к разделу 1

1. Как называется группировка, в которой происходит разбиение однородной совокупности на группы?
 - а) типологическая;
 - б) структурная;
 - в) аналитическая;
 - г) комбинационная.

2. Какой признак лежит в основе группировки?
 - а) качественный признак;
 - б) количественный признак;
 - в) как качественный, так и количественный;
 - г) фиктивная переменная.

3. Наибольшее значение признака в интервале называется:
 - а) нижняя граница;
 - б) верхняя граница;
 - в) середина интервала;
 - г) частота.

4. Статистическая закономерность – это:
 - а) объективная закономерность сложного массового процесса, она является формой проявления причинной связи;
 - б) один из элементов статистической совокупности;
 - в) статистические методы изучения массовых общественных явлений;
 - г) числовые выражения единиц совокупности.

5. Статистическая сводка по технике выполнения бывает:
 - а) простой и сложной;

- б) централизованной и децентрализованной;
- в) механизированной и ручной;
- г) комбинационной.

б. Структурная группировка применяется для ...

- а) разделения совокупности на качественно однородные типы;
- б) характеристики структурных сдвигов;
- в) характеристики взаимосвязей между отдельными признаками;
- г) характеристики структуры совокупности.

7. Аналитическая группировка применяется для ...

- а) разделения совокупности на качественно однородные типы;
- б) характеристики структурных сдвигов;
- в) характеристики взаимосвязей между отдельными признаками;
- г) характеристики структуры совокупности.

8. Объект наблюдения – это

- а) единица статистического наблюдения;
- б) статистическая совокупность;
- в) единица совокупности;
- г) отчетная единица совокупности.

9. Статистическое наблюдение заключается:

- а) в регистрации признаков, отобранных у каждой единицы совокупности;
- б) в расчленении множества единиц изучаемой совокупности на группы по определенным, существенным для них признакам;
- в) в разделении однородной совокупности на группы, характеризующие ее структуру по какому-либо варьирующему признаку.

10. Как называется субъект, от которого поступают данные в ходе наблюдения?

- а) единица статистического наблюдения;
- б) единица совокупности;
- в) отчетная единица совокупности⁴
- г) статистическая совокупность.

11. Перечень признаков, подлежащих регистрации в процессе наблюдения, называются:

- а) статистическим формуляром;
- б) программой наблюдения;
- в) инструментарием наблюдения;
- г) инструкцией.

12. Срок статистического наблюдения – это

- а) время, в течение которого происходит заполнение статистических формуляров;
- б) конкретный день года, час дня, по состоянию на который должна быть проведена регистрация признаков по каждой единице исследуемой совокупности.;
- в) время, в течение которого происходит проверка статистического формуляра;
- г) время, в течение которого происходит регистрация признаков.

13. Статистическая отчетность – это

- а) вид наблюдения;
- б) способ наблюдения;
- в) форма наблюдения;
- г) статистический формуляр.

14. Метод основного массива – это

- а) вид наблюдения;
- б) способ наблюдения;
- в) форма наблюдения;
- г) статистический формуляр.

15. При непрерывной вариации признака целесообразно построить:

- а) атрибутивный ряд распределения;
- б) дискретный ряд распределения;
- в) динамический ряд распределения;
- г) интервальный ряд распределения.

2 Статистические распределения и статистические закономерности

2.1 Вариационные ряды и их числовые характеристики

2.2 Дискретные случайные величины и их распределения

2.3 Непрерывные случайные величины и их распределения

2.4 Закон больших чисел

2.1 Вариационные ряды и их числовые характеристики

Совокупность значений признака, расположенных в порядке возрастания или убывания называется вариационным рядом.

Если значения признака выражаются числами, например вес, масса, объем, заработная плата, производительность труда и др., то признак называется количественным.

Если же признак характеризует некоторое свойство или состояние элементов совокупности, например профессия, квалификация и др., то признак называют качественным.

Любой вариационные ряды распределения состоят их двух элементов:

- варианта (различные числовые значения признака в ряду распределения);
- частоты (абсолютные числа, показывающие, сколько раз встречаются те или иные варианты в ряду).

Перечень вариантов вариационного ряда и соответствующих им частот называется статистическим рядом.

Сумма всех частот называется объемом совокупности и определяет число элементов всей совокупности.

Варианты могут быть положительными и отрицательными, абсолютными и относительными.

В зависимости от характера вариации вариационные ряды бывают: дискретные и интервальные.

Признак называется дискретно варьируемым, если его отдельные значения (варианты) отличаются друг от друга на некоторую конечную величину (обычно целое число).

Вариационный ряд такого признака называется дискретным вариационным рядом.

Признак называется непрерывно варьирующим, если значения его отличаются друг от друга на сколько угодно малую величину, т.е. признак может принимать любые значения в некотором интервале.

Непрерывный вариационный ряд для такого признака называется интервальным.

Интервал очерчивает количественные границы групп и представляет собой промежуток между максимальными и минимальными значениями признака в группе.

Интервалы бывают:

- равные, когда все интервалы имеют одну и ту же величину (ширину);
- неравные, когда ширина интервала постепенно увеличивается, а верхний интервал часто не закрывается вовсе;
- открытые, когда имеется только либо верхняя, либо нижняя граница;
- закрытые, когда имеются обе границы.

Если крайние интервалы распределения не замкнуты (открытые интервалы), то сначала устанавливают границы этих интервалов, считая, что интервальная разность первого интервала такая же, как у второго, а у последнего – такая же, как у предыдущего.

Условия определения числа групп.

а) число групп детерминируется уровнем колеблемости группировочного признака. Чем значительнее вариация признака, тем больше при прочих равных условиях должно быть групп;

б) число групп должно отражать реальную структуру изучаемой совокупности;

в) не допускается выделение пустых групп. Если проблема пустых групп все же возникает, при проведении структурных группировок используют неравные интервалы.

Рекомендуемое число интервалов вычисляется по формуле Стерджесса:

$$n = 1 + 3.322 \lg N,$$

где n - число интервалов;

N - объем совокупности (число единиц наблюдения).

Величина интервала определяется как

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n},$$

где x_{\max} - максимальное значение признака;

x_{\min} - минимальное значение признака.

При изучении вариационного ряда используется понятие накопленной частоты (или частости).

Накопленная частота показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака, меньшим (или равным) определенному данному значению x .

Накопленная частота – это отношение накопленной частоты к числу единиц совокупности.

К числовым характеристикам вариационного ряда относятся: средняя арифметическая, дисперсия, начальные и центральные моменты вариационного ряда, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Основные показатели среднего уровня вариационного ряда

При изучении особенностей статистического распределения прежде всего следует найти его центральное значение, т.е. средний уровень. Для характеристики центра распределения применяют показатели, получившие название средних величин.

В статистике применяют различные виды (формы) средних величин. Форму средней выбирают из сущности изучаемого признака. Самый распространенный вид средних – средняя арифметическая.

Средняя арифметическая вычисляется либо как простая, либо как взвешенная величина:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ - простая,} \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \text{ - взвешенная.}$$

Кроме средней арифметической в статистике используется средняя гармоническая. Модифицированной формой средней взвешенной арифметической является средняя гармоническая взвешенная величина. Применяется средняя гармоническая в тех случаях, когда не знают значения частот у вариантов ряда, зато известны для каждого x_i произведения этих вариантов на соответствующие им частоты, т.е.: $F_i = x_i * f_i$. Формула средней гармонической взвешенной имеет вид:

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i}{\sum \frac{F_i}{x_i}},$$

где F_i - значение произведения варианты на соответствующую ей частоту;

x_i - значения вариант.

Если для каждой варианты мы рассчитаем частоту как $f_i = \frac{F_i}{x_i}$, то формула средней гармонической взвешенной превратится в формулу для расчета средней арифметической взвешенной:
$$\bar{x} = \frac{\sum F_i}{\sum \frac{F_i}{x_i}} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}.$$

Если произведение вариант на соответствующие им частоты равны между собой, т.е. $F_1 = F_2 = F_3 = \dots = F_i$, то применяется средняя гармоническая простая, рассчитываемая по следующей формуле:

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}.$$

Важнейшей характеристикой центра распределения, кроме средней арифметической, является мода.

Мода – это значение признака, наиболее часто встречающееся в вариационном ряду.

Для дискретного вариационного ряда мода определяется по наибольшей частоте.

В случае если интервальный вариационный ряд имеет равные интервалы, то модальный интервал определяется по наибольшей частоте, при неравных интервалах – по наибольшей плотности. Мода внутри модального интервала определяется по следующей формуле

$$M_o = x_{M_o} + i \frac{f_{M_o} - f_{M_o-1}}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})},$$

где x_{M_o} - нижняя граница модального интервала;

i – величина модального интервала;

f_{M_o} - частота модального интервала;

$f_{M_{o-1}}$ - частота интервала, предшествующая модальному;

$f_{M_{o+1}}$ - частота интервала, следующая за модальной.

Если имеется вариационный ряд распределения с неравными между собой интервалами, то для определения моды необходимо выполнить следующие действия:

1) для каждого интервала рассчитывается величина $p_i = \frac{f_i}{i}$ на основе частот (f_i) и длин интервалов (i), которая называется абсолютной плотностью распределения;

2) определяют модальный интервал. Модальный интервал – это интервал, с наибольшей абсолютной плотности распределения;

3) определим моду по формуле

$$M_o = x_{M_o} + i_{M_o} \frac{p_{M_o} - p_{M_{o-1}}}{(p_{M_o} - p_{M_{o-1}}) + (p_{M_o} - p_{M_{o+1}})},$$

где x_{M_o} - нижняя граница модального интервала;

i_{M_o} – величина модального интервала;

p_{M_o} - абсолютная плотность модального интервала;

$p_{M_{o-1}}$ - абсолютная плотность интервала, предшествующего модальному;

$p_{M_{o+1}}$ - абсолютная плотность интервала, следующая за модальным.

Модальное значение признака можно определить и по графику. Для дискретного вариационного ряда строится полигон распределения. Напомним, что у него на оси абсцисс помещаются значения признака (варианты), а на оси ординат – соответствующие им частоты. Значение абсциссы, соответствующее наибольшей вершине полигона, будет значение моды.

Для определения моды интервального вариационного ряда с равными интервалами, строится гистограмма. На оси абсцисс находятся значения границ интервалов, а на оси ординат – соответствующие им частоты. На гистограмме

модальный интервал будет иметь наибольшую высоту столбца. Затем надо провести линии, соединяющие вершины модального столбца с прилегающими вершинами соседних столбцов. Для нахождения значения моды из точки их пересечения на ось абсцисс опускают перпендикуляр. Основание этого перпендикуляра и будет являться значением моды.

В статистическом анализе часто применяют порядковые средние, например медиану.

Медианой является значение варианты, находящейся в центре упорядоченной по возрастанию значений признака изучаемой совокупности. Медиана делит вариационный ряд на две равные части. При этом 50 % единиц совокупности имеют значение меньше медианного, а 50 % - больше медианного.

Для дискретного ряда с нечетным числом вариантов медиана равна значению признака, приходящего на середину ранжированного ряда.

А для ряда с четным числом вариантов медиана равна полусумме двух срединных вариантов.

Для расчета значения медианы в интервальном вариационном ряду вначале находят интервал, содержащий медиану, путем визуального просмотра накопленных частот или частостей. Для нахождения медианы вариационного ряда удобно пользоваться рядом накопленных частот. Медианному интервалу соответствует первая из накопленных частот или частостей, превышающая половину всего объема совокупности. Внутри медианного интервала расчет значения медианы производится по формуле:

$$Me = x_{Me} + i \frac{\frac{\sum f_i}{2} - S_{Me-1}}{f_{Me}},$$

где x_{Me} - нижняя граница медианного интервала;

i – величина медианного интервала;

f_{Me} - частота медианного интервала;

S_{Me-1} - сумма накопленных частот интервала, предшествующего медианному;

В интервальном ряду медиану можно определить графически с помощью кумуляты. Для этого из точки на шкале накопленных частот, соответствующей 50 %, проводится прямая, параллельная оси абсцисс, до пересечения с кумулятой. Затем из точки пересечения указанной прямой с кумулятой опускается перпендикуляр на ось абсцисс. Основание этого перпендикуляра и будет являться значением медианы.

Показатели вариации

Средняя арифметическая характеризует вариационный ряд одним числом, но не отражает вариацию, т.е. изменчивость признака.

Самая грубая оценка рассеяния, легко определяемая по данным вариационного ряда, может быть дана с помощью размаха вариации в ряду

$$R = X_{\max} - X_{\min} ,$$

где X_{\max} – максимальное значение признака в совокупности;

X_{\min} – минимальное значение признака.

Этот показатель представляет интерес в тех случаях, когда важно знать, какова амплитуда колебаний значений признака.

Однако этот показатель не дает представления о характере вариационного ряда, расположении вариантов вокруг средней и может сильно меняться, если добавить или исключить крайние варианты. В этих случаях размах вариации дает искаженную амплитуду колебания против нормальных ее размеров. Поэтому следует очистить совокупность от аномальных наблюдений, прежде чем определять размах вариации.

Для оценки колеблемости значений признака относительно средней используются характеристики рассеяния. Они различаются выбранной формой средней и способами оценки отклонений от нее отдельных вариантов. К таким показателям относятся:

- среднее линейное отклонение;

- дисперсия;
- среднее квадратическое отклонение;
- коэффициент вариации.

Среднее линейное отклонение определяется как средняя арифметическая из отклонений индивидуальных значений от средней, без учета знака этих отклонений:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \text{ (простая),}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{\sum f_i} \text{ (взвешенная).}$$

Среднее линейное отклонение имеет ту же размерность, что и признак. Среднее линейное отклонение применяют довольно редко, т.к. этот показатель не улавливает степень рассеивания признака.

В статистическом исследовании чаще всего применяют показатели дисперсии и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсия представляет собой средний квадрат отклонений индивидуальных значений признака от их средней величины и в зависимости от исходных данных вычисляется по формулам простой и взвешенной дисперсии:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \text{ (простая),}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{\sum f_i} \text{ (взвешенная).}$$

Среднее квадратическое отклонение – это обобщающая характеристика размеров вариации признака в совокупности. Среднее квадратическое отклонение выражается в тех же единицах измерения, что и признак:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \text{ (простая),}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{\sum f_i}} \text{ (взвешенная).}$$

Для целей сравнения колеблемости различных признаков в одной и той же совокупности или при сравнении колеблемости одного и того же признака в разных совокупностях вычисляют коэффициент вариации.

Базой для сравнения служит средняя арифметическая. Этот показатель чаще всего выражается в % и определяет не только сравнительную оценку вариации, но и дает характеристику однородности совокупности.

Совокупность считается однородной, если коэффициент вариации не превышает 33% (для распределений близких к нормальному):

$$K_{var} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 \% .$$

При статистических исследованиях зачастую приходится иметь дело с альтернативной изменчивостью качественных признаков, когда имеют только два взаимно исключающих друг друга варианта. При этом наличие признака обозначается единицей, а отсутствие его – нулем; доля вариантов, обладающих данным признаком, - p , а доля вариантов, не обладающих им, - q :

x_i	1	0
f_i	p	q

Легко видеть, что здесь $\bar{x} = p$, а $\sigma^2 = pq$.

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot p + 0 \cdot q}{p + q} = p, \text{ так как } p + q = 1 .$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q}{p+q} = \frac{q^2 p + p^2 q}{p+q} = pq.$$

Моменты распределения. Показатели формы распределения

Для подробного описания особенностей распределения используют дополнительные характеристики – моменты распределения, предложенные русским математиком П.Л. Чебышевым.

Моментом k -го порядка называют среднюю из k -х степеней отклонений вариантов x от некоторой постоянной величины A :

$$M_k = \frac{\sum_i (x_i - A)^k f_i}{\sum_i f_i}.$$

Порядок момента определяется величиной k . При исчислении моментов в качестве весов можно использовать частоты или частоты. В зависимости от выбора постоянной величины A различают начальные, условные и центральные моменты.

1 Если $A=0$, то моменты называются начальными:

$$M_k = \frac{\sum_i (x_i)^k f_i}{\sum_i f_i}.$$

При $k=0$ получаем начальный момент нулевого порядка

$$M_0 = \frac{\sum_i (x_i)^0 f_i}{\sum_i f_i} = 1.$$

При $k=1$ получаем начальный момент первого порядка

$$M_1 = \frac{\sum_i (x_i)^1 f_i}{\sum_i f_i} = \bar{x}.$$

При $k=2$ получаем начальный момент второго порядка

$$M_2 = \frac{\sum_i (x_i)^2 f_i}{\sum_i f_i} = \overline{x^2}$$

и т.д.

Практически используют моменты первых четырех порядков.

2 Если A равно не нулю, а некоторой произвольной величине x_0 (начало отсчета), то моменты называются начальными относительно x_0 или условными:

$$M'_k = \frac{\sum_i (x_i - x_0)^k f_i}{\sum_i f_i}$$

С их помощью упрощают вычисления основных характеристик.

При $k=0$ получаем начальный момент относительно x_0 нулевого порядка

$$M'_0 = \frac{\sum_i (x_i - x_0)^0 f_i}{\sum_i f_i} = 1.$$

При $k=1$ – первого порядка

$$M'_1 = \frac{\sum_i (x_i - x_0)^1 f_i}{\sum_i f_i} = \bar{x} - x_0$$

и т.д.

3 Если за постоянную величину A принять среднюю, то моменты называются центральными и обозначаются μ_k :

$$\mu_k = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^k f_i}{\sum_i f_i} = \overline{(x_i - \bar{x})^k}.$$

Центральный момент нулевого порядка равен 1:

$$\mu_0 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^0 f_i}{\sum_i f_i} = 1.$$

Центральный момент первого порядка равен 0:

$$\mu_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^1 f_i}{\sum_i f_i} = \frac{\sum_i x_i f_i}{\sum_i f_i} - \frac{\sum_i \bar{x} f_i}{\sum_i f_i} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

Центральный момент второго порядка равен дисперсии:

$$\mu_2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_i f_i} = \sigma^2$$

и т.д.

Центральный момент третьего порядка используется при исчислении показателя асимметрии распределения. Для того чтобы показатель асимметрии не зависел от масштаба, выбранного при измерении варианта, вводят безразмерную характеристику – коэффициент асимметрии.

Коэффициентом асимметрии вариационного ряда называется число

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Диапазон значений коэффициента асимметрии от $-\infty$ до $+\infty$.

При $As=0$ распределение симметрично: $\bar{x} = Mo$.

При $As > 0$ $\bar{x} > Mo$, т.е. распределение имеет правостороннюю скошенность, а при $As < 0$ $\bar{x} < Mo$, т.е. распределение имеет левостороннюю скошенность.

Для характеристики крутизны распределения используется центральный момент четвертого порядка.

Для образования безразмерной характеристики определяется отношение $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = Ex$ (нормированный момент четвертого порядка). Данное отношение и характеризует крутизну (заостренность) графика распределения.

Для нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, поэтому для оценки крутизны данного распределения в сравнении с нормальным вычисляется эксцесс распределения:

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Если крутость $Ex > 0$, то имеет место островершинность, а если $Ex < 0$, то распределение имеет низкую вершину.

Значение коэффициента эксцесса лежит на полусегменте $[-3, +\infty)$.

2.2 Дискретные случайные величины и их распределения

Величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение, заранее неизвестное, какое именно, считается случайной.

В зависимости от характера области возможных значений случайная величина бывает:

- дискретной (случайная величина, которая принимает конечное или бесконечное (счетное) число значений, с определенными вероятностями);

- непрерывной (случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток).

Наиболее полным, исчерпывающим описанием случайной величины является ее закон распределения.

Соотношение, устанавливающее связь между отдельными возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется законом распределения дискретной случайной величины.

Про случайную величину говорят, что она «распределена» по данному закону распределению или «подчинена» этому закону распределения.

Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в виде:

- таблицы;
- аналитически (в виде формулы);
- графически.

Если обозначить возможные числовые значения случайной величины X через x_1, x_2, \dots, x_n , а через $p_i = P(X = x_i)$ - вероятность появления значения x_i , то дискретная случайная величина полностью определяется таблицей 2.1.

Таблица 2.1 – Закон распределения случайной величины

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Значения x_1, x_2, \dots, x_n записываются, как правило, в порядке возрастания.

Таблица 1 представляет закон распределения дискретной случайной величины X .

Для любой дискретной случайной величины

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Дискретная случайная величина может быть задана графически многоугольником (полигоном) распределения или функцией распределения

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i = 1.$$

Одной из важных числовых характеристик случайной величины X является математическое ожидание.

Математическим ожиданием или средним значением $M(X)$ дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Математическое ожидание есть постоянное число, около которого колеблется средняя арифметическая отдельных значений случайной величины, полученных в результате испытаний.

Разброс отдельных значений признака около средней характеризуется дисперсией.

Аналогично рассеяние возможных значений случайной величины около ее математического ожидания характеризуется теоретической дисперсией

$$D(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Дисперсию можно определить как математическое ожидание квадрата отклонений значений случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Средним квадратическим отклонением σ_x случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Кроме математического ожидания и дисперсии, в теории вероятностей применяются еще ряд числовых характеристик, отражающих те или иные особенности распределения.

Модой $Mo(X)$ случайной величины X называется наиболее вероятное значение.

Если вероятность достигает максимума не в одной, а в нескольких точках, распределение называется полимодальным.

Медианой $Me(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого $P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)) = 1/2$, т.е. вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее медианы или большее ее, одна и та же и равна $1/2$.

Среди числовых характеристик случайной величины особое значение имеют моменты – начальные и центральные.

Начальным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание ее k -й степени:

а) для дискретной случайной величины

$$\nu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i;$$

б) для непрерывной случайной величины

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называют математическое ожидание k -й степени отклонения случайной величины X от ее математического ожидания.

а) для дискретной случайной величины

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^k p_i ;$$

б) для непрерывной случайной величины

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x) dx.$$

Заметим, что начальный момент первого порядка представляет собой математическое ожидание случайной величины, а центральный момент второго порядка – дисперсию случайной величины.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X примет значение меньше x : $F(x) = P(X < x)$.

Вероятность того, что случайная величина X примет какое-нибудь значение, удовлетворяющее неравенству $\alpha \leq X < \beta$, равна приращению ее функции распределения $F(x)$ на этом интервале:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

К основным законам распределения дискретной случайной величины относятся:

- биномиальный закон распределения;
- распределение Пуассона;
- геометрическое распределения

Биномиальный закон распределения.

Пусть производится n независимых испытаний. Каждое испытание имеет 2 исхода: успех и неуспех. Это два единственно возможных и несовместных события, т.е. противоположных события. Обозначим вероятность успеха через p , которая является постоянной от испытания к испытанию. Тогда вероятность неуспеха $q = 1 - p$.

Вероятность того, что при n испытаниях некоторое событие A произойдет m раз, определяется по формуле

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Как видим, вероятности находятся по формуле Бернулли.

Формулу Бернулли можно рассматривать как общий член разложения бинома:

$$P_{n;n} + P_{n;n-1} + \dots + P_{n;0} = (p + q)^n = 1.$$

Распределение вероятностей, представленное в таблице 2.2, называется биномиальным законом распределения.

Таблица 2.2 - Ряд распределения биномиального закона

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$...	$C_n^m p^m q^{n-m}$...	p^n

Для дискретной случайной величины X , распределенной по биномиальному закону,

$$a = M(X) = np;$$

$$D(X) = npq.$$

Распределение Пуассона

Если в схеме Бернулли p – малая величина, то вероятность $P(X = m)$ можно найти по приближенной формуле

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda).$$

Придавая m целые неотрицательные значения $0, 1, 2, \dots, n$, можно записать ряд распределения вероятностей, который называется законом распределения Пуассона (таблица 2.3).

Таблица 2.3 - Ряд распределения Пуассона

x_i	0	1	2	...	m
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

Таким образом, распределение Пуассона является предельным случаем распределения вероятностей в схеме Бернулли при $p \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ , который определяет этот закон, т.е.

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

Геометрическое распределение

Геометрическое распределение представляет собой распределение случайной величины X - число независимых экспериментов, которые нужно выполнить до первого появления события A . ряд распределения случайной величины X имеет вид (таблица 2.4).

Таблица 2.4 - Ряд геометрического распределения случайной величины имеет

ВИД:

x_i	1	2	3	...	m
p_i	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}

Этот ряд называется законом геометрического распределения, где p и q , как и в биномиальном эксперименте, есть вероятности двух исходов: успеха и неуспеха.

Вероятности геометрического распределения вычисляются по формуле

$$P(X = m) = pq^{m-1}.$$

Математическое ожидание геометрического распределения $a = M(X) = 1/p$, а дисперсия $D(X) = q/p^2$.

2.3 Непрерывные случайные величины и их распределения

Случайную величину называют непрерывной, если она может принимать значения из некоторого промежутка.

В общем случае случайная величина X задается функцией распределения $F(x)$, выражающей вероятность того, что X примет значение меньше, чем x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Задание непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным. Введем понятие плотности вероятности случайной величины.

Плотностью вероятности (плотностью распределения) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения $f(x) = F'(x)$.

Понятие математического ожидания и дисперсии для дискретной случайной величины, можно распространить на непрерывные случайные величины.

$$a = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot f(x) dx.$$

К основным законам распределения непрерывной случайной величины относятся:

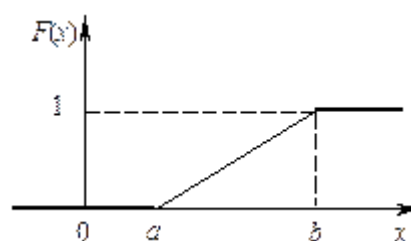
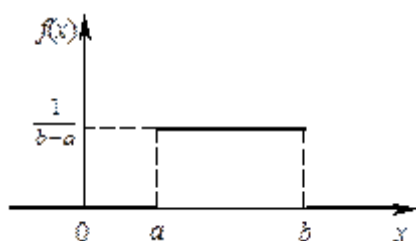
- равномерный закон распределения;
- нормальный закон распределения
- показательное распределение

Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет равномерный закон распределения на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{при } x < a \quad x > b \end{cases}.$$

Кривая распределения $f(x)$ и график функции распределения $F(x)$ случайной величины приведем на рисунке.



Теорема: Функция распределения случайной величины X , распределенной по равномерному закону, есть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a < x \leq b \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases}$$

ее математическое ожидание равно $M(X) = \frac{a+b}{2}$, а дисперсия $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Показательное (экспоненциальное) распределение

Экспоненциальное распределение тесно связано с распределением Пуассона.

Распределение Пуассона – это распределение числа появления событий в заданный интервал времени длиной t .

Например, если число дорожных происшествий в некотором интервале времени подчиняется распределению Пуассона, то длина этого интервала времени подчиняется показательному распределению, которое имеет плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } 0 \leq x \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

и функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } 0 \leq x \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал $(\alpha; \beta)$ непрерывной случайной величины X , распределенной по показательному закону, определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Математическое ожидание вычисляется по формуле $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, а дисперсия и среднее квадратическое отклонение – по формулам

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина X называется нормальной, если она описывается плотностью распределения

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Вероятностный смысл параметров $M(X) = a$, а ее дисперсия - $D(X) = \sigma^2$, где $X \rightarrow N(a; \sigma^2)$.

График плотность распределения нормально распределенной случайной величины называют нормальной кривой (кривой Гаусса) (рисунок 2.1).

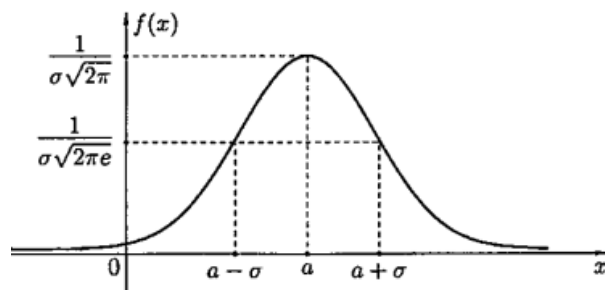


Рисунок 2.1 – Кривая нормального закона распределения

Если $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$, то получим нормированное (стандартное) нормальное

распределение. Плотность нормированного нормального распределения описывается функцией (рисунок 2.2)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

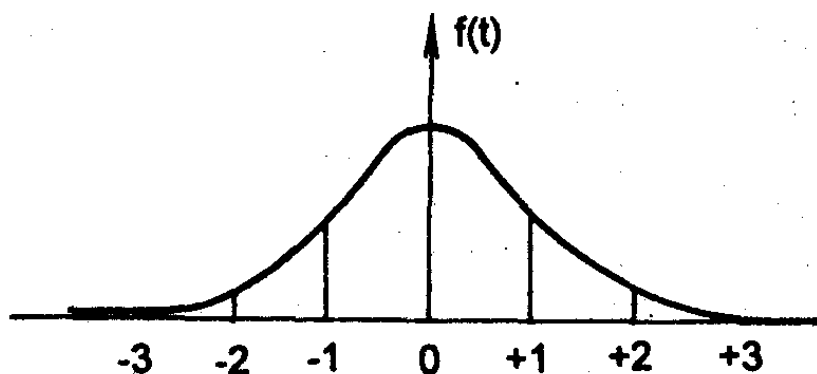


Рисунок 2.2 – Кривая нормированного нормального закона распределения

Значения этой функции табулированы.

Плотность случайной величины, распределенной по нормальному закону, можно записать так:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

т.е. от нормального распределения $X \rightarrow N(a; \sigma^2)$ можно перейти к стандартному (нормированному) распределению $Z \rightarrow N(0; 1^2)$ при помощи формулы

$$Z = \left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Для расчета вероятности попадания нормально распределенной случайной величины X в промежуток от α до β используется формула

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция называется интегралом Лапласа.

Функция табулирована. В частности, для симметричного относительно α промежутка $(a - \Delta; a + \Delta)$ имеем

$$P(|X - \alpha| < \Delta) \approx 2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

С вероятностью, очень близкой к единице, нормально распределенная случайная величина X удовлетворяет неравенству

$$P(|X - \alpha| < \Delta) \approx 2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

В этом состоит правило трех сигм: если случайная величина распределена по нормальному закону, то ее отклонение от математического ожидания практически не выходит за пределы $\pm 3\sigma$.

2.4 Закон больших чисел

Под законом больших чисел в широком смысле понимается общий принцип, согласно которому, по формулировке академика А.Н. Колмогорова, совокупное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая. Другими словами, при большом числе случайных величин их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

Под законом распределения больших чисел в узком смысле понимается ряд математических теорем, в каждом из которых для тех или иных условий

устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа испытаний к некоторым определенным постоянным.

1 Если случайная величина X (дискретная или непрерывная) принимает только неотрицательные значения, то для любого $\alpha > 0$ справедливо неравенство Маркова:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{M(X)}{\alpha}.$$

2 Для любой случайной величины выполняется неравенство Чебышева:

$$P(|X - \alpha| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

3 Пусть X_1, X_2, \dots, X_n независимые случайные величины, имеющие математические ожидания a_1, a_2, \dots, a_n и ограниченные дисперсии $D(X_i) \leq C$, где $C = const$. Тогда выполняется соотношение, называемое теоремой Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

2.5 Вопросы для самоконтроля к разделу 2

- 1 Понятие ряда распределения и его основные виды.
- 2 Алгоритм построения интервального вариационного ряда распределения.
- 3 Графическое представление вариационного ряда.
- 4 Понятие о законе больших чисел и его значение. Принцип практической уверенности.
- 5 Лемма Чебышева.
- 6 Неравенство Чебышева.

- 7 Неравенство Чебышева для средней арифметической случайных величин.
- 8 Теорема Чебышева.
- 9 Понятие случайной величины. Виды случайных величин.
- 10 Закон распределения случайной величины. Способы его задания.
- 11 Математическое ожидание дискретной случайной величины и ее свойства. Дисперсия дискретной случайной величины и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.
- 12 Моменты случайной величины.
- 13 Биномиальный закон распределения. Числовые характеристики.
- 14 Нормальный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия нормально распределенной случайной величины.
- 15 Равномерное распределение и его числовые характеристики.
- 16 Показательное распределение и его числовые характеристики.
- 17 Распределение Пуассона. Его числовые характеристики.
- 18 Функция распределения случайной величины, ее свойства и график.
- 19 Непрерывные случайные величины. Плотность вероятностей, кривая распределения.
- 20 Связь между плотностью вероятностей и функцией распределения.
- 21 Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

2.6 Задания к разделу 2

2.1 По собранному в разделе 1 статистическому массиву данных постройте дискретный вариационный ряд распределения. Изобразите полученный ряд распределения графически.

2.2 По данным п. 2.1 постройте интервальный вариационный ряд распределения. Изобразите полученный ряд распределения графически.

2.3 Вычислите основные характеристики вариационного ряда распределения.

2.4 Используя результаты п.2.2, постройте структурную и аналитическую группировки. Результаты представьте в табличной форме. Сформулируйте выводы.

2.5 Постройте комбинационную группировку по указанным признакам. Результаты представьте в табличной форме. Сформулируйте выводы.

2.6 По выборочным значениям из генеральной совокупности оценить закон распределения данной совокупности, для этого:

- построить интервальный вариационный ряд частот (относительных частот);
- построить гистограмму плотности относительных частот;
- построить кумулятивную функцию (статистическую функцию)

распределения относительных частот;

2.7 На основе полученных оценок в п.2.6 выдвинуть и проверить гипотезу о характере распределения с помощью:

- проверки нулевой гипотезы соответствия нормальному распределению (если есть основание) по коэффициентам асимметрии и эксцесса;
- критерия согласия Пирсона (χ^2).

2.8 Для одной из выборок с помощью критерия Пирсона проверить гипотезу согласия эмпирического распределения с равномерным распределением.

При выполнении заданий этого раздела следует обратить внимание на построение рядов распределения наблюдений; на вычисление статистических характеристик, применение условных моментов для упрощенного вычисления средней арифметической, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса; на свойства арифметической и выборочной дисперсии. Необходимо обратить внимание на различие задания законов распределения дискретной и непрерывной случайных величин. Необходимо четко представить разницу в нахождении математического ожидания и дисперсии дискретной и непрерывной случайных величин.

Необходимо разобраться в свойствах дифференциального и интегрального законов распределения и их взаимосвязи.

При изучении законов распределения следует обратить внимание на форму задания изучаемых законов распределения, их графическое изображение, на

выражения числовых характеристик случайных величин, подчиняющихся различным законам распределения. При изучении нормального закона необходимо обратить внимание на использование интеграла Лапласа для расчета теоретической кривой распределения. Расчет вероятности частоты появления события при биномиальном законе распределения производится по формуле Бернулли, а при достаточно больших значениях n используется локальная или интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона используется для расчета вероятности частоты появления редких событий.

При изучении закона больших чисел следует обратить внимание на формулировки их теорем. Теоремы закона больших чисел, к которым относятся теоремы Чебышева и Бернулли, касаются вопросов приближения некоторых случайных величин к определенным предельным значениям.

2.7 Тесты для самоконтроля к разделу 2

1. При непрерывной вариации признака целесообразно построить:
 - а) дискретный вариационный ряд;
 - б) интервальный вариационный ряд;
 - с) ряд распределения.

2. Вариационным называется ряд, построенный:
 - а) по количественному признаку;
 - б) по качественному признаку;
 - в) по количественному и качественному признакам одновременно.

3. Если вероятность наступления события в каждом испытании постоянна, но мала, а число испытаний велико, то для нахождения вероятности того, что событие A произойдет m раз в n испытаниях следует использовать:
 - а) формулу Бернулли
 - б) локальную теорему Муавара-Лапласа

- в) формулу Пуассона
- г) теорему умножения вероятностей.

4. Какое из положений закона больших чисел оценивает вероятность отклонения случайной величины X от ее математического ожидания?

- а) неравенство Чебышева
- б) теорема Бернулли
- в) теорема Чебышева
- г) лемма Маркова

5. Случайная величина – это:

- а) величина, которая в результате эксперимента принимает одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно;
- б) величина, которая в результате испытания принимает несколько своих значений;
- в) величина, которая не может принимать заранее известное значение.

6. Что позволяет оценить формула Байеса:

- а) вероятность гипотез после того, как произошло событие;
- б) вероятность гипотез, до того, как произошло событие;
- в) вероятность событий.

7. Для определения коэффициента асимметрии используется центральный момент:

- а) четвертого порядка;
- б) третьего порядка;
- в) второго порядка.

8. Дискретную случайную величину можно задать с помощью:

- а) формулы Бернулли;

- б) закона распределения;
- в) условной вероятности;
- г) теоремы сложения вероятностей.

9. К числовым характеристикам дискретной случайной величины можно отнести:

- а) плотность вероятности;
- б) функцию вероятности;
- в) дисперсию;
- г) формулу Бернулли.

10. Отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний, называется:

- а) классическое определение вероятности;
- б) относительная частота;
- в) геометрическая вероятность.

11. Случайная величина бывает:

- а) независимой;
- б) дискретной;
- в) достоверной.

12. Событие, которое не произойдет в результате испытания, называется:

- а) достоверным;
- б) невозможным;
- в) случайным.

13. Если два события в данном опыте произойти одновременно не могут, то они называются:

- а) несовместными;

- б) равновозможными;
- в) случайными.

14. Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является:

- а) формула Байеса;
- б) формула Бернулли;
- в) формула Пуассона.

15. Математическое ожидание приближенно равно:

- а) среднему арифметическому значению;
- б) дисперсии;
- в) вариации.

16. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от математического ожидания равно:

- а) дисперсии;
- б) среднему квадратическому отклонению;
- в) моменту.

17. Первый начальный момент случайной величины X – это:

- а) математическое ожидание;
- б) дисперсия;
- в) среднее квадратическое отклонение.

18. Под законом больших чисел понимают:

- а) совокупность теорем, в которых устанавливается факт приближения средних характеристик к некоторым постоянным величинам в результате большого числа наблюдений;
- б) совокупность величин, которые стремятся к бесконечности;

в) совокупность теорем, в которых устанавливается факт приближения средних характеристик к некоторым постоянным величинам в результате очень малого числа наблюдений.

19. Задача математической статистики состоит:

а) в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных выводов;

б) в построения математических моделей;

в) в получение достоверных данных.

20. Частоты – это:

а) числа, показывающие, сколько раз встречаются варианты из данного интервала;

б) различные значения признака;

в) порядковый номер ранжированного ряда.

21. Какой вид распределения используется при нахождении интервальной оценки математического ожидания при неизвестной генеральной дисперсии?

а) Пирсона

б) Стьюдента

в) Нормальное

г) Фишера-Снедекора

22. Какой вид распределения используется при нахождении интервальной оценки генеральной дисперсии по выборке объемом больше 30?

а) Стьюдента

б) Нормальное

в) Пирсона

г) Фишера-Снедекора

23. Какой вид распределения используется при нахождении интервальной оценки генеральной дисперсии по выборке объемом меньше 30?

- а) Стьюдента
- б) Нормальное
- в) Пирсона
- г) Фишера-Снедекора

24. Какой вид распределения используется при нахождении интервальной оценки математического ожидания при известной генеральной дисперсии?

- а) Стьюдента
- б) Нормальное
- в) Пирсона
- г) Фишера-Снедекора

25. Математическое ожидание и дисперсия совпадают и равны параметру λ , то случайная величина распределена :

- а) по закону Пуассона;
- б) по биномиальному закону;
- в) по равномерному закону;
- г) по показательному закону.

3 Статистическая теория выборки. Статистическая проверка гипотез

3.1 Основные понятия и определения выборочного метода

3.2 Статистическое оценивание

3.3 Ошибки выборки

3.4 Определение численности выборки

3.5 Интервальное оценивание

3.6 Статистическая проверка гипотез

3.1 Основные понятия и определения выборочного метода

Математическая статистика – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин по результатам наблюдений.

Задачи математической статистики:

- полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные сначала надо каким-либо образом обработать: упорядочить, представить в удобном для обозрения и анализа виде;

- оценить, хотя бы приблизительно, интересующие нас характеристики наблюдаемой случайной величины. Например, дать оценку неизвестной вероятности события, оценку неизвестной функции распределения, оценку математического ожидания, оценку дисперсии случайной величины, оценку параметров распределения, вид которого неизвестен и т.д.;

- проверка статистических гипотез, т.е. решение вопроса согласования результатов оценивания с опытными данными. Например, выдвигается гипотеза, что: а) наблюдаемая случайная величина подчиняется нормальному закону распределения; б) математическое ожидание наблюдаемой случайной величины равно нулю и т.д.;

- разработка методов, позволяющих по результатам обследования выборки делать обоснованные выводы о распределении признака (случайной величины X) изучаемых объектов во всей совокупности.

Результаты исследования статистических данных методами математической статистики используются для принятия решения (в задачах планирования, управления, прогнозирования и организации производства, при контроле качества

продукции, при выборе оптимального времени настройки или замены действующей аппаратуры и т.д.), т.е. для научных и практических выводов.

Пусть требуется изучить данную совокупность объектов относительно некоторого признака.

Если наблюдение организовано так, что исследованию подлежат все элементы совокупности (сплошное наблюдение), то в этом случае статистическую совокупность называют генеральной.

Зачастую проводить сплошное обследование, когда изучаются все объекты (например – перепись населения), трудно или дорого, экономически нецелесообразно, а иногда невозможно. В этих случаях наилучшим способом обследования является выборочное наблюдение: выбирают из генеральной совокупности часть ее объектов и подвергают их изучению.

Если исследованию подлежит только часть элементов генеральной совокупности, то она называется выборочной совокупностью (выборкой). Она извлекается из генеральной совокупности случайным образом так, чтобы каждый из элементов выборки имел равные шансы быть отобранным.

Для получения хороших оценок характеристик генеральной совокупности необходимо, чтобы выборка была репрезентативной, т.е. достаточно полно представлять изучаемые признаки генеральной совокупности. Условием обеспечения репрезентативности выборки является соблюдение случайности отбора, т.е. все объекты генеральной совокупности должны иметь равные вероятности попасть в выборку.

Различают выборки с возвращением (повторные) и без возвращения (бесповторные). В первом случае отобранный объект возвращается в генеральную совокупность перед извлечением следующего; во втором – не возвращается.

В зависимости от конкретных условий для обеспечения репрезентативности применяют различные способы:

- простой, при котором из генеральной совокупности извлекают по одному объекту;

- типический, при котором генеральную совокупность делят на «типические» части и отбор осуществляется из каждой части;

- механический, при котором отбор производится через определенный интервал (например, мнение спросить у каждого шестидесятого...);

- серийный, при котором объекты из генеральной совокупности отбираются «сериями», которые должны исследоваться при помощи сплошного обследования.

3.2 Статистическое оценивание

Пусть из генеральной совокупности извлекается выборка объемом n , причем значение признака x_1 наблюдается f_1 раз, x_2 – f_2 раз, ..., x_k – f_k раз:

$$\sum_{i=1}^k f_i = n.$$

Мы можем сопоставить каждому значению x_i относительную частоту $\omega_i = \frac{f_i}{n}$.

Статистическим распределением выборки называется перечень возможных значений признака x_i и соответствующих ему частот f_i или относительных частот ω_i .

Числовые характеристики генеральной совокупности, как правило неизвестны (средняя, дисперсия и др.), называются параметрами генеральной совокупности (обозначают $\bar{X}_{ген}$, $\sigma_{ген}^2$).

По данным выборки рассчитывают числовые характеристики, которые называют статистиками (обозначают $\tilde{X}_{выб}$, $\sigma_{выб}^2$).

Статистики, получаемые по различным выборкам, отличаются друг от друга. Поэтому статистика, полученная из выборки, является только *оценкой* неизвестного параметра генеральной совокупности. Выборочная характеристика, используемая в качестве приближенного значения неизвестной генеральной характеристики, называется ее точечной статистической оценкой.

«Точечная» означает, что оценка представлена одним числом или точкой на числовой оси.

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки ($M(\tilde{X}) = \bar{X}$).

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя, генеральной доли — выборочная доля.

Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия ($M(\sigma_{\text{выб}}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma_{\text{ген}}^2$, т.е. $M(\sigma_{\text{выб}}^2) \neq \sigma_{\text{ген}}^2$).

В качестве точечных оценок параметров генеральной совокупности используются соответствующие выборочные характеристики. Теоретическое обоснование возможности использования этих выборочных оценок для суждений о характеристиках и свойствах генеральной совокупности дают закон больших чисел и центральная предельная теорема Ляпунова.

Выборочная средняя является точечной оценкой генеральной средней, т. е. $\tilde{X}_{\text{выб}} \approx \bar{X}_{\text{ген}}$.

Генеральная дисперсия имеет 2 точечные оценки: $\sigma_{\text{выб}}^2$ — выборочная дисперсия; s^2 — исправленная выборочная дисперсия. $\sigma_{\text{выб}}^2$ исчисляется при $n \geq 30$, а s^2 — при $n < 30$, где

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - \tilde{X}_{\text{выб}})^2 f_i}{n-1}$$

Иногда для нахождения $\sigma_{\text{ген}}^2$ используют равенство

$$M(\sigma_{\text{выб}}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma_{\text{ген}}^2,$$

т.е. $\sigma_{\text{выб}}^2 \approx \frac{n-1}{n} \sigma_{\text{ген}}^2$, и, следовательно, $\sigma_{\text{ген}}^2 \approx \frac{n-1}{n} \sigma_{\text{выб}}^2$.

$$M(S^2) = \sigma_{\text{ген}}^2, \text{ т.е. } s^2 \approx \sigma_{\text{ген}}^2,$$

или

$$s^2 \approx \frac{n-1}{n} \sigma_{\text{выб}}^2. \quad (3.1)$$

При больших объемах выборки $\sigma_{\text{выб}}^2$ и s^2 практически совпадают. Генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\text{выб}}$ также имеет 2 точечные оценки: $\sigma_{\text{выб}}$ — выборочное среднее квадратическое отклонение и s — исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение. $\sigma_{\text{выб}}$ используется для оценивания $\sigma_{\text{ген}}$ при $n \geq 30$, а s — для оценивания $\sigma_{\text{ген}}$ при $n < 30$; при этом

$$\sigma_{\text{выб}} = \sqrt{\sigma_{\text{выб}}^2}, \quad s = \sqrt{s^2}.$$

Выборочная доля w является точечной оценкой генеральной доли.

3.3 Ошибки выборки

Поскольку выборочная совокупность представляет собой лишь часть генеральной совокупности, то вполне естественно, что выборочные характеристики не будут точно совпадать с соответствующими генеральными. Ошибка репрезентативности может быть представлена как разность между генеральными и выборочными характеристиками изучаемой совокупности: $\varepsilon = \tilde{X} - \bar{X}$.

Наибольшее отклонение выборочной средней (или доли) от генеральной средней (или доли), которое возможно с заданной вероятностью (доверительной), называется предельной ошибкой выборки (Δ) $|\varepsilon| \leq \Delta$.

Применительно к выборочному методу из теоремы Чебышева следует, что с вероятностью, сколько угодно близкой к единице, можно утверждать, что при

достаточно большом объеме выборки и ограниченной дисперсии генеральной совокупности разность между выборочной средней и генеральной средней будет сколь угодно мала.

$$P\left(\left|\tilde{X} - \bar{X}\right| < \underbrace{\frac{z\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}}_{\varepsilon}\right) > 1 - \frac{1}{z^2}, \quad (3.2)$$

где \tilde{X} - средняя по совокупности выбранных единиц;

\bar{X} - средняя по генеральной совокупности;

$\sigma_{ген}$ — среднее квадратическое отклонение в генеральной совокупности.

Запись показывает, что о величине расхождения между оцениваемым параметром и выборочной статистикой

$$\Delta = \frac{z\sigma_{ген}}{\sqrt{n}} = z\mu$$

можно судить лишь с определенной вероятностью, от которой зависит величина z .

Формула (3.2) устанавливает связь между пределом ошибки, гарантируемым с некоторой вероятностью P , величиной z и средней ошибкой выборки μ :

$$\mu = \frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}.$$

При повторном отборе средняя ошибка выборки определяется по формуле

$\mu = \sigma_{\tilde{X}} = \frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}$. Для нахождения $\sigma_{ген}^2$ учитываем, что

$$M(\sigma_{выб}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma_{ген}^2, \text{ т. е. } \sigma_{выб}^2 \approx \frac{n-1}{n}\sigma_{ген}^2,$$

отсюда $\sigma_{ген}^2 = \frac{n-1}{n} \sigma_{выб}^2$.

Значит,

$$\mu = \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sigma_{ген}^2}{n}} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \frac{n}{n-1} \sigma_{выб}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_{выб}^2}{n-1}} = \frac{\sigma_{выб}}{\sqrt{n-1}}.$$

При бесповторном отборе ошибка выборки при нахождении средней определяется по формуле

$$\mu = \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{N-n}{(N-1)} \frac{\sigma_{ген}^2}{n}} \approx \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)} \frac{n}{n-1} \frac{N-1}{N} \sigma_{выб}^2} = \frac{\sigma_{выб}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}},$$

так как $M(\sigma_{выб}^2)$ в этом случае равно $\frac{n-1}{n} \frac{N}{(N-1)} \sigma_{ген}^2$.

Аналогично в случае повторного отбора средняя ошибка выборки при определении доли

$$\mu = \sigma_{\omega} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}}$$

так как $M(\omega(1-\omega)) = \frac{n-1}{n} pq$.

При бесповторном отборе ошибка выборки при нахождении доли определяется по формуле

$$\mu = \sigma_{\omega} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n} \frac{N-n}{N-1}} \approx \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

Согласно центральной предельной теореме Ляпунова выборочные распределения статистик (при $n \geq 30$) будут иметь нормальное распределение

независимо от того, какое распределение имеет генеральная совокупность. Следовательно,

$$P\left(\left|\tilde{X} - \bar{X}\right| < z\mu\right) \approx 2\Phi_0(z), \quad (3.3)$$

где $\Phi_0(z)$ - функция Лапласа.

Значения вероятностей, соответствующие различным z , содержатся в специальных таблицах: при $n \geq 30$ — в таблице значений $\Phi_0(z)$, а при $n < 30$ — в таблице распределения t-критерия Стьюдента. Неизвестное значение $\sigma_{ген}$ при расчете ошибки выборки заменяется $\sigma_{выб}$.

В зависимости от способа отбора средняя ошибка выборки μ определяется по-разному (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Формулы расчета средней ошибки выборки для собственно-случайного отбора

Оцениваемый параметр	Собственно-случайного отбора	
	повторный	бесповторный
Генеральная средняя	$\mu = \sigma_{\tilde{X}} = \sqrt{\frac{\sigma_{ген}^2}{n}} \approx \sqrt{\frac{\sigma_{выб}^2}{n-1}}$	$\mu = \sqrt{\frac{\sigma_{выб}^2}{n-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$
Генеральная доля	$\mu = \sigma_{\omega} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}}$	$\mu = \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$

Здесь $\sigma_{выб}^2$ — выборочная дисперсия значений признака;

$\omega(1-\omega)$ — выборочная дисперсия доли значений признака;

n — объем выборки;

N — объем генеральной совокупности;

n/N — доля обследованной совокупности;

$1 - \frac{n}{N}$ — поправка на конечность совокупности (или поправка на

бесповторность отбора).

При определении средней квадратической ошибки выборки для доли, если даже w неизвестна, в качестве pq можно взять его максимально возможное значение

$$(pq)_{\max} = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25.$$

3.4 Определение численности выборки

Одной из важнейших проблем выборочного метода является определение необходимого объема выборки. От объема выборки зависит размер средней ошибки (μ) и экономичность проводимого выборочного наблюдения, так как чем больше объем выборки, тем больше затраты на изучение элементов выборки, но тем меньше при этом ошибка выборки.

Из формулы предельной ошибки $\Delta = z\mu$ и формул средних ошибок выборки (таблица 1) определяются формулы необходимой численности выборки.

При повторном отборе пользуются формулой

$$n = \frac{z^2 \sigma_{\text{выб}}^2}{\Delta^2},$$

а при бесповторном отборе

$$n \approx \frac{z^2 \sigma_{\text{ген}}^2 N}{\Delta^2 N + z^2 \sigma_{\text{ген}}^2},$$

где z — корень уравнения $2\Phi_0(z) = P$, или $\Phi_0(z) = \frac{P}{2}$.

3.5 Интервальное оценивание

Пусть $\varepsilon = \tilde{X} - \bar{X}$. Если Δ представляет собой предел, которым ограничена сверху абсолютная величина $|\varepsilon| < \Delta$, то $|\tilde{X} - \bar{X}| < \Delta$. Следовательно,

$$\tilde{X} - \Delta < \bar{X} < \tilde{X} + \Delta. \quad (3.4)$$

Мы получили интервальную оценку генеральной средней. Из теоремы Чебышева следует, что

$$P(\tilde{X} - \Delta < \bar{X} < \tilde{X} + \Delta) = 2\Phi_0(z) = \gamma. \quad (3.5)$$

Интервальной оценкой называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала, который с определенной вероятностью покрывает параметр генеральной совокупности. Интервал, содержащий оцениваемый параметр генеральной совокупности, называют доверительным интервалом. Для его определения вычисляется предельная ошибка выборки Δ , позволяющая установить предельные границы, в которых с заданной вероятностью (надежностью) должен находиться параметр генеральной совокупности.

Предельная ошибка выборки равна z -кратному числу средних ошибок выборки. Коэффициент z позволяет установить, насколько надежно высказывание о том, что заданный интервал содержит параметр генеральной совокупности. Если мы выберем коэффициент таким, что высказывание в 95% случаев оказывается правильным и только в 5% — неправильным, то мы говорим: со статистической надежностью в 95%-ный доверительный интервал выборочной статистики содержит параметр генеральной совокупности. Статистической надежности в 95% соответствует доверительная вероятность — 0,95. В 5% случаев утверждение «параметр принадлежит доверительному интервалу» будет неверным, т.е. 5% задает уровень значимости (α) или 0,05 вероятность ошибки. Обычно в статистике уровень значимости выбирают таким, чтобы он был менее 5% ($\alpha < 0,05$). Доверительная вероятность и уровень значимости дополняют друг друга до 1 (или 100%) и определяют надежность статистического высказывания.

С помощью доверительного интервала можно оценить не только генеральную среднюю, но и другие неизвестные параметры генеральной совокупности.

Для оценки математического ожидания a (генеральной средней) нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней \tilde{X} при известном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности (на практике — при большом объеме выборки, т. е. при $n \geq 30$) и собственно-случайном повторном отборе формула (3.5) примет вид

$$P(|\tilde{X} - \bar{X}| < \Delta) = P\left(\tilde{X} - Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \tilde{X} + Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(Z) = \gamma \quad (3.6)$$

где Z определяется по таблицам функции Лапласа из соотношения $2\Phi_0(Z) = \gamma$;

σ — среднее квадратическое отклонение;

n — объем выборки (число обследованных единиц).

$$\Delta = Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Для оценки математического ожидания a (генеральной средней) нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней \tilde{X} при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности (при большом объеме выборки, т. е. при $n \geq 30$) и собственно-случайном бесповторном отборе формула (3.6) примет вид

$$P\left(\tilde{X} - Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} < \bar{X} < \tilde{X} + Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}\right) = 2\Phi_0(Z) = \gamma, \quad (3.7)$$

где $\Delta = Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$.

Для оценки математического ожидания a (генеральной средней) нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней \tilde{X} при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности (на

практике — при малом объеме выборки, т. е. при $n < 30$) и собственно-случайном повторном отборе формула (3.6) будет иметь вид

$$P\left(\tilde{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \tilde{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 2s(t) = \gamma, \quad (3.8)$$

где t определяется по таблицам Стьюдента, по уровню значимости $\alpha = 1 - \gamma$ и числу степеней свободы $k = n - 1$;

s — исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение;

n — объем выборки.

$$\Delta = t \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Для оценки математического ожидания a (генеральной средней) нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней \tilde{X} при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности (при малом объеме выборки, т. е. при $n < 30$) и собственно-случайном бесповторном отборе формула (3.8) примет вид

$$P\left(\tilde{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} < \bar{X} < \tilde{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}\right) = 2s(t) = \gamma \quad (3.9)$$

где $\Delta = t \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$

Для оценки генеральной доли p нормально распределенного количественного признака по выборочной доле ω (при большом объеме выборки, т. е. при $n \geq 30$) и собственно-случайном повторном отборе формула (3.6) будет иметь вид

$$P\left(\omega - Z \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}} < p < \omega + Z \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}}\right) = 2\Phi_0(Z) = \gamma \quad (3.10)$$

где Z определяется по таблицам функции Лапласа из соотношения $2\Phi_0(Z) = \gamma$;

ω — выборочная доля;

n — объем выборки (число обследованных единиц);

$$\Delta = Z \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}}.$$

Для оценки генеральной доли p нормально распределенного количественного признака по выборочной доле ω (при большом объеме выборки, т. е. при $n \geq 30$) и собственно-случайном бесповторном отборе формула (3.10) примет вид

$$P\left(\omega - Z \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} < p < \omega + Z \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}\right) = 2\Phi_0(Z) = \gamma \quad (3.11)$$

где $\Delta = Z \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$.

Для оценки генеральной доли p нормально распределенного количественного признака по выборочной доле ω (при малом объеме выборки, т. е. при $n < 30$) и собственно-случайном повторном отборе формула (3.10) примет вид

$$P\left(\omega - t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}} < p < \omega + t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}}\right) = 2s(t) = \gamma \quad (3.12)$$

где t определяется по таблицам Стьюдента, по уровню значимости $\alpha = 1 - \gamma$ и числу степеней свободы $k = n - 1$.

$$\Delta = t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}}.$$

Для оценки генеральной доли p нормально распределенного количественного признака по выборочной доле ω (при малом объеме выборки, т. е. при $n < 30$) и собственно-случайным бесповторном отборе формула (3.9) будет иметь вид

$$P\left(\omega - t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} < \bar{X} < \omega + t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}\right) = 2s(t) = \gamma \quad (3.13)$$

где $\Delta = t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n-1}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$

Для оценки генерального среднего квадратического отклонения нормально распределенного количественного признака по выборочному среднему

квадратическому отклонению $s = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \tilde{X})^2}{n-1}}$ используем формулу

$$P(s\gamma_1 < \sigma < s\gamma_2) = 1 - \alpha,$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-1}}}$; $\gamma_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}}$ и $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ - случайная величина хи-квадрат (χ^2) с

числом степеней свободы $n-1$.

3.6 Статистическая проверка гипотез

3.6.1 Проверка статистической гипотезы и статистического критерия

Статистическая проверка гипотез тесно связана с теорией оценивания параметров распределений. В экономике, технике, естествознании, медицине, демографии и т.д. часто для выяснения того или иного случайного явления прибегают к высказыванию гипотез (предположений), которые можно проверить статистически, т.е. опираясь на результаты наблюдений в случайной выборке.

Под статистической гипотезой понимается всякое высказывание о виде неизвестного распределения, или параметрах генеральной совокупности и известных распределений, или о равенстве параметров двух или нескольких распределений, или о независимости выборок, которое можно проверить статистически, опираясь на результаты наблюдений в случайной выборке.

Статистические гипотезы проверяются путем сопоставления выдвинутых предположений с выборочными данными, и по результатам этого сравнения делается вывод о справедливости выдвинутой гипотезы.

Статистическая гипотеза называется параметрической, если в ней сформулированы предположения относительно неизвестных значений параметров распределения определенного вида.

Статистическая гипотеза называется простой, если предположение в ней однозначно определяет распределение случайной величины; в противном случае, если она не полностью определяет параметры распределения, ее называют сложной.

Обычно исследование начинается с того, что какая-либо гипотеза, которая из неформальных соображений представляется хорошо согласующейся с ожидаемыми эмпирическими данными, объявляется основной (нулевой) и обозначается H_0 . Альтернативная гипотеза, утверждающая, что гипотеза H_0 неверна, обозначается H_1 .

Таким образом, задача заключается в проверке гипотезы H_0 относительно конкурирующей гипотезы H_1 на основании выборки, состоящей из n независимых наблюдений X_1, X_2, \dots, X_n над случайной величиной X . Следовательно, все возможное множество выборок объемом n можно разделить на два непересекающихся подмножества (обозначим их через Q и W) таких, что проверяемая гипотеза H_0 должна быть отвергнута, если наблюдаемая выборка попадает в подмножество W , и принята, если наблюдаемая выборка принадлежит подмножеству Q .

Чтобы по наблюдаемому значению x случайной величины X сделать разумный выбор между нулевой и альтернативной гипотезами, надо построить критерий, который представляет собой правило поведения в ситуации выбора.

Статистическим критерием называют правило, с помощью которого с высокой вероятностью принимаются решения о принятии или отклонении выдвинутой нулевой гипотезы на основании результатов, наблюдаемых в выборке.

Критерий – это специально составленная выборочная характеристика $K=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, точное или приближенное распределение которой нам известно. Значение критерия, вычисленное по данным выборки, называют наблюдаемым значением – $K_{набл}$. Численное значения α называется уровнем значимости критерия.

Критерий такого типа называется критерием значимости. После выбора определенного критерия K множество всех возможных его значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них включает значения критерия, при которых нулевая гипотеза отклоняется, а другое – при которых она принимается.

Множество значений критерия, при которых нулевая гипотеза отклоняется, называется областью критических значений (обозначим W).

Критическая область данного критерия – это область, вероятность попадания в которую в случае, когда гипотеза H_0 верна, в точности равна заданному уровню значимости α .

Основные правила проверки гипотезы состоят в том, что если наблюдаемое значение статистики критерия попадает в критическую область, то гипотезу отвергают, если же оно попадает в область допустимых значений, то гипотезу не отвергают (или принимают).

Такой принцип проверки гипотезы не дает логического доказательства или опровержения гипотезы. При использовании этого принципа возможны четыре случая:

- гипотеза H_0 верна, и ее принимают согласно критерию;
- гипотеза H_0 неверна, и ее отвергают согласно критерию;
- гипотеза H_0 верна, но ее отвергают согласно критерию, т.е. допускается ошибка, которую принято называть ошибкой первого рода;
- гипотеза H_0 неверна, и ее принимают согласно критерию, т.е. допускается ошибка второго рода.

Уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma$ называют вероятность совершить ошибку первого рода, т.е. вероятность отвергнуть нулевую гипотезу H_0 , когда она верна. С уменьшением α возрастает вероятность ошибки второго рода β .

Мощностью критерия $(1 - \beta)$ называют вероятность того, что нулевая гипотеза H_0 будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза H_1 , т.е. вероятность не допустить ошибку второго рода.

Мощность является важнейшей характеристикой критерия. Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность совершения ошибки второго рода.

Множество значений критерия, при которых нулевую гипотезу не отклоняют (принимают), называют областью принятия гипотезы H_0 (обозначим O).

Если наблюдаемое значение критерия $K_{набл}$ принадлежит критической области, то нуль-гипотезу отклоняют; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то нуль-гипотезу принимают (не отклоняют). Это основной принцип проверки гипотез.

Так как критерий K – случайная величина, то все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу, обычно $(-\infty; +\infty)$ или $(0; +\infty)$. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами, и, следовательно, существуют точки, которые их разделяют. Точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы, называются критическими точками, обозначаются $K_{кр}$.

В зависимости от вида альтернативной гипотезы критические области подразделяются на односторонние (правосторонние и левосторонние) и двусторонние.

Правосторонней критической областью называют область, определяемую неравенством $K_{набл} > K_{кр}$, где $K_{кр}$ – положительное число (рисунок 3.1).

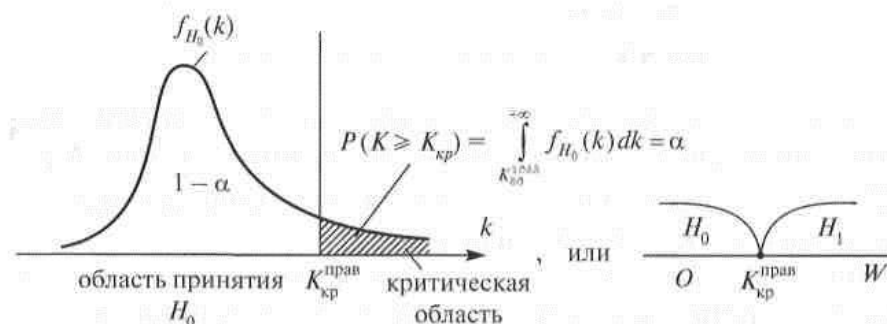


Рисунок 3.1 – Правосторонняя критическая область

Левосторонняя критическая область определяется неравенством $K_{набл} < K_{кр}$, где $K_{кр}$ – отрицательное число (рисунок 3.1).

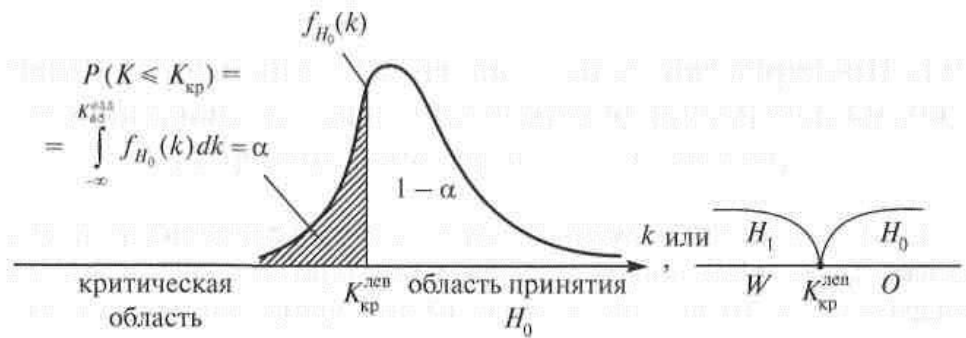


Рисунок 3.2 – Левосторонняя критическая область

Двустороннюю критическую область будем определять неравенствами $K < K_{кр}^{лев}$ и $K > K_{кр}^{прав}$ (рисунок 3.3).



Рисунок 3.3 – Двусторонняя критическая область

Однако следует заметить, что если критерий K – случайная величина, симметричная относительно оси ординат, то при $K_{кр} > 0$ $K_{кр}^{лев} = -K_{кр}$, а двусторонняя критическая область определяется неравенствами $K \leq -K_{кр}$ и $K \geq K_{кр}$, или $|K| \geq K_{кр}$.

При справедливости нулевой гипотезы критические точки для двусторонней области находят из следующего равенства:

$$P(K \leq K_{кр}^{лев}) + P(K \geq K_{кр}^{прав}) = \alpha.$$

Если распределение симметрично относительно оси OY , то

$$P(K \leq -K_{\text{кр}}) = P(K \geq K_{\text{кр}}) = \frac{\alpha}{2}.$$

3.6.2 Гипотезы о генеральных средних нормально распределенных совокупностей

Если из значений нормально распределенной случайной величины вычесть ее среднюю арифметическую и результат разделить на среднее квадратическое отклонение, то мы получим нормированную случайную величину $Z = \frac{X - a}{\sigma}$, и $Z \rightarrow N(0;1)$.

Переход к стандартной форме случайной величины позволит нам формализовать процедуру проверки гипотез.

Предположим, что верна нулевая гипотеза $H_0 : \bar{X} = a_0$.

Для проверки используем критерий

$$Z = \frac{\tilde{X} - a_0}{\sigma} \sqrt{n},$$

так как $\sigma(\tilde{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

При большом объеме выборки n в случае справедливости $H_0 : Z = \frac{\tilde{X} - a_0}{\sigma} \sqrt{n}$ подчиняется стандартному нормальному закону, $Z \rightarrow N(0;1)$.

Критическая область строится в зависимости от вида альтернативных гипотез:

$$H_1 : \bar{X} \neq a_0;$$

$$H_1 : \bar{X} = a_1 > a_0;$$

$$H_1 : \bar{X} = a_1 < a_0.$$

Алгоритм проверки гипотезы о значении генеральной средней нормально распределенной генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии приведен в таблице 3.1.

Таблица 3.1 - Алгоритм проверки гипотезы о значении генеральной средней нормально распределенной генеральной совокупности при известной генеральной дисперсии

Нуль-гипотеза	$H_0 : \bar{X} = a_0$
Альтернативная гипотеза	а) $H_1 : \bar{X} \neq a_0$; б) $H_1 : \bar{X} = a_1 > a_0$; в) $H_1 : \bar{X} = a_1 < a_0$.
Уровень значимости	$\alpha=0,05$ или $\alpha=0,01$
Критерий	$Z = \frac{\tilde{X} - a_0}{\sigma} \sqrt{n}$ (предполагается, что $\sigma_{ген}$ известно)
Критические точки	Зависят от α . Это: а) границы $\pm Z_{\alpha/2}$, разделяющие критические области принятия H_0 , т.е. $Z_{\alpha/2} = \Phi_0^{-1}(0.5 - \alpha/2)$ б) граница Z_α , разделяющая критическую область принятия H_0 , находится как $Z_\alpha = \Phi_0^{-1}(0.5 - \alpha)$ в) граница Z_α , разделяющая критическую область и область принятия H_0 , находится как $Z_\alpha = -\Phi_0^{-1}(0.5 - \alpha)$
Правило принятия решения	H_0 отклоняется: а) если $ Z_{набл} \geq Z_{кр;\alpha/2}$ б) если $Z_{набл} \geq Z_{кр;\alpha}^{прав}$ в) если $Z_{набл} \leq -Z_{кр;\alpha}^{лев}$

Пусть некоторая генеральная совокупность имеет нормальное распределение $Z \rightarrow N(\bar{X}; \sigma^2)$, параметры \bar{X} и σ^2 неизвестны. Тогда по результатам случайной выборки объема n найдем точечные их оценка \tilde{X} и s .

Требуется проверить гипотезу $H_0 : \bar{X} = a_0$.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину

$$T = \frac{\tilde{X} - a}{s} \sqrt{n} = \frac{\tilde{X} - a_0}{\sigma_{\text{выб}}} \sqrt{n-1}.$$

Примем без доказательства, что если гипотеза H_0 верна, то случайная величина T имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $K_{\text{св}} = n - 1$.

Правила проверки описанной гипотезы H_0 представим в таблице 3.2.

Таблица 3.2 - Алгоритм проверки гипотезы о значении генеральной средней нормально распределенной генеральной совокупности при неизвестной генеральной дисперсии

Нуль-гипотеза	$H_0 : \bar{X} = a_0$
Альтернативная гипотеза	а) $H_1 : \bar{X} \neq a_0$; б) $H_1 : \bar{X} = a_1 > a_0$; в) $H_1 : \bar{X} = a_1 < a_0$.
Уровень значимости	$\alpha=0,05$ или $\alpha=0,01$
Критерий	$T = \frac{\tilde{X} - a_0}{s} \sqrt{n}$ <p>(предполагается, что $\sigma_{\text{ген}}$ неизвестно). Если объем выборки n достаточно велик, то логично применить критерий $Z = \frac{\tilde{X} - a_0}{\sigma} \sqrt{n}$, с которым следует положить $\sigma = s = \sqrt{\frac{1}{n} (x_i - \tilde{X})^2}$</p>
Критические точки	<p>Зависят от α. Это:</p> <p>а) границы $\pm t_{\text{двуст.кр}}(\alpha; K_{\text{св}}=n-1)$, разделяющие критические области принятия H_0, определяются по таблице распределения Стьюдента</p> <p>б) граница $t_{\text{кр}}^{\text{прав}}(\alpha; K_{\text{св}})$, разделяющая правостороннюю критическую область от области принятия H_0</p> <p>в) граница $t_{\text{кр}}(\alpha; K_{\text{св}})$, разделяющая левостороннюю критическую область и область принятия H_0, определяется сначала $t_{\text{кр}}^{\text{прав}}(\alpha; K_{\text{св}})$ и затем полагается $t_{\text{кр}}^{\text{лев}} = -t_{\text{кр}}^{\text{прав}}$</p>
Правило принятия решения	<p>H_0 отклоняется:</p> <p>а) если $t_{\text{набл}} \geq t_{\text{двуст.кр}}$</p> <p>б) если $t_{\text{набл}} \geq t_{\text{кр}}^{\text{прав}}$</p> <p>в) если $t_{\text{набл}} \leq -t_{\text{кр}}^{\text{прав}}$</p>

3.6.3 Гипотезы о генеральных дисперсиях нормально распределенных генеральных совокупностей

Пусть из генеральной совокупности, значения признака которой распределены по нормальному закону с неизвестной дисперсией, извлечена выборка объема n и вычислена исправленная выборочная дисперсия s^2 .

Требуется на уровне значимости α проверить гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$.

Так как s^2 является несмещенной оценкой генеральной дисперсии σ^2 , то нулевую гипотезу H_0 можно записать следующим образом:

$$H_0 : M(s^2) = \sigma_0^2.$$

Для проверки нулевой гипотезы используют выборочную характеристику $\frac{n \cdot S^2}{\sigma_0^2}$. Можно доказать, что при выполнении нулевой гипотезы H_0 она имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

Итак, критерий проверки нулевой гипотезы $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0^2} \approx \chi_{H_0}^2 (K_{CB} = n-1).$$

Критическая область строится в зависимости от вида альтернативной гипотезы H_1 (рисунки 3.4 – 3.6).

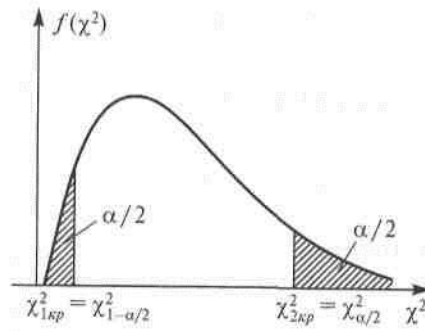


Рисунок 3.4 – Проверка гипотезы $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ по распределению χ^2 для двусторонней критической области

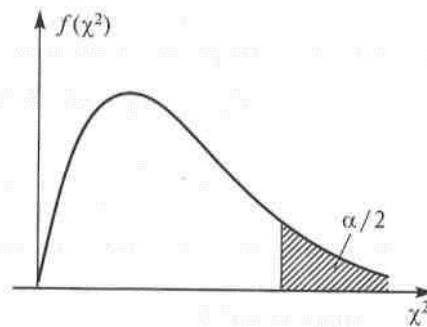


Рисунок 3.5 – Проверка гипотезы $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ по распределению χ^2 для правосторонней критической области

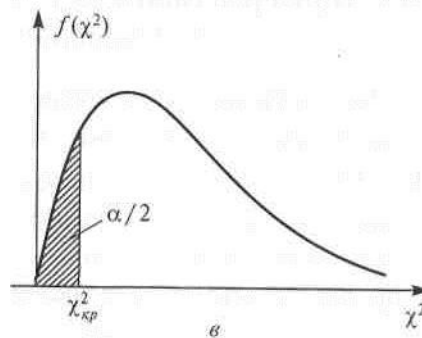


Рисунок 3.6 – Проверка гипотезы $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ по распределению χ^2 для левосторонней критической области

Правила построения критических областей для критерия χ^2 можно записать в таблице 3.3.

Таблица 3.3 - Алгоритм проверки гипотезы о числовом значении дисперсии генеральной совокупности

Нуль-гипотеза	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
Альтернативная гипотеза	а) $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$; б) $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$; в) $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.
Уровень значимости	$\alpha=0,05$ или $\alpha=0,01$
Критерий	$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0^2}$ Замечание: если найдена выборочная дисперсия $\sigma_{\text{выб}}^2$, то в качестве критерия принимают $\chi^2 = \frac{n \cdot \sigma_{\text{выб}}^2}{\sigma_0^2}$ или находят $s^2 = \frac{n \cdot \sigma_{\text{выб}}^2}{n-1}$
Критические точки	Зависят от α . Это: а) границы $\chi_{1\text{кр}; 1-\alpha/2}^2$ и $\chi_{2\text{кр}; \alpha/2}^2$, разделяющие критические области принятия H_0 , определяются по таблице б) граница $\chi_{\text{кр}(\alpha; K_{\text{св}}=n-1)}^2$ в) граница $\chi_{\text{кр}(1-\alpha; K_{\text{св}}=n-1)}^2$
Правило принятия решения	H_0 отклоняется, если : а) $\chi_{\text{набл}}^2 \leq \chi_{1\text{кр}}^2$ или $\chi_{\text{набл}}^2 \geq \chi_{2\text{кр}}^2$ б) $\chi_{\text{набл}}^2 \geq \chi_{\text{кр}(\alpha; K_{\text{св}}=n-1)}^2$ в) $\chi_{\text{набл}}^2 \leq \chi_{\text{кр}(1-\alpha; K_{\text{св}}=n-1)}^2$

3.6.4 Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий нормально распределенных генеральных совокупностей

Рассмотрим две генеральные совокупности X_1 и X_2 , распределенные нормально, т.е. $X_1 \rightarrow N(a_1; \sigma_1^2)$ и $X_2 \rightarrow N(a_2; \sigma_2^2)$.

Из них извлекаются две независимые случайные выборки с объемами n_1 и n_2 и находятся исправленные выборочные дисперсии $s_1^2 = \sigma_{1\text{выб}}^2 \frac{n_1}{n_1-1}$ и $s_2^2 = \sigma_{2\text{выб}}^2 \frac{n_2}{n_2-1}$.

Требуется проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. В качестве критерия проверки этой гипотезы применяется статистика

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2},$$

которая при условии справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Фишера–Снедекора со степенями свободы $K_1 = n_1 - 1$ и $K_2 = n_2 - 1$.

Предполагается, что $s_1^2 > s_2^2$.

Алгоритм построения критических областей запишем в виде таблица 3.4.

Таблица 3.4 - Алгоритм проверки гипотезы о равенстве двух дисперсий генеральных совокупностей

Нуль-гипотеза	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
Альтернативная гипотеза	а) $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$; б) $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$;
Уровень значимости	$\alpha=0,05$ или $\alpha=0,01$
Критерий	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2},$ где s_1^2 и s_2^2 - исправленные выборочные дисперсии и $s_1^2 > s_2^2$
Критические точки	Зависят от α . Это: а) граница $\chi_{кр(\alpha; K_1; K_2)}^{прав}$, разделяющая правостороннюю критическую область принятия H_0 , определяется по таблице распределения Фишера-Снедекора б) граница $\chi_{2кр(\alpha/2; K_1; K_2)}^{прав}$ находится по таблице распределения Фишера-Снедекора, а граница $\chi_{1кр}^{прав}$ находится как правосторонняя по уровню значимости $\alpha/2$
Правило принятия решения	H_0 отклоняется, если : а) $F_{набл} \geq F_{кр(\alpha; K_1; K_2)}$ б) $F_{набл} \geq F_{кр(\alpha/2; K_1; K_2)}$

3.6.5 Проверка гипотезы об однородности ряда дисперсий

При сравнении более двух генеральных дисперсий применяют два наиболее часто употребляемых критерия: критерий Бартлета и критерий Кохрана.

Критерий Бартлета применяется при проверке гипотезы $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_l^2$ по выборкам разного объема $n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_l$.

В качестве выборочной характеристики Барлет предложил использовать статистику

$$U_H^2 = \frac{\nu \ln S_{cp}^2 - \sum_{i=1}^l \nu_i \ln S_i^2}{1 - \frac{1}{3(l-1)} \left[\sum_{i=1}^l \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{\nu} \right]},$$

где $\nu_i = n_i - 1$ - число степеней свободы i -й выборки;

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 - \text{исправленная дисперсия } i\text{-й выборки};$$

x_{ij} - результат j -го наблюдения в i -й выборке;

\bar{x}_i - средняя арифметическая i -й выборки;

l - число выборок;

$\nu = \sum_{i=1}^l \nu_i$ - сумма чисел степеней свободы l выборок;

$$S_{cp}^2 = \frac{\sum_{i=1}^l S_i^2 \cdot \nu_i}{\sum_{i=1}^l \nu_i} - \text{среднее значение исправленной дисперсии по всем } l \text{ выборкам.}$$

При выполнении нулевой гипотезы и при $\nu_i > 3$ статистика U_H^2 приближенно имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы $\nu = l - 1$.

Для проверки нулевой гипотезы строят правостороннюю критическую область, границы которой $\chi_{кр}^2$ определяют по таблице χ^2 -распределения из условия

$$P[U_H^2 > \chi_{кр}^2(\alpha, l-1)] = \alpha.$$

Критерий Бартлета весьма чувствителен к отклонениям законов распределения случайных величин X_i от нормального закона распределения.

Критерий Кохрана применяется при проверке гипотезы $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_l^2$ по выборкам одинакового объема n , взятым соответственно из нормальных генеральных совокупностей.

Для проверки нулевой гипотезы Кохран предложил критерий, основанный на статистике

$$G_H = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^l S_i^2},$$

которая при выполнении нулевой гипотезы имеет G-распределение с числом степеней свободы $\nu = l - 1$ и числом сравниваемых совокупностей l , где \hat{S}_{\max}^2 - наибольшая из исправленных выборочных дисперсий.

Для проверки нулевой гипотезы также строят правостороннюю критическую область, границу которой $G_{кр}$ определяют по таблице G-распределения из условия

$$P[G_H > G_{кр}(\alpha, n-1; l)] = \alpha.$$

Правила проверки гипотезы заключаются в следующем:

- 1) если $G_H \leq G_{кр}$, то нулевая гипотеза не отвергается;
- 2) если $G_H > G_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

3.6.6 Гипотеза об однородности ряда вероятностей

Пусть X_1, X_2, \dots, X_l - l генеральных совокупностей, каждая из которых характеризуется неизвестным параметром P_i , где P_i - вероятность появления события А в соответствующей выборке.

Требуется по результатам выборочных наблюдений проверить Нулевую гипотезу о равенстве вероятностей появления события А в генеральных совокупностях, т.е. $H_0 : p_1 = p_2 = \dots = p_l$.

Для проверки гипотезы используется статистика

$$U_H^2 = \frac{1}{\tilde{p}(1-\tilde{p})} \sum_{i=1}^l (\tilde{p}_i - \tilde{p})^2 n_i,$$

где $\tilde{p}_i = \frac{m_i}{n_i}$ - частость появления события А в i -й выборке;

m_i - частота появления события А в i -й выборке;

n_i - объем i -й выборки;

l - число выборок;

$\tilde{p} = \frac{\sum m_i}{\sum n_i}$ - частость появления события А во всех выборках.

Статистика U_H^2 при выполнении нулевой гипотезы имеет асимптотическое χ^2 -распределение с $\nu = l - 1$ степенями свободы.

Для проверки нулевой гипотезы строят правостороннюю критическую область, границу которой определяют из условия

$$P[U_H^2 > \chi_{кр}^2(\alpha, l-1)] = \alpha.$$

Правила проверки гипотезы заключаются в следующем:

- 1) если $U_H^2 \leq \chi_{кр}^2$, то гипотеза не отвергается;
- 2) если $U_H^2 > \chi_{кр}^2$, то нулевая гипотеза отвергается.

При решении задач проверки статистических гипотез необходимо в первую очередь уяснить содержание проверяемой H_0 и конкурирующей H_1 гипотез, так как от этого зависит выбор алгоритма (формулы) для вычисления наблюдаемого значения критерия. От содержания конкурирующей гипотезы зависит также выбор вида критической области.

3.6.7 Вычисление мощности критерия

Мощность критерия $(1 - \beta)$ может быть вычислена только при проверке простых статистических гипотез: гипотезы о значении генеральной средней $H_0 : \mu = \mu_0$ и гипотезы о значении генеральной дисперсии $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ и только при односторонней критической области.

Мощность критерия при проверке гипотезы о значении генеральной средней

Если известна генеральная дисперсия σ^2 , то при проверке гипотезы $H_0 : \mu = \mu_0$ используется нормальное распределение. Для вычисления мощности критерия при односторонней конкурирующей гипотезе применяется формула

$$1 - \beta = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{|\mu_0 - \mu_1|}{\sigma} \sqrt{n} - t_{кр} \right) \right],$$

где $t_{кр} = \Phi^{-1}(1 - 2\alpha)$, т.е. $t_{кр}$ определяется по таблице функции Лапласа $\Phi(x)$ по вероятности $(1 - 2\alpha)$.

Если генеральная дисперсия неизвестна, то мощность критерия определяется по формулам:

$$1 - \beta = 1 - \frac{1}{2} St \left(\frac{|\mu_1 - \mu_0|}{S} \sqrt{n-1} - t_{кр}; n-1 \right),$$

$$t_{кр} = St^{-1}(2\alpha; n-1)$$

т.е. $t_{кр}$ определяется по таблице распределения Стьюдента по вероятности 2α и $\nu = n - 1$.

Мощность критерия при проверке гипотезы о значении генеральной дисперсии

При проверке гипотезы $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, мощность критерия вычисляется с использованием распределения Пирсона χ^2 .

Если $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_0^2$, то мощность критерия вычисляется по формуле

$$1 - \beta = P[U_H^2 < \chi_{кр}^2(1 - \alpha, n - 1) / H_1] = 1 - P\left[U_H^2 > \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi_{кр}^2(1 - \alpha, n - 1)\right].$$

Если $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_0^2$, то мощность критерия вычисляется по формуле

$$1 - \beta = P[U_H^2 > \chi_{кр}^2(\alpha, n - 1) / H_1] = P\left[U_H^2 > \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi_{кр}^2(\alpha, n - 1)\right].$$

3.6.8 Гипотезы о виде законов распределения генеральной совокупности

Проверка гипотез о виде законов распределения генеральной совокупности осуществляется с помощью критериев согласия.

Проверяемая (нулевая) гипотеза утверждает, что полученная выборка взята из генеральной совокупности, значения признака в которой распределены по предлагаемому теоретическому закону (нормальному, биномиальному или другому) с параметрами, либо оцениваемыми по выборке, либо заранее известными.

Математически нулевую гипотезу можно записать в следующем виде:

$$H_0 : \frac{m_1}{n_1} = p_1, \frac{m_2}{n_2} = p_2, \dots, \frac{m_l}{n_l} = p_l,$$

где $\frac{m_i}{n_i} = \tilde{p}_i$, - относительная частота (частость, доля) i -го интервала вариационного

ряда, или i -го варианта, принимаемого случайной величиной X ;

p_i - вероятность попадания случайной величины в i -й интервал, или вероятность того, что дискретная случайная величина примет i -е значение ($X = x_i$);

$i = \overline{1, l}$ - номер интервала или значения случайной величины;

n - объем выборки.

Критерий состоит в том, что выбранная некоторая случайная величина Y является мерой расхождения (рассогласования) между вариационным рядом и предполагаемым теоретическим распределением. При проверке нулевой гипотезы

заранее задается уровень значимости α ($\alpha = 0,1; 0,05; 0,01; 0,001$). Затем на основании закона распределения случайной величины находится такое значение $Y_{кр}$, что

$$P(Y > Y_{кр}) = \alpha.$$

Критическое значение $Y_{кр}$ обычно находят по таблице соответствующей функции распределения. Далее вычисляется на основании выборки наблюдаемое значение статистики критерия Y_H . Наконец, сравниваются два значения: Y_H и $Y_{кр}$. Если ($Y_H > Y_{кр}$), то нулевая гипотеза отвергается. Если ($Y_H \leq Y_{кр}$), то нулевая гипотеза не отвергается, т.е. в этом случае отклонения от предполагаемого теоретического закона считаются незначимыми - данные наблюдений не противоречат гипотезе о виде закона распределения.

Можно осуществлять проверку гипотезы о виде закона распределения в другом порядке: по наблюдаемому значению критерия Y_H определить, пользуясь соответствующей таблицей, $\alpha_H = P(Y > Y_H)$. Если $\alpha_H \leq \alpha$, то отклонения значимы и гипотеза отвергается; если же $\alpha_H > \alpha$, то гипотеза не отвергается.

Критерий Пирсона

Критерий Пирсона, или критерий χ^2 (хи-квадрат), имеет наибольшее применение при проверке согласования теоретической и эмпирических кривых распределения. Наблюдаемое значение критерия ($Y = \chi_H^2$) вычисляется по следующей формуле:

$$\chi_H^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(m_{Эi} - m_{Ti})^2}{m_{Ti}},$$

где $m_{Эi}$ - эмпирическая частота i -го интервала (варианта);

m_{Ti} - теоретическая частота i -го интервала (варианта);

l - число интервалов (вариантов).

Как известно χ^2 -распределение зависит от числа степеней свободы, это число находится по формуле

$$\nu = l - r - 1,$$

где r - число параметров предполагаемого теоретического закона, использованных для вычисления теоретических частот и оцениваемых по выборке.

По теоретическим соображениям при расчете χ^2_H не следует исходить из слишком малых значений m_{Ti} . Поэтому рекомендуется объединять соседние интервалы (варианты) таким образом, чтобы $m_{Ti} > (5 \div 10)$ для объединенных интервалов. Кроме того, объем выборки должен быть достаточно велик ($n \geq 50$) и $\sum m_{Ti} = \sum mi$.

В случае нормального закона распределения расчет теоретической кривой распределения $\varphi(x)$ производится при условии, что статистические характеристики $(\bar{x}; S)$ приравниваем числовым характеристикам нормального закона $(\mu; \sigma)$, поэтому $r = 2$ и число степеней свободы $\nu = l - 3$.

Вероятности попадания случайной величины X в соответствующие интервалы вычисляются по интегральной теореме Лапласа

$$p_i = P(a_i < x < b_i) = \frac{1}{2} [(\Phi t_{2i}) - \Phi(t_{1i})],$$

где $t_{1i} = \frac{a_i - \bar{x}}{S}$ и $t_{2i} = \frac{b_i - \bar{x}}{S}$

В случае биномиального закона распределения расчет теоретической кривой распределения производится при условии, что статистическая доля (частость) приравнивается вероятности p появления интересующего нас события A , поэтому $r = 1$ и число степеней свободы $\nu = l - 2$.

Вероятность p_i того, что случайная величина X принимает значение $x_i = m$, где $m = \overline{0, n}$, определяется по формуле Бернулли

$$p_i = P(X = x_i) = P(X = m) = C_n^m \overline{\omega}^m (1 - \overline{\omega})^{n-m}$$

где $\overline{\omega} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{k \cdot n}$ - средняя частота появления события во всех k выборках;

n - число испытаний в каждой выборке.

В случае закона Пуассона расчет теоретической кривой распределения производится при условии, что средняя интенсивность $\overline{\lambda}$ приравнивается математическому ожиданию $M(x)$, поэтому $r = 1$ и $\nu = l - 2$.

Вероятность p_i того, что случайная величина X принимает значение $x_i = m$, определяется по формуле Пуассона

$$p_i = P(X = x_i) = P(X = m) = \frac{\overline{\lambda}^m}{m!} e^{-\overline{\lambda}}$$

где $\overline{\lambda} = \frac{\sum_{i=0}^k m_i x_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$ - средняя интенсивность;

m_i - частота появления значения x_i , $i=1, 2, \dots, k$.

При проверке гипотез о виде законов распределения могут быть использованы и другие критерии согласия: Колмогорова, Романовского, Ястремского и др.

3.7 Вопросы для самоконтроля к разделу 3

1 В чем преимущества выборочного метода в сравнении с другими видами статистического наблюдения?

2 Что означает ошибка репрезентативности, какие факторы определяют ее величину?

- 3 От чего зависит точность оценки параметров генеральной совокупности?
- 4 Запишите доверительные интервалы генеральной средней с вероятностью 0,95 и 0,99.
- 5 Как определяется предельная ошибка для проведения большой и малой выборок?
- 6 Какой вид выборочного наблюдения следует использовать, если генеральная совокупность не является однородной?
- 7 В чем состоят преимущества серийной выборки перед простой случайной выборкой?
- 8 В чем преимущества механической выборки и как определяется величина ее стандартной ошибки?
- 9 Назовите важнейшие области применения выборочного метода в практике государственной статистики.
- 10 Точечные оценки параметров распределений. Основные свойства точечной оценки.
- 11 Методы построения точечных оценок.
- 12 Интервальные оценки для генеральной средней.
- 13 Интервальные оценки для генеральной дисперсии и среднего квадратического отклонения.
- 14 Интервальные оценки для генеральной доли.
- 15 Понятие статистической гипотезы. Виды гипотез. Ошибки первого и второго рода.
- 16 Проверка гипотезы о значении генеральной средней при известной дисперсии.
- 17 Проверка гипотезы о значении генеральной средней при неизвестной дисперсии.
- 18 Проверка гипотезы о равенстве генеральных средних двух генеральных совокупностей (об однородности средних).

19 Проверка гипотезы о равенстве дисперсий генеральных совокупностей (однородности ряда дисперсий).

20 Критерии согласия.

3.8 Задания к разделу 3

3.1 По выборочным данным полученных в разделе 1 вычислить точечные и интервальные оценки числовых характеристик положения, вариации и формы генеральной совокупности (среднюю арифметическую, ошибку среднего, характеризующую точность вычисленного среднего значения), оценку дисперсии, оценку среднего квадратического отклонения, ошибку среднего квадратического отклонения (характеристика точности найденного значения), оценки асимметрии и эксцесса, доверительные интервалы для генеральной средней и дисперсии и др. Проанализировать полученные результаты. Сделать выводы о распределении генеральной совокупности.

3.2 На основе полученных точечных оценок в п.3.1 построить их интервальные оценки.

3.3 Провести проверку возможных статистических гипотез вычисленных числовых значений в п.3.1 генеральной совокупности.

При решении задач по данному разделу следует обратить внимание на тот факт, что оценка неизвестного параметра генеральной совокупности может быть задана одним числом (точечная оценка) или парой чисел, интервалом (интервальная оценка, доверительный интервал). Для нахождения интервальной оценки генеральной доли при достаточно большом объеме выборки обычно используют нормальный закон распределения. При небольших объемах выборки и при неизвестной генеральной дисперсии для нахождения интервальной оценки генерального среднего нормально распределенной совокупности используется распределение Стьюдента. При известной генеральной дисперсии (при любом объеме выборки) нормально распределенной совокупности для нахождения

интервальной оценки генеральной средней используется нормальный закон распределения вероятностей.

При изучении вариационных рядов следует обратить внимание на построение рядов распределения наблюдений; на вычисление статистических характеристик, применение условных моментов для упрощенного вычисления средней арифметической, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса; на свойства арифметической и выборочной дисперсии.

3.9 Тесты для самоконтроля к разделу 3

1. Часть объектов, которая отобрана для непосредственного изучения из генеральной совокупности, называется:

- а) выборкой;
- б) вариацией;
- в) корреляцией.

2. Отметьте правильное определение выборочного наблюдения:

а) наблюдение, при котором характеристика всей совокупности единиц дается по некоторой их части, отобранной в случайном порядке;

б) наблюдения, которые проводятся не постоянно, а через определенные промежутки времени, либо одновременно;

в) наблюдение, которое проводят систематически, постоянно охватывая факты по мере их возникновения.

3. Неточности, возникающие вследствие нарушения принципов проведения выборочного наблюдения – это:

- а) случайные ошибки репрезентативности;
- б) систематические ошибки репрезентативности;
- в) преднамеренные ошибки репрезентативности;
- г) непреднамеренные ошибки репрезентативности.

д) логические ошибки.

4. Возможное отклонение показателей выборочной совокупности от показателей генеральной совокупности измеряют:

а) средним квадратическим отклонением;

б) дисперсией;

в) ошибкой выборки.

5. В микрорайоне проживает 5000 семей. Требуется определить минимальный объем случайной бесповторной выборки, который позволит с вероятностью 0,954 оценить средний размер семьи с предельной ошибкой средней, равной 0,4 при среднем квадратическом отклонении 2 чел., найденном по данным предварительного обследования.

а) 95;

б) 100;

в) 98;

г) 105.

6. Часть единиц совокупности, которая подвергается выборочному обследованию, называют:

а) выборочной совокупностью;

б) генеральной совокупностью;

в) случайной совокупностью.

7. Погрешности, возникающие вследствие того, что выборочная совокупность не воспроизводит в точности размеры показателей генеральной совокупности – это:

а) ошибки репрезентативности;

б) ошибки регистрации;

в) арифметические ошибки;

8. Случайный отбор из генеральной совокупности равновеликих групп

(гнезд) является выборкой:

а) случайной;

б) типической;

в) серийной.

9. Средняя ошибка типической выборки при бесповторном способе отбора

рассчитывается по формуле:

$$\text{а) } \mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

$$\text{б) } \mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \cdot \left(1 + \frac{n}{N}\right)}$$

$$\text{в) } \mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \cdot \left(1 - \frac{N}{n}\right)}$$

10. Предельная ошибка выборки 3 %. Дисперсия – 25. Определить

численность выборки при вероятности 0,997.

а) 25 единиц;

б) 56 единиц;

в) 75 единиц.

11. Расхождение между значениями изучаемого признака выборочной и генеральных совокупностей является:

а) ошибкой наблюдения;

б) ошибкой регистрации;

в) ошибкой репрезентативности.

12. По степени охвата единиц совокупности перепись населения страны является наблюдением:

- а) сплошным;
- б) выборочным;
- в) монографическим;
- г) основного массива.

13. Чему равна нижняя граница доверительного интервала для генеральной дисперсии, если объем выборки меньше 30?

а) $\bar{X} - t_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$

б) $\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{\alpha}}$

в) $\bar{X} - t_{\gamma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

г) $\frac{m}{n} - t_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{n} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n}}$

14. Чему равна верхняя граница доверительного интервала для генерального среднего квадратического отклонения, если объем выборки составляет более 30 единиц?

а) $\bar{X} - t_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$

б) $\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{\alpha}}$

в) $\bar{X} - t_{\gamma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

г) $\frac{S \cdot \sqrt{2 \cdot n}}{\sqrt{2 \cdot n - 3 - t_{\gamma}}}$

15. Чему равна нижняя граница интервальной оценки математического ожидания при известной генеральной дисперсии?

а) $\bar{X} - t_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$

б) $\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{\alpha}}$

в) $\bar{X} - t_{\gamma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

г) $\delta = t_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{n} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n}}$

16. Чему равна нижняя граница доверительного интервала для математического ожидания при неизвестной дисперсии?

а) $\bar{X} - t_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$

б) $\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{\alpha}}$

в) $\bar{X} - t_{\gamma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

г) $\delta = t_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{n} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n}}$

17. Чему равна нижняя граница доверительного интервала для генеральной доли?

а) $\bar{X} - t_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$

б) $\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{\alpha}}$

в) $\bar{X} - t_{\gamma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\Gamma) \frac{m}{n} - t_\gamma \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{n} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n}}$$

18. Чему равна точность оценки генеральной доли?

$$\text{a) } \delta = \frac{n \cdot S}{\sigma^2}$$

$$\text{б) } \delta = t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{в) } \delta = t_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

$$\Gamma) \delta = t_\gamma \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{n} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n}}$$

19. Какая статистика используется для получения интервальной оценки генеральной дисперсии, если объем выборки составляет менее 30 единиц?

$$\text{a) } t = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\text{б) } t = \frac{\bar{x} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n}$$

$$\text{в) } t = \frac{\bar{x} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n-1}$$

$$\Gamma) U^2 = \frac{n \cdot S^2}{\sigma^2}$$

20. Чему равна точность оценки математического ожидания при известной генеральной дисперсии?

$$\text{a) } \delta = \frac{n \cdot S}{\sigma^2}$$

$$\text{б) } \delta = t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$в) \delta = t_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

$$г) \delta = t_y \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{n} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n}}$$

21. Какая статистика используется для получения интервальной оценки математического ожидания при известной генеральной дисперсии?

$$а) t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$б) t = \frac{\bar{x} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n-1}$$

$$в) t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

$$г) U^2 = \frac{n \cdot S^2}{\sigma^2}$$

22. Какой вид распределения используется при нахождении интервальной оценки генеральной доли?

а) Стьюдента

б) Нормальное

в) Пирсона

г) Фишера-Снедекора

23. Какая статистика используется для получения интервальной оценки математического ожидания при неизвестной генеральной дисперсии?

$$а) t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$б) t = \frac{\bar{x} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n-1}$$

$$в) t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

$$\Gamma) U^2 = \frac{n \cdot S^2}{\sigma^2}$$

24. Чему равна точность интервальной оценки математического ожидания при известной генеральной дисперсии?

$$a) \delta = \frac{n \cdot S^2}{\sigma^2}$$

$$б) \delta = t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$в) \delta = t_\gamma \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{n} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n}}$$

4 Планирование эксперимента и дисперсионный анализ

4.1 Классификация экспериментальных исследований

4.2 Основы математического планирования эксперимента.

Дисперсионный анализ

4.1 Классификация экспериментальных исследований

Основной целью эксперимента является проверка теоретических положений (подтверждение рабочей гипотезы), а также более широкое и глубокое изучение темы научного исследования. Различают эксперименты естественные и искусственные.

Естественные эксперименты характерны при изучении социальных явлений (социальный эксперимент) в обстановке, например, производства, быта и т.п.

Искусственные эксперименты широко применяются во многих естественнонаучных исследованиях.

В этом случае изучают явления, изолированные до требуемой степени, чтобы оценить их в количественном и качественном отношениях.

Рассмотрим классификацию экспериментальных исследований.

Примем схему, в которой выделим следующие обобщенные признаки эксперимента:

- структура;
- стадия научных исследований, к которой относится эксперимент;
- организация;
- постановка задачи;
- способ проведения.

По структуре эксперименты делят на натурные, модельные и имитационные (машинные).

В натурном эксперименте средства исследования непосредственно взаимодействуют с объектом исследования.

В модельном - экспериментируют не с объектом, а с его заменителем – моделью.

Имитационное моделирование является разновидностью модельного эксперимента, при котором соответствующие характеристики исследуемого объекта исследуются с помощью разработанных алгоритмов и программ моделирования.

Данный вид эксперимента отличается универсальностью и обладает широкой областью применения.

По стадии научных исследований эксперименты делятся на лабораторные, стендовые и промышленные.

Лабораторные эксперименты служат для изучения общих закономерностей различных явлений и процессов, для проверки научных гипотез и теорий.

Стендовые испытания проводят при необходимости изучить вполне конкретный процесс, протекающий в исследуемом объекте с определенными физическими, химическими и др. свойствами.

По результатам стендовых испытаний судят о различных недоработках при создании нового объекта, а также вырабатывают рекомендации относительно серийного выпуска изделий и условий его эксплуатации.

Промышленный эксперимент проводят при создании нового изделия или процесса по данным лабораторных и стендовых испытаний, при оптимизации существующего процесса, при проведении контрольно-выборочных испытаний качества выпускаемой продукции.

Лабораторные и стендовые опыты проводят с применением типовых приборов, специальных моделирующих установок, стендов, оборудования и т.д.

На основе предварительного эксперимента строится программа исследований в полном объеме.

С точки зрения организации эксперимента можно выделить:

- обычные (рутинные) эксперименты,
- специальные (технические),
- уникальные,
- смешанные.

Обычные эксперименты, как правило, проводятся в лабораториях по несложным методикам с применением сравнительно простого экспериментального оборудования и сопряжены с однообразными измерениями и вычислениями.

Специальные эксперименты связаны с созданием и исследованием различных приборов и аппаратов (средства автоматизации, элементы, узлы контрольно-измерительных систем).

Уникальные эксперименты проводятся на сложном экспериментальном оборудовании (типа ядерного реактора, новые виды судов, самолетов, автомобилей, исследования космоса). Они характеризуются большими объемами экспериментальных данных, высокой скоростью протекания исследуемых процессов, широким диапазоном изменения характеристик исследуемого процесса.

Смешанные эксперименты содержат совокупность разнотипных экспериментов, объединенных единой программой исследования и связанных друг с другом результатами исследований.

Теория эксперимента включает три основных направления:

Первое – подобие и моделирование. Отвечает на вопросы, какие величины следует измерять во время эксперимента и в каком виде обрабатывать результаты,

чтобы выводы оказались справедливыми не для данного частного случая, но и для группы объектов или явлений.

Второе – математическое планирование эксперимента. Включает совокупность процедур для построения искомых зависимостей с минимальными затратами.

Третье – статистическая обработка данных эксперимента. Позволяет на основе данных, имеющих погрешности получить достоверные результаты.

Каждое из направлений является отдельной достаточно обширной, развивающейся областью знаний с фундаментальными исследованиями.

4.2 Основы математического планирования эксперимента.

Дисперсионный анализ

Среди основных методов планирования, применяемых на разных этапах исследования, используют:

- планирование отсеивающего эксперимента, основное значение которого выделение из всей совокупности факторов группы существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению;
- планирование эксперимента для дисперсионного анализа, т.е. составление планов для объектов с качественными факторами;
- планирование регрессионного эксперимента, позволяющего получать регрессионные модели (полиномиальные и иные);
- планирование экстремального эксперимента, в котором главная задача – экспериментальная оптимизация объекта исследования;
- планирование при изучении динамических процессов и т.д.

Дисперсионный анализ (от латинского Dispersio - рассеивание) - статистический метод, позволяющий анализировать влияние различных факторов на исследуемую переменную.

Говорят, что техника дисперсионного анализа является "робастной". Этот термин, используемый статистиками, означает, что данные допущения могут быть в некоторой степени нарушены, но несмотря на это, технику можно использовать.

При неизвестном законе распределения величин отклика используют непараметрические (чаще всего ранговые) методы анализа.

В основе дисперсионного анализа лежит разделение дисперсии на части или компоненты.

Выделяют дисперсию общую, межгрупповую и внутригрупповую.

Общая дисперсия измеряет вариацию признака во всей совокупности под влиянием всех факторов, обусловивших эту вариацию:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_0)^2 * f_i}{\sum f_i},$$

где \bar{x}_0 - общая средняя для всей изучаемой совокупности.

Межгрупповая дисперсия характеризует различия в величине изучаемого признака, возникающее под влиянием признака-фактора, положенного в основании группировки. Она рассчитывается по формуле:

$$\delta^2 = \frac{\sum (\bar{x}_i - \bar{x}_0)^2 * f_i}{\sum f_i}$$

где \bar{x}_i - средняя величина по отдельной группе;

f_i - численность признака по отдельной группе.

Средняя из внутригрупповых дисперсий характеризует случайную вариацию в каждой отдельной группе. Эта вариация возникает под влиянием не учитываемых факторов и не зависит от условия, положенного в основу группировки. Определяется по формуле:

$$\overline{\sigma_i^2} = \frac{\sum \sigma_i^2 * f_i}{\sum f_i}$$

Существует закон, связывающий 3 вида дисперсий, который называется правилом сложения дисперсий:

$$\sigma^2 = \overline{\sigma_i^2} + \delta^2.$$

Однофакторный дисперсионный анализ

Суть однофакторного дисперсионного анализа состоит в следующем.

Пусть x_{ik} обозначает i -й элемент k -й выборки $i = 1, 2, \dots, n_k$; $k = 1, 2, \dots, l$;

\bar{x}_k - выборочное среднее k -й выборки $\bar{x}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_k} x_{ik}$,

\bar{x} - общее выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^{n_k} x_{ik}$,

n - общее число наблюдений, $n = \sum_{k=1}^l n_k$.

Сумма квадратов отклонений наблюдений x_{ik} от общего среднего \bar{x} может быть представлена так:

$$\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ik} - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^l n_k (\bar{x}_k - \bar{x})^2 + \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ik} - \bar{x}_k)^2.$$

Это основное тождество дисперсионного анализ, запишем его в виде

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

где Q - сумма квадратов отклонений наблюдений от общего среднего;

Q_1 - сумма квадратов отклонений выборочных средних групп от общего среднего (между группами);

Q_2 - сумма квадратов отклонений наблюдений от выборочных средних групп (внутри групп).

Если верна гипотеза H_0 о равенстве средних, то можно показать, что статистики Q_1/D и Q_2/D независимы и имеют распределение χ^2 соответственно с $l-1$ и $n-l$ степенями свободы. Следовательно, статистики

$$S_1^2 = \frac{Q_1}{l-1} \text{ и } S_2^2 = \frac{Q_2}{n-l}$$

являются несмещенными оценками неизвестной дисперсии ошибок наблюдений D . Оценка S_1^2 характеризует рассеяние групповых средних, а оценка S_2^2 - рассеяние внутри групп, которое обусловлено случайными вариациями результатов наблюдений. Значительное превышение величины S_1^2 над значением величины S_2^2 можно объяснить различием средних в группах. Отношение этих оценок при условии, что верна гипотеза H_0 , имеет распределение Фишера с $l-1$ и $n-l$ степенями свободы.

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{Q_1 / (l-1)}{Q_2 / (n-l)} = F(l-1, n-l).$$

Эта статистика используется для проверки гипотезы H_0 о равенстве средних. Гипотеза не противоречит результатам наблюдений, если выборочное значение F_B статистики F меньше квантили распределения Фишера $F_{1-\alpha}(l-1, n-l)$. Если F_B больше $F_{1-\alpha}(l-1, n-l)$, то гипотеза H_0 отклоняется и следует считать, что среди средних m_1, m_2, \dots, m_l имеется хотя бы два неравных друг другу.

В дисперсионном анализе для сравнения нескольких дисперсий существует два критерия:

1 Критерий Бартлетта.

Критерий Бартлетта включает в себя довольно сложные вычисления. Тестовая статистика сравнивается с процентной точкой χ^2 распределения.

Плюсы: нет требования равенства числа степеней свободы дисперсий, критерий выявляет отклонения как в наибольшую, так и в наименьшую стороны

Минусы: сложность вычислений, число степеней свободы любой дисперсии должно быть больше трех, критерий очень чувствителен к нарушению нормального закона распределения исходных данных.

2 Критерий Кохрена.

Проверка однородности дисперсий включает вычисление доли максимальной дисперсии среди всех дисперсий:

$$G = \frac{S_{\max}^2}{\sum_i S_i^2}$$

которая затем сравнивается с критическим значением $G(p, m, f)$,

где f - число степеней свободы каждой дисперсии (должно быть одинаковым у всех дисперсий), m - число дисперсий, p - доверительная вероятность.

Плюсы: простота вычислений

Минусы: ограничение на число степеней свободы дисперсий, критерий выявляет отклонения только в большую сторону.

Сравнивая плюсы и минусы критериев Бартлетта и Кохрена, можно увидеть, что они являются взаимодополняющими и должны использоваться совместно.

4.3 Вопросы для самоконтроля к разделу 4

- 1 Виды экспериментальных исследований
- 2 Понятие планирования эксперимента
- 3 Сущность дисперсионного анализа.
- 4 Задачи, решаемые с его помощью дисперсионного анализа
- 5 Виды дисперсий. Правило сложения дисперсий

6 Суть критерия Бартлетта

7 Суть критерия Кохрена

4.4 Задания к разделу 4

4.1 По данным индивидуального задания проверить:

- нулевую гипотезу об отсутствии влияния фактора (уровней фактора) на результативный признак.

4.2 Если нулевая гипотеза отвергнута:

- проверить гипотезу о равенстве средних двух выбранных уровней;

- проверить гипотезу относительно равенства общей средней заданному номиналу.

4.3 Провести проверку однородности двух дисперсий применяя критерии Бартлетта и Кохрена.

При выполнении заданий по разделу необходимо различать виды дисперсий, уметь применять правило их сложения. При решении задач на проверку однородности двух дисперсий необходимо применять критерии Бартлетта и Кохрена.

5 Теория корреляции и регрессии. Парная корреляция и регрессия

5.1 Задачи и проблемы корреляционного и регрессионного анализа

5.2 Парная линейная регрессионная модель

5.3 Исходные предпосылки регрессионного анализа и свойства оценок

5.4 Нелинейная парная корреляция

5.5 Непараметрические методы обнаружения взаимосвязей

5.1 Задачи и проблемы корреляционного и регрессионного анализа

Исследуя природу, общество, экономику, необходимо считаться со взаимосвязью наблюдаемых процессов и явлений. При этом полнота описания, так или иначе, определяется количественными характеристиками причинно-следственных связей между ними. Оценка наиболее существенных из них, а также воздействия одних факторов на другие является одной из основных задач статистики.

Формы проявления взаимосвязей весьма разнообразны. В качестве двух самых общих их видов выделяют функциональную (полную) и корреляционную (неполную) связи. В первом случае величине факторного признака строго соответствует одно или несколько значений функции. Достаточно часто функциональная связь проявляется в физике, химии.

Корреляционная связь (которую также называют неполной, или статистической) проявляется в среднем, для массовых наблюдений, когда заданным значениям зависимой переменной соответствует некоторый ряд вероятных значений независимой переменной. Объяснение тому – сложность взаимосвязей между анализируемыми факторами, на взаимодействие которых влияют неучтенные случайные величины. Поэтому связь между признаками проявляется лишь в среднем, в массе случаев. При корреляционной связи каждому значению аргумента соответствуют случайно распределенные в некотором интервале значения функции.

По направлению связи бывают прямыми, когда зависимая переменная растет с увеличением факторного признака, и обратными, при которых рост последнего сопровождается уменьшением функции. Такие связи также можно назвать соответственно положительными и отрицательными.

Относительно своей аналитической формы связи бывают линейными и нелинейными. В первом случае между признаками в среднем проявляются линейные соотношения. Нелинейная взаимосвязь выражается нелинейной функцией, а переменные связаны между собой в среднем нелинейно.

Существует еще одна достаточно важная характеристика связей с точки зрения взаимодействующих факторов. Если характеризуется связь двух признаков,

то ее принято называть парной. Если изучаются более чем две переменные – множественной.

Указанные выше классификационные признаки наиболее часто встречаются в статистическом анализе. Но кроме перечисленных различают также непосредственные, косвенные и ложные связи. Собственно, суть каждой из них очевидна из названия. В первом случае факторы взаимодействуют между собой непосредственно. Для косвенной связи характерно участие какой-то третьей переменной, которая опосредует связь между изучаемыми признаками. Ложная связь – это связь, установленная формально и, как правило, подтвержденная только количественными оценками. Она не имеет под собой качественной основы или же бессмысленна.

По силе различаются слабые и сильные связи. Эта формальная характеристика выражается конкретными величинами и интерпретируется в соответствии с общепринятыми критериями силы связи для конкретных показателей.

В наиболее общем виде задача статистики в области изучения взаимосвязей состоит в количественной оценке их наличия и направления, а также характеристике силы и формы влияния одних факторов на другие. Для ее решения применяются две группы методов, одна из которых включает в себя методы корреляционного анализа, а другая – регрессионный анализ. В то же время ряд исследователей объединяет эти методы в корреляционно-регрессионный анализ, что имеет под собой некоторые основания: наличие целого ряда общих вычислительных процедур, взаимодополнения при интерпретации результатов и др.

Поэтому в данном контексте можно говорить о корреляционном анализе в широком смысле – когда всесторонне характеризуется взаимосвязь. В то же время выделяют корреляционный анализ в узком смысле – когда исследуется сила связи – и регрессионный анализ, в ходе которого оцениваются ее форма и воздействие одних факторов на другие.

Задачи собственно корреляционного анализа сводятся к измерению тесноты связи между варьирующими признаками, определению неизвестных причинных

связей и оценке факторов оказывающих наибольшее влияние на результативный признак.

Задачи регрессионного анализа лежат в сфере установления формы зависимости, определения функции регрессии, использования уравнения для оценки неизвестных значениями зависимой переменной.

Решение названных задач опирается на соответствующие приемы, алгоритмы, показатели, применение которых дает основание говорить о статистическом изучении взаимосвязей.

Следует заметить, что традиционные методы корреляции и регрессии широко представлены в разного рода статистических пакетах программ для ЭВМ. Исследователю остается только правильно подготовить информацию, выбрать удовлетворяющий требованиям анализа пакет программ и быть готовым к интерпретации полученных результатов. Алгоритмов вычисления параметров связи существует множество, и в настоящее время вряд ли целесообразно проводить такой сложный вид анализа вручную. Вычислительные процедуры представляют самостоятельный интерес, но знание принципов изучения взаимосвязей, возможностей и ограничений тех или иных методов интерпретации результатов является обязательным условием исследования.

Методы оценки тесноты связи подразделяются на корреляционные (параметрические) и непараметрические. Параметрические методы основаны на использовании, как правило, оценок нормального распределения и применяются в случаях, когда изучаемая совокупность состоит из величин, которые подчиняются закону нормального распределения. На практике это положение чаще всего принимается априори. Собственно, эти методы – параметрические – и принято называть корреляционными.

Непараметрические методы не накладывают ограничений на закон распределения изучаемых величин. Их преимуществом является и простота вычислений.

Для установления наличия корреляционной связи используется ряд специфических методов: параллельное сопоставление рядов результативного и

факторного признака, графическое изображение фактических данных с помощью поля корреляции, построение корреляционной таблицы.

Сопоставление двух параллельных рядов – простейший метод обнаружения связи. Значения факторного признака располагают в возрастающем порядке в первом ряду; во втором ряду записывают соответствующие значения результативного признака (т.е. значения, относящиеся к той же единице); затем прослеживается направление изменения результативного признака.

Корреляционное поле – точечный график, для построения которого по масштабной оси абсцисс откладываются значения факторного признака x , а по масштабной оси ординат – значения результативного признака y . Каждой единице изучаемой совокупности на графике соответствует одна точка, положение которой определяется величиной двух признаков, характеризующих эту единицу. По расположению точек судят о наличии связи или ее отсутствии. Если точки разбросаны по всему полю – связи нет.

В тех случаях, когда количество единиц, входящих в изучаемую совокупность, относительно велико, возникает необходимость сведения данных в особую таблицу, которая называется корреляционной таблицей. Для построения корреляционной таблицы проводится группировка значений факторного и результативного признака при одинаковом числе групп. В таблице факторный признак располагают в строках, а результативный признак – в столбцах таблицы. В клетки, образованные пересечением строк и столбцов таблицы, записываются частоты повторения данного сочетания значений x и y . Если частоты расположены в клетках по диагонали из верхнего угла в первый нижний угол, то можно предполагать о наличии прямой корреляционной зависимости между признаками. Если частоты расположены в клетках по диагонали справа налево, то предполагают наличие обратной связи.

Практически для количественной оценки тесноты связи широко используют линейный коэффициент корреляции. Иногда его называют просто коэффициентом корреляции.

Парные коэффициенты корреляции рассчитываются по формулам:

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{nS_x S_y} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sqrt{(\overline{y^2} - \bar{y}^2)(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}},$$

где \bar{y} и \bar{x} - средние значения;

S_x, S_y - стандартные отклонения соответствующих выборок.

Коэффициент корреляции принимает значения в интервале от -1 до + 1. Принято считать, что если $|r| < 0,30$, то связь слабая; при $|r| = (0,3 \div 0,7)$ – средняя; при $|r| > 0,70$ – сильная, или тесная. Когда $|r| = 1$ – связь функциональная. Если же r принимает значение около 0, то это дает основание говорить об отсутствии линейной связи между y и x . Однако в этом случае возможно нелинейное взаимодействие, что требует дополнительной проверки и других измерителей, рассматриваемых ниже.

Парная корреляция или парная регрессия могут рассматриваться как частный случай отражения связи некоторой зависимой переменной, с одной стороны, и одной из множества независимых переменных – с другой. Когда же требуется охарактеризовать связь всего указанного множества независимых переменных с результативным признаком, говорят о множественной корреляции или множественной регрессии.

Поскольку исходные данные, по которым устанавливается взаимосвязь признаков, являются выборкой из некоей генеральной совокупности, вычисленные по этим данным коэффициенты корреляции будут выборочными, т. е. они лишь оценивают связь. Необходима проверка значимости, которая отвечает на вопрос: случайны или нет полученные результаты расчетов.

Значимость парных коэффициентов корреляции проверяют по t-критерию Стьюдента. Выдвигается гипотеза о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции: $H_0 : \rho = 0$. Затем задаются параметры: уровень значимости α и число степеней свободы $k = n - 2$. Используя эти параметры по таблице критических точек

распределения Стьюдента, находят $t_{кр}$, а по имеющимся данным вычисляют наблюдаемое значение критерия:

$$t_{набл} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2},$$

где r - парный коэффициент корреляции, рассчитанный по отобраным для исследования данным.

Парный коэффициент корреляции считается значимым (гипотеза о равенстве коэффициента нулю отвергается) с доверительной вероятностью $1-\alpha$, если $t_{набл}$ по модулю будет больше, чем $t_{кр}$.

Методы корреляционного и дисперсионного анализа не универсальны: их можно применять, если все изучаемые признаки являются количественными. При использовании этих методов нельзя обойтись без вычисления основных параметров распределения (средних величин, дисперсий), поэтому они получили название параметрических методов.

5.2 Парная линейная регрессионная модель

Для характеристики влияния изменений x на вариацию y служат методы регрессионного анализа. В случае парной линейной зависимости строится регрессионная модель

$$\tilde{y}_x = a + bx.$$

Оценка параметров линейного уравнения регрессии a , b осуществляется методом наименьших квадратов (МНК), при котором минимизируется сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака от теоретических.

В уравнении регрессии параметр a показывает усредненное влияние на результативный признак неучтенных (не выделенных для исследования) факторов; параметр b - коэффициент регрессии показывает, насколько изменяется в среднем значение результативного признака при изменении факторного на единицу его собственного измерения.

Для оценки качества подбора линейной функции рассчитывается квадрат линейного коэффициента корреляции r_{xy}^2 , называемый коэффициентом детерминации. Коэффициент детерминации характеризует долю результативного признака, объясняемую регрессией. Чем больше коэффициент детерминации, тем лучше линейная модель регрессии аппроксимирует исходные данные и ею можно пользоваться для прогноза значений результативного признака.

После того как найдено уравнение линейной регрессии, проводится оценка значимости как уравнения в целом, так и отдельных его параметров.

Проверить значимость уравнения регрессии – значит установить, соответствует ли математическая модель, выражающая зависимость между переменными, экспериментальным данным и достаточно ли включенных в уравнение объясняющих переменных (одной или нескольких) для описания зависимой переменной.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом дается с помощью F-критерия Фишера. При этом выдвигается нулевая гипотеза, что коэффициент регрессии равен нулю, т. е. $b = 0$, и, следовательно, фактор x не оказывает влияния на результат y .

Непосредственному расчету F-критерия предшествует анализ дисперсии. Центральное место в нем занимает разложение общей суммы квадратов отклонений переменной y от среднего значения \bar{y} на две части - «факторную» и «остаточную»:

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\tilde{y}_x - \bar{y})^2 + \sum (y - \tilde{y}_x)^2.$$

Общая сумма квадратов отклонений индивидуальных значений результативного признака y от среднего значения \bar{y} вызвана влиянием множества причин. Условно разделим всю совокупность причин на две группы: изучаемый фактор x и прочие факторы. Если фактор не оказывает влияния на результат, то линия регрессии на графике параллельна оси ox и $\bar{y} = \tilde{y}_x$. Тогда вся дисперсия результативного признака обусловлена воздействием прочих факторов и общая сумма квадратов отклонений совпадет с остаточной. Если же прочие факторы не влияют на результат, то y связан с x функционально и остаточная сумма квадратов равна нулю. В этом случае сумма квадратов отклонений, объясненная регрессией, совпадает с общей суммой квадратов.

Любая сумма квадратов отклонений связана с числом степеней свободы, т. е. с числом свободы независимого варьирования признака. Число степеней свободы связано с числом единиц совокупности n и с числом определяемых по ней констант.

Существует равенство между числом степеней свободы общей, факторной и остаточной суммами квадратов. Число степеней свободы остаточной суммы квадратов при линейной регрессии составляет $n - 2$. Число степеней свободы для общей суммы квадратов определяется числом единиц, и поскольку мы используем среднюю вычисленную по данным выборки, то теряем одну степень свободы. Итак, имеем два равенства:

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\tilde{y}_x - \bar{y})^2 + \sum (y - \tilde{y}_x)^2,$$

$$n-1=1+(n-2).$$

Разделив каждую сумму квадратов на соответствующее ей число степеней свободы, получим средний квадрат отклонений, или, что то же самое, дисперсию на одну степень свободы D .

$$D_{\text{общ}} = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n - 1}$$

$$D_{\text{факт}} = \frac{\sum (\tilde{y}_x - \bar{y})^2}{1}$$

$$D_{\text{ост}} = \frac{\sum (y - \tilde{y}_x)^2}{n - 2}$$

Сопоставляя факторную и остаточную дисперсии в расчете на одну степень свободы, получим величину F-отношения (F-критерий):

$$F = \frac{D_{\text{факт}}}{D_{\text{ост}}}$$

Данная статистика имеет распределение Фишера-Снедекора. По таблицам распределения находят критическое значение F – критерия Фишера в зависимости от уровня значимости α (обычно его берут равным 0,05) и двух чисел степеней свободы $k_1=1, k_2=n-2$.

Вычисленное значение F-отношения признается достоверным (отличным от единицы), если оно больше табличного. В этом случае нулевая гипотеза об отсутствии связи признаков отклоняется и делается вывод о существенности этой связи.

Если же величина окажется меньше табличной, то вероятность нулевой гипотезы выше заданного уровня (например, 0,05) и она не может быть отклонена без серьезного риска сделать неправильный вывод о наличии связи. В этом случае уравнение регрессии считается статистически незначимым. H_0 не отклоняется.

Величина F-критерия связана с коэффициентом детерминации r^2 . Факторную сумму квадратов отклонений можно представить как

$$\sum (\tilde{y}_x - \bar{y})^2 = r^2 \cdot \sigma_y^2 \cdot n,$$

а остаточную сумму квадратов – как

$$\sum (y - \tilde{y}_x)^2 = (1 - r^2) \cdot \sigma_y^2 \cdot n.$$

Тогда значение F – критерия можно выразить как

$$F = \frac{r^2}{1 - r^2} \cdot (n - 2).$$

С помощью метода наименьших квадратов мы получили только оценки параметров уравнения регрессии. Чтобы проверить, значимы ли эти параметры, используют статистические проверки гипотез.

Оценка существенности сводится к проверке гипотез:

H_0 : - о незначимом отличии от нуля параметра регрессии, т.е. $b=0$

H_1 : - о неравенстве нулю параметра, т.е. $b \neq 0$.

Нас будет интересовать больше всего то, чтобы основная гипотеза была отвергнута. Для проверки этой гипотезы используется t-статистика, которая имеет распределение Стьюдента.

Найденное по данным наблюдений значение t-статистики сравнивается с критическим значением, определяемым по таблицам распределения Стьюдента.

Критическое значение определяется в зависимости от уровня значимости $\alpha=0,05$ и числа степеней свободы, которое равно $(n-2)$.

Если фактическое значение t-статистики, взятое по модулю, больше критического, то основную гипотезу отвергают и считают, что с вероятностью $(1-\alpha)$ параметр регрессии значимо отличается от нуля.

Если фактическое значение t-статистики меньше критического, то нет оснований отвергать основную гипотезу, т.е. параметр регрессии незначимо отличается от нуля при уровне значимости α .

Для оценки существенности коэффициента регрессии его величина сравнивается с его стандартной ошибкой, т.е.

$$t_b = \frac{b}{m_b}.$$

Для линейного парного уравнения регрессии стандартная ошибка коэффициента вычисляется по формуле:

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum (y - \tilde{y}_x)^2}{(n-2) \cdot \sum (x - \bar{x})^2}}.$$

Доверительный интервал для коэффициента регрессии определяется по формуле $b \pm t_{\alpha/2} \cdot m_b$.

Поскольку коэффициент регрессии в эконометрических исследованиях имеет четкую экономическую интерпретацию, то доверительные границы интервала для коэффициента регрессии не должны содержать противоречивых результатов, например, $-10 \leq b \leq 4$. Такого рода запись указывает, что истинное значение коэффициента регрессии одновременно содержит положительные и отрицательные величины и даже ноль, чего не может быть.

Стандартная ошибка параметра a определяется по формуле:

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum (y - \tilde{y}_x)^2 \cdot \sum x^2}{(n-2) \cdot n \sum (x - \bar{x})^2}}.$$

Процедура оценивания существенности данного параметра не отличается от рассмотренной выше для коэффициента регрессии; вычисляется t-критерий: $t_a = \frac{a}{m_a}$, его величина сравнивается с табличным значением при $n-2$ степенях свободы.

5.3 Исходные предпосылки регрессионного анализа и свойства оценок

Применение методов наименьших квадратов для нахождения оценок параметров простой регрессии предполагает выполнение некоторых предпосылок, касающихся прежде всего случайной переменной, учитывающей ошибки измерения и ошибки спецификации. Эти предпосылки не определяются объемом выборки и числом включенных в анализ переменных. При этом предполагается:

1 Истинная форма взаимосвязи между результирующей и объясняющими переменными является линейной.

2 x — неслучайная переменная. Это означает, что мы имеем фиксированный набор значений x .

3 Математическое ожидание регрессионных остатков равно 0.

4 Дисперсия остатков постоянна и конечна для всех значений x

5 Остатки являются статистически независимыми друг от друга

6 Регрессионные остатки и объясняющие переменные независимы друг от друга.

Если выполняются допущения, лежащие в основе классической модели линейной регрессии, то оценки коэффициентов, полученные с помощью МНК, являются BLUE, что означает: В (best) — наилучшая; L (linear) — линейная; U (unbiased) — несмещенная; E (estimator) — оценка.

Наилучшая — оценка, имеющая наименьшую дисперсию из всех возможных несмещенных оценок. Теорема Гаусса—Маркова доказывает, что полученная с помощью МНК оценка является наилучшей: исследуется альтернативная произвольная линейная оценка и показывается, что ее дисперсия в любом случае окажется не меньше, чем дисперсия МНК-оценки.

Линейная — свойство линейной функциональной зависимости оценки от выборочных наблюдений.

Несмещенная — математическое ожидание оценки равно параметру генеральной совокупности.

Альтернативная формулировка желаемых свойств полученных оценок (близкая BLUE) — это требования состоятельности, несмещенности и эффективности оценок.

Рассмотрим формулировку этих свойств.

Состоятельность

Оценка \hat{b} неизвестного параметра b называется состоятельной если по мере роста числа наблюдений n (т. е. при $n \rightarrow \infty$) она стремится по вероятности к оцениваемому значению b , т. е. если для сколь угодно малой $\delta > 0$ $\Pr\{|\hat{b} - b| > \delta\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (если оцениваемый параметр b векторный, то для состоятельности соответствующей оценки \hat{b} требуется состоятельность отдельно всех ее компонент).

В пределе вероятность отклонения оценки от истинного значения параметра равна нулю, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{|\hat{b} - b| > \delta\} = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Таким образом, состоятельность является асимптотическим свойством. Можно доказать, что если выполняются допущения классической модели, то оценки МНК являются состоятельными.

Несмещенность

Оценка \hat{b} неизвестного параметра b называется несмещенной, если при любом объеме выборки n результат ее осреднения по всем возможным выборкам данного объема равен истинному значению оцениваемого параметра (если оцениваемый параметр b векторный, то для несмещенности соответствующей оценки \hat{b} требуется несмещенность отдельно всех ее компонент).

МНК-оценки a и b являются несмещенными, т. е.

$$M(\hat{a}) = a, \quad M(\hat{b}) = b.$$

Ясно, что условие несмещенности более сильное, чем условие состоятельности, т. к. выполняется и для малых, и для больших выборок (в отличие от состоятельности, которая является асимптотическим свойством).

Эффективность

Оценка \hat{b} неизвестного параметра b называется эффективной, если среди всех прочих оценок того же самого параметра она обладает наименьшей дисперсией. То есть если оценка эффективная, то распределение ее значений сосредоточено вокруг истинной величины оцениваемого параметра.

5.4 Нелинейная парная корреляция

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью соответствующих нелинейных функций.

Различают два класса нелинейных регрессий:

- регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам;
- регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Примером нелинейной регрессии по включаемым в нее объясняющим переменным могут служить следующие функции:

- полиномы разных степеней

$$\tilde{y}_x = a + bx + cx^2 + \varepsilon$$

- равносторонняя гиперболола $\tilde{y}_x = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$

К нелинейным регрессиям по оцениваемым параметрам относятся функции:

- степенная - $\tilde{y}_x = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$
- показательная - $\tilde{y}_x = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$
- экспоненциальная - $\tilde{y}_x = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$

Параболическая модель

Нелинейная регрессия по включенным переменным не таит каких-либо сложностей в оценке ее параметров. Она определяется, как и в линейной регрессии, методом наименьших квадратов (МНК), ибо эти функции линейны по параметрам. Так, в параболе второй степени $\tilde{y}_x = a + bx + cx^2 + \varepsilon$ заменяя переменные $x = x_1$, $x^2 = x_2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии: $\tilde{y}_x = a + bx_1 + cx_2 + \varepsilon$.

Применение МНК для оценки параметров параболы второй степени приводит к следующей системе нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum x + c \sum x^2 \\ \sum yx = a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 \\ \sum yx^2 = a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 \end{cases} .$$

Решение ее возможно методом определителей:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta c}{\Delta}$$

где Δ - определитель системы;

Δa , Δb , Δc – частные определители для каждого из параметров.

При $b > 0$ и $c < 0$ кривая симметрична относительно высшей точки, т. е. точки перелома кривой, изменяющей направление связи, а именно рост на падение.

При $b < 0$ и $c > 0$ парабола второго порядка симметрична относительно своей низшей точки, что позволяет определять минимум функции в точке, меняющей направление связи, т. е. снижение на рост.

Парабола второй степени целесообразна к применению, если для определенного интервала значений фактора меняется характер связи рассматриваемых признаков: прямая связь меняется на обратную или обратная на прямую. В этом случае определяется значение фактора, при котором достигается максимальное (или минимальное) значение результативного признака.

Если же исходные данные не обнаруживают изменения направленности связи, то параметры параболы второго порядка становятся трудно интерпретируемыми, а форма связи часто заменяется другими нелинейными моделями.

Ввиду симметричности кривой парабола второй степени далеко не всегда пригодна в конкретных исследованиях. Чаще исследователь имеет дело лишь с отдельными сегментами параболы, а не с полной параболической формой. Кроме того, параметры параболической связи не всегда могут быть логически истолкованы. Поэтому если график зависимости не демонстрирует четко выраженной параболы второго порядка (нет смены направленности связи признаков), то она может быть заменена другой нелинейной функцией, например степенной.

Гиперболическая и обратная модели

Среди класса нелинейных функций, параметры которых без особых затруднений оцениваются МНК, следует назвать хорошо известную в эконометрике равностороннюю гиперболу: $\tilde{y}_x = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$.

Классическим ее примером является кривая Филлипса, характеризующая нелинейное соотношение между нормой безработицы x и процентом прироста заработной платы y . Английский экономист А. В. Филлипс, анализируя данные более чем за 100-летний период, установил обратную зависимость процента прироста заработной платы от уровня безработицы.

Для равносторонней гиперболы вида $\tilde{y}_x = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ заменив $\frac{1}{x}$ на z , получим линейное уравнение регрессии $\tilde{y}_z = a + bz + \varepsilon$, оценка параметров которого может быть дана МНК. Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum \frac{1}{x} \\ \sum \frac{y}{x} = a \sum \frac{1}{x} + b \sum \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

При $b > 0$ имеем обратную зависимость, которая при $x \rightarrow \infty$ характеризуется минимальным предельным значением y , оценкой которого служит параметр a .

При $b < 0$ имеем медленно повышающуюся функцию.

Обратная модель

В отдельных случаях может использоваться и нелинейная модель вида $\tilde{y}_x = \frac{1}{a + bx + \varepsilon}$, так называемая обратная модель, являющаяся разновидностью гиперболы.

Но если в равносторонней гиперболе $\tilde{y}_x = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ преобразованию подвергаются объясняющие переменные $\frac{1}{x} = z$, то для получения линейной формы зависимости в обратной модели преобразовывается y , а именно: $1/y = z$ и $z = a + bx + \varepsilon$.

В результате обратная модель оказывается внутренне нелинейной и требование МНК выполняется не для фактических значений признака y , а для их обратных величин $1/y$, а именно: $\sum (z - \tilde{z}_x)^2 \rightarrow \min$

Соответственно получаем систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} \sum \frac{1}{y} = na + b \sum x \\ \sum \frac{x}{y} = a \sum x + b \sum x^2 \end{cases} .$$

Степенная модель.

Иначе обстоит дело с регрессией, нелинейной по оцениваемым параметрам. Данный класс нелинейных моделей подразделяется на два типа: нелинейные модели внутренне линейные и нелинейные модели внутренне нелинейные. Если нелинейная модель внутренне линейна, то она с помощью соответствующих преобразований может быть приведена к линейному виду. Если же нелинейная модель внутренне нелинейна, то она не может быть сведена к линейной функции. Например, в эконометрических исследованиях при изучении эластичности спроса от цен широко

используется степенная функция: $\tilde{y}_x = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$, где y - спрос (количество); x - цена; ε - случайная ошибка.

Данная модель нелинейна относительно оцениваемых параметров. Однако ее можно считать внутренне линейной, ибо логарифмирование данного уравнения по основанию ε приводит его к линейному виду:

$$\ln y = \ln a + b \ln x + \ln \varepsilon .$$

Соответственно оценки параметров a и b могут быть найдены МНК. Если же модель представить в виде $\tilde{y}_x = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$, то она становится внутренне нелинейной, ибо ее невозможно превратить в линейный вид.

В специальных исследованиях по регрессионному анализу часто к нелинейным относят модели, только внутренне нелинейные по оцениваемым параметрам, а все другие модели, которые внешне нелинейны, но путем преобразований параметров могут быть приведены к линейному виду, относятся к классу линейных моделей.

Модели внутренне нелинейные по параметрам могут иметь место в эконометрических исследованиях. Однако гораздо большее распространение получили модели, приводимые к линейному виду. Решение такого типа моделей реализовано в стандартных пакетах прикладных программ.

Среди нелинейных функций, которые могут быть приведены к линейному виду, в эконометрических исследованиях очень широко используется степенная функция $\tilde{y}_x = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$. Связано это с тем, что параметр b в ней имеет четкое экономическое истолкование, т. е. он является коэффициентом эластичности. Это значит, что величина коэффициента b показывает, на сколько процентов изменится в среднем результат, если фактор изменится на 1 %. О правомерности подобного истолкования параметра b для степенной функции $\tilde{y}_x = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ можно судить, если рассмотреть формулу расчета коэффициента эластичности

$$\Theta = f'(x) \frac{x}{y},$$

где $f'(x)$ — первая производная, характеризующая соотношение приростов результата и фактора для соответствующей формы связи.

Для степенной функции она составит: $f'(x) = a \cdot b \cdot x^{b-1}$. Соответственно коэффициент эластичности окажется равным: $\dot{Y} = a \cdot b \cdot x^{b-1} \frac{x}{a \cdot x^b} = b$

Коэффициент эластичности, естественно, можно определять и при наличии других форм связи, но только для степенной функции он представляет собой постоянную величину, равную параметру b . В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора x .

В силу того, что коэффициент эластичности для линейной функции не является величиной постоянной, а зависит от соответствующего значения x , то обычно рассчитывается средний показатель эластичности по формуле

$$\bar{\Theta} = b \frac{\bar{x}}{y}$$

Средний коэффициент эластичности $\bar{\Theta}$ показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности измениться результат y от своей средней величины при изменении фактора x на 1 % от своего среднего значения.

Для оценки параметров степенной функции $\tilde{y}_x = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ применяется МНК к линеаризованному (логарифмическому) уравнению $\ln y = \ln a + b \ln x + \ln \varepsilon$, т.е. решается система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum \ln y = n \ln a + b \sum \ln x \\ \sum \ln y \ln x = \ln a \sum \ln x + b \sum (\ln x)^2 \end{cases}$$

Параметр b определяется непосредственно из системы, а параметр a — косвенным путем после потенцирования величины $\ln a$.

Поскольку коэффициенты эластичности представляют экономический интерес, а виды моделей не ограничиваются только степенной функцией, приведем формулы расчета коэффициентов эластичности для наиболее распространенных типов уравнений регрессии (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Коэффициенты эластичности для ряда математических функций

Вид функции, \tilde{y}_x	Первая производная, $f'(x)$	Коэффициент эластичности, $\Theta = f'(x) \frac{x}{y}$
Линейная $\tilde{y}_x = a + bx + \varepsilon$	b	$\Theta = \frac{bx}{a + bx}$
Параболическая $\tilde{y}_x = a + bx + cx^2 + \varepsilon$	$b + 2cx$	$\Theta = \frac{(b + 2cx)x}{a + bx + cx^2}$
Гипербола $\tilde{y}_x = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$	$\frac{-b}{x^2}$	$\Theta = \frac{-b}{ax + b}$
Степенная $\tilde{y}_x = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$	$a \cdot b \cdot x^{b-1}$	$\Theta = a \cdot b \cdot x^{b-1} \frac{x}{a \cdot x^b} = b$
Показательная $\tilde{y}_x = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$	$\ln b \cdot a \cdot b^x$	$\Theta = \ln x \cdot b$
Обратная $\tilde{y}_x = \frac{1}{a + bx + \varepsilon}$	$\frac{-b}{(a + bx)^2}$	$\Theta = \frac{-bx}{a + bx}$

Несмотря на широкое использование в эконометрике коэффициентов эластичности, возможны случаи, когда их расчет экономического смысла не имеет. Это происходит тогда, когда для рассматриваемых признаков бессмысленно определение изменения значений в процентах. Например, вряд ли кто будет определять, на сколько процентов может измениться заработная плата с ростом стажа работы на 1 %. Или, например, на сколько процентов изменится урожайность пшеницы, если качество почвы, измеряемое в баллах, изменится на 1 %. В такой ситуации степенная функция, даже если она оказывается наилучшей по

формальным соображениям (исходя из наименьшего значения остаточной вариации), не может быть экономически интерпретирована.

Показательная модель. Корреляция для нелинейной регрессии.

В моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, но приводимых к линейному виду, МНК применяется к преобразованным уравнениям. Если в линейной модели и моделях, нелинейных по переменным, при оценке параметров исходят из критерия $\sum (y - \tilde{y}_x)^2 \rightarrow \min$, то в моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, требование МНК применяется не к исходным данным результативного признака, а к их преобразованным величинам, т. е. $\ln y$, $1/y$.

Возьмем, например, показательную кривую: $\tilde{y}_x = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$ или равносильную ей экспоненту $\tilde{y}_x = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$. Прологарифмировав, имеем: $\ln y = \ln a + x \ln b + \ln \varepsilon$

Применяя МНК, минимизируем $\sum (\ln y - \ln \tilde{y}_x)^2 \rightarrow \min$. Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \sum \ln y = n \ln a + \ln b \sum x \\ \sum x \ln y = \ln a \sum x + b \sum x^2 \end{cases}$$

Практическое применение экспоненты возможно, если результативный признак не имеет отрицательных значений. Поэтому если исследуется, например, финансовый результат деятельности предприятий, среди которых наряду с прибыльными есть и убыточные, то данная функция не может быть использована.

Корреляция для нелинейной регрессии

Уравнение нелинейной регрессии, так же как и в линейной зависимости, дополняется показателем корреляции, а именно индексом корреляции (R):

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \tilde{y}_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}$$

Величина данного показателя находится в границах: $0 \leq R \leq 1$, чем ближе к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков, тем более надежно найденное уравнение регрессии.

Парабола второй степени, как и полином более высокого порядка, при линейаризации принимает вид уравнения множественной регрессии. Если же нелинейное относительно объясняемой переменной уравнение регрессии при линейаризации принимает форму линейного уравнения парной регрессии, то для оценки тесноты связи может быть использован линейный коэффициент корреляции, величина которого в этом случае совпадет с индексом корреляции $R_{yx} = r_{yz}$, где z - преобразованная величина признака-фактора, например $z = \frac{1}{x}$ или $z = \ln x$.

Иначе обстоит дело, когда преобразования уравнения в линейную форму связаны с зависимой переменной. В этом случае линейный коэффициент корреляции по преобразованным значениям признаков дает лишь приближенную оценку тесноты связи и численно не совпадает с индексом корреляции. Так, для степенной функции $\tilde{y}_x = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ после перехода к логарифмически линейному уравнению $\ln y = \ln a + b \ln x + \ln \varepsilon$ может быть найден линейный коэффициент корреляции не для фактических значений переменных x и y , а для их логарифмов, т. е. $r_{\ln y \ln x}$. Соответственно квадрат его значения будет характеризовать отношение факторной суммы квадратов отклонений к общей, но не для y , а для его логарифмов:

$$r_{\ln y \ln x}^2 = \frac{\sum (\ln \tilde{y} - \overline{\ln y})^2}{\sum (\ln y - \overline{\ln y})^2} = 1 - \frac{\sum (\ln y - \ln \tilde{y})^2}{\sum (\ln y - \overline{\ln y})^2}.$$

Поскольку в расчете индекса корреляции используется соотношение факторной и общей суммы квадратов отклонений, то R^2 имеет тот же смысл, что и коэффициент детерминации. В специальных исследованиях величину R^2 для нелинейных связей называют индексом детерминации.

Оценка существенности индекса корреляции проводится, так же как и оценка надежности коэффициента корреляции.

Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения нелинейной регрессии по F-критерию Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m}{m-1},$$

где R^2 - индекс детерминации;

n - число наблюдений;

m — число параметров.

Величина $(m-1)$ характеризует число степеней свободы для факторной суммы квадратов, а $(n - m)$ — число степеней свободы для остаточной суммы квадратов.

5.5 Непараметрические методы обнаружения взаимосвязей

Между тем в статистической практике приходится сталкиваться с задачами измерения связи между качественными признаками, к которым параметрические методы анализа в их обычном виде неприменимы. Статистической наукой разработаны методы, с помощью которых можно измерить связь между явлениями, не используя при этом количественные значения признака, а значит, и параметры распределения. Такие методы получили название непараметрических.

Если изучается взаимосвязь двух качественных признаков, то используют комбинационное распределение единиц совокупности в форме так называемых таблиц взаимной сопряженности.

Однако важно получить обобщающий показатель, характеризующий тесноту связи между признаками и позволяющий сравнить проявление связи в разных совокупностях. Для этой цели исчисляют, например, *коэффициенты взаимной сопряженности* Пирсона (С) и Чупрова (К):

$$C = \sqrt{\frac{\phi^2}{1 + \phi^2}}$$

$$K = \sqrt{\frac{\phi^2}{\sqrt{(K_1 - 1)(K_2 - 1)}}},$$

где ϕ^2 – показатель средней квадратической сопряженности, определяемый путем вычитания единицы из суммы отношений квадратов частот каждой клетки корреляционной таблицы к произведению частот соответствующего столбца и строки:

$$\phi^2 = \sum_{ij} \frac{\phi_{ij}^2}{f_i f_j} - 1, \quad f_i = \sum_j f_{ij}, \quad f_j = \sum_i f_{ij};$$

где K_1 и K_2 – число групп по каждому из признаков.

Величина коэффициента взаимной сопряженности, отражающая тесноту связи между качественными признаками, колеблется в обычных для этих показателей пределах от 0 до 1.

В социально-экономических исследованиях нередко встречаются ситуации, когда признак не выражается количественно, однако единицы совокупности можно упорядочить. Такое упорядочение единиц совокупности по значению признака называется ранжированием. Примерами могут быть ранжирование студентов (учеников) по способностям, любой совокупности людей по уровню образования, профессии, по способности к творчеству и т.д.

При ранжировании каждой единице совокупности присваивается ранг, т.е. порядковый номер.

Измерение связи между ранжированными признаками производится с помощью ранговых коэффициентов корреляции Спирмена (r) и Кендэлла (t). Эти методы применимы не только для качественных, но и для количественных показателей, особенно при малом объеме совокупности, так как непараметрические

методы ранговой корреляции не связаны ни с какими ограничениями относительно характера распределения признака.

5.6 Вопросы для самоконтроля к разделу 5

- 1 Задачи и проблемы корреляционного анализа.
- 2 Задачи регрессионного анализа. Исходные предпосылки регрессионного анализа и свойства оценок.
- 3 В чем состоит отличие между корреляционной и функциональной связью?
- 4 Какие основные проблемы решает исследователь при изучении корреляционных зависимостей?
- 5 Какие показатели являются мерой тесноты связи между двумя признаками?
- 6 Как оценить существенность линейного коэффициента корреляции?
- 7 Какие показатели используются для измерения степени тесноты связи между качественными признаками?
- 8 Нелинейная парная регрессия. Нелинейная корреляционная зависимость.
- 9 Ранговый коэффициент корреляции.
- 10 Значимость коэффициента корреляции.
- 11 Корреляционный анализ в парной линейной регрессии.
- 12 В чем состоит значение уравнения регрессии?
- 13 Что характеризует коэффициент регрессии?
- 14 Как осуществить прогноз значений результативного признака по уравнению регрессии?
- 15 Регрессионный анализ в парной линейной зависимости.
- 16 Значимость парной линейной регрессии.

5.7 Задания к разделу 5

5.1 Сформировать самостоятельно массив данных в соответствии с темой научного исследования.

5.2 По данному массиву провести регрессионный анализ:

- подобрать и оценить функцию регрессии, наилучшую по качеству подготовки;
- исследовать уравнение регрессии на значимость;
- для значимой модели регрессии исследовать значимость коэффициентов;
- построить доверительные интервалы для значимых параметров связи; провести экономический анализ результатов.

Следует обратить внимание на предпосылки корреляционной модели, в которой все величины являются случайными и их совместное распределение подчиняется многомерному нормальному закону; на отличие коэффициента корреляции от корреляционного отношения.

Следует обратить внимание на различие регрессионного анализа и корреляционного. В чем заключается сущность метода наименьших квадратов. Каким образом проводится оценка значимости уравнения в целом, а также ее параметры.

5.8 Тесты для самоконтроля к разделу 5

1. Какой из перечисленных коэффициентов указывает долю дисперсии Y , объясняемую вариацией X ?
 - а) коэффициент корреляции
 - б) коэффициент регрессии
 - в) коэффициент детерминации
 - г) остаточный коэффициент детерминации

2. Известно, что между величинами X и Y существует отрицательная связь.

В каких пределах находится парный коэффициент корреляции?

а) от -1 до 0

б) от 0 до 1

в) от -1 до 1.

3. Построено простое линейное уравнение регрессии. Для проверки его значимости следует использовать распределение:

а) Нормальное

б) Стьюдента

в) Пирсона

г) Фишера-Снедекора.

4. По 16 наблюдениям построено простое уравнение регрессии. Для проверки значимости коэффициента регрессии вычислено $t_{\text{набл}}=2.5$.

а) коэффициент незначим при $\alpha=0.05$,

б) коэффициент значим при $\alpha=0.05$,

в) коэффициент незначим при $\alpha=0.01$,

5. Известно, что между величинами X и Y существует положительная связь. В каких пределах находится парный коэффициент корреляции?

а) от -1 до 0

б) от 0 до 1

в) от -1 до 1.

6. Построено гиперболическое уравнение регрессии: $Y=a+b/X$. Для проверки значимости уравнения используется распределение:

а) Нормальное

б) Стьюдента

в) Пирсона

г) Фишера-Снедекора

7. В каких пределах меняется коэффициент детерминации?

а) от 0 до $+\infty$

б) от $-\infty$ до $+\infty$

в) от 0 до +1

г) от -1 до +1

8. Для выявления наличия связи, и ее направления используют следующие методы:

а) метод параллельных рядов;

б) метод аналитических группировок;

в) балансовый;

г) индексный;

д) корреляционный.

9. При функциональной связи каждому значению факторного признака соответствует:

а) одно значение результативного признака;

б) несколько значений результативного признака;

в) среднее значение результативного признака.

10. При какой связи под влиянием факторных признаков меняется средняя величина результативного признака:

а) корреляционной;

б) функциональной.

11. Уравнение линейной зависимости имеет вид:

а) $y_x = a_0 + a_1 \cdot x$

б) $y_x = a_0 - a_1 \cdot x$

в) $y_x = a_1 + a_0 \cdot x$

12. По характеру различают связи:

а) функциональные и корреляционные;

б) функциональные и статистические;

в) вероятностные и обратные;

г) статистические и криволинейные.

13. Факторный признак это:

а) признак, изменяющийся под воздействием других признаков;

б) признак, влияющий на изменение других.

14. При корреляционной зависимости определенному значению факторного признака соответствует изменение:

а) одно значение результативного признака;

б) несколько значений результативного признака;

в) среднее значение результативного признака.

15. При какой связи направление изменения результативного признака совпадает с направлением изменения признака-фактора:

а) прямой;

б) обратной;

в) криволинейной.

16. Линейный коэффициент корреляции определяется по следующим формулам:

а) $r = \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

$$\text{б) } \vartheta_x = \frac{b \cdot \bar{x}}{\bar{y}}$$

$$\text{в) } K_p = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d^2}{n(n^2 - 3)}$$

17. Построить уравнение регрессии можно при условии, что:

- а) количественным является только факторный признак;
- б) количественным является только результирующий признак;
- в) оба признака количественные;
- г) оба признака качественные.

18. Оценка параметра называется состоятельной, если:

- а) она удовлетворяет закону больших чисел;
- б) она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных оценок;
- в) она имеет наибольшую дисперсию.

19. Суть метода наименьших квадратов заключается в том, что:

- а) оценка определяется из условия минимизации суммы квадратов отклонений выборочных данных от определяемой оценки;
- б) оценка определяется из условия минимизации суммы отклонений выборочных данных от определяемой оценки;
- в) оценка определяется из условия минимизации суммы квадратов отклонений выборочной средней от выборочной дисперсии.

20. Какая оценка параметра является несмещенной:

- а) если дисперсия оценки является минимальной;
- б) если математическое ожидание оценки равно значению оцениваемого параметра;
- в) если математическое ожидание оценки меньше значения оцениваемого параметра;

г) если расстояние между оценкой и параметром не превышает 3σ ;

21. Несмещенная оценка параметра называется эффективной, если:

а) она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок;

б) если расстояние между оценкой и параметром не превышает 3σ ;

в) если математическое ожидание оценки меньше значения оцениваемого параметра.

22. С помощью какого метода можно найти оценки параметра:

а) методом наименьшего квадрата;

б) корреляционно-регрессионного анализа;

в) дисперсионного анализа.

23. При проверке значимости парного коэффициента корреляции используется распределение:

а) Нормальное

б) Стьюдента

в) Пирсона

г) Пуассона.

24. Построено линейное уравнение регрессии по 20 наблюдениям. Для проверки значимости коэффициента регрессии используется распределение:

а) Нормальное

б) Стьюдента

в) Пирсона

г) Фишера-Снедекора

25. Если корреляционный момент случайных величин X и Y отличен от нуля, то эти величины называют:

- а) коррелированными;
- б) некоррелированными;
- в) корреляционными.

26. Корреляционное отношение (индекс корреляции) измеряет степень тесноты связи между X и Y :

- а) только при криволинейной форме зависимости;
- б) при любой форме зависимости;
- в) только при линейной зависимости;
- г) при прямолинейной форме зависимости.

27. Отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений называется:

- а) коэффициентом вариации;
- б) коэффициентом корреляции;
- в) коэффициентом детерминации.

28. Коэффициент корреляции для независимых случайных величин X и Y равен:

- а) 0;
- б) -1 ;
- в) 1.

29. Корреляционный момент равен нулю, следовательно случайные величины X и Y :

- а) независимы;
- б) зависимы;
- в) случайны;
- г) противоположны.

30. Простейшим приемом выявления корреляционной связи между двумя признаками является ...

- а) расчет коэффициента корреляции знаков;
- б) расчет коэффициента эластичности;
- в) построение уравнения корреляционной связи;
- г) корреляционное поле.

6 Множественная регрессия

6.1 Спецификация множественной линейной модели

6.2 Оценка параметров уравнения множественной регрессии

6.3 Множественная и частная корреляция

6.4 Оценка надежности результатов множественной регрессии и корреляции

6.1 Спецификация множественной линейной модели

Множественная регрессия – это уравнение связи с несколькими независимыми переменными:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель.

Построение уравнения множественной регрессии начинается с решения вопроса о спецификации модели. Суть проблемы спецификации включает в себя два круга вопросов:

- отбор факторов;
- выбор вида уравнения регрессии.

Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям.

1 Они должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность.

2 Факторы не должны быть интеркоррелированы и тем более находиться в точной функциональной связи.

3 Отбор факторов производится на основе качественного теоретико-экономического анализа. Отбор факторов осуществляется в две стадии:

- подбираются факторы исходя из сущности проблемы;
- на основе матрицы показателей корреляции определяют t-статистики для параметров регрессии.

Коэффициенты интеркорреляции позволяют исключать из модели дублирующие факторы. Считается, что две переменные явно коллинеарны, т.е. находятся между собой в линейной зависимости, если $r_{x_i x_j} \geq 0.8$. Если факторы явно коллинеарны, то они дублируют друг друга и один из них рекомендуется исключить из регрессии. Предпочтение при этом отдается не фактору, более тесно связанному с результатом, а тому фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту связи с другими факторами. В этом требовании проявляется специфика множественной регрессии как метода исследования комплексного воздействия факторов в условиях их независимости друг от друга.

Наиболее широкое применение получили следующие методы построения уравнения множественной регрессии:

- метод исключения факторов
- метод включения дополнительных факторов
- шаговый регрессионный анализ

При отборе факторов рекомендуется пользоваться следующим правилом: число включаемых факторов обычно в 6-7 раз меньше объема совокупности, по которой строится регрессия.

Если это соотношение нарушено, то число степеней свободы остаточной вариации очень мало. Это приводит к тому, что параметры уравнения регрессии оказываются статистически незначимыми, а F-критерий меньше табличного значения.

Как и в парной зависимости, возможны разные виды уравнений множественной регрессии: линейные и нелинейные.

Ввиду четкой интерпретации параметров наиболее широко используются линейная и степенная функции. В линейной множественной регрессии $\tilde{y}_x = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$ параметры при x называются коэффициентами «чистой» регрессии. Они характеризуют среднее изменение результата с изменением соответствующего фактора на единицу при неизменном значении других факторов, закрепленных на среднем уровне.

В степенной функции $\tilde{y}_x = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n}$ коэффициенты b_j являются коэффициентами эластичности. Они показывают, на сколько процентов изменяется в среднем результат с изменением соответствующего фактора на 1 % при неизменности действия других факторов. Этот вид уравнения регрессии получил наибольшее распространение в производственных функциях, в исследованиях спроса и потребления.

Стандартные компьютерные программы обработки регрессионного анализа позволяют перебирать различные функции и выбрать ту из них, для которой остаточная дисперсия и ошибка аппроксимации минимальны, а коэффициент детерминации максимален.

6.2 Оценка параметров уравнения множественной регрессии

Для оценки параметров уравнения множественной регрессии применяют метод наименьших квадратов. Для линейных уравнений строится система нормальных уравнений, решение которой позволяет получить оценки параметров регрессии:

$$R_{yx_1x_2\dots x_n} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \tilde{y}_{x_1x_2\dots x_n})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}.$$

Показатель множественной корреляции характеризует тесноту связи совместного влияния факторов на результат.

Индекс множественной корреляции для уравнения в стандартизованном масштабе можно записать в виде

$$R_{yx_1x_2\dots x_n} = \sqrt{\sum \beta_{x_i} \cdot r_{yx_i}}.$$

Напомним, что R^2 характеризует долю вариации зависимой переменной, обусловленной регрессией или изменчивостью объясняющих переменных.

Чем ближе R^2 к единице, тем лучше регрессия описывает зависимость между объясняющими и зависимыми переменными.

Вместе с тем использование только одного коэффициента детерминации R^2 для выбора наилучшего уравнения регрессии может оказаться недостаточным. На практике встречаются случаи, когда плохо определенная модель регрессии может дать сравнительно высокий коэффициент R^2 .

Недостатком коэффициента детерминации R^2 является то, что он увеличивается при добавлении новых объясняющих переменных, хотя это и не обязательно означает улучшение качества регрессионной модели. В этом смысле предпочтительнее использовать скорректированный коэффициент детерминации \bar{R}^2 .

Скорректированный индекс множественной детерминации содержит поправку на число степеней свободы и рассчитывается по формуле:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-m},$$

где n – число наблюдений,

m – число факторов.

Чем больше число объясняющих переменных n , тем меньше \bar{R}^2 по сравнению с R^2 . В отличие от R^2 скорректированный коэффициент \bar{R}^2 может уменьшаться при введении в модель новых объясняющих переменных, не оказывающих существенного влияния на зависимую переменную.

Показатели парной корреляции характеризуют тесноту связи результата и фактора, не принимая во внимание возможного влияния на результат других факторных признаков. Поэтому во множественном регрессионном анализе возникает проблема определения тесноты связи между двумя признаками в чистом виде.

Показатели «чистого» влияния фактора на результат при устранении влияния прочих факторов, включенных в модель регрессии, является частный коэффициент корреляции или частный индекс корреляции.

Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при устранении влияния других факторов, включенных в уравнение регрессии.

Частная корреляция разных порядков может представлять аналитический интерес. В практических исследованиях предпочтение отдают показателям частной корреляции самого высокого порядка, ибо именно эти показатели являются дополнением к уравнению множественной регрессии.

Порядок частного коэффициента корреляции определяется количеством факторов, влияние которых исключается. Например, r_{yx_1/x_2} - коэффициент частной корреляции первого порядка. Соответственно коэффициенты парной корреляции называются коэффициентами нулевого порядка. Коэффициенты частной корреляции более высоких порядков можно определить через коэффициенты частной корреляции более низких порядков по рекуррентной формуле.

6.4 Оценка надежности результатов множественной регрессии и корреляции

Значимость уравнения множественной регрессии в целом, так же как и в парной регрессии, оценивается с помощью F-критерия Фишера.

Оценивается значимость не только уравнения в целом, но и фактора, дополнительно включенного в регрессионную модель. Необходимость такой оценки связана с тем, что не каждый фактор, вошедший в модель, может существенно увеличивать долю объясненной вариации результативного признака. Кроме того, при наличии в модели нескольких факторов они могут вводиться в модель в разной последовательности. Ввиду корреляции между факторами значимость одного и того же фактора может быть разной в зависимости от последовательности его введения в модель. Мерой для оценки включения фактора в модель служит частный F-критерий, т. е. F_{x_i} .

Частный F-критерий построен на сравнении прироста факторной дисперсии, обусловленного влиянием дополнительно включенного фактора, с остаточной дисперсией на одну степень свободы по регрессионной модели в целом.

С помощью частного F-критерия можно проверить значимость всех коэффициентов регрессии в предположении, что каждый соответствующий фактор x_i , вводился в уравнение множественной регрессии последним.

Частный F-критерий оценивает значимость коэффициентов чистой регрессии. Зная величину F_{x_i} , можно определить и t-критерий для коэффициента регрессии при i -м факторе t_{b_i} , а именно: $t_{b_i} = \sqrt{F_{x_i}}$.

6.5 Вопросы для самоконтроля к разделу 6

- 1 Определение классической модели линейной регрессии.
- 2 Суть метода наименьших квадратов.
- 3 Допущения лежащие в основе метода наименьших квадратов.
- 4 Свойства оценок МНК.

- 5 Уравнение регрессии в стандартизованном масштабе.
- 6 Проверка статистической значимости уравнения регрессии и коэффициентов регрессии.
- 7 Оценка точности уравнения регрессии.
- 8 Частная регрессия и корреляция.
- 9 Определение доверительного интервала для функции регрессии.

6.6 Задания к разделу 6

6.1 Сформировать самостоятельно массив данных в соответствии с темой научного исследования.

6.2 Рассчитайте параметры линейного уравнения множественной регрессии с полным перечнем факторов по собранному массиву данных.

6.3 Рассчитайте матрицу парных коэффициентов корреляции и отберите информативные факторы в модели. Проверьте значимость парных коэффициентов корреляции. Укажите коллинеарные факторы.

6.4 Постройте модель в естественной форме только с информативными факторами. Оцените качество построенного уравнения регрессии.

6.5 Оцените с помощью F-критерия Фишера-Снедекора значимость уравнения линейной регрессии и показателя тесноты связи.

6.6 Оцените статистическую значимость коэффициентов регрессии с помощью t- критерия Стьюдента.

6.7 Проверти остатки на подчиненность нормальному закону распределения.

6.8 Оцените качество уравнения через среднюю ошибку аппроксимации.

6.9 Постройте модель в стандартизованном масштабе и проинтерпретируйте ее параметры.

6.10 Рассчитайте прогнозное значение результата, если прогнозное значение факторов составляют 80 % от их максимальных значений.

6.11 Рассчитайте ошибки и доверительный интервал прогноза для уровня значимости $\alpha = 0,05$.

6.12 По полученным результатам сделайте экономический вывод.

При выполнении заданий по данному разделу следует обратить внимание на предпосылки корреляционной модели, в которой все величины являются случайными и их совместное распределение подчиняется многомерному нормальному закону; в чем заключается сущность метода наименьших квадратов. Каким образом проводится оценка значимости уравнения в целом, а также ее параметры.

Необходимо разобраться каким образом проводится отбор факторов при построении уравнения множественной линейной регрессии. Немало важным вопросом также является проверка оценки точности построенного уравнения, на основе которого в дальнейшем строятся доверительные интервалы для функции регрессии.

6.7 Тесты для самоконтроля к разделу 6

1. В множественном линейном уравнении регрессии строятся доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с помощью распределения:

- а) Нормального
- б) Стьюдента
- в) Пирсона
- г) Фишера-Снедекора.

2. Построено множественное линейное уравнение регрессии. Для проверки значимости отдельных коэффициентов используется распределение:

- а) Нормальное
- б) Стьюдента
- в) Пирсона
- г) Фишера-Снедекора.

3. Множественный коэффициент корреляции равен 0.9. Какой процент дисперсии результативного признака объясняется влиянием всех факторных признаков?

- а) 90 %;
- б) 81 %;
- в) 95 %
- г) 45 %

4. В каких пределах меняется частный коэффициент корреляции?

- а) от $-\infty$ до $+\infty$
- б) от 0 до 1
- в) от 0 до $+\infty$
- г) от -1 до $+1$

5. В каких пределах меняется парный коэффициент корреляции?

- а) от $-\infty$ до $+\infty$
- б) от 0 до 1
- в) от 0 до $+\infty$
- г) от -1 до $+1$

6. При добавлении в уравнение регрессии еще одного объясняющего фактора множественный коэффициент корреляции:

- а) уменьшится
- б) возрастет
- в) сохранит свое значение
- г) не уменьшится

7. При удалении из уравнения регрессии одного из регрессоров множественный коэффициент корреляции:

- а) не увеличится
- б) уменьшится

в) возрастет

8. По 18 наблюдениям построено уравнение регрессии: $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4$. Для проверки значимости коэффициентов регрессии: β_j получены наблюдаемые значения t-статистики (соответственно): 2.3, 2.1, 3.5, 3.0.

Вывод: на уровне значимости $\alpha=0.05$:

- а) все коэффициенты значимы
- б) все коэффициенты незначимы,
- в) первые два - незначимы, два последних - значимы,
- г) незначим только β_2 , остальные - значимы.

9. По результатам выборки объемом $n=14$ из трехмерной генеральной совокупности (X, Y, Z) найдены частный $r_{yz/x} = -0,52$ и парный $r_{yz}=0.28$ коэффициенты корреляции. Охарактеризовать влияние X на взаимосвязь Y и Z:

- а) X усиливает связь между Y и Z;
- б) X ослабляет связь между Y и Z;
- в) X усиливает связь между Y и Z и меняет ее направление;
- г) X ослабляет связь между Y и Z и меняет ее направление.

10. По результатам 18 наблюдений получен парный коэффициент корреляции: $r_{xy} = 0.65$. Известно, что z ослабляет связь между x и y. Какое значение может принять частный коэффициент корреляции r_{xy} ?

- а)-0.7
- б)-0.3
- в) 0.5
- г) 0.8

11. По результатам выборки объемом $n=22$ из трехмерной генеральной совокупности (X, Y, Z) найдены частный $r_{xz/y}=-0.75$ и парный $r_{xz}=-0.47$ коэффициенты корреляции. Охарактеризовать влияние Y на взаимосвязь X и Z:

- а) Y усиливает связь между X и Z;
- б) Y ослабляет связь между X и Z;
- в) Y усиливает связь между X и Z и меняет ее направление;
- г) Y ослабляет связь между X и Z и меняет ее направление.

12. В каких пределах меняется множественный коэффициент корреляции?

- а) от - 1 до +1
- б) от 0 до +1
- в) от 0 до $+\infty$
- г) от $-\infty$ до $+\infty$

13. По 20 наблюдениям построено уравнение регрессии: $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$.

Для проверки значимости уравнения вычислено значение статистики: 4.2. Выводы:

- а) уравнение значимо при $\alpha=0.05$.
- б) уравнение незначимо при $\alpha=0.05$.
- в) уравнение незначимо при $\alpha=0.01$.

14. По результатам выборки объемом $n=20$ из трехмерной генеральной совокупности (X, Y, Z) найдены частный $r_{xy/z}=-0.8$ и парный $r_{xy}=0.3$ коэффициенты корреляции. Охарактеризовать влияние Z на взаимосвязь Y и X:

- а) Z усиливает связь между Y и X;
- б) Z ослабляет связь между Y и X;
- в) Z усиливает связь между Y и X и меняет ее направление;
- г) Z ослабляет связь между Y и X и меняет ее направление.

15. Частный коэффициент корреляции оценивает:

- а) тесноту связи между переменными при фиксированном значении остальных;
- б) тесноту связи между двумя переменными;
- в) свободное влияние нескольких переменных на одну;

г) совокупное влияние всех признаков между собой.

7 Анализ временных рядов. Особенности корреляции и регрессии временных рядов

7.1 Временные ряды и их предварительный анализ

7.2 Исследование тенденции временных рядов

7.3 Виды, свойства и оценка параметров основных видов тренда

7.4 Статистическое изучение колеблемости во временных рядах

7.5 Корреляция рядов динамики

7.6 Регрессия по рядам динамики и прогнозирования на её основе

7.1 Временные ряды и их предварительный анализ

Ряд динамики, хронологический ряд, динамический ряд, временной ряд – это последовательность упорядоченных во времени числовых показателей, характеризующих уровень развития изучаемого явления.

Всякий ряд динамики включает два обязательных элемента: во-первых, время и, во-вторых, конкретное значение показателя, или уровень ряда. Ряды динамики различаются по следующим признакам.

1 По времени – моментные и интервальные ряды.

Интервальный ряд динамики – последовательность, в которой уровень явления относится к результату, накопленному или вновь произведенному за определенный интервал времени.

Если же уровень ряда показывает фактическое наличие изучаемого явления в конкретный момент времени, то совокупность уровней образует моментный ряд динамики.

2 По форме представления уровней – ряды абсолютных, относительных и средних величин.

3 По расстоянию между датами или интервалам времени выделяют полные и неполные хронологические ряды.

Полные ряды динамики имеют место, когда даты регистрации или окончания периодов следуют друг за другом с равными интервалами. Это равноотстоящие ряды динамики. Неполные – когда принцип равных интервалов не соблюдается.

Важнейшим условием правильного построения ряда динамики является сопоставимость всех входящих в него уровней.

Чтобы о развитии явления можно было получить представление при помощи числовых уровней, при составлении ряда динамики должны приводиться в сопоставительный вид.

Статистические данные должны быть сопоставимы по территории, кругу охватываемых объектов, единицам измерения, времени регистрации, ценам, методологии расчета. Сопоставимость по территории означает, что данные по странам и регионам, границы которых изменились, должны быть пересчитаны в старых пределах. Сопоставимость по кругу охватываемых объектов означает сравнение совокупностей с равным числом элементов. Территориальная и объемная сопоставимость обеспечивается смыканием рядов динамики, при этом либо абсолютные уровни заменяются относительными, либо делается пересчет в условные абсолютные уровни. Не возникает особых сложностей при обеспечении сопоставимости данных по единицам измерения; стоимостная сравнимость достигается системой сопоставимых цен.

Числовые уровни рядов динамики должны быть упорядоченными во времени. Не допускается анализ рядов с пропусками отдельных уровней, если же такие пропуски неизбежны, то их восполняют условными расчетными значениями.

Динамические ряды анализируются при помощи ряда показателей, определяющих направление, характер и интенсивность количественных изменений явлений во времени. К таким показателям относятся:

1 Абсолютные приросты рассчитываются как разность между двумя значениями соседних уровней динамического ряда (цепные приросты) или как разность между значениями текущего уровня и уровня, принятого за базу сравнения

(базисные приросты). Показатели абсолютного прироста имеют те же единицы измерения, что и уровни динамического ряда, они показывают, на сколько единиц собственного измерения изменился показатель при переходе от одного момента или периода времени к другому.

- абсолютный прирост (цепной):

$$\Delta y = y_i - y_{i-1};$$

- абсолютный прирост (базисный):

$$\Delta y = y_i - y_0,$$

где y_i - уровень сравниваемого периода;

y_{i-1} - уровень предшествующего периода;

y_0 - уровень базисного периода;

2 Темп роста представляет собой соотношение двух уровней динамического ряда, выраженное в коэффициентах или в процентах.

Цепной темп роста, выраженный в коэффициентах, показывает, во сколько раз изменился текущий уровень показателя по сравнению с предыдущим:

$$T_p = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\% .$$

Базисный темп роста, выраженный в коэффициентах, показывает, во сколько раз изменился текущий уровень показателя по сравнению с базисным:

$$T_p = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100\% .$$

3 Для того чтобы определить, насколько процентов текущий уровень

показателя больше или меньше значения предыдущего или базисного уровня, рассчитываются темпы прироста. Они получаются путем вычитания из соответствующих темпов роста, выраженных в процентах, 100 %.

$$T_{np} = T_p - 100\% .$$

Для обобщения данных по рядам динамики рассчитываются:

- средний уровень ряда;
- средний абсолютный прирост;
- средние темпы роста и прироста.

Средний уровень ряда интервальных и моментных рядов определяется по-разному.

Для интервальных рядов динамики с равноотстоящими во времени уровнями расчет среднего уровня проводится по формуле простой средней арифметической:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} ,$$

где n – число уровней ряда.

Для интервальных временных рядов с не равноотстоящими во времени уровнями средний уровень рассчитывается по средней арифметической взвешенной:

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i \cdot t_i}{\sum t_i} ,$$

где t_i – величина интервала между уровнями.

Для моментных рядов динамики с равноотстоящими во времени уровнями средний уровень (средняя хронологическая) находится по формуле:

$$\bar{Y} = \frac{\frac{Y_1 + Y_2}{2} + \sum_{t=2}^{n-1} Y_t}{n-1},$$

В случае моментных временных рядов с не равноотстоящими во времени уровнями средний уровень определяется по формуле средней хронологической взвешенной:

$$\bar{Y} = \frac{(Y_1 + Y_2) \cdot t_1 + (Y_2 + Y_3) \cdot t_2 + \dots + (Y_{n-1} + Y_n) \cdot t_{n-1}}{2 \sum_{i=1}^{n-1} t_i},$$

где t_i – продолжительность интервала времени между соседними уровнями.

Кроме среднего уровня, при анализе и прогнозировании широко используются средние показатели изменения уровней ряда, а именно, средний абсолютный прирост и средний темп роста.

Средний абсолютный прирост показывает, на сколько в среднем увеличился или уменьшился уровень за изучаемый период:

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_{ц_i}}{n-1} = \frac{\Delta_{6_n}}{n-1} = \frac{Y_n - Y_0}{n-1}.$$

Средний темп роста отражает интенсивность изменения уровней ряда. Он показывает, сколько в среднем процентов последующий уровень составляет от предыдущего на всем периоде наблюдения:

$$\bar{K} = \sqrt[n-1]{K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_n} = \sqrt[n-1]{\prod K_{ц_i}} = \sqrt[n-1]{K_{6_n}} = \sqrt[n-1]{\frac{Y_n}{Y_0}}.$$

Соответственно средний темп прироста определяется на основе среднего темпа роста:

$$\bar{T}_\Delta = \bar{T}_p - 100 = \bar{K} - 1.$$

В практике исследования динамики явлений и прогнозирования принято считать, что значения уровней временных рядов могут содержать следующие компоненты:

- тренд (u_t);
- сезонную компоненту (S_t);
- циклическую компоненту (V_t);
- случайную компоненту (ε_t).

Под трендом понимают изменение, определяющее общее направление развития, основную тенденцию временного ряда. Это систематическая составляющая долговременного действия.

Наряду с долговременными тенденциями во временных рядах часто возникают более или менее регулярные колебания – периодические составляющие рядов динамики.

Если период колебаний не превышает одного года, то их называют сезонными.

При большем периоде колебания считают, что во временных рядах имеет место циклическая составляющая (циклы деловой активности Кондратьева).

Если из временного ряда удалить тренд и периодические составляющие, то останется случайная компонента.

Факторы, под действием которых формируется нерегулярная компонента, разделяют на два вида:

- факторы резкого, внезапного действия вызывают более значительные отклонения – катастрофические колебания;
- текущие факторы вызывают случайные колебания и являются результатом действия большого числа побочных причин.

Если уровни временного ряда представляются в виде суммы соответствующих компонент, то полученная модель носит название аддитивной:

$$Y_t = u_t + S_t + v_t + \varepsilon_t ;$$

если в виде произведения – то мультипликативной:

$$Y_t = u_t \cdot S_t \cdot v_t \cdot \varepsilon_t .$$

Также выделяют модели смешанного типа:

$$Y_t = u_t \cdot S_t \cdot v_t + \varepsilon_t .$$

7.2 Исследование тенденции временных рядов

Прежде чем перейти к определению тенденции и выделению тренда, нужно выяснить, существует ли вообще тенденция в исследуемом процессе. Для этой цели разработано множество критериев: критерий серий, метод проверки разностей средних уровней, метод Фостера-Стюарта. Основные подходы к решению этой задачи основаны на статистической проверке гипотез о случайности ряда:

$$H_0 = M_Y(t) = a = \text{const} .$$

Рассмотрим критерий серий, который имеет две модификации:

- критерий серий, основанный на медиане выборки;
- критерий «восходящих и нисходящих» серий.

Алгоритм первой модификации включает следующие шаги:

1 Из исходного ряда с уровнями y_1, y_2, \dots, y_n образуется ранжированный ряд y'_1, y'_2, \dots, y'_n (где y'_1 – наименьшее значение из уровней исходного ряда).

2 Определяется медиана (M_e) этого вариационного ряда. В случае нечетного значения длины ряда n ($n=2m+1$) $M_e = y'_{m+1}$, в противном случае ($n=2m$)

$$M_e = (y'_m + y'_{m+1})/2 .$$

3 Образуется последовательность δ_i из плюсов и минусов по следующему правилу:

$$\delta_i = \begin{cases} +, \text{ если } y_t > M_e, t = 1, 2, \dots, n \\ -, \text{ если } y_t < M_e, t = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Если значение уровня исходного ряда y_t равно медиане, то это значение пропускается.

4 Подсчитывается $\nu(n)$ – число серий в совокупности δ_i , где под серией понимается последовательность подряд идущих плюсов и минусов. Один плюс или один минус тоже будут считаться серией. Определяется $\tau_{\max}(n)$ – протяженность самой длинной серии.

5 Проверка гипотезы основывается на том, что при условии случайности ряда (при отсутствии систематической составляющей) протяженность самой длинной серии не должна быть слишком большой, а общее число серий – слишком маленьким. Поэтому, для того чтобы не была отвергнута гипотеза о случайности исходного ряда, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \nu(n) &> \left\lceil \frac{1}{2}(n+1-1,96\sqrt{n-1}) \right\rceil, \\ \tau_{\max}(n) &< \lceil 1,43 \ln(n+1) \rceil \end{aligned}$$

где n – длина временного ряда.

Если хотя бы одно из неравенств нарушается, то гипотеза отвергается с вероятностью ошибки α , заключенной между 0,05 и 0,0975 (следовательно, подтверждается наличие зависящей от времени неслучайной составляющей).

Рассмотрим применение критерия «восходящих и нисходящих» серий.

1 Образуется последовательность плюсов и минусов, но по другому правилу.

Для временного ряда с уровнями y_1, y_2, \dots, y_n определяется вспомогательная последовательность, исходя из условий:

$$\delta_i = \begin{cases} +, \text{ если } y_{t+1} - y_t > 0, \text{ для } t = 1, 2, \dots, n \\ -, \text{ если } y_{t+1} - y_t < 0, \text{ для } t = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

В случае, когда последующее наблюдение окажется равным предыдущему, учитывается только одно наблюдение.

2 Подсчитывается общее число серий $\nu(n)$ и протяженность самой длинной серии $\tau_{\max}(n)$ аналогично. Серия, состоящая из «+», – «восходящая серия», из «-» – нисходящая.

3 Для того чтобы не была отвергнута гипотеза о случайности исходного ряда, должны выполняться следующие неравенства:

$$\nu(n) > \left[\frac{1}{3} \left((2n-1) - 1,96 \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right) \right],$$

$$\tau_{\max}(n) < \tau_0(n)$$

где $\tau_0(n)$ – табличное значение, зависящее от n .

Таблица 7.1 – Табличные значения $\tau_0(n)$

n	$n \leq 26$	$26 \leq n \leq 153$	$153 \leq n \leq 1170$
$\tau_0(n)$	5	6	7

Если хотя бы одно из неравенств нарушается, то нулевая гипотеза отвергается.

Алгоритм метода разности средних уровней имеет следующую последовательность:

1 Анализируемый ряд разбивается на две примерно равные по числу членов части n_1 и n_2 , каждая из которых рассматривается как самостоятельная (частная) выборка:

$$y^{(1)} = (y_1, y_2, \dots, y_{n_1}),$$

$$y^{(2)} = (y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_n),$$

где $n = n_1 + n_2$.

2 По каждой из частных выборок выполняется оценка средних:

$$\overline{y^{(1)}} = \frac{1}{n_1} \cdot \sum_{t=1}^{n_1} y_t,$$

$$\overline{y^{(2)}} = \frac{1}{n_2} \cdot \sum_{t=n_1+1}^n y_t.$$

3 Вычисляется разность средних:

$$R = \overline{y^{(1)}} - \overline{y^{(2)}}.$$

4 Проверяется статистическая значимость разности средних – гипотеза $H_0 : \overline{y^{(1)}} = \overline{y^{(2)}}$ при помощи t – статистики Стьюдента:

$$t_R = \frac{R}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad (7.1)$$

где s – несмещенная выборочная оценка дисперсии уровней ряда:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \overline{y^{(1)}})^2 + \sum_{t=n_1+1}^n (y_t - \overline{y^{(2)}})^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n - 2}},$$

где $s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \overline{y^{(1)}})^2,$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{t=n_1+1}^n (y_t - \overline{y^{(2)}})^2.$$

Если $|t_{\text{набл}}| < t_{\text{табл}(\alpha; n-2)}$, то гипотеза H_0 принимается, во временном ряду тенденция отсутствует.

В основе (7.1) лежит предположение о несущественном различии дисперсий частных выборок и отсутствии зависимости между частными выборками. Поэтому, перед расчетом t-статистики Стьюдента необходимо проверить гипотезу о несущественном различии значений дисперсий уровней ряда в частных выборках. Проверка осуществляется при помощи F-критерия Фишера: формируется статистика

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

Вычисленное значение статистики сравнивается с ее критическим (табличным) значением. Если $F > F_{\text{крит}(\alpha; n_1-1; n_2-1)}$, то гипотеза о несущественном различии значений дисперсий уровней ряда в частных подвыборках отклоняется, и метод разности средних уровней не может быть применен.

Одним из наиболее распространенных методов проверки временных рядов на стационарность является метод Фостера – Стюарта.

Алгоритм метода состоит в следующем.

1 Каждый уровень ряда сравнивается со всеми предшествующими. При этом определяются вспомогательные характеристики:

$$m_t = \begin{cases} 1, & \text{если } x_t > x_k, \quad k = 1, 2, \dots, t-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и

$$l_t = \begin{cases} 1, & \text{если } x_t < x_k, \quad k=1,2,\dots,t-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

2 Вычисляются значения величин

$$d_t = m_t - l_t, t = \overline{2, n},$$

$$S_t = m_t + l_t, t = \overline{2, n}.$$

Таким образом, величина d_t может принимать значения:

минус 1, – если уровень ряда наименьший;

0, – если уровень ряда не является ни наибольшим, ни наименьшим;

1, – уровень ряда наибольший.

Величина S_t может принимать значения:

0 – если уровень ряда не является ни наибольшим, ни наименьшим;

1 – в противном случае .

3 Вычисляются суммы:

$$D = \sum_{t=2}^n d_t,$$

$$S = \sum_{t=2}^n S_t.$$

Показатель D изменяется от минус $(n-1)$ до $(n-1)$, и применяется для обнаружения тенденции изменения средней величины уровней ряда.

Показатель S изменяется от 0 до $(n-1)$ и применяется для обнаружения тенденции изменения дисперсии уровней ряда.

4 С помощью критерия Стьюдента проверяется гипотеза об отсутствии тенденции в средней и дисперсии. Для этого определяется

$$t_D = \frac{D}{\sigma_D},$$

где $\sigma_D = \sqrt{2 \sum_{t=2}^n \frac{1}{t}} \approx \sqrt{2 \ln(n) - 0,8456},$

и

$$t_S = \frac{S - \mu}{\sigma_S}$$

где $\sigma_S = \sqrt{2 \sum_{t=2}^n \frac{1}{t} - 4 \sum_{t=2}^n \frac{1}{t^2}} \approx \sqrt{2 \ln n - 3,4253},$

$$\mu = 2 \sum_{t=2}^n \frac{1}{t}.$$

Если $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}},$ то H_0 отвергается, следовательно, тренд есть.

При наличии тенденции во временном ряду его уровни можно рассматривать как функцию времени (кривые роста). Кривые роста условно разделяют на три класса.

Первый класс включает функции, используемые для описания процессов с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста (класс полиномов, экспоненциальная (показательная) кривая, логарифмическая парабола);

Ко второму классу относятся кривые, описывающие процесс, который имеет предел роста в исследуемом периоде (кривые насыщения) – потребление каких-либо продуктов, расход удобрений на единицу площади (модифицированная экспонента, гиперболические кривые);

Третий класс включает кривые насыщения, имеющие точку перегиба (S-образные кривые). Эти кривые описывают два последовательных лавинообразных процесса: один с ускорением развития, другой – с замедлением. Кривые этого класса применяют в демографических исследованиях, страховых расчетах, определении спроса на новый вид продукции (кривая Гомперца, логистическая кривая).

Оценка параметров и свойства основных кривых роста рассмотрены в третьей главе данного пособия.

Существует несколько практических подходов, облегчающих процесс выбора формы кривой роста.

Наиболее простой путь – визуальный, опирающийся на графическое изображение временного ряда. Если на графике исходного ряда тенденция развития не четко просматривается, то можно преобразовать ряд, например, провести сглаживание, логарифмирование.

Для выбора степени полинома применяют метод последовательных разностей, который предполагает вычисление первых, вторых и т.д. разностей уровней ряда:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1};$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$$

и т.д. Расчет ведется до тех пор, пока разности не будут примерно равными. Порядок разностей принимается за степень выравнивающего полинома.

Однако чаще всего на практике форму кривой выбирают, используя критериальный подход. Наиболее адекватной считается кривая, имеющая наименьшую сумму квадратов отклонений фактических уровней от расчетных. Используя этот подход, следует иметь, что к ряду, состоящему из n точек, можно подобрать многочлен степени $(n-1)$, проходящей через все n точек, однако, такая кривая не слишком пригодна как для выделения тенденции, так и для прогнозирования. Иногда в качестве критерия выбирается средняя квадратическая ошибка

$$S = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - k}},$$

где n – длина ряда;

k – число оцениваемых коэффициентов в модели.

Использование этого подхода проходит в два этапа: на первом происходит ограничение приемлемых функций, исходя из содержательного анализа задачи, на втором – осуществляется расчет критерия и выбор по нему функции.

Проверка адекватности выбранных моделей реальному процессу строится на анализе случайной (остаточной) компоненты. Ряд остатков получают как отклонения фактических уровней временного ряда (y_t) от выровненных (\hat{y}_t):

$$e_t = y_t - \hat{y}_t.$$

Принято считать, что модель адекватна описываемому процессу, если значения остаточной компоненты удовлетворяют свойствам случайности, независимости, а также случайная компонента подчиняется нормальному закону распределения.

Если вид функции выбран неудачно, то последовательные значения ряда остатков могут не обладать свойствами независимости, так как они могут коррелировать между собой, т.е. будет иметь место автокорреляция ошибок. Существует несколько приемов обнаружения автокорреляции: критерий Дарбина – Уотсона, метод рядов, Q-тест Льюинга – Бокса.

Наиболее распространенный – критерий Дарбина – Уотсона (позволяет обнаружить автокорреляцию первого порядка):

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \approx 2(1 - r_1),$$

где r_1 - коэффициент автокорреляции первого порядка.

Если в ряду остатков имеется сильная положительная автокорреляция, то $d=0$, в случае сильной отрицательной автокорреляции $d=4$. При отсутствии автокорреляции $d=2$. Применение на практике критерия Дарбина – Уотсона

основано на сравнении величины d с теоретическими табулированными значениями d_1 и d_2 :

1) если $d < d_1$, то гипотеза (H_0) о независимости случайных отклонений отвергается (положительная автокорреляция);

2) если $d > d_2$, то гипотеза (H_0) не отвергается;

3) если $d_1 \leq d \leq d_2$, то нет достаточных оснований для принятия решений (область неопределенности).

Когда расчетное значение d превышает 2, то с d_1 и d_2 сравнивается не сам коэффициент d , а $(4-d)$.

Алгоритм метода рядов включает заключается в следующем.

Последовательно определяются знаки отклонений $\hat{e}_t, t = 1, 2, \dots, T$.

Ряд определяется как непрерывная последовательность одинаковых знаков. Количество знаков в ряду называется длиной ряда.

Визуальное распределение знаков свидетельствует о неслучайном характере связей между отклонениями. Если рядов слишком мало по сравнению с количеством наблюдений n , то вполне вероятна положительная автокорреляция. Если же рядов слишком много, то вероятна отрицательная автокорреляция. Для более детального анализа предлагается следующая процедура. Пусть n – объем выборки; n_1 – общее количество знаков «+» при n наблюдениях; n_2 – общее количество знаков «-» при n наблюдениях; k – количество рядов.

Если при достаточно большом количестве наблюдений ($n_1 > 10, n_2 > 10$), количество рядов k лежит в пределах

$$k = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 \pm \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)},$$

то гипотеза об отсутствии автокорреляции не отклоняется.

Использование Q-тест Льюинга-Бокса теста предполагает использование Q-статистики, значение которой определяется по формуле:

$$Q = n(n+2) \cdot \sum_{\tau=1}^p \frac{r^2(\tau)}{n-\tau},$$

где $r(\tau)$ – выборочные значения автокорреляционной функции;

τ – величина лага;

n – число наблюдений.

Q-статистика имеет χ^2 -распределение с τ степенями свободы. Если Q-статистика меньше табличного χ^2 , то гипотеза об отсутствии автокорреляции принимается.

Важнейшими характеристиками качества модели, выбранной для прогнозирования, являются показатели ее точности:

1) абсолютная ошибка прогноза:

$$\Delta_t = \hat{y}_t - y_t;$$

2) относительная ошибка прогноза:

$$\delta_t = \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \cdot 100\%;$$

3) средняя абсолютная ошибка по модулю:

$$|\bar{\Delta}| = \frac{\sum_{t=1}^n |\hat{y}_t - y_t|}{n};$$

4) средняя относительная ошибка по модулю:

$$|\bar{\delta}| = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right| \cdot 100\% .$$

Если $|\bar{\delta}| < 10\%$, это свидетельствует о высокой точности модели, при $10\% \leq |\bar{\delta}| \leq 20\%$ точность хорошая, при $20\% \leq |\bar{\delta}| \leq 50\%$ – удовлетворительная;

5) дисперсия S^2 , или среднеквадратическая ошибка прогноза S , (применяется при сравнительной характеристике моделей):

$$S^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2}{n};$$

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Чем меньше значение этих характеристик, тем выше точность моделей.

7.3 Виды, свойства и оценка параметров основных видов тренда

Прямолинейный тренд и его свойства

Самым простым типом линии тренда является прямая линия, описываемая линейным (т.е. первой степени) уравнением тренда: $\hat{y}_i = a + b \cdot t_i$, где \hat{y}_i – выравненные, т.е. лишенные колебаний уровни тренда для лет с № i ; a – свободный член уравнения, численно равный среднему выравненному уровню для момента или периода времени, принятого за начало отсчета, т.е. для $t_i = 0$; b – средняя величина изменения уровней ряда за единицу изменения времени t ; t_i – номера моментов или периодов времени, к которым относятся уровни временного ряда (годы, кварталы, месяцы, даты).

Основные свойства тренда в форме прямой линии следующие:

- 1) равные изменения за равные промежутки времени;
- 2) если средний абсолютный прирост – положительная величина, то относительные приросты или темпы прироста постепенно уменьшаются;

3) если среднее абсолютное изменение – отрицательная величина, то относительные изменения или темпы сокращения постепенно увеличиваются по абсолютной величине снижения к предыдущему уровню;

4) если тенденция к сокращению уровней, а изучаемая величина является по определению положительной, то среднее изменение (b) не может быть больше среднего уровня (a);

5) при линейном тренде ускорение, т. е. разность абсолютных изменений за последовательные периоды, равно нулю.

Рассмотрим оценку параметров линейного тренда. Величина параметров a и b определяется по методу наименьших квадратов. Система "нормальных уравнения" МНК для прямой:

$$na + b \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n y_i,$$
$$a \sum_{i=1}^n t_i + b \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i t_i).$$

Решая эти уравнения с двумя неизвестными по данным фактического временного ряда y_i ($i=1-n$), получаем значения a и b . Если номера периодов (моментов) времени отсчитываются от начала ряда так, что первый период (момент) обозначен номером $t=1$, то свободный член a есть уровень тренда для предыдущего периода (момента), а не первого в ряду, как часто ошибочно полагают.

Параболический тренд и его свойства

Под названием параболического будем иметь в виду тренд, выраженный параболой 2-го порядка с уравнением: $\hat{y}_i = a + b \cdot t + c \cdot t^2$. Парабола 3-го и более высоких порядков редко применимы для выражения тенденции динамики и слишком сложны для получения надежных оценок параметров при ограниченной длине временного ряда. Прямую линию, с точки зрения математики, можно также считать видом парабол – параболой 1-го порядка, которая уже рассмотрена ранее.

Значения (смысл, сущность) параметров параболы 2-го порядка следующие:

свободный член a – это средний (выровненный) уровень тренда на момент или период, принятый за начало отсчета времени, т.е. $t=0$;

b – это средний за весь период среднегодовой прирост, который уже не является константой, а изменяется равномерно со средним ускорением, равным $2c$, которое и служит константой, главным параметром параболы 2-го порядка.

Следовательно, тренд в форме параболы 2-го порядка применяется для отображения таких тенденций динамики, которым свойственно примерно постоянное ускорение абсолютных изменений уровней (рост населения отдельных городов или регионов, ускоренное увеличение объема продукции в фазе циклического подъема, как, например, динамика экспорта).

Основные свойства тренда в форме параболы II порядка таковы:

1) неравные, но равномерно возрастающие или равномерно убывающие абсолютные изменения за равные промежутки времени;

2) парабола, рассматриваемая с точки зрения ее математической формы, имеет две ветви: восходящую с увеличением уровней признака, и нисходящую с их уменьшением. Но с точки зрения статистики, по содержанию изучаемого процесса изменений, трендом, выражающим определенную тенденцию развития, чаще всего можно считать только одну из ветвей: либо восходящую, либо нисходящую. В особых, более редких конкретных ситуациях мы не отрицаем возможности объединения обеих ветвей в единый тренд;

3) так как свободный член уравнения a , как значение показателя в начальный момент (период) отсчета времени, как правило величина положительная, то характер тренда, тенденции определяются знаками параметров " b " и " c ":

а) при $b>0$ и $c>0$ имеем восходящую ветвь, т.е. тенденцию к ускоренному росту уровней;

б) при $b<0$ и $c<0$ имеем нисходящую ветвь – тенденцию к ускоренному сокращению уровней;

в) при $b > 0$ и $c < 0$ имеем либо восходящую ветвь с замедляющимся ростом уровней, либо обе ветви параболы, восходящую и нисходящую, если их по существу можно считать единым процессом;

г) при $b < 0$ и $c > 0$ имеем либо нисходящую ветвь с замедляющимся сокращением уровней, либо обе ветви – нисходящую и восходящую, если их можно считать единой тенденцией;

4) при параболической форме тренда, в зависимости от соотношений между его параметрами, цепные темпы изменений могут либо уменьшаться, либо некоторое время возрастать, но при достаточно длительном периоде времени рано или поздно темпы роста всегда обязательно начинают уменьшаться, а темпы сокращения уровней при $b < 0$ и $c < 0$ обязательно начинают возрастать (по абсолютной величине относительного изменения).

Рассмотрим оценку параметров параболического тренда. Для вычисления параметров a , b , c по методу наименьших квадратов три частных производных функции: $f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ приравняются к нулю и после преобразований получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} na + b \sum_{i=1}^n t_i + c \sum_{i=1}^n t_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n t_i + b \sum_{i=1}^n t_i^2 + c \sum_{i=1}^n t_i^3 &= \sum_{i=1}^n y_i t_i \\ a \sum_{i=1}^n t_i^2 + b \sum_{i=1}^n t_i^3 + c \sum_{i=1}^n t_i^4 &= \sum_{i=1}^n y_i t_i^2. \end{aligned}$$

Экспоненциальный тренд и его свойства

Экспоненциальным трендом называют тренд, выраженный уравнением: $\hat{y}_i = a \cdot k^t$ или в форме $\hat{y}_i = \exp[\ln a + \ln k \cdot t_i]$. Свободный член экспоненты a равен выравненному уровню, т.е. уровню тренда в момент или период, принятый за начало отсчета времени, т.е. при $t=0$. Основным параметром экспоненциального тренда k является постоянным темпом изменения уровней (цепным). Если $k > 1$, имеем тренд

с возрастающими уровнями, причем это возрастание не просто ускоренное, а с возрастающим ускорением и возрастающими производными всех более высоких порядков. Если $k < 1$, то имеем тренд, выражающий тенденцию постоянного, но замедляющегося сокращения уровней, причем замедление непрерывно усиливается.

Экспоненциальный тренд характерен для процессов, развивающихся в среде, не создающей никаких ограничений для роста уровня. Из этого следует, что на практике он может развиваться только на ограниченном промежутке времени, так как любая среда рано или поздно создает ограничения, любые ресурсы со временем исчерпаемы. Экспоненциальный рост объема реализации и производства происходит при возникновении новых видов продукции и их освоения промышленностью: при появлении цветных телевизоров, видеомагнитофонов, пейджеров и т.п., но когда производство начинает наполнять рынок, приближаться к спросу, экспоненциальный рост прекращается.

Основные свойства экспоненциального тренда:

- 1) абсолютные изменения уровней тренда пропорциональны самим уровням:
- 2) экспонента экстремумов не имеет: при $k > 1$ тренд стремится к $+\infty$, при $k < 1$ тренд стремится к нулю;
- 3) уровни тренда представляют собой геометрическую прогрессию: уровень периода с № $t = m$ есть $a \cdot k^m$;
- 4) при $k > 1$ тренд отражает ускоряющийся неравномерно рост уровней, при $k < 1$ тренд отражает замедляющееся неравномерно уменьшение уровней.

Рассмотрим оценку параметров экспоненциального тренда. Для нахождения параметров a и k уравнение логарифмируем:

$$\ln \hat{y}_i = \ln a + t_i \ln k .$$

В такой форме, т.е. для логарифмов, уравнение соответствует линейному, а, следовательно, метод наименьших квадратов дает для логарифмов a и k нормальные уравнения, аналогичные таковым для параметров a и b линейного тренда.

$$n \ln a + \ln k \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i ,$$

$$\ln a \sum_{i=1}^n t_i + \ln k \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i \ln y_i .$$

Гиперболический тренд и его свойства

Из различных форм гипербол рассмотрим только наиболее простую: $\hat{y} = a + \frac{b}{t}$.

Если основной параметр гиперболы $b > 0$, то этот тренд выражает тенденцию замедляющегося снижения уровней и при $t \rightarrow \infty$ $\hat{y} \rightarrow a$. Таким образом, свободный член гиперболы – это предел, к которому стремится уровень тренда.

Такая тенденция наблюдается, например, при изучении процесса снижения затрат любого ресурса (труда, материалов, энергии) на единицу данного вида продукции, или ее себестоимости в целом. Затрата ресурса не может стремиться к нулю, значит, экспонента не соответствует сущности процесса; нужно применить гиперболическую формулу тренда.

Если параметр $b < 0$, то с возрастанием t , т.е. с течением времени, уровни тренда возрастают и стремятся к величине a при $t \rightarrow \infty$.

Такой характер динамики присущ, например, показателям КПД двигателей или иных преобразователей энергии (трансформатор тока, фотоэлемент и т.п.). По мере научно-технического прогресса эти КПД постепенно повышаются, но никогда не могут превысить определенного предела для каждого типа двигателя и не могут превысить 100% в принципе для любого преобразователя энергии. При расчете гиперболического тренда нельзя нумеровать года от середины ряда, так как значения $\frac{1}{t_i}$ должны быть всегда положительными.

Свойства гиперболического тренда таковы:

1) абсолютный прирост или сокращение уровней, ускорение абсолютных изменений, темп изменения - все они не являются постоянными. При $b > 0$ уровни замедленно уменьшаются, отрицательные абсолютные изменения и положительные ускорения уменьшаются, цепные темпы изменения растут и стремятся к 100 %;

2) при $b < 0$ уровни замедленно возрастают, положительные абсолютные изменения уменьшаются, отрицательные ускорения также уменьшаются и цепные темпы роста замедленно уменьшаются, стремясь к 100 %.

Как видим, гиперболический тренд описывает в любом случае тенденцию такого процесса, показатели которого со временем затухают, переход от движения к застою.

Рассмотрим оценку параметров гиперболического тренда. Гиперболический тренд отличается от линейного уравнения тем, что вместо t_i в первой степени включает номера периодов времени (или моментов) в минус первой степени: $\frac{1}{t_i}$. Соответственно нормальные уравнения метода наименьших квадратов получают вид:

$$na + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = \sum_{i=1}^n y_i$$
$$a \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{t_i}.$$

Однако, нельзя, в отличие от линейного тренда, переносить начало отсчета периодов времени в середину, так как гипербола не имеет постоянного параметра изменения уровней на протяжении всего периода, и все величины $\frac{1}{t_i}$ должны быть положительными.

7.4 Статистическое изучение колеблемости во временных рядах

Все многообразие встречающихся колебаний во временных рядах можно представить как «смесь» в разных пропорциях трех основных типов:

- 1) пилообразной, или маятниковой, колеблемости;
- 2) долгопериодических циклов колебаний;
- 3) случайно распределенной во времени колеблемости.

Пилообразная колеблемость. Характерной чертой этого типа колеблемости является правильное, регулярное чередование отклонений от тренда «вверх» и «вниз», т.е. положительных по знаку и отрицательных через одно. Поскольку это похоже на колебание маятника часов вправо – влево, данный тип колеблемости называют также «маятниковой колеблемостью». Название же «пилообразная» происходит от вида графика, похожего на зубья пилы (хотя величина «зубьев», разумеется, не должна быть, как у хорошей пилы, одинаковой).

Распознать наличие, как элемента, пилообразных колебаний во временном ряду можно:

1) по виду графика;

2) подсчетом числа «локальных экстремумов» в ряду отклонений от тренда: чем это число ближе к числу уровней ряда, тем большую роль играют пилообразные колебания в их общем комплексе;

3) по знаку и величине коэффициента автокорреляции отклонений от тренда первого порядка, т.е. со сдвигом (лагом) на 1 год.

Коэффициент автокорреляции отклонений имеет формулу:

$$r_a^I = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}}{\frac{e_1^2}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} e_i^2 + \frac{e_n^2}{2}},$$

где $e_t = y_t - \hat{y}_t$ – ряд остатков (отклонения фактических уровней временного ряда (y_t) от выровненных (\hat{y}_t)).

Чем ближе коэффициент автокорреляции к – 1, тем больше роль пилообразной составляющей в общей колеблемости изучаемого временного ряда. При коэффициенте, по алгебраической величине превышающем 0,3, можно считать пилообразную составляющую несущественной или отсутствующей вовсе, если длина ряда не больше 20 уровней.

Долгопериодическая циклическая колеблемость. Характерной чертой этого типа колебаний является наличие нескольких (многих) подряд отклонений одного

знака, затем сменяющихся примерно таким же количеством отклонений противоположного знака подряд. Затем весь цикл вновь повторяется, причем, как правило, длина всех циклов одинакова или хотя бы примерно равная. Если равенство отдельных циклов существенно нарушается, говорят о «квазициклической колеблемости», т.е. как бы циклической.

Для прогнозирования циклическая колеблемость благоприятна, особенно, если длина цикла строго постоянна. Прогноз на любой будущий период состоит из прогноза тренда и циклического отклонения от него, соответствующего фазе цикла в прогнозируемый период.

Как правило, за цикл наблюдаются два экстремума отклонений от тренда – один максимум и один минимум. Следовательно, за период, состоящий из N уровней, насчитывается экстремумов:

$$K = 2 \frac{N}{l},$$

где l – длина цикла.

Причиной циклической колеблемости является какая-либо основная сила, влияющая на уровень изучаемого явления. Иначе говоря, есть главный фактор, вызывающий колебания.

Распознать циклическую долгопериодическую колеблемость можно по виду графика подсчетом числа экстремумов в ряду отклонений от тренда и по коэффициенту автокорреляции отклонений 1-го порядка. Если число локальных экстремумов в ряду отклонений мало, то можно предположить наличие циклической колеблемости. Поскольку отклонения одного и того же знака следуют подряд, их произведения являются положительными числами, а отрицательные произведения встречаются лишь дважды за цикл – при пресечении графиком фактического ряда уровней тренда вниз и вверх. Следовательно, коэффициент автокорреляции при долгопериодической колеблемости – величина положительная, стремящаяся к плюс единице при $l \rightarrow \infty$. При наличии фактического коэффициента больше, чем $+0,3$

можно считать, что в общей колеблемости временного ряда есть существенная циклическая составляющая, а при $r_a^l > 0,7-0,6$ циклическая составляющая является главной.

Для нахождения длины цикла, особенно, если цикличность не строгая, а «квази», нужно последовательно вычислить коэффициенты автокорреляции отклонений от тренда разных порядков, т.е. с лагом 1, 2, 3 и т.д. периодов времени. Наибольший по алгебраической величине коэффициент автокорреляции отметит длину цикла.

Случайно распределенная во времени колеблемость. Характерной чертой данного типа колебаний является хаотичность последовательности отклонений: после отрицательного отклонения от тренда может следовать снова отрицательное или даже два – три, а может и положительное (два – три). Это как бы мелкие «куски» пилообразной и циклической колеблемости разных длин цикла, перемешанные друг с другом. Иногда случайно распределенную колеблемость называют «интерференцией колебаний» (термин, заимствованный из физики).

Причиной случайно распределенных колебаний служит наличие большого комплекса независимых или слабо связанных между собой факторов, влияющих на уровни изучаемого явления.

Распознать случайно распределенную во времени колеблемость по виду графика труднее, чем два других типа колебаний. Число локальных экстремумов может также колебаться. В среднем, как доказал английский статистик М. Кендэл, их число составляет $2/3(n-2)$, при среднем квадратическом отклонении, равном

$$\sqrt{\frac{16n-29}{90}}.$$

Показатели силы и интенсивности колебаний аналогичны показателям силы и интенсивности вариации признана в пространственной совокупности. Отличаются же по существу тем, что показатели вариации вычисляются на основе отклонений от постоянной средней величины, а показатели, характеризующие колеблемость уровней временного ряда – по отклонениям отдельных уровней от тренда, который можно считать «подвижной средней величиной».

Показатели абсолютной величины (силы) колебаний. Амплитуда, или размах колебаний, – разность между наибольшим и наименьшим по алгебраической величине отклонениями от тренда. Показатель амплитуды колебаний характеризует лишь крайние пределы, но не среднюю силу колеблемости. Чем длиннее ряд, тем больше вероятность, что в нем встретится особенно большое отклонение от тренда. Поэтому с увеличением длины изучаемого периода возрастает в среднем и амплитуда колебаний в отличие от всех других показателей колеблемости, которые не зависят от длины ряда.

Вторым показателем колеблемости по абсолютной величине (силе) является среднее по модулю отклонение от тренда, которое мы обозначим как $a(t)$.

$$a(t) = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n}.$$

Знак (t) отличает указанный и все последующие показатели от аналогичного среднего по модулю отклонения от постоянной средней величины, меры силы вариации в пространственной совокупности. Средний модуль отклонений измеряется в тех же единицах, как уровни ряда.

Хотя средний модуль отклонений тренда вполне пригоден, как обобщающий показатель силы колебаний за изучаемый период времени, но, как известно, модули имеют и существенные недостатки, в частности, с ними невозможно связать вероятностные законы распределения. Поэтому модули непригодны для прогнозирования доверительных границ возможных колебаний в будущем с заданной вероятностью.

Чаще всего в качестве показателя силы колебаний используется среднее квадратическое отклонение уровней ряда от тренда, обозначаемое $\sigma(t)$ или $S(t)$.

Если речь идет только об измерении колеблемости во временном ряду и нет задачи оценки силы колебаний «вообще», о прогнозе на будущее, тогда следует вычислять и использовать обычное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}.$$

Если же речь идет о вычислении оценки генерального показателя колеблемости, а исходный временной ряд рассматривается как выборка из генерального ряда, продолжаемого и в прошлое и в будущее, то следует учитывать потерю степеней свободы колеблемости и применять показатель:

$$S(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p}},$$

где p – число параметров в уравнении тренда.

Именно такая несмещенная оценка генерального параметра может быть распространена на будущие периоды, т.е. она необходима в прогнозировании. Среднее квадратическое отклонение, как известно, входит в формулу нормального закона распределения вероятностей, на его основе можно рассчитывать вероятности ошибок прогнозов и их доверительные границы.

Показатели относительной интенсивности колебаний. Как относительные показатели интенсивности вариации рассчитываются в виде отношения ее абсолютных показателей к постоянной средней величине, так и относительные показатели интенсивности колебаний рассчитываются как отношения индивидуальных отклонений отдельного периода к уровню тренда за этот же период, а обобщающие показатели – как отношения обобщающих показателей силы колебаний за весь ряд к обобщающему показателю уровней ряда – среднему уровню.

Аналогично коэффициенту пространственной вариации отношение среднего квадратического отклонения от тренда к среднему уровню временного ряда называют «коэффициентом колеблемости», который мы обозначаем для отличия от коэффициента пространственной вариации, как $V(t)$. Его формула такова:

$$V(t) = \frac{S(t)}{y};$$

– для оценки генеральной величины и прогнозов или

$$V(t) = \frac{\sigma(t)}{y};$$

– для измерения интенсивности колебаний за данный период как изолированный отрезок, без распространения на прошлые и будущие периоды времени.

Величина коэффициента колеблемости играет также важную роль при анализе устойчивости в динамике. В заключении необходимо учитывать, что любая погрешность в определении типа тренда или в расчете его параметров приводит к преувеличению показателей силы и интенсивности колебаний. Так как реальные временные ряды всегда отклоняются от строго линейной, параболической, экспоненциальной или иной любой абстрактно-математической линии, то колеблемость всегда несколько преувеличивается за счет неполного соответствия истинной тенденции динамики какому-либо принятому типу линии тренда.

7.5 Корреляция рядов динамики

При изучении взаимосвязей между экономическими явлениями по рядам динамики необходимо помнить, что корреляция уровней рядов может привести к ложным выводам: высокая корреляция между уровнями рядов может иметь место и при отсутствии реальной связи между явлениями. Иными словами, при корреляции уровней временных рядов возникает опасность установить закономерность там, где на самом деле экономической природы связи нет. Наличие ложной корреляции связано с тенденцией каждого из рядов динамики, с автокорреляцией их уровней.

Поэтому, даже если корреляция рядов динамики экономически оправдана, при построении регрессионной модели для последующего прогноза требуется их предварительная специальная обработка.

Чтобы иметь возможность использовать корреляционные методы для изучения связей по динамическим рядам, нужно исключить влияние автокорреляции и сделать уровни каждого из взаимосвязанных рядов статистически независимыми. Если ряды динамики характеризуются не только тенденцией, но и периодическими колебаниями, то при исследовании корреляции по рядам динамики следует учесть оба фактора, т.е. из первоначальных данных должна быть исключена как тенденция, так и периодическая составляющая и лишь затем измерена корреляция рядов динамики. По изменениям случайной компоненты одного ряда в зависимости от колеблемости случайной компоненты другого ряда можно судить и о тесноте связи между исследуемыми рядами динамики. Однако и остаточные величины (отклонения уровней от тренда) могут оказаться автокоррелированными в силу неправильно выбранного вида тренда. Поэтому следует проверять наличие автокорреляции в остатках по формуле:

$$r_{d_t d_{t+1}} = \frac{\overline{d_t d_{t+1}}}{\sqrt{\overline{d_t^2} \overline{d_{t+1}^2}}},$$

где d_t - отклонения фактических значений ряда от тренда, т.е. $d_t = y_t - \hat{y}_t$.

Измерение корреляции в рядах динамики, как и в статике, основано на сопоставлении параллельной вариации явлений. Если ряды динамики характеризуются одинаковой вариацией, то они тесно связаны; если же характер колеблемости в рядах различен, то показатель корреляции примет низкое значение. Следовательно, выводы о корреляции рядов динамики должны базироваться на всестороннем теоретическом анализе исследуемой связи, а не ограничиваться величиной показателя корреляции, отражающей, возможно, и случайное сопутствие колеблемости двух рядов.

Если выдвигается гипотеза, что остаточные величины связаны между собой нелинейными соотношениями, то обобщенная оценка тесноты связи может быть дана через индекс корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \frac{S_{yx}^2}{\sigma_{d_y}^2}},$$

где $\sigma_{d_y}^2 = \frac{\sum (d_y - \bar{d}_y)^2}{n}$ – дисперсия остаточных величин результативного признака;

$S_{d_{yx}}^2 = \frac{\sum (d_y - \hat{d}_{yx})^2}{n-p}$ – дисперсия, характеризующая отклонения фактических

значений остатков результативного признака от теоретических, рассчитанных на основе уравнения регрессии.

Абсолютная величина индекса корреляции находится в пределах: $0 \leq R \leq 1$. Чем ближе R к 1, тем теснее связь.

Если предполагается линейная связь между остаточными величинами рядов, то теснота связи между двумя динамическими рядами измеряется линейным коэффициентом корреляции. Он может быть определен по отклонениям от тренда или по первым разностям:

- по отклонениям от тренда

$$r_{d_y d_x} = \frac{\sum d_y d_x}{\sqrt{\sum d_y^2 \sum d_x^2}};$$

- по первым разностям

$$r_{\Delta y \Delta x} = \frac{(\overline{\Delta y \Delta x} - \overline{\Delta y} \cdot \overline{\Delta x})}{\sigma_{\Delta y} \cdot \sigma_{\Delta x}}.$$

Коэффициент корреляции принимает значения в интервале $-1 \leq r \leq 1$. Отрицательная величина его указывает на обратную связь между динамикой явлений. Чем коэффициент корреляции ближе по абсолютной величине к 1, тем теснее рассматриваемая связь.

7.6 Регрессия по рядам динамики и прогнозирования на её основе

Уравнение регрессии по рядам динамики можно построить тремя способами:

- 1) регрессия первых разностей;
- 2) регрессия по отклонениям от тренда;
- 3) регрессия по уровням ряда с включением в нее фактора времени.

В каждом из этих способов оценка параметров регрессии дается традиционным методом наименьших квадратов, т.е. как и при построении уравнения регрессии в статике и при построении уравнения трендов. Рассмотрим интерпретацию параметров регрессии и ее использование при прогнозировании.

В уравнении регрессии по первым разностям

$$\Delta y = a + b\Delta x$$

параметр b показывает на сколько изменится скорость роста результативного признака с изменением скорости роста факторного признака на единицу своего измерения. Чтобы использовать данное уравнение в прогнозировании, необходимо определить на перспективу скорость развития факторного признака, тогда рост скорости результативного признака составит: $\Delta y_p = a + b\Delta x_p$. От данного уравнения можно перейти к уравнению, в котором прогнозируется уровень ряда, а не его скорость. Для этого необходимо раскрыть содержание абсолютного прироста, выразив его через соответствующие значения уровней ряда:

$$(y_p - y_n) = a + b(x_p - x_n),$$

где y_p – прогнозное значение результативного признака;

y_n – конечный уровень динамического ряда;

x_p – прогнозное значение факторного признака результативного признака;

x_n – конечный уровень факторного признака.

Соответственно прогнозное значение для ряда y составит:

$$y_p = y_n + a + b(x_p - x_n).$$

Регрессия по отклонениям от тренда имеет вид $dy = b \cdot dx$. Коэффициент регрессии b означает, что случайные отклонения по ряду y в среднем в b раз выше случайных колебаний по ряду x .

Для прогноза удобно от уравнения в отклонениях от тренда перейти к уравнению, связывающему между собой конкретные уровни временных рядов. Подставим в уравнение регрессии по отклонениям от тренда значения dy и dx :

$$(y_t - \hat{y}_t) = b \cdot (x_t - \hat{x}_t),$$

откуда $y_t = \hat{y}_t + b \cdot (x_t - \hat{x}_t)$.

Данную модель можно использовать для прогноза:

$$y_p = \hat{y}_{t=p} + b(x_p - \hat{x}_{t=p}),$$

где y_p – прогнозное значение результативного признака;

$\hat{y}_{t=p}$ – прогноз по тренду результативного признака;

x_p – прогнозное значение факторного признака;

$\hat{x}_{t=p}$ – прогноз по тренду факторного признака.

Результат прогноза зависит от качества прогноза фактора x , от качества трендовых моделей, используемых для прогнозирования.

Математически доказано, что если при измерении связи по динамическим рядам непосредственно ввести в уравнение регрессии фактор времени t и определять параметры уравнения по исходным уровням, то автокорреляция в рядах динамики будет устранена. Это значит, что при изучении связи между двумя признаками по динамическим рядам следует при линейной их зависимости искать уравнение вида:

$$\hat{y}_t = a + bx + ct .$$

Параметры такого уравнения также находятся МНК. Параметр b фиксирует силу связи y с x , т.е. от показывает среднее изменение y с изменением x на единицу.

Параметр c характеризует среднегодовой абсолютный прирост результативного показателя под воздействием прочих факторов, при закреплении фактора x на постоянном уровне.

В настоящее время чаще всего строится регрессия по рядам динамики с введением в модель фактора времени. Это связано с тем, что при таком подходе упрощается обработка материала: не нужно определять тренды по всем рядам динамики, искать отклонения по ним, строить модель по отклонениям от трендов и переходить далее обратно к уровням.

Фактор времени чаще всего вводится в модель в виде линейного члена, даже если другие факторы подвергаются логарифмированию или иному преобразованию.

При увеличении числа факторов, включаемых в регрессию, рассмотренные проблемы устранения автокорреляции уровней рядов динамики остаются, но появляются новые, связанные с построением множественной регрессии: мультиколлинеарность факторов, отбор их и др.

7.7 Вопросы для самоконтроля к разделу 7

- 1 Какие виды временных рядов вы знаете? Приведите примеры.
- 2 Поясните, в чем состоят характерные отличия временных рядов от пространственных выборок.
- 3 Какие требования предъявляются к временным рядам как к исходной информации при прогнозировании?
- 4 Как рассчитываются средний абсолютный прирост, средний темп роста, средний темп прироста? Когда правомерно использовать средний абсолютный прирост и средний темп роста для расчета прогнозов?
- 5 Как на стадии графического анализа динамики временного ряда можно определить характер сезонности (аддитивный или мультипликативный)?
- 6 Охарактеризуйте основные типы кривых роста, наиболее часто используемые на практике при построении трендовых моделей.
- 7 Назовите важнейшие характеристики точности моделей прогнозирования.
- 8 Объясните суть метода последовательных разностей.
- 9 Каким образом определяется значение критической статистики в тесте Дарбина – Уотсона?
- 10 Опишите алгоритм проверки гипотезы об отсутствии автокорреляции первого порядка в остатках модели с помощью критерия Дарбина - Уотсона?
- 11 Какова интерпретация коэффициентов линейной трендовой модели?
- 12 Какова интерпретация коэффициентов показательной трендовой модели?
- 13 Для каких целей может быть использован критерий серий?
- 14 Какие методы проверки ряда на стационарность вы знаете?
- 15 Назовите методы проверки гипотезы об отсутствии автокорреляции остатков.
- 16 Какие типы колебаний различают при анализе временных рядов?
- 17 Охарактеризуйте основные свойства пилообразной колеблемости.
- 18 Охарактеризуйте основные свойства долгопериодической циклической колеблемости.

19 Охарактеризуйте основные свойства случайно распределенной во времени колеблемости.

20 Какие методы используются для распознавания типа колебаний?

21 Назовите показатели абсолютной величины колебаний. Как они рассчитываются?

22 Назовите показатели относительной величины колебаний. Как они рассчитываются?

23 Что такое автокорреляционная функция и в чем ее назначение?

24 В чем специфика построения регрессионной модели по рядам динамики?

25 Перечислите основные способы построения регрессионных моделей по рядам динамики. Какой способ применяется на практике чаще?

26 Назовите основные способы оценки тесноты и направления связи по рядам динамики.

27 В чем суть построения модели регрессии первых разностей?

28 В чем суть построения модели регрессии по отклонениям от тренда?

29 В чем суть построения модели регрессии с включением фактора времени?

7.8 Задания к разделу 7

7.1 Сформировать временной ряд с учетом объекта научного исследования.

7.2 Рассчитать показатели динамики и дать интерпретацию полученным результатам.

7.3 Проверить утверждение об отсутствии тенденции во временном ряду, используя известные критерии.

7.4 Оцените параметры кривых роста и дайте интерпретацию параметров выбранной кривой роста.

7.5 Оцените точность моделей с помощью критерия Дарбина-Уотсона, средней ошибки аппроксимации.

7.6 Определите тип колеблемости построенного временного ряда.

7.7 Рассчитайте абсолютные и относительные показатели колеблемости. На основе полученных данных сделайте выводы о силе и интенсивности колебаний.

При выполнении заданий по данному разделу необходимо рассмотреть основные понятия, классификацию и компонентный состав временных рядов. Понять сущность, способы расчета и экономическую интерпретацию основных аналитических и средних показатели динамики.

Научится оценивать тесноту и направление связи между показателями, представленными временными рядами. Строить модели регрессии по временным рядам имеющим тенденцию, и прогнозировать на их основе.

При решении задач, необходимо уделить внимание на наличии тенденции во временных рядах, к подбору вида кривых роста и к оцениванию параметров кривых роста и точности полученных моделей.

При изучении вопроса колеблемости временных рядов необходимо научиться оценивать силу и интенсивность колебаний во временных рядах, а также давать сравнительную оценку колеблемости временных рядов

7.9 Тесты для самоконтроля к разделу 7

1. Ряд динамики – это:

- а) временная последовательность значений статистических показателей;
- б) величина, характеризующая степень распространения, развития какого-либо явления в определенной среде;
- в) упорядоченное распределение единиц совокупности по какому-либо признаку.

2. В каком ряду уровни ряда характеризуют изменения показателя на определенный момент времени:

- а) в интервальном ряду динамики;
- б) в моментном ряду динамики;

в) в интервальном ряду распределения.

3. Среднеквадратическая ошибка прогноза рассчитывается по формуле:

а)
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2}{n}} ;$$

б)
$$|\bar{\delta}| = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \cdot 100\% ;$$

в)
$$\Delta_t = y_t - \hat{y}_t ;$$

г)
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2}{n}} .$$

4. Уровни характеризуют изменение явления за отдельные периоды времени в:

а) интервальном ряду распределения;

б) моментном ряду динамики;

в) интервальном ряду динамики;

г) дискретном ряду распределения.

5. Уровень, с которым производится сравнение является:

а) текущим;

б) базисным;

в) отчетным

6. Темпом роста называется:

а) отношение абсолютного прироста к базисному уровню;

б) отношение последующего уровня к предыдущему;

в) разность последующего и предыдущего уровней ряда динамики.

7. Для обеспечения сопоставимости уровней временных рядов может быть проведено:

- а) смыкание временных рядов;
- б) периодизация временного ряда;
- в) интегрирование временного ряда;
- г) удаление тенденции из временных рядов.

8. Темп прироста характеризует:

- а) на сколько единиц в абсолютном выражении уровень одного периода больше (меньше) предыдущего уровня;
- б) во сколько раз уровень данного периода больше (меньше) предыдущего уровня;
- в) на сколько процентов уровень данного периода больше (меньше) уровня предыдущего периода;
- г) во сколько раз уровень данного периода больше предыдущего уровня.

9. Абсолютное значение одного процента прироста характеризует:

- а) абсолютную скорость роста (снижения) уровней ряда динамики;
- б) интенсивность изменения уровней;
- в) относительное изменение абсолютного прироста уровня ряда динамики;
- г) содержание одного процента прироста в абсолютном выражении.

10. Темп роста представляет собой:

- а) отношение уровней ряда;
- б) разность уровней ряда;
- в) произведение уровней ряда;
- г) отклонение от тренда.

11. Формула $\sqrt[n-1]{\frac{Y_n}{Y_0}}$ используется для расчета:

- а) среднего абсолютного прироста;
- б) среднего темпа роста;
- в) среднего темпа прироста;
- г) среднего уровня ряда.

12. Назовите методы выявления основной тенденции ряда динамики:

- а) индексный метод;
- б) аналитическое выравнивание;
- в) балансовый метод;
- г) метод конечных разностей.

13. Отношение текущего показателя к предшествующему или базисному показателю представляет собой относительную величину:

- а) планового задания;
- б) выполнения плана;
- в) динамики;
- г) сравнения.

14. Темп роста характеризует:

- а) на сколько единиц в абсолютном выражении уровень одного периода больше (меньше) предыдущего уровня;
- б) во сколько раз уровень данного периода больше (меньше) предыдущего уровня;
- в) на сколько процентов уровень данного периода больше (меньше) предыдущего уровня;
- г) на сколько единиц уровень данного периода больше предыдущего уровня.

15. Разность уровней ряда динамики называется ...

- а) абсолютным приростом;

- б) темпом роста;
- в) темпом прироста;
- г) коэффициент роста.

16. Отношение уровней ряда динамики называется ...

- а) абсолютным приростом;
- б) средним уровнем;
- в) коэффициентом роста;
- г) абсолютным значением одного процента прироста.

17. Базисный абсолютный прирост равен:

- а) произведению цепных абсолютных приростов;
- б) сумме цепных абсолютных приростов;
- в) корню $(n-1)$ степени из произведения цепных абсолютных приростов;
- г) корню $(n-1)$ степени из суммы абсолютных приростов.

18. Средний уровень моментного ряда динамики исчисляется по формуле средней

- а) арифметической простой;
- б) геометрической;
- в) гармонической;
- г) хронологической.

19. Средний уровень интервального ряда динамики с равными временными промежутками исчисляется по формуле средней:

- а) арифметической простой;
- б) гармонической взвешенной;
- в) хронологической простой;
- г) хронологической взвешенной.

20. Средний уровень интервального ряда динамики с неравными временными промежутками исчисляется по формуле средней:

- а) арифметической простой;
- б) арифметической взвешенной;
- в) гармонической простой;
- г) хронологической взвешенной.

21. При исчислении среднегодового темпа роста верной является формула:

а) $\bar{T}_p = \sqrt[m]{T_1 + T_2 + \dots + T_m}$;

б) $\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_n}$;

в) $\bar{T}_p = \frac{\sum y_i}{n}$;

г) $\bar{T}_p = \frac{y_1}{y_0}$.

22. Временной ряд – это:

а) последовательность упорядоченных во времени числовых показателей, характеризующих уровень состояния и изменения изучаемого явления;

б) последовательность числовых показателей, характеризующих уровень состояния и изменения изучаемого явления;

в) последовательность упорядоченных временных интервалов, или моментов времени;

г) последовательность числовых показателей, характеризующих уровень состояния и изменения изучаемого явления по отдельным экономическим субъектам;

23. Для каких целей применяется критерий серий:

- а) для проверки гипотезы о случайности ряда;
- б) для проверки адекватности модели;
- в) для проверки точности модели;

г) для проверки гипотезы о постоянстве дисперсии.

24. К какому классу кривых роста относится класс полиномов:

- а) функции, используемые для описания процессов с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста;
- б) кривые насыщения;
- в) кривые насыщения с отсутствием пределов роста;
- г) кривые насыщения, имеющие точку перегиба.

25. К какому классу кривых роста относится экспоненциальная кривая:

- а) функции, используемые для описания процессов с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста;
- б) кривые насыщения;
- в) кривые насыщения с отсутствием пределов роста;
- г) кривые насыщения, имеющие точку перегиба.

26. К какому классу кривых роста относится модифицированная экспонента:

- а) функции, используемые для описания процессов с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста;
- б) кривые насыщения;
- в) кривые насыщения с отсутствием пределов роста;
- г) кривые насыщения, имеющие точку перегиба.

27. Временной ряд описывается параболическим трендом $y_i = 8,83 + 0,12t_i - 0,004t_i^2$. Следовательно, имеем:

- а) восходящую ветвь с замедляющимся ростом уровней;
- б) нисходящую ветвь с замедляющимся ростом уровней;
- в) нисходящую ветвь с ускоренным ростом уровней;
- г) восходящую ветвь с замедляющимся снижением уровней.

8 Статистические методы в прогнозировании явлений и процессов

8.1 Статистический анализ и прогнозирование периодических колебаний

8.2 Использование адаптивных методов прогнозирования в экономических исследованиях

8.3 Прогнозирование с помощью ARMA и ARIMA –процессов

8.1 Статистический анализ и прогнозирование периодических колебаний

По временным рядам за ряд лет в помесечном или поквартальном разрезе могут наблюдаться сезонные колебания.

Сезонные колебания – это разновидность периодических колебаний. Для них характерны внутригодичные, повторяющиеся устойчиво из месяца в месяц (из квартала в квартал) изменения в уровнях, т.е. это регулярно повторяющиеся подъемы и снижение уровней временного ряда внутри года на протяжении ряда лет.

Существует две модели сезонности: аддитивная и мультипликативная.

В аддитивной модели сезонность выражается в виде абсолютной величины, которая добавляется или вычитается из среднего значения ряда, чтобы выделить показатель сезонности.

В мультипликативной модели сезонность выражена как процент от среднего уровня, который должен быть учтен при прогнозировании путем умножения на него среднего значения ряда.

Методика построения аддитивной и мультипликативной модели различается в зависимости от того, есть или нет тенденций в ряду динамики.

Если во временном ряду отсутствует тенденция, то уровень ряда рассматривается как функция сезонности и случайности:

$$y_i = f(s, \varepsilon),$$

где y_i – фактические уровни временного ряда;

S – сезонная составляющая;

ε – случайная компонента.

При аддитивной модели уровень такого ряда можно представить как:

$$y_i = \bar{y} + S + \varepsilon.$$

$$\text{Тогда } (y_i - \bar{y}) = (\bar{y}_s - \bar{y}) + (y_i - \bar{y}_s),$$

где \bar{y}_s – средний уровень ряда соответствующего периода внутри года (месяца, квартала) за ряд лет.

Величина $(\bar{y}_s - \bar{y})$ отражает влияние сезонности (сезонная составляющая S), а величина $(y_i - \bar{y}_s)$ характеризует влияние случайной компоненты.

При мультипликативной модели уровень динамического ряда можно представить как произведение его составляющих:

$$y_i = \bar{y} \cdot \frac{\bar{y}_s}{\bar{y}} \cdot \frac{y_i}{\bar{y}_s},$$

где $\frac{\bar{y}_s}{\bar{y}}$ – коэффициент сезонности (K_s);

$\frac{y_i}{\bar{y}_s}$ – отражает влияние случайного фактора.

Чем больше коэффициент сезонности, тем больше амплитуда колебаний уровней ряда относительно его среднего уровня, тем существеннее влияние сезонности. Чем меньше влияние случайной составляющей, тем в большей мере рассматриваемая модель адекватно описывает исходный временной ряд.

Прогнозирование динамического ряда с сезонными колебаниями при отсутствии в нем тенденции сводится к прогнозированию среднего уровня (\bar{y}_p) с последующей корректировкой его на сезонную компоненту:

$$y_p = \bar{y}_p \pm S - \text{аддитивная модель};$$

$$y_p = \bar{y}_p \cdot K_S - \text{мультипликативная модель}.$$

Значительно распространена ситуация, когда динамический ряд имеет тенденцию.

В этом случае уровень временного ряда рассматривается как функция тенденции (t), сезонности (S), и случайности (ε). Тогда аддитивная модель уровня динамического ряда примет вид:

$$y_i = \hat{y}_t + S + \varepsilon,$$

где \hat{y}_t – теоретическое значение уровня ряда согласно тенденции;

S – сезонная составляющая;

ε – случайная компонента.

Общая колеблемость уровней временного ряда раскладывается на три составляющие:

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_t - \bar{y}) + (y_s - \hat{y}_t) + (y_i - y_s),$$

где $(y_i - \bar{y})$ – общая вариация;

$(\hat{y}_t - \bar{y})$ – влияние тенденции;

$(y_s - \hat{y}_t)$ – влияние сезонности;

$(y_i - y_s)$ – влияние случайности;

y_s – тренд с учетом сезонности.

Алгоритм построения тренд-сезонной аддитивной модели:

1 Сглаживание временного ряда с помощью простой скользящей средней. Период скольжения должен быть равен 1 году (если период четный, то проводится центрирование скользящей средней).

2 Рассчитывают абсолютные показатели сезонности:

$$S_i = y_i - \tilde{y},$$

где \tilde{y} – выровненные скользящие средние;

3 Рассчитываются средние показатели сезонности для одноименных кварталов (месяцев):

$$\bar{S}_i = \frac{1}{n} \sum S_i.$$

4 Если $\sum \bar{S}_i \neq 0$, проводится корректировка сезонной компоненты:

$$\hat{S}_i = \bar{S}_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{S}_i.$$

5 Проводим десеоналирование временного ряда: из исходных уровней вычитаем скорректированную сезонную компоненту:

$$y_i - \hat{S}_i.$$

6 По десеоналированному временного ряду проводим аналитическое выравнивание.

7 Рассчитываем тренд с учетом сезонности:

$$y_s = \hat{y}_t + \hat{S}_i.$$

При мультипликативной модели уровень временного ряда можно представить в виде сомножителей:

$$y_i = \hat{y}_t \cdot K_s \cdot E,$$

где K_s – коэффициент сезонности;

E – коэффициент влияния случайности $\left(\frac{y_i}{y_s} \right)$.

Алгоритм построения тренд-сезонной мультипликативной модели:

1 Сглаживание временного ряда с помощью скользящей средней;

2 Рассчитываем коэффициент сезонности

$$K_s = \frac{y_i}{\tilde{y}_i}.$$

3 Определяем средние показатели сезонности для одноименных кварталов (месяцев)

$$\bar{K}_j = \frac{1}{n} \sum K_{si}.$$

4 Если при поквартальном наблюдении $\sum \bar{K} \neq 4$, а при помесечном $\sum \bar{K} \neq 12$, то выполняется корректировка коэффициента сезонности

$$\hat{K}_j = \bar{K}_j \cdot \frac{4(12)}{\sum \bar{K}_j}.$$

5 Исключаем сезонность из уровней ряда

$$\frac{y_i}{\hat{K}_j}.$$

6 Проводится аналитическое выравнивание десеоналированного ряда.

7 Рассчитываются уровни временного ряда, обусловленные влиянием тенденции и сезонности

$$y_s = \hat{y}_t \cdot \hat{K}_j.$$

Аддитивная модель целесообразна, если размах сезонных колебаний изменяется слабо.

При наличии периодических колебаний в ряду динамики модель прогноза должна учитывать эти колебания. С этой целью может быть использован ряд Фурье.

Уровни временного ряда варьируют вокруг среднего значения (\bar{y}), при этом эти колебания (волны) повторяются, т.е. перед нами периодический временной ряд. Интервал времени, необходимый для того, чтобы временной ряд начал повторяться, называется периодом (P).

Величина, обратная периоду, называется частотой (f).

$$f = \frac{1}{p}.$$

Она указывает число повторений цикла в единицу времени.

Отклонения от среднего уровня до пика (или впадины) называется амплитудой временного ряда (A).

Расстояние между началом отсчета времени (точкой в которой $t=0$) и ближайшим пиковым значением называется фазой (Φ).

Стационарный периодический временной ряд, можно задать четырьмя параметрами: периодом или частотой, амплитудой, фазой и средним значением:

$$y_t = \bar{y} + A \cdot \cos(\omega t - \Phi),$$

которая называется гармоническим представлением.

ω (омега) – угловая частота, измеряемая в радианах в единицу времени и равна:

$$\omega = 2\pi f; \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi.$$

Данное выражение часто записывают через синусы и косинусы без упоминания о фазе:

$$y_t = \bar{y} + a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

где $a = A \cos \Phi$, $b = A \sin \Phi$,

Так как $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, то $a^2 + b^2 = A^2$.

Кроме того, так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то $\operatorname{tg} \Phi = \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} = \frac{b}{a}$ или $\operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \Phi$.

Теоретически любой стационарный временной ряд может быть представлен как сумма среднего значения и ряда синусоид и косинусоид, что и называется *рядом Фурье*:

$$y_t = \bar{y} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \omega_i t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin \omega_i t.$$

Так как реальный ряд динамики имеет конечную длину N , то ряд Фурье приобретает вид:

$$y_t = \bar{y} + \sum_{i=1}^n a_i \cos \omega_i t + \sum_{i=1}^n b_i \sin \omega_i t,$$

где $n=N/2$ (N – длина временного ряда).

При этом \bar{y} заменяется параметром a_0 , т.е. в окончательном виде имеем:

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cos \omega_i t + \sum_{i=1}^n b_i \sin \omega_i t.$$

Оценка параметров данного уравнения при компьютерной обработке обычно дается традиционным МНК. Рассмотрим систему нормальных уравнений для случая одной гармоника:

$$y_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t,$$

где t принимает значения от 0 с постоянным увеличением на $2\pi/N$.

Система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} Na_0 + a_1 \sum \cos t + b_1 \sum \sin t = \sum y_t, \\ a_0 \sum \cos t + a_1 \sum \cos^2 t + b_1 \sum \sin t \cos t = \sum y \cos t, \\ a_0 \sum \sin t + a_1 \sum \cos t \sin t + b_1 \sum \sin^2 t = \sum y \sin t. \end{cases}$$

Так как $\sum \sin t \cos t = \sum \cos t = \sum \sin t = 0$, то из 1-го уравнения получаем, что

$$a_0 = \sum y_t / N = \bar{y};$$

из второго уравнения:

$$a_1 = \frac{\sum y \cos t}{\sum \cos^2 t};$$

из третьего уравнения:

$$b_1 = \frac{\sum y \cdot \sin t}{\sum \sin^2 t}.$$

Так как $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, то $\sum \cos^2 t = \frac{N}{2}$ соответственно и $\sum \sin^2 t = \frac{N}{2}$.

Следовательно, $a_1 = \frac{2 \sum y \cdot \cos t}{N}$ и $b_1 = \frac{2 \sum y \cdot \sin t}{N}$. При определении второй гармоники рассчитываются a_2 и b_2 :

$$a_2 = \frac{2}{N} \sum y \cos 2t;$$

$$b_2 = \frac{2}{N} \sum y \sin 2t.$$

Иными словами, параметры ряда Фурье определяются следующим образом:

$$a_i = \frac{2}{N} \sum y \cos \omega_i t \quad \text{и} \quad b_i = \frac{2}{N} \sum y \sin \omega_i t.$$

Часто хорошее описание фактического временного ряда достигается с использованием двух гармоник:

$$y_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t.$$

Рассмотрим ещё один метод моделирования временного ряда, содержащего сезонные колебания, – построение модели регрессии с включением фактора времени и фиктивных переменных.

Количество фиктивных переменных в такой модели должно быть на единицу меньше числа моментов (периодов) времени внутри одного цикла колебаний. Каждая фиктивная переменная отражает сезонную (циклическую) компоненту временного ряда, для какого-либо одного периода. Она равна 1 для данного периода и нулю для всех остальных.

Пусть имеется временной ряд, содержащий циклические колебания периодичностью K . Модель регрессии с фиктивными переменными для этого ряда:

$$y_t = a + bt + c_1x_1 + \dots + c_jx_j + \dots + c_{k-1}x_{k-1} + \varepsilon_t,$$

где $x_j = \begin{cases} 1 \text{ для каждого } j \text{ внутрикаждого цикла,} \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$

Например, при моделировании сезонных колебаний на основе поквартальных данных за несколько лет число кварталов внутри одного года $K=4$, а общий вид модели:

$$y_t = a + bt + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \varepsilon_t,$$

где $x_1 = \begin{cases} 1 \text{ для I квартала,} \\ 0 \text{ во всех остальных случаях;} \end{cases}$

$$x_2 = \begin{cases} 1 \text{ для II квартала,} \\ 0 \text{ во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} 1 \text{ для III квартала,} \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Уравнение тренда для каждого квартала будет иметь следующий вид:

- для I квартала: $y_t = a + bt + c_1 + \varepsilon_t$;

- для II квартала: $y_t = a + bt + c_2 + \varepsilon_t$;

- для III квартала: $y_t = a + bt + c_3 + \varepsilon_t$;

- для IV квартала: $y_t = a + bt + \varepsilon_t$.

Таким образом, фиктивные переменные позволяют дифференцировать величину свободного члена уравнения регрессии для каждого квартала. Она составит:

- для 1 квартала ($a+c_1$);

- для 2 квартала ($a+c_2$);

- для 3 квартала ($a+c_3$);

- для 4 квартала a .

Параметр b в этой модели характеризует среднее абсолютное изменение уровней ряда под воздействием тенденции.

8.2 Использование адаптивных методов прогнозирования в экономических исследованиях

В настоящее время одним из наиболее перспективных направлений исследования и прогнозирования одномерных временных рядов считаются адаптивные методы.

Адаптивными называются методы прогнозирования, позволяющие строить самокорректирующиеся (самонастраивающиеся) экономико-математические модели, которые способны оперативно реагировать на изменение условий путем учета результата прогноза, сделанного на предыдущем шаге, и учета различной информационной ценности уровней ряда.

При обработке временных рядов, как правило, наиболее ценной бывает информация последнего периода, так как необходимо знать, как будет развиваться

тенденция, существующая в данный момент, а не тенденция, сложившаяся в среднем на всем рассматриваемом периоде. Адаптивные методы позволяют учесть различную информационную ценность уровней временного ряда, степень «устаревания» данных.

Прогнозирование методом экстраполяции на основе кривых роста в какой-то мере тоже содержат элемент адаптации, поскольку с получением «свежих» фактических данных параметры кривых пересчитываются заново. Поступление новых данных может привести и к замене выбранной ранее кривой на другую модель. Однако степень адаптации в данном случае весьма незначительна. Кроме того, она падает с ростом длины временного ряда, так как при этом уменьшается «весомость» каждой новой точки. В адаптивных методах различную ценность уровней в зависимости от их «возраста» можно учесть с помощью системы весов, придаваемых этим уровням.

Важнейшее достоинство адаптивных методов – построение самокорректирующихся моделей, способных учитывать результат прогноза, сделанного на предыдущем шаге.

Экспоненциальное сглаживание

Для экспоненциального сглаживания ряда используется рекуррентная формула:

$$S_t = \alpha \cdot y_t + \beta \cdot S_{t-1}, \quad (8.1)$$

где S_t – значение экспоненциальной средней в момент t ;

α – параметр сглаживания, $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$;

$\beta = 1 - \alpha$.

Если последовательно использовать соотношение (8.1), то экспоненциальную среднюю S_t можно выразить через предшествующие значения уровней временного ряда:

$$\begin{aligned}
S_t &= \alpha \cdot y_t + \beta \cdot S_{t-1} = \alpha \cdot y_t + \beta \cdot (\alpha \cdot y_{t-1} + \beta \cdot S_{t-2}) = \alpha \cdot y_t + \alpha \cdot \beta \cdot y_{t-1} + \beta^2 S_{t-2} = \dots = \\
&= \alpha \cdot y_t + \alpha \cdot \beta \cdot y_{t-1} + \alpha \cdot \beta^2 \cdot y_{t-2} + \dots + \alpha \cdot \beta^i \cdot y_{t-i} + \dots + \beta^n \cdot S_0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i \cdot y_{t-i} + \beta^n S_0, \quad (8.2)$$

где n – длина ряда.

При $n \rightarrow \infty$ $\beta^n \rightarrow 0$, следовательно,

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \cdot y_{t-i}. \quad (8.3)$$

Таким образом, величина S_t оказывается взвешенной суммой всех членов ряда. Причем веса отдельных уровней ряда убывают по мере их удаления в прошлое соответственно экспоненциальной функции (в зависимости от «возраста» наблюдений). Именно поэтому величина S_t называется экспоненциальной средней.

Автор модели английский математик Р. Браун показал, что математическое ожидание временного ряда и экспоненциальной средней совпадут, но в то же время дисперсия экспоненциальной средней $D[S_t]$ меньше дисперсии временного ряда σ^2 :

$$D[S_t] = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma^2. \quad (8.4)$$

Так как $0 < \alpha < 1$, $D[S_t]$ меньше дисперсии временного ряда, равной σ^2 .

При высоком значении α дисперсия экспоненциальной средней незначительно отличается от дисперсии ряда. С уменьшением α дисперсия экспоненциальной средней сокращается, возрастает ее отличие от дисперсии ряда.

Тем самым экспоненциальная средняя начинает играть роль «фильтра», поглощающего колебания временного ряда.

Таким образом, с одной стороны, следует увеличивать вес более свежих наблюдений, что может быть достигнуто повышением α , с другой стороны, для сглаживания случайных отклонений значение α нужно уменьшить. Эти два требования находятся в противоречии. Поиск компромиссного значения параметра сглаживания α составляет задачу оптимизации модели. При краткосрочном прогнозировании желательно как можно быстрее отразить изменения ряда и в то же время очистить ряд, отфильтровав случайные колебания. Для этого величине α следует присваивать одно из промежуточных значений от 0 до 1. При этом для оперативных, конъюнктурных прогнозов в большей степени должна учитываться свежая информация, поэтому α следует брать большим. При увеличении срока прогнозирования α следует уменьшить. В некоторых работах приводится формула для расчета α :

$$\alpha = \frac{2}{n+1}, \quad (8.5)$$

где n – длина ряда.

При расчете экспоненциальной средней в момент времени t всегда требуется значение экспоненциальной средней в предыдущий момент времени. Часто на практике в качестве начального значения S_0 используется среднее арифметическое значение из всех имеющихся уровней временного ряда или из какой-то их части.

При использовании экспоненциальной средней для краткосрочного прогнозирования предполагается, что модель ряда имеет вид:

$$y_t = a_{1,t} + \varepsilon_t, \quad (8.6)$$

где $a_{1,t}$ – варьирующий во времени средний уровень временного ряда;

ε_t – случайные неавтокоррелированные отклонения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

Прогнозная модель определяется равенством:

$$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t}, \quad (8.7)$$

где $\hat{y}_\tau(t)$ – прогноз, сделанный в момент t на τ единиц времени вперед;

$\hat{a}_{1,t}$ – оценка $a_{1,t}$.

Единственный параметр модели $\hat{a}_{1,t}$ определяется экспоненциальной средней:

$$\hat{a}_{1,t} = S_t;$$

$$\hat{a}_{1,0} = S_0.$$

Выражение (8.1) можно представить по-другому, перегруппировав члены:

$$S_t = S_{t-1} + \alpha(y_{t-1} - S_{t-1}). \quad (8.8)$$

Величину $(y_{t-1} - S_{t-1})$ можно рассматривать как погрешность прогноза. Тогда новый прогноз S_t получается в результате корректировки предыдущего прогноза с учетом его ошибки. В этом и состоит адаптация модели.

Адаптивные полиномиальные модели

Если для прогнозирования временного ряда, имеющего ярко выраженную линейную тенденцию, использовать равенство (8.7), опирающееся на модель экспоненциального сглаживания, то модель, как правило, будет давать смещенные прогнозы, т.е. систематическую ошибку. Для таких временных рядов целесообразно использовать модели линейного роста, также применяющие процедуру экспоненциального сглаживания.

В этих моделях прогноз может быть получен с помощью следующего выражения:

$$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t}\tau, \quad (8.9)$$

где $\hat{a}_{1,t}$ и $\hat{a}_{2,t}$ – текущие оценки коэффициентов;

τ – время упреждения прогноза.

Таблица 8.1 - Модели линейного роста для расчетов прогноза $\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t}\tau$

Название модели	Оценка коэффициентов
Модель Ч. Хольта	$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1 - \alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1})$ $\hat{a}_{2,t} = \alpha_2 (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \alpha_2)\hat{a}_{2,t-1}$
Модель Р. Брауна	$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1} + (1 - \beta^2)e_t$ $\hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + (1 - \beta^2)e_t$
Модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса	$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1 - \alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}) + \alpha_3(e_t - e_{t-1})$ $\hat{a}_{2,t} = \alpha_2 (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \alpha_2)\hat{a}_{2,t-1}$

В таблице 8.1 представлены три модели данного типа: двухпараметрическая модель Ч. Хольта, однопараметрическая модель Р. Брауна и трехпараметрическая модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса, отличающиеся рекуррентными выражениями для пересчета текущих оценок коэффициентов (параметры адаптации или параметры экспоненциального сглаживания $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta < 1$).

В ППП чаще представлена модель Ч. Хольта с возможностью выбора оптимальных параметров по критерию минимума среднеквадратической ошибки путем перебора на сетке возможных значений. Рекуррентные формулы для оценки коэффициентов по этой модели могут быть преобразованы к следующему виду, явно показывающему зависимость «корректирующего воздействия» от величины ошибки:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,t} &= \hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1} + \alpha_1 e_t, \\ \hat{a}_{2,t} &= \hat{a}_{2,t-1} + \alpha_1 \alpha_2 e_t, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где $e_t = y_t - \hat{y}_1(t-1)$ - ошибка прогноза.

Из последних выражений видно, что частным случаем модели Ч. Хольта можно считать модель Р. Брауна, представленную в таблице 8.1. При этом единственный параметр β играет роль коэффициента дисконтирования наблюдений.

Трехпараметрическая модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса представляет собой развитие модели Ч. Хольта, причем усовершенствование осуществляется путем включения в выражение для оценивания $\hat{a}_{1,t}$ разности ошибок.

В ряде работ проводилось теоретическое и экспериментальное сравнение различных моделей. В результате при обработке экономических временных рядов значения коэффициента α оказывались близкими к нулю, и авторы пришли к выводу о нецелесообразности включения в модель разности ошибок.

Понятие экспоненциальной средней можно обобщить в случае экспоненциальных средних более высоких порядков.

Выравнивание p -го порядка

$$S_t^{(p)} = \alpha S_t^{(p-1)} + \beta S_{t-1}^{(p)} \quad (8.11)$$

является простым экспоненциальным сглаживанием, примененным к результатам сглаживания $(p - 1)$ -го порядка.

Если предполагается, что тренд некоторого процесса может быть описан полиномом степени n , то коэффициенты предсказывающего полинома могут быть вычислены через экспоненциальные средние соответствующих порядков.

В случае, когда исследуемый процесс, состоящий из детерминированной и случайной компоненты, описывается полиномом n -го порядка, прогноз на τ шагов вперед осуществляется по формуле:

$$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \tau + \frac{1}{2} \hat{a}_3 \tau^2 + \dots + \frac{1}{n!} \hat{a}_{n+1} \tau^n, \quad (8.12)$$

где $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{n+1}$ – оценки параметров.

На практике обычно используются полиномы не выше второго порядка.

В таблице 8.2 приведены формулы, необходимые для расчета по моделям нулевого, первого и второго порядков.

Процедура прогнозирования временных рядов на основе адаптивных полиномиальных моделей состоит из следующих этапов.

1 Выбирается вид модели экспоненциального сглаживания задается значение параметра сглаживания α . При выборе порядка адаптивной полиномиальной модели могут использоваться различные подходы, например графический анализ, применение метода последовательных разностей и др.

2 Определяются начальные условия. Например, для полиномиальной модели первого порядка необходимо определить $\hat{a}_{1,0}$, $\hat{a}_{2,0}$.

Чаще всего в качестве этих оценок берут коэффициенты соответствующих полиномов, полученные с помощью МНК. Начальные условия для модели нулевого порядка обычно получают усреднением нескольких первых уровней ряда. Зная эти оценки, с помощью указанных в таблице 8.2 формул находят начальные значения экспоненциальных средних (гр. 2).

3 Проводится расчет значений соответствующих экспоненциальных средних (гр. 3).

4 Находятся оценки коэффициентов модели (гр. 4).

5 Осуществляется прогноз на одну точку вперед (гр. 5 при $\tau = 1$); находится отклонение фактического значения временного ряда от прогнозируемого. Шаги с 3-го по 5-й данной процедуры повторяются для всех $t \leq n$, где n — длина ряда.

Окончательная прогнозная модель формируется на последнем шаге в момент $t = n$. Прогноз получается на базе выражения (8.12) путем подстановки в него последних значений коэффициентов и времени упреждения τ .

К положительным особенностям рассмотренных моделей следует отнести то, что при поступлении новой, «свежей» информации расчеты повторять не придется. Достаточно принять в качестве начальных условий последние значения функций сглаживания $S_t^{(i)}$ и продолжить вычисления.

Таблица 8.2 - Основные формулы для прогнозирования по адаптивным полиномиальным моделям

Степень модели n	Начальные условия	Экспоненциальные средние	Оценка коэффициентов	Модель прогноза
1	2	3	4	5
0	$S_0^{(1)} = \hat{a}_{1,0}$	$S_t^{(1)} = \alpha y_t + \beta S_{t-1}^{(1)}$	$\hat{a}_{1,t} = S_t^{(1)}$	$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t}$
1	$S_0^{(1)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{\beta}{\alpha} \hat{a}_{2,0}$ $S_0^{(2)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{2\beta}{\alpha} \hat{a}_{2,0}$	$S_t^{(1)} = \alpha y_t + \beta S_{t-1}^{(1)}$ $S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + \beta S_{t-1}^{(2)}$	$\hat{a}_{1,t} = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$ $\hat{a}_{2,t} = \frac{\alpha}{\beta} [S_t^{(1)} - S_t^{(2)}]$	$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau \hat{a}_{2,t}$
2	$S_0^{(1)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{\beta}{\alpha} \hat{a}_{2,0} + \frac{\beta \cdot (2-\alpha)}{2\alpha^2} \hat{a}_{3,0}$ $S_0^{(2)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{2\beta}{\alpha} \hat{a}_{2,0} + \frac{\beta(3-2\alpha)}{\alpha^2} \hat{a}_{3,0}$ $S_0^{(3)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{3\beta}{\alpha} \hat{a}_{2,0} + \frac{3\beta(4-3\alpha)}{2\alpha^2} \hat{a}_{3,0}$	$S_t^{(1)} = \alpha y_t + \beta S_{t-1}^{(1)}$ $S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + \beta S_{t-1}^{(2)}$ $S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + \beta S_{t-1}^{(3)}$	$\hat{a}_{1,t} = 3(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) + S_t^{(3)}$ $\hat{a}_{2,t} = \frac{\alpha}{2\beta^2} [(6-5\alpha)S_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)}]$ $\hat{a}_{3,t} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} (S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)})$	$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau \hat{a}_{2,t} + \frac{1}{2} \tau^2 \hat{a}_{3,t}$

8.3 Прогнозирование с помощью ARMA и ARIMA –процессов

Рассмотрим формальное определение стационарности.

Стохастический процесс Y_t называется стационарным в сильном смысле (строго стационарным или стационарным в узком смысле), если совместное распределение вероятностей всех переменных $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m}$ точно то же самое, что и для переменных $y_{t_1+\tau}, y_{t_2+\tau}, \dots, y_{t_m+\tau}$.

Под стационарным процессом в слабом смысле (в широком смысле) понимается стохастический процесс, для которого среднее и дисперсия независимо от рассматриваемого периода времени имеют постоянное значение, а автоковариация зависит только от длины лага между рассматриваемыми переменными:

$$\begin{aligned}\mu(y_t) &= \mu(y_{t+\tau}) = \mu; \\ D(y_t) &= \mu(y_t - \mu)^2 = \mu(y_{t+\tau} - \mu)^2 = \gamma(0) = const; \\ cov(y_t, y_{t+\tau}) &= \mu[(y_t - \mu)(y_{t+\tau} - \mu)] = \gamma(\tau).\end{aligned}$$

Из этого следует, что автокорреляция будет зависеть только от сдвига по времени τ и не будет зависеть от t .

При анализе изменения $\gamma(\tau)$ в зависимости от временного сдвига τ принято говорить об автоковариационной функции. С понятием этой функции тесно связано понятие автокорреляционной функции (АКФ):

$$\rho(\tau) = \frac{cov(y_t, y_{t+\tau})}{D(y_t)} = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}.$$

Значения АКФ также характеризуют тесноту статистической связи между уровнями временного ряда, разделенными временными тактами τ . Однако в отличие от значений автоковариационной функции они не зависят от масштаба измерения уровней временного ряда и подчиняются ограничению: $|\rho(\tau)| \leq 1$.

Выборочная оценка коэффициента автокорреляции $r(\tau)$ может быть определена следующим образом:

$$r(\tau) = \frac{\frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2},$$

где n – длина временного ряда;

τ – временной сдвиг (лаг);

\bar{y} – среднее значение временного ряда.

Числитель выражения представляет выборочную оценку коэффициента автоковариации.

В практических руководствах рекомендуется поддерживать соотношение $\tau \leq n/4$.

Для стационарного временного ряда с увеличением τ АКФ должна демонстрировать свойство монотонного убывания по абсолютной величине, так как взаимосвязь между уровнями ряда с ростом τ ослабевает. Однако условие может нарушаться для выборочных АКФ.

Идея перенесения частной корреляции на временные ряды находит свое выражение в частной АКФ – ЧАКФ. С помощью ЧАКФ измеряется корреляция между уровнями ряда y_t и $y_{t+\tau}$, разделенными τ временными тактами, при исключении влияния на эту взаимосвязь всех промежуточных уровней ряда $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+\tau-1}$. Например, коэффициент частной автокорреляции ρ_{τ} при $\tau=2$ будет определять корреляцию между уровнями временного ряда, разделенными двумя тактами времени, при условии, что значения промежуточных уровней зафиксированы на среднем уровне:

$$\rho_{\tau}(2) = \rho(y_t, y_{t+2} | y_{t+1}) = \mu.$$

Формула для расчета выборочной оценки частного коэффициента автокорреляции:

$$r_{ij.k} = \frac{r_{ij} - r_{ik} \cdot r_{jk}}{\sqrt{(1 - r_{ik}^2)(1 - r_{jk}^2)}}.$$

Например, r_q 1-го порядка между y_t и y_{t+2} при устранении влияния y_{t+1} :

$$r_q(2) = r_{02.1} = \frac{r(2) - r(1) \cdot r(1,2)}{\sqrt{(1 - r^2(1))(1 - r^2(1,2))}},$$

где $r(2)$ – коэффициент корреляции между y_t и y_{t+2} ;

$r(1)$ – коэффициент корреляции между y_t и y_{t+1} ;

$r(1,2)$ – коэффициент корреляции между y_{t+1} и y_{t+2} .

В практической аналитической работе стационарность временного ряда означает отсутствие:

- тренда;
- систематических изменений дисперсии;
- строго периодических флуктуаций;
- систематически изменяющихся взаимосвязей между элементами временного ряда.

Часто экономические показатели, представленные временными рядами, имеют настолько сложную структуру, что моделирование таких рядов путем построения моделей тренда, сезонности и применения традиционных подходов не приводит к удовлетворительным результатам. Во временных рядах остатков прослеживаются статистические зависимости, которые можно моделировать.

В последнее время большое внимание уделяется моделированию стационарных временных рядов, так как многие временные ряды могут быть приведены к стационарному виду после операции выделения тренда, фильтрации сезонной компоненты или взятия разности. Как правило, ряд остатков – это

стационарный ряд. Наиболее распространенные модели стационарных рядов – модели авторегрессии и модели скользящего среднего.

Авторегрессионные модели. В авторегрессии каждое значение ряда находится в линейной зависимости от предыдущих значений. Если анализируемый динамический процесс зависит от значений, отстоящих на p временных лагов назад, то авторегрессионный процесс порядка p , т.е. AR (p):

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где ε_t – «белый шум» с $\mu_\varepsilon = 0$;

α_0 – свободный член (часто приравнивается к нулю (опускается)).

Используя функцию оператора лага, можно представить авторегрессионную модель в виде:

$$(1 - \alpha_0 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_p B^p) y_t = \Phi(B) y_t = \varepsilon_t,$$

где B – оператор сдвига, т.е. преобразование ряда, смещающего его на один временной такт;

$\Phi(B)$ – оператор авторегрессии.

Для выполнения условия стационарности все корни многочлена $\Phi(B)$ должны лежать вне единичного круга, т.е. все корни характеристического уравнения $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p = 0$ должны быть по модулю больше 1 и различны, т.е. $|z| > 1$. Если $|z| = 1$, процесс называется *процессом единичного корня* и является нестационарным.

Рассмотрим простейший вариант линейного авторегрессионного процесса – модель авторегрессии 1-го порядка – AR(1), или марковский процесс.

Эта модель может быть представлена в виде:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где α – числовой коэффициент, $|\alpha| < 1$;

ε_t – последовательность случайных величин, образующих «белый шум».

Основные свойства Марковского процесса:

$$\mu y_t = 0;$$

$$D(y_t) = \frac{\sigma_0^2}{1 - \alpha^2};$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t \pm k}) = \alpha^k D(y_t);$$

$$\rho(y_t, y_{t \pm k}) = \alpha^k.$$

Значения частной автокорреляционной функции равны нулю для всех лагов $k \geq 2$, что может быть использовано при подборе модели. Этот результат для теоретической ЧАКФ и может не выполняться для выборочной АКФ. Однако если выборочные частные корреляции статистически незначимо отличаются от нуля при $k \geq 2$, то использование модели $AR(1)$ не противоречит исходным данным.

Условие стационарности ряда для $AR(1)$ определяется требованием к коэффициенту α : $|\alpha| < 1$.

Из авторегрессионных процессов выше 1-го порядка в экономической практике часто встречаются так называемые процессы Юла. Они описываются с помощью модели $AR(2)$:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t.$$

Выражение для вычисления любого значения АКФ $\rho(k)$:

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \alpha_2 \rho(k-2).$$

Подставим в данное выражение значение $k=1,2$. С учетом того, что $\rho(0)=1$, а $\rho(-1)=\rho(1)$, получим:

$$\begin{cases} \rho(1) = \alpha_1 + \alpha_2 \rho(1); \\ \rho(2) = \alpha_1 \rho(1) + \alpha_2. \end{cases}$$

Эта система называется системой Юла - Уокера для $AR(2)$. Из нее можно получить выражения для определения параметров α_1 и α_2 :

$$\alpha_1 = \frac{\rho(1)[1 - \rho(2)]}{1 - \rho^2(1)};$$

$$\alpha_2 = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}.$$

Условия стационарности процесса $AR(2)$:

$$\begin{aligned} |\alpha_2| &< 1; \\ \alpha_1 + \alpha_2 &< 1; \\ \alpha_2 - \alpha_1 &< 1. \end{aligned}$$

ЧАКФ для процесса $AR(p)$ будет иметь ненулевые значения лишь при $k \leq p$, а начиная с лага $k = p + 1$ теоретическая ЧАКФ равна нулю. Это свойство становится ключевым при подборе порядка p авторегрессионной модели для конкретных экономических временных рядов.

Модели скользящего среднего. Модель скользящего среднего предполагает, что в ошибках модели в предшествующие периоды сосредоточена информация обо всей предыстории ряда. В этой модели каждое новое значение – среднее между текущей флуктуацией и несколькими (в частности, одной) предыдущими ошибками.

Процесс скользящего среднего порядка q , обозначаемого $MA(q)$, имеет вид:

$$y_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad ($$

где ε_t - «белый шум» (импульс, шок) с $\mu = 0$.

В моделях скользящего среднего для обеспечения стационарности ряда не требуется накладывать никаких ограничений на параметры $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$. Однако если в модели MA(1) параметр $|\beta| \geq 1$, то текущее значение y_t будет зависеть от своих прошлых значений, берущихся с весами, бесконечно растущими по мере удаления в прошлое:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= y_t + \beta \varepsilon_{t-1} = y_t + \beta(y_{t-1} + \beta \varepsilon_{t-2}) = y_t + \beta y_{t-1} + \beta^2(y_{t-2} + \beta \varepsilon_{t-3}) = \dots \\ &= y_t + \beta y_{t-1} + \beta^2 y_{t-2} + \beta^3 y_{t-3} + \dots \quad \Rightarrow y_t = \varepsilon_t - \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k y_{t-k}. \end{aligned}$$

Чтобы избежать этого, надо, чтобы веса образовывали сходящийся ряд, т.е. $|\beta| < 1$.

Широко распространены в статистической практике модели скользящего среднего 1-го и 2-го порядков:

$$\text{MA(1): } y_t = \varepsilon_t - \beta \varepsilon_{t-1};$$

$$\text{MA(2): } y_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2}.$$

Авторегрессионные модели со скользящими средними в остатках. На практике в целях экономического описания анализируемого процесса в модель могут быть включены как члены, описывающие авторегрессионные составляющие, так и члены, моделирующие остаток в виде процесса скользящих средних. Такой процесс называется процессом авторегрессии скользящего среднего – *ARMA* (p, q):

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

или

$$y_t - \alpha_0 - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Здесь единственное слагаемое ошибки ε_t AR-процесса заменяется на процесс МА (q).

Такая модель может интерпретироваться как линейная модель множественной регрессии, в которой в качестве объясняющих переменных выступают прошлые значения самой зависимой переменной, а в качестве регрессионного остатка – скользящие средние из элементов «белого шума».

Стационарность процесса ARMA обеспечивается условием $|\alpha| < 1$, а обратимость, в свою очередь, гарантируется выполнением условия $|\beta| < 1$.

Одним из наиболее важных этапов построения моделей стационарных временных рядов является определение ее порядка. Предварительная оценка производится на основе экономического анализа. Чрезмерное повышение порядка модели может и не повысить ее точность. Одновременно расчет большего числа коэффициентов модели при неизменной выборке снижает достоверность оценки каждого из коэффициентов. В то же время недостаточное число коэффициентов модели не позволяет отразить в должной мере динамику процесса и оценить его дальнейшие изменения.

Для определения порядка процесса модели исследуются такие характеристики, как автокорреляционная функция и частная автокорреляционная функция.

На практике, как правило, используют следующие виды моделей, идентифицировать которые можно с помощью анализа АКФ и ЧАКФ (таблица 8.3).

ARMA-процессы имеют более сложную структуру по сравнению со схожими по поведению AR- или MA- процессами в чистом виде, но при этом ARMA-процессы характеризуются меньшим количеством параметров, что является одним из их преимуществ.

Таблица 8.3 - Свойства АКФ и ЧАКФ

Функция	ARMA (1,0)	ARMA (2,0)	ARMA (0,1)	ARMA (0,2)	ARMA (1,1)
АКФ	Экспоненциально затухает (монотонно или знакопеременно)	Экспоненциально затухает или имеет форму синусоидальной волны	Выброс (пик) на лаге 1	Выбросы (пики) на лагах 1,2	Экспоненциально затухает от значения $\rho(1)$ (монотонно или знакопеременно)
ЧАКФ	Выброс (пик) на лаге 1	Выбросы (пики) на лагах 1,2	Экспоненциально затухает (монотонно или знакопеременно)	Экспоненциально затухает или имеет форму синусоидальной волны	Экспоненциально затухает от значения $\rho_c(1)$ (монотонно или знакопеременно)

Прогнозирование ARMA-процессов. При прогнозировании на практике реальные параметры ARMA-процесса α_k и β_j заменяются своими оценками $\hat{\alpha}_k$ и $\hat{\beta}_j$, а случайные шоки ε_t - на остатки $\hat{\varepsilon}_t$, полученные при оценивании модели, или на ошибки предыдущих прогнозов.

Прогнозирование значения y_t на период $(t+h)$ по авторегрессионной модели производят следующим образом.

Сначала вычисляют значения

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \alpha_2 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t.$$

Затем в модель

$$\hat{y}_{t+2} = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{y}_{t+1} + \alpha_2 y_t + \dots + \alpha_p y_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

подставляют вычисленное значение \hat{y}_{t+1} и определяют величину \hat{y}_{t+2} и т.д.

Для модели MA (1) формулы для прогнозирования имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+1} &= \beta \cdot \varepsilon_t; \\ \hat{Y}_{t+h} &= 0 \text{ для } h \geq 2. \end{aligned}$$

Для процесса МА (2) формулы для прогнозирования:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{t+1} &= -\beta_1 \cdot \varepsilon_t - \beta_2 \varepsilon_{t-1}; \\ \hat{Y}_{t+2} &= -\beta_2 \varepsilon_t; \\ \hat{Y}_{t+h} &= 0 \text{ для } h \geq 3.\end{aligned}$$

Для модели ARMA (1,1) формулы для прогнозирования имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{t+1} &= \alpha_0 + \alpha_1 y_t - \beta \cdot \varepsilon_t; \\ \hat{Y}_{t+h} &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t+h-1} \text{ для } h \geq 2.\end{aligned}$$

Доверительный интервал прогноза в предположении, что ε_t имеет характеристики «белого шума», вычисляется по формуле

$$\hat{y}_t - t_\alpha \hat{\sigma}_{\varepsilon_t} \leq y_t \leq \hat{y}_t + t_\alpha \hat{\sigma}_{\varepsilon_t},$$

где y_t – истинное значение исследуемого параметра;

\hat{y}_t – предсказываемое значение исследуемого параметра;

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_t} = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n-p} - \text{оценка дисперсии случайной величины } \varepsilon_t;$$

ε_t – остатки в уравнении авторегрессии;

n – число наблюдений;

p – порядок авторегрессии;

t_α – табличное значение t-критерия Стьюдента.

Экономические временные ряды за редким исключением нестационарны. Нестационарность чаще всего проявляется в наличии зависящей от времени неслучайной составляющей $f(t)$. Для описания таких рядов используется модель

авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего ARIMA (p,d,q) (модель Бокса – Дженкинса).

Модель ARIMA используется для описания временных рядов, обладающих свойствами:

1) ряд включает аддитивно составляющую $f(t)$, имеющую вид алгебраического полинома;

2) ряд, получившийся после применения к нему процедур последовательных разностей, может быть описан моделью ARMA (p,q) .

Пусть X_t – нестационарный процесс со стационарными разностями d -го порядка, т.е. $Y_t = \Delta^d X_t$ – стационарный процесс, а $\Delta^{d-1} X_t$ – нестационарный. Это означает, что X_t интегрируем d -го порядка.

Если Y_t – процесс ARMA (p,q) , т.е.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q},$$

тогда X_t называется процессом ARIMA (p,d,q) . Часто среднее или свободный член приравниваются к нулю (опускаются).

Построение модели ARIMA по реализации случайного процесса Бокс и Дженкинс предложили разбить на несколько этапов:

1 Устанавливается порядок интеграции d , т.е. нужно добиться стационарности ряда, взяв достаточное количество последовательных разностей. Для определения значения d может быть применен эвристический критерий. Использование данного критерия основано на определении оценки

$$\hat{\sigma}^2(k) = \frac{1}{n-k} \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (\Delta^k y_t)^2}{C_{2k}^k},$$

где $\Delta^k y_t$ – последовательные разности исходного ряда y_1, y_2, \dots, y_n ;

k – порядок разностей, $k = 1, 2, \dots$

Начиная с некоторого значения $k = k_0$ величина $\hat{\sigma}^2(k)$ стабилизируется, оставаясь примерно на одном и том же уровне при росте k . Тогда порядок разности (d) следует принять равным k_0 .

О том, что необходимая для стационарности ряда степень разности достигнута, будет свидетельствовать быстрое затухание АКФ.

2 Для полученного стационарного временного ряда строятся АКФ и ЧАКФ. Исследуя характер их поведения, выдвигаются гипотезы о значениях параметров p и q , т.е. подбирается модель $ARMA(p, q)$. На данном этапе формируется базовый набор моделей, включающий 1, 2 или даже большее количество моделей.

3 Для всех моделей, отобранных на 2 этапе, оцениваются коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$, используя следующие методы:

- традиционный метод наименьших квадратов (МНК);
- метод максимального правдоподобия;
- нелинейный МНК;
- алгоритм Марквардта.

Все эти оценки при больших объемах выборок асимптотически эквивалентны.

4 Выбирается наиболее подходящая модель среди оцененных:

а) проверяется адекватность модели на основе анализа остатков (у адекватной модели остатки должны быть похожи на «белый шум»). Для этого проводится проверка значимости коэффициентов автокорреляции, используя следующие подходы:

- если выборочный коэффициент автокорреляции r_k выходит за интервал $\pm t_\alpha / \sqrt{n}$, то гипотеза H_0 о равенстве нулю коэффициента автокорреляции ρ_k отвергается;

- проверяется равенство нулю сразу τ первых значений АКФ на основе Q – статистики Бокса – Пирса:

$$Q = n \sum_{k=1}^{\tau} r_k^2$$

или на основе теста Бокса – Льюнга:

$$\tilde{Q} = n(n+2) \sum_{k=1}^{\tau} \frac{r_k^2}{n-k}.$$

Если Q (или \tilde{Q}) $> \chi_{табл}^2$ с $\nu = \tau - p - q$ степенями свободы, то как группа первые τ коэффициентов автокорреляции значимы (рекомендуется рассматривать $\tau \approx n/4$);

б) Отбирается оптимальная модель по наивысшему качеству с меньшим числом параметров с использованием информационного критерия Акайка и Шварца:

- информационный критерий Акайка:

$$AIC = \frac{p+q}{n} + \ln \left(\frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n} \right);$$

- критерий Шварца:

$$SIC = \frac{(p+q) \ln n}{n} + \ln \left(\frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n} \right).$$

Предпочтение следует отдать модели с меньшим значением критерия.

Прогнозирование ARIMA-процессов Y_t может быть представлено в виде двухшаговой процедуры:

1) экстраполируется стационарный ARMA-процесс;

2) вместо взятия разностей проводится обратная операция интегрируемости, т.е. суммирование спрогнозированных на шаге 1 приращений $\hat{Y}_{T(+h)} = \Delta^d \hat{X}_{T(+h)}$, чтобы получить сначала $\Delta^{d-1} \hat{X}_{T(+h)}$, а затем по аналогии $\Delta^{d-2} \hat{X}_{T(+h)}$ и, наконец, $\hat{X}_{T(+h)}$. Оценка дисперсии ошибки прогноза, а следовательно, и ширины доверительного интервала

прогноза проводится аналогичным образом – повторным суммированием дисперсий ошибок прогноза ARMA-процесса X_t .

Другим возможным вариантом получения прогноза является построение индивидуальной одношаговой формулы.

С этой целью в уравнение вместо Y_t подставляют разности

$$\Delta^d X_T = (1 - L)^d X_t.$$

Решив полученное уравнение относительно X_t , получим формулу, которая может быть экстраполирована для $t = T + h$ и таким образом преобразована в формулу для прогнозирования на h шагов вперед величин $\hat{X}_{T(+h)}$ с началом отсчета в момент времени T .

8.4 Вопросы для самоконтроля к разделу 8

- 1 Укажите характерные особенности адаптивных методов прогнозирования.
- 2 Какие типы адаптивных моделей вы знаете?
- 3 Чем объясняется название «экспоненциальная средняя»?
- 4 Какую роль играет параметр адаптации α в процедуре экспоненциального сглаживания?
- 5 Как влияет значение параметра адаптации α на характер ряда, полученного после экспоненциального сглаживания?
- 6 Что такое стационарные временные ряды в широком и узком смысле?
- 7 Какие существуют классы моделей для прогнозирования стационарных временных рядов?
- 8 Какие тесты на стационарность Вы знаете?
- 9 Как проводится идентификация AR(p) моделей с помощью анализа автокорреляционной и частной автокорреляционной функций?

10 Как проводится идентификация $MA(q)$ моделей с помощью анализа автокорреляционной и частной автокорреляционной функций?

11 Назовите основные этапы построения модели ARIMA.

12 Какие критерии применяются при окончательном выборе модели ARIMA?

8.5 Задания к разделу 8

8.1 На основе графического анализ провести исследование компонентного состава полученного в разделе 7 временного ряда.

8.2 Построить ряд Фурье с четырьмя гармониками и дать прогноз.

8.3 По поквартальным данным построить модель регрессии с включением фактора времени и фиктивных переменных. На основе полученных моделей дать поквартальный прогноз.

8.4 Постройте адаптивную полиномиальную модель. α определите по формуле: $\alpha = \frac{2}{n+1}$. Дайте прогноз на следующий год.

8.5 Для построенного временного ряда выполните следующие действия:

- проверьте гипотезу о стационарности ряда;
- на основе анализа АКФ и ЧАКФ выберите порядок моделей AR(p), MA(q), ARMA(p,q), ARIMA(p,q);
- оцените параметры выбранной модели;
- с помощью средней относительной ошибки аппроксимации оцените качество построенных моделей и выберите наилучшую для прогнозирования;
- дайте прогноз на следующие два периода.

При решении задач по данному разделу обратить внимание на методы, позволяющие выявить наличие периодической составляющей во временном ряду. Необходимо научиться оценивать уровень сезонности, осуществлять фильтрацию периодических составляющих временного ряда и их моделирование.

Особое внимание уделить вопросу, каким образом задаются значения параметра адаптации α в зависимости от целей прогнозирования, как строить адаптивные модели для стационарных и нестационарных временных рядов и оценивать точность полученных моделей.

8.6 Тесты для самоконтроля к разделу 8

1. Какой вид имеет формула экспоненциального сглаживания?

а) $S_t = \alpha y_t + \beta S_{t-1}$;

б) $S_t = \alpha y_t + \beta y_{t-1}$;

в) $S_t = \alpha y_t \cdot \beta y_{t-1}$;

г) $S_t = \alpha y_t + \alpha S_{t-1}$.

2. Адаптивными называются:

а) методы прогнозирования, позволяющие строить самокорректирующиеся (самонастраивающиеся) экономико-математические модели, которые способны оперативно реагировать на изменение условий путем учета результата прогноза, сделанного на предыдущем шаге, и учета различной информационной ценности уровней ряда;

б) методы получения и специализированной обработки прогнозных оценок объекта путем систематизированного опроса высококвалифицированных специалистов;

в) методы аналитического выравнивания;

г) методы прогнозирования, позволяющие строить математические модели, которые способны оперативно реагировать на изменение условий путем учета различной информационной ценности мнений экспертов по результатам прогноза.

3. В качестве критерия оптимальности при выборе параметра адаптации обычно принимают:

- а) критерий минимума среднего квадрата ошибок прогнозирования;
- б) критерий Дарбина – Уотсона;
- в) критерий Фишера;
- г) критерий максимума среднего квадрата ошибок прогнозирования.

4. Математическое ожидание временного ряда и экспоненциальной средней:

- а) совпадают;
- б) прямо пропорциональны;
- в) математическое ожидание временного ряда больше математического ожидания экспоненциальной средней;
- г) математическое ожидание временного ряда меньше математического ожидания экспоненциальной средней.

5. Дисперсия экспоненциальной средней и дисперсия временного ряда имеют следующее соотношение:

- а) дисперсия экспоненциальной средней меньше дисперсии временного ряда;
- б) прямо пропорциональны;
- в) дисперсия экспоненциальной средней больше дисперсии временного ряда;
- г) дисперсия экспоненциальной средней равна дисперсии временного ряда.

6. Для оперативных, конъюнктурных прогнозов в большей степени должна учитываться свежая информация, поэтому параметр адаптации α следует брать:

- а) большим;
- б) средним;
- в) меньшим;

г) срок прогнозирования не влияет на величину параметра адаптации.

7. При большом сроке прогнозирования параметр адаптации α следует:

а) уменьшить;

б) увеличить;

в) усреднить;

г) срок прогнозирования не влияет на величину параметра адаптации.

8. Если коэффициент адаптации близок к 0, то при прогнозе учитываются:

а) все прошлые наблюдения;

б) в основном наблюдения последних лет;

в) только первое значение ряда;

г) в основном наблюдения первых лет.

9. Если коэффициент адаптации близок к 1, то при прогнозе учитываются:

а) все прошлые наблюдения;

б) только последнее значение ряда;

в) в основном наблюдения последних лет;

г) в основном наблюдения первых лет.

10. Как получают каждый новый прогноз в адаптивных моделях:

а) в результате корректировки предыдущего прогноза с учетом его ошибки;

б) в результате корректировки параметра адаптации;

в) в результате корректировки ошибки прогноза;

г) в результате добавления новой исходной информации.

11. Формула $y_\tau(t) = a_1 + a_2\tau + \frac{1}{2}a_3\tau^2 + \dots + \frac{1}{n!}a_{n+1}\tau^n$ используется для:

а) прогнозирования на τ шагов вперед для процессов описываемых

полиномом n - го порядка;

б) прогнозирования на τ шагов вперед для процессов описываемых полиномом 1- го порядка;

в) прогнозирования на τ шагов вперед для процессов описываемых полиномом 2- го порядка;

г) прогнозирования на n шагов вперед для процессов описываемых полиномом τ порядка.

12. Формула $y_\tau(t) = a_{1,t} + a_{2,t}\tau$ используется для:

а) прогнозирования на τ шагов вперед для процессов описываемых полиномом 1 - го порядка;

б) прогнозирования на τ шагов вперед для процессов описываемых полиномом n - го порядка;

в) прогнозирования на τ шагов вперед для процессов описываемых полиномом 2- го порядка;

г) прогнозирования на n шагов вперед для процессов описываемых полиномом τ порядка.

13. Как не может быть определено значение параметра адаптации α ?

а) методом экспертных оценок;

б) графическим методом;

в) по специальным таблицам;

г) методом проб или выведено аналитическим способом.

14. Как называется модель вида: $y_t = 0,3 \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$?

а) авторегрессионной;

б) регрессии;

в) моделью скользящего среднего;

г) авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего.

15. Как называется модель вида: $y_t = \varepsilon_t - 0,3 \cdot \varepsilon_{t-1}$?

- а) авторегрессионной;
- б) регрессии;
- в) моделью скользящего среднего;
- г) авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего.

16. Какое требование накладывается на коэффициент α авторегрессионной модели для выполнения условия стационарности ряда:

- а) $|\alpha| < 1$;
- б) $|\alpha| > 1$;
- в) $|\alpha| > 100$;
- г) $0 < \alpha < 1$.

17. В каких случаях целесообразно применять экспертные методы прогнозирования:

- а) объект, экономическое явление не поддается математическому описанию;
- б) отсутствует достаточно представительная статистическая выборка;
- в) объект, экономическое явление поддается математическому описанию;
- г) отсутствует программное обеспечение.

18. Какие требования предъявляются эксперту:

- а) определенный практический и исследовательский опыт;
- б) отсутствие заинтересованности в конкретных результатах;
- в) наличие научных степеней и званий;
- г) высокий уровень владения современными методами прогнозирования.

19. Что понимается под методом эвристического прогнозирования:

а) метод получения и специализированной обработки прогнозных оценок объекта путем систематизированного опроса высококвалифицированных специалистов;

б) метод получения и специализированной обработки прогнозных оценок объекта путем формирования группы экспертов во главе с ведущим;

в) метод построения прогнозной модели;

г) метод получения и специализированной обработки прогнозных оценок объекта путем организации «круглого стола», в рамках которого будут согласовываться мнения экспертов с целью выработки единого мнения.

20. Что принимается в качестве меры точности экспертных методов:

а) среднее значение относительной погрешности;

б) среднюю ошибку аппроксимации;

в) коэффициент детерминации;

г) среднее квадратическое отклонение.

21. Эффективный прогноз обладает:

а) меньшим значением средней относительной погрешности;

б) высоким значением коэффициента детерминации;

в) низким значением коэффициента детерминации;

г) большим значением средней относительной погрешности.

22. «Матрица компетентности экспертов»:

а) характеризует уровень осведомленности каждого из экспертов по каждому из m вопросов;

б) содержит ответы экспертов;

в) содержит отзывы экспертов друг о друге;

г) характеризует предпочтительную специализацию эксперта.

23. Матрица компетентности экспертов строится на основе:

- а) «Матрицы специализации экспертов» и «Матрицы предпочтительности специализации экспертов»;
- б) «Матрицы компетентности» и «Матрицы предпочтительности специализации экспертов»;
- в) она не связана с другими матрицами;
- г) «Матрицы специализации экспертов» и «Матрицы компетентности».

24. При наличии достаточной статистической информации прогнозирование на короткий срок целесообразнее использовать:

- а) статистические методы прогнозирования;
- б) математические методы прогнозирования;
- в) математико - экономические методы прогнозирования;
- г) эвристические методы прогнозирования.

25. Прогнозирование – это:

- а) специальное научное исследование, предметом которого выступают перспективы развития явления;
- б) интуитивное исследование, предметом которого выступают перспективы развития явления;
- в) совокупность взаимоувязанных мер, план действий, направленных на достижение определенной цели, решение проблемы;
- г) составная часть управления, разработка и практическая реализация планов, определяющих будущее состояние экономической системы, путей способов и средств его достижения.

26. Какие этапы не включаются в прогнозирование:

- а) предпрогнозная ориентация;
- б) верификация прогноза;
- в) непосредственно прогнозирование;
- г) идентификация прогноза.

27. Отметьте принципы прогнозирования:

- а) рентабельность;
- б) вариантность;
- в) планифицируемость;
- г) планомерность.

Список использованных источников

- 1 Айвазян, С.А. Методы эконометрики : учебник / С.А. Айвазян. – М. : Магистр : ИНФРА-М, 2010. – 512 с. – ISBN 978-5-9776-0153-5 (в пер.).
- 2 Айвазян, С.А. Прикладная статистика. Основы эконометрики : учебник для вузов : в 2 т.– Т. 1. Теория вероятностей и прикладная статистика / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. - 2-е изд., испр. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656 с. - ISBN 5-238-00304-8.
- 3 Арженовский, С.В. Статистические методы прогнозирования : учебное пособие / С.В. Арженовский, И.Н. Молчанов. - Рост. гос. экон. унив. – Ростов-на-Дону, 2001. – 74 с.
- 4 Афанасьев В.Н. Моделирование и прогнозирование временных рядов: учеб.-метод. пособие для вузов / В.Н. Афанасьев, Т.В. Лебедева. – М.: Финансы и статистика, 2009. – 292 с. - ISBN: 978-5-279-03402-4.
- 5 Афанасьев, В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование : учебник / В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев. – 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2010. – 320 с. - ISBN 978-5-279-03400-0.
- 6 Афанасьев, В.Н. Статистические методы в исследовании потребления платных услуг домашними хозяйствами : учеб. пособие для вузов / В.Н. Афанасьев, Т.В. Леушина. – Оренбург : ОГУ, 2011. – 156 с. – ISBN 978-5-7410-1138-6.
- 7 Афанасьев, В.Н. Статистические методы прогнозирования в экономике: учеб.-метод. пособие для вузов / В.Н. Афанасьев, Т.В. Лебедева. - М. : Финансы и статистика, 2009. -180 с.
- 8 Афанасьев, В.Н. Эконометрика : учебник / В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев, Т.И. Гуляева; под общ. ред. М.М. Юзбашева. – М.: Финансы и статистика, 2005. - 256 с. - ISBN 5-279-02738-3.
- 9 Аффифи, А. Статистический анализ : подход с использованием ЭВМ : пер. с англ. / А. Аффифи, С. Эйзен. – М. : Мир, 1982. – 488 с.
- 10 Бабешко, Л.О. Основы эконометрического моделирования : учеб. пособие / Л.О. Бабешко - М. : КомКнига, 2006. – 432 с. - ISBN 978-5-484-00757-8.

- 11 Балаш, В.А. Модели линейной регрессии для панельных данных: учеб. пособие / В.А. Балаш., О.С. Балаш – М., 2002. – 65 с.
- 12 Бард, Й. Нелинейное оценивание параметров : пер. с англ. / Й. Бард; под ред. и с предисл. В.Г. Горского – М. : Статистика, 1979. – 349 с.
- 13 Бородич, С.А. Эконометрика : учебное пособие / С.А. Бородич. – 3-е изд., - Минск : Новое знание, 2006. – 408 с. – ISBN 985-475-206-2.
- 14 Брин, В.И. Статистическое наблюдение : учеб. пособие / В.И. Брин. - Омск : Омский государственный университет, 2011. - 40 с. - ISBN 978-5-7779-1287-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=237220>
- 15 Вербик, Марно. Путеводитель по современной эконометрике : пер. с англ. / М. Вербик; научн. ред. и предисл. С. А. Айвазяна — М : Научная книга, 2008. – 616 с. – ISBN 978-5-913-035-4.
- 16 Винн, Р. Введение в прикладной эконометрический анализ : пер. с англ. / Р. Винн, К. Холден – М. : Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
- 17 Гладилин, А.В. Эконометрика : учеб. пособие / А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. – М. : КНОРУС, 2006. – 232 с. - ISBN 5-85971-118-2.
- 18 Джонстон, Дж. Эконометрические методы : пер. с англ. / Дж. Джонстон. – М. : Статистика, 1980. – 444 с.
- 19 Доугерти, К. Введение в эконометрику : пер. с англ. / К. Доугерти. – М. : ИНФРА-М, 1999. – 402 с. - ISBN 5-86225-458-7.
- 20 Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ : в 2-х кн. / Н. Дрейпер, Г. Смит : пер. с англ. – 2-е изд., перераб. и доп.. – М : Финансы и статистика, 1986. – Кн. 1. - 366 с. : ил. - (Математико-статистические методы за рубежом).
- 21 Дружинин, Н.К. Математическая статистика в экономике / Н.К. Дружинин. – М. : Статистика, 1971. – 264 с.
- 22 Дуброва, Т.А. Статистические методы прогнозирования : учеб. пособие для вузов / Т.А. Дуброва - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 206 с. - ISBN 5-238-00497-4.

- 23 Еремеева, Н.С. Эконометрика: учеб. пособие для вузов / Н.С. Еремеева, Т.В. Лебедева – Оренбург : ОАО «ИПК «Южный Урал», 2010. – 296 с.– ISBN 978 -5-94162-074-6.
- 24 Еремеева, Н.С. Эконометрика: лабораторный практикум в Excel: учеб. пособие / Н.С. Еремеева, Т.В. Лебедева; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2016. - 158 с. ISBN 978-5-7410-1509-4.
- 25 Ефимова, М.Р. Общая теория статистики : учебник / М.Р. Ефимова, Е.В. Петрова, В.Н. Румянцев. – 2 - е изд., испр. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2007. – 416 с. – (Высшее образование). - ISBN 5-16-002179-5.
- 26 Канторович, Г.Г. Анализ временных рядов / Г.Г. Канторович // Экономический журнал ВШЭ. - 2003. – №1. – С. 79–103.
- 27 Кейн, Э. Экономическая статистика и эконометрия. Введение в количественный экономический анализ. Вып. 2 : пер. с англ. / Э. Кейн – М. : Статистика, 1977. – 232 с. с ил.
- 28 Крастинь, О.П. Разработка и интерпретация моделей корреляционных связей в экономике / О.П. Крастинь. – Рига : Зинате, 1983. – 302 с.
- 29 Кремер, Н.Ш. Эконометрика : учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 311 с. – ISBN 5-238-00333-1.
- 30 Личко К.П. Прогнозирование и планирование аграрно-промышленного комплекса: учебник / К.П. Личко. – М. : Гардарики, 1999.– 264с.
- 31 Лопатников, Л. И. Экономико-математический словарь : словарь современной экономической науки / Л.И. Лопатников. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Дело, 2003. - 520 с. - ISBN 5-7749-0275-7.
- 32 Лукашин, Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: учеб. пособие / Ю.П. Лукашин. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
- 33 Магнус, Я.Р. Эконометрика. Начальный курс : учебник / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – 5-е изд., испр. – М. : Дело, 2001. – 400 с. - ISBN 5-7749-0055-X.

- 34 Миллс, Ф. Статистические методы : пер. с англ. / Ф. Миллс. – М. : Госстатиздат, 1958. – 589 с.
- 35 Многомерный статистический анализ в экономике : учеб. пособие для вузов / Л.А. Сошникова, В.Н. Тамашевич, Г. Уебе, М. Шефер ; под ред. проф. В.Н. Тамашевича. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 1999. – 598 с. - ISBN 5-238-00099-5.
- 36 Мхитарян, В.С. Эконометрика : учебно-методический комплекс / В.С. Мхитарян, М.Ю. Архипова, В.П. Сиротин. – М. : Изд. центр ЕАОИ, 2008. – 144 с.
- 37 Ниворожкина, Л.И. математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями: учебн. пособие / Л.И. Ниворожкина, З.А. Морозова, И.Э. Гурьянова; под ред. проф. Л.И. Ниворожкиной. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^о», 2015 – 480 с.
- 38 Новак, Э. Введение в методы эконометрики: сборник задач : пер. с польск. / Э. Новак; под ред. И.И. Елисеевой. – М. : Финансы и статистика, 2004. – 248 с. - ISBN 5-279-02927-0.
- 39 Пасхавер, И.С. Общая теория статистики : для программированного обучения: учеб. пособие / И.С. Пасхавер, А.Л. Яблочник; под ред. проф. М.М. Юзбашева. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 432 с., ил.
- 40 Проблемы определения биовозраста : сравнение эффективности методов линейной и нелинейной регрессии / Т.М. Смирнова [и др.] // Профилактика старения, 1999. – Выпуск 2. – Режим доступа : <http://medi.ru/>.
- 41 Производственные функции в управлении проектами. Научные и учебно-методические разработки Института инноватики. – Режим доступа : <http://www.ii.spb.ru>.
- 42 Ратникова, Т.А. Введение в эконометрический анализ панельных данных / Т.А. Ратникова // Экономический журнал ВШЭ. -2006. - № 2. – С. 267-316.
- 43 Салин, В. Н. Курс теории статистики для подготовки специалистов финансово-экономического профиля : учебник для студентов по специальностям "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет, анализ и аудит", "Мировая экономика", "Налоги и налогообложение" / В. Н. Салин, Э. Ю. Чурилова. – М. : Финансы и статистика, 2007 . – 480 с. - ISBN 978-5-279-03063-7.

44 Сахарова, Ю.В. Самоорганизация социальных систем : основания и интерпретационные возможности использования логарифмических моделей / Ю.В. Сахарова. – Режим доступа : <http://www.teoria-practica.ru/-7-2012/sociology/sakharova.pdf>.

45 Симчера, В.М. Статистические методы и анализ социально - экономических процессов. - М. : Финансы и статистика, 1998. - 248с.

46 Снедекор, Дж. У. Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии / Дж.У. Снедекор. – М. : Сельхозиздат, 1961. – 503 с.

47 Справочник по прикладной статистике: в 2-х т. / под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, С.А. Айвазяна, Ю.Н. Тюрина : пер. с англ. – М. : Финансы и статистика, 1990. – Т. 2. – 525 с. - ISBN 5-279-00244-5.

48 Статистика : учебник / И.И. Елисеева [и др.]; под ред. проф. И.И. Елисеевой. – М. : КНОРУС, 2006.– С. 552. – ISBN 5-85971-294-4.

49 Статистическое моделирование и прогнозирование : учебное пособие / Г.М. Гамбаров [и др.]; под ред. А.Г. Гранберга. – М. : Финансы и статистика, 1990. – 383 с.

50 Теория прогнозирования и принятия решений: учеб. пособие / под ред. С.А. Саркисяна. – М. : Высшая школа, 1977. – 353с.

51 Тихомиров, Н. П. Эконометрика : учеб. для вузов / Н. П. Тихомиров, Е. Ю. Дорохина; Рос. экон. акад. им. Г. В. Плеханова. - М. : Экзамен, 2003. - 512 с. - ISBN 5-94692-438-9.

52 Ферстер, Э. Методы корреляционного и регрессионного анализа : Руководство для экономистов : пер. с нем. / Э. Ферстер, Б. Ренц. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 302 с.

53 Четыркин, Е.М. Вероятность и статистика / Е.М. Четыркин, И.Л. Калихман. – М. : Финансы и статистика, 1982. – 319 с.

54 Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева [и др.]. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2008. – 576 с. - ISBN 978-5-279-02786-6.

55 Эконометрика для бакалавров: учебник для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 080100.62 Экономика / под ред. В. Н. Афанасьева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т" ; [В. Н. Афанасьев и др.]- 3-е изд., перераб. и доп. - Оренбург : Университет, 2014. - 435 с. - ISBN 978-5-4417-0467-0.

56 Эренберг, А. Анализ и интерпретация статистических данных : пер. с англ. / А. Эренберг – М. : Финансы и статистика, 1981. – 406 с.

Учебное пособие

Владимир Николаевич Афанасьев

Наталья Сергеевна Еремеева

Татьяна Викторовна Лебедева

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕТОДОЛОГИЯ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

ISBN 978-5-7410-1703-6



9 785741 017036