Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии и специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

Оренбург
2018

УДК 519.17(076.5)
ББК 22.176я7
Т 33

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко
Авторы: О.А. Пихтилькова, Т.М. Отрыванкина, Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

Т 33 Теория конечных графов: методические указания / О.А. Пихтилькова, Т.М. Отрыванкина, Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 99 с.

Методические указания «Теория конечных графов» предназначены для практических занятий, содержат краткое изложение лекционного материала, примеры решенных задач, задачи для самостоятельного решения на занятиях, вопросы для повторения, задачи по теории графов для домашнего усвоения темы, задачи для повторения перед зачетом или экзаменом и тесты по темам. Данная разработка поможет преподавателям в организации занятий и студентам в усвоении тем практических занятий и успешном выполнении тестовых заданий Решенные примеры окажут существенную помощь студентам в учебной работе на занятиях и дома, а также помогут подготовиться к коллоквиуму и зачету.

Данная работа предназначена для обучающихся по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии и специальности10.05.01 Компьютерная безопасность.

.

УДК 519.17(076.5)
ББК 22.176я7

Содержание

Глава 1. Элементы теории графов

1.1 Основные понятия теории графов

1.1.1 Способы задания графов. Основные понятия графов

Способы задания графов:

1. Явное задание графа как алгебраической системы.
2. Геометрический
3. Матрица смежности
4. Матрица инцидентности

1.Граф представляется в виде модели, состоящей из множества вершин и бинарного отношения между вершинами. Тогда данный граф запишется как <{*a*,*b*,*c*,*d*}; {(*a*,*b*), (*b*,*a*),(*b*,*c*),(*c*,*b*),(*a*,*c*),(*c*,*a*),(*c*,*d*),(*d*,*c*)}>. В таком представлении ребру соответствуют две пары вершин (v_1,v_2) и (v_2,v_1), *инцидентных* данному ребру. Чтобы задать такое представление, достаточно для каждого ребра указать двухэлементное множество вершин – его мы и будем отождествлять с ребром. Для данного графа рёбра задаются множеством {{*a*,*b*},{*b*,*c*},{*a*,*c*},{*c*,*d*}} и граф мы будем записывать как пару (*V*,*X*), где *V* – множество вершин, а *X* – множество рёбер.

2. Геометрический

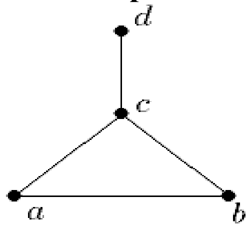


Рисунок 1

3.Матрица смежности

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	0	0	1	0

4. Матрица инцидентности

	u	v	w	x
a	1	0	0	0
b	1	1	1	0
c	0	1	0	1
d	0	0	1	1

Две вершины графа v_i и v_j называют *смежными*, если существует ребро их соединяющее.

Степенью вершины назовём удвоенное количество петель, инцидентных этой вершине плюс количество остальных инцидентных ей рёбер. Степень вершины будем обозначать *deg v*. Если *deg v=1,* то эта вершина называется *висячей*. Если *deg v=0*, то вершина называется *изолированной*.

Теорема Эйлера (о сумме степеней вершин графа). Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер: $\sum \deg v_i = 2m$.

Следствие: Число нечетных вершин любого графа четно.

Это следствие имеет немало любопытных приложений.

1. Нечетное число знакомых в любой компании всегда четно.

2. Число вершин многогранника, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

3. Число всех людей, когда-либо пожавших руку другим людям, нечетное число раз, является четным.

Граф называется *связным*, если любые его две вершины можно соединить маршрутом. *Компонентами связности* графа называются подграфы данного графа, вершины которых являются классами эквивалентности отношения связанности в данном графе.

Пустым называется граф без рёбер. *Полным* называется граф, в котором каждые две вершины соединены единственным ребром (рис.4) и обозначается

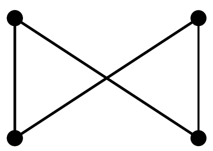


Рисунок 2

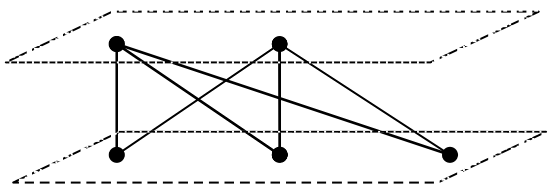


Рисунок 3

K_n. Граф называется *взвешенным*, если каждому ребру приписаны веса (стоимости). Если в множестве X разрешается повторять пары и разрешаются пары вида (v_i, v_i) – петля, то такой граф называется *псевдографом*. Если в графе есть кратные ребра, но петли запрещены, то такой граф называют *мультиграфом*. Граф называется *регулярным* степени R (рис. 2), если степень каждой его вершины равняется R. Граф называется *двудольным* (рис. 3), если

множество его вершин можно разбить на 2 подмножества так, что

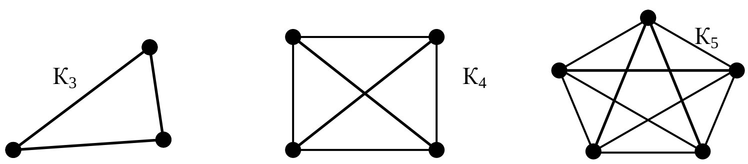


Рисунок 4

никакие две вершины одного подмножества не связаны.

Теорема. Граф будет двудольным тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.

Примеры решения задач

1) Граф *G(V,X)* с множеством вершин V={1,2,3,4,5,6,7} задан списком дуг: X={(1,2), (2,3), (2,7), (3,4), (3,5), (4,4), (4,5), (4,6), (5,6), (6,7), (7,1), (7,7)}. Постройте реализацию графа G. Постройте матрицы смежности и инцидентности. Укажите степени вершин и найдите цикломатическое число графа.

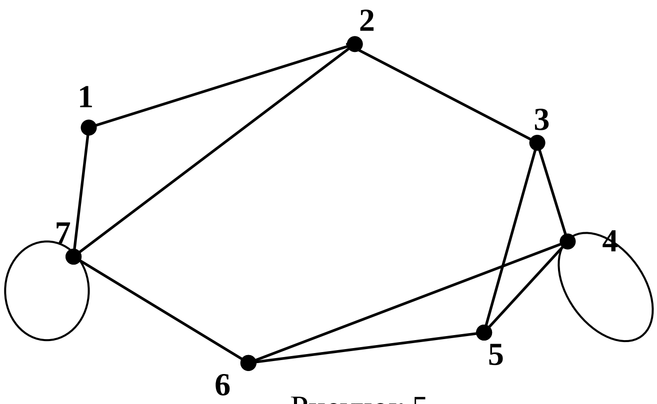


Рисунок 5

Решение. Графическая реализация G показана на рис. 5. Определим степени вершин: deg V_1=2, deg V_2=3, deg V_3=3, deg V_4=5, deg V_5=3, deg V_6=3, deg V_7=5. Цикломатическое число графа равно 1+12-7=6. Матрица смежности и матрица инцидентности будет выглядеть так:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix};
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
(1,2), & (2,3) & (2,7) & (3,4) & (3,5) & (4,4) & (4,5), & (4,6), & (5,6) & (6,7) & (7,1) & (7,7)
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Задачи для самостоятельного решения

2) Изобразите граф, чья матрица смежности имеет вид:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

3) Опишите матрицу смежности полного графа $K_{n.}$

4) Задайте различными способами графы G_1-G_2, определенные ниже:

a) G_1 – тетраэдр;

b) G_3 – куб;

5) Введя подходящие обозначения вершин, для каждого из графов на рис. 6 подберите соответствующую матрицу смежности из перечисленных ниже.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

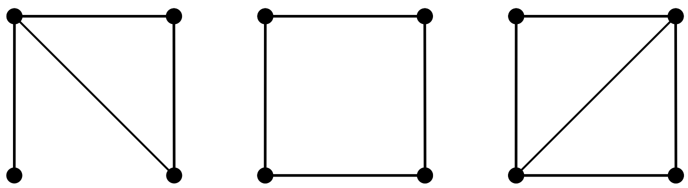


Рисунок 6

6) Граф G(V,X) с множеством вершин V={1,2,3,4,5,6,7} задан списком дуг: Постройте реализацию графа G. Постройте матрицы смежности и инцидентности. Найдите степени вершин.

а) X= {(1,2), (1,4), (1,7), (2,2), (2,3), (2,6), (3,4), (4,5), (5,5), (6,7)};

б) X= {(1,5), (2,3), (2,7), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (5,7) (6,6), (6,7)};

в) X= {(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,5), (2,7), (3,5), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7)};

г) X= {(1,1), (1,3), (2,5), (2,6), (3,6), (3,7), (4,4), (4,6), (5,6)};

д) X= {(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (2,7), (3,5), (3,6), (4,6), (6,6), (6,7)}.

1.1.2. Числовые характеристики графов

Цикломатическим числом графа называется число связных компонент графа плюс число ребер минус число вершин: $\nu(G)=p+m-n$. Смысл этого понятия заключается в следующем: это количество ребер, которые надо удалить, чтобы циклов в графе не осталось.

Если граф связный, то формула такова: $\nu(G)=1+m-n$, так как в связном графе одна компонента связности.

Независимое внутренне-устойчивое множество вершин графа - это множество вершин, в котором:

1. никакие две вершины не соединены ребром;
2. это множество максимально, т.е. не содержится в другом внутренне устойчивом множестве этого графа.

Независимое внутренне-устойчивое множество вершин графа – это наибольшее независимое (по количеству вершин) множество.

Количество вершин во внутренне-устойчивом множестве называется *числом внутренней устойчивости* α(G).

На определенном этапе проектирования схем определяется множество внутренней устойчивости, сначала размещаются эти элементы, а потом все остальные.

Множество вершин в графе называют *внешне устойчивым*, если:

1. любая вершина, которая не вошла в это множество, связана ребром хотя бы с одной из вершин этого множества.
2. Множество вершин минимально, т.е. нельзя удалить вершину, чтобы свойство минимальности не потерялось.

Количество вершин во внешне-устойчивом множестве называется *числом внешней устойчивости* β(G).

Примеры практических задач, сводящихся к этой задаче:

1. В некотором закрытом учреждении имеется система коридоров. Каково минимальное количество камер слежения, чтобы они просматривали все коридоры.
2. Имеется некоторый набор стратегических пунктов. Какое минимальное число солдат надо расставить, чтобы контролировать все пункты.

Примеры решения задач

7) Определить множества внутренней устойчивости графа на рисунке 7.

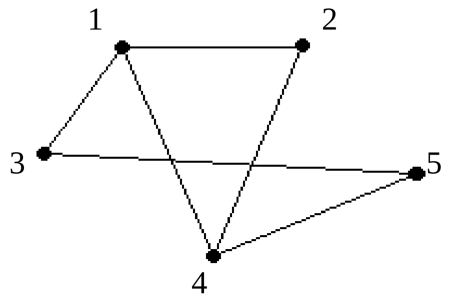


Рисунок 7

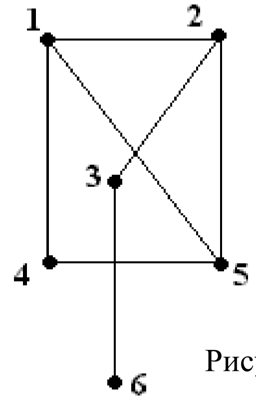


Рисунок 8

Решение. Алгоритм для нахождения внутренне устойчивого множества приближенный (жадный). Он заключается в следующем: сначала отсортировать вершины в порядке не убывания степеней, а потом просматривать отсортированный список и последовательно пытаться включить вершины по порядку в соответствии с требуемыми условиями.

Множества внутренней устойчивости: {1, 5}, {3, 4}, {2, 3}.

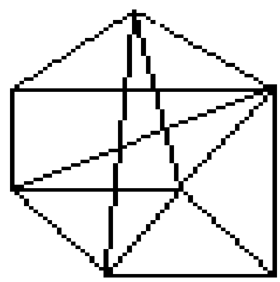
8) Определить множества внешней устойчивости графа и число внешней устойчивости графа на рисунке 8.

Решение. Алгоритм для нахождения внешне устойчивого множества также приближенный (жадный). Он заключается в следующем: сначала сортируют вершины в порядке не возрастания степеней, а потом просматривать отсортированный список и последовательно пытаться включить вершины по порядку в соответствии с требуемыми условиями.

Внешне устойчивые множества: {5, 3}, {6, 5}, {4, 2, 6}. $\beta(G)=2$.

Задачи для самостоятельного решения

9) Для заданного графа определить его числовые характеристики: цикломатическое число, числа внешней и внутренней устойчивости, а также укажите по 3 множества внешней и внутренней устойчивости.



1.1.3. Операции с графами

Дополнением графа $G(V,X)$ называется граф $\overline{G}(V,X^{/})$ с теми же вершинами V, что и граф G, и имеющий те и только те ребра $X^{/}$, которые необходимо добавить к графу G, чтобы он стал полным. Дополнением полного графа будет пустой граф, и наоборот.

Объединением графов $G_1=(V_1,X_1)$ и $G_2=(V_2,X_2)$ называется граф $G=G_1\cup G_2$, множество вершин которого $V=V_1\cup V_2$, а множество ребер $X=X_1\cup X_2$.

Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G=G_1\cap G_2$, *для* которого $X= X_1\cap X_2$ — множество ребер, а $V=V_1\cap V_2$ — множество вершин.

Подграфом графа $G=<V,X>$ называется граф $G_1=<V_1,X_1>$, такой, что $V_1\subseteq V$, а $X_1\subseteq X$. Иначе говоря, подграф содержит некоторые вершины исходного графа и некоторые рёбра (только те, оба конца которых входят в подграф).

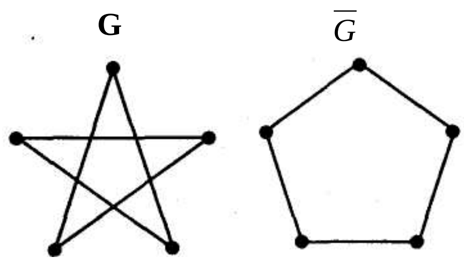
Подграфом, порождённым множеством вершин V' называется подграф, множество вершин которого – $\mathbf{V'}$, а множество ребер – это все ребра, соединяющие вершины в графе G.

Подграф называется *остовным подграфом*, если множество его вершин совпадает с множеством вершин самого графа, т.е. $V_1=V$, а $X_1\subseteq X$

Два последних определения дают два вида максимальности подграфов: максимальность множества вершин и максимальность множества рёбер.

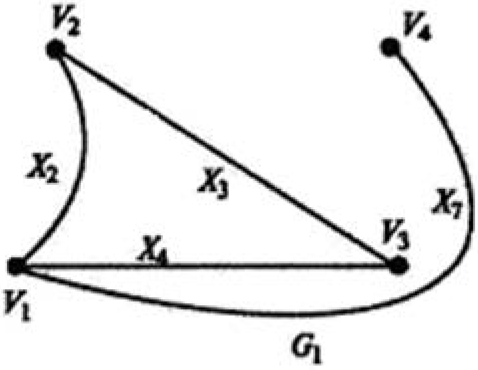
Примеры решения задач

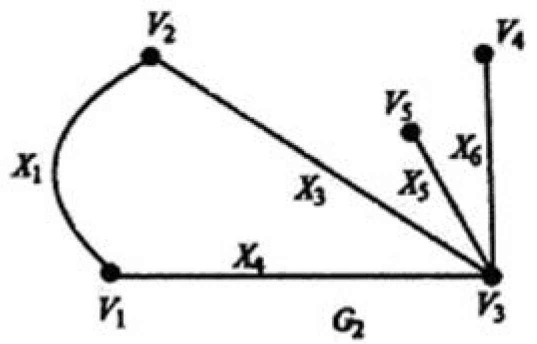
10) Найдите дополнение данного графа G.



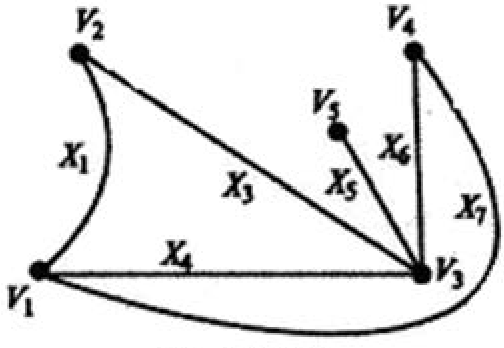
Решение. В заданном графе пять вершин. Чтобы построить его дополнение, поступим в соответствии с определением следующим образом: отмечаем все пять вершин и проводим только те ребра, которых нет в исходном графе.

11) Даны графы G_1 и G_2. Найдите объединение и пересечение этих графов.

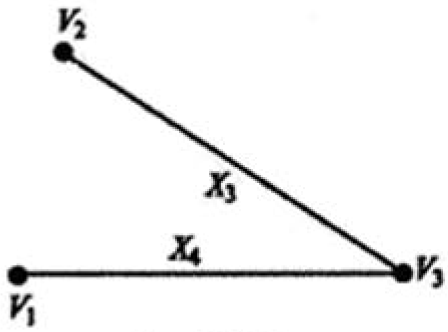




Решение. Придерживаясь соответствующих определений, получаем следующие графы.



$G = G_1 \cup G_2$



$G' = G_1 \cap G_2$

Задачи для самостоятельного решения

12) Изобразите дополнение, если задана матрица смежности графа:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Опишите матрицу смежности дополнения полного графа $K_{n.}$

13) Какие из графов на рис. 9 могут являться подграфами графа из

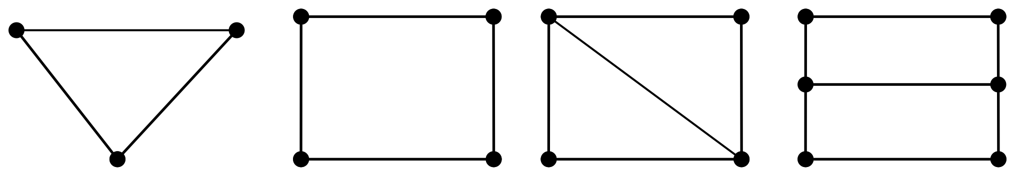


Рисунок 9 Кандидаты в подграфы

(предыдущей) задачи?

14) Найдите объединение, пересечение и дополнение $\overline{G}$ графов G_1 и G_2 (рис. 10).

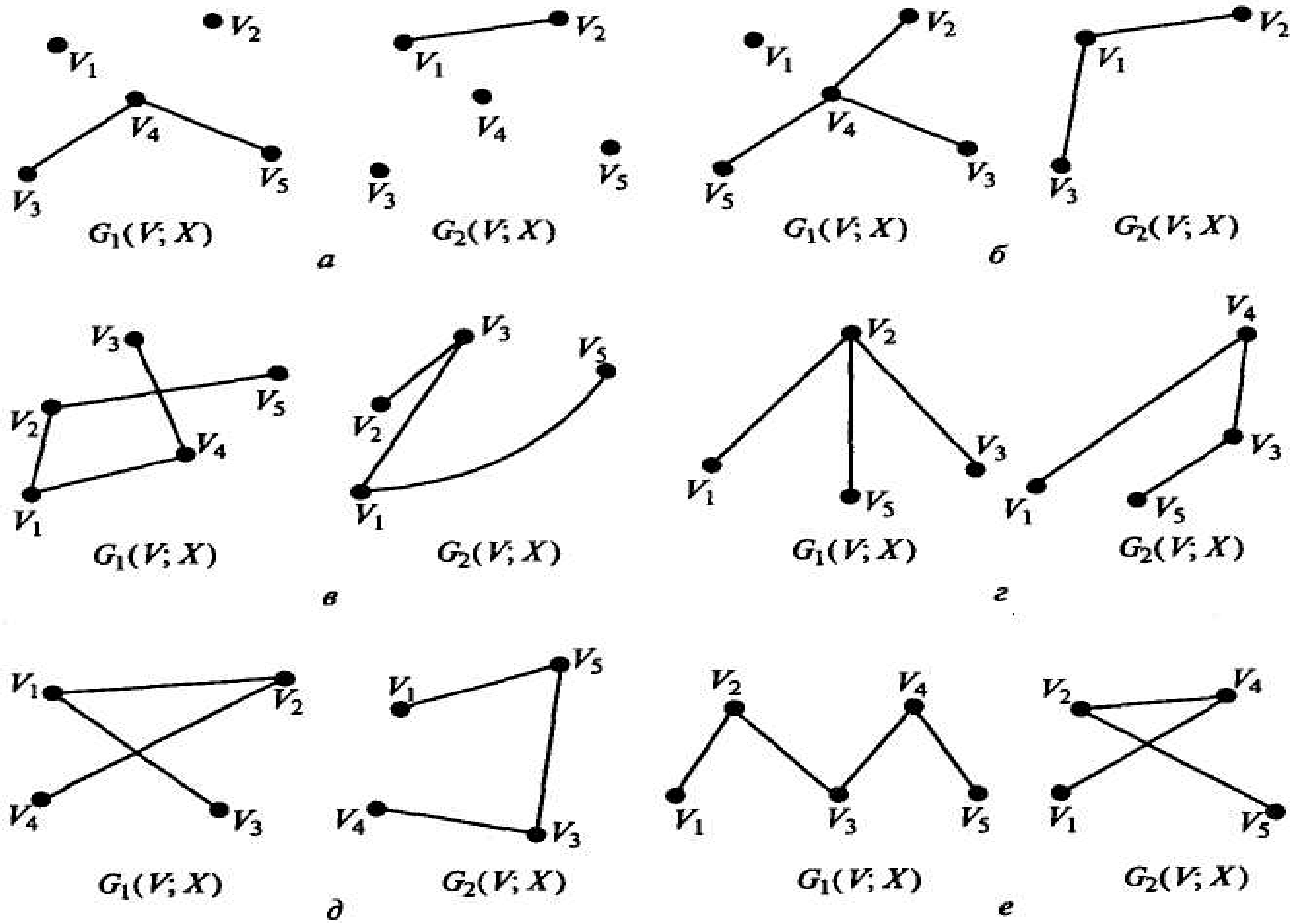


Рисунок 10

15) Изобразите граф на 6 вершинах и с 16 ребрами и выполните с ним следующие упражнения:

1) Изобразите подграф на 3 вершинах и с 10 ребрами.

2) Изобразите остовный подграф.

3) Изобразите подграф, порожденный множеством вершин $\{V_1, V_3, V_5, V_6\}$.

1.1.4. Изоморфизм графов

Понятие *изоморфизма* для графов имеет наглядное толкование. Представим рёбра графов эластичными нитями, связывающими узлы – вершины. Тогда, изоморфизм можно представить как перемещение узлов и растяжение нитей. Изоморфные графы будем считать неразличимыми.

Чтобы доказать, что соответствующие графы G_1 и G_2 изоморфны, достаточно указать соответствующий изоморфизм. Если же требуется доказать, что графы не изоморфны, то приходится перебирать все возможные взаимно-однозначные соответствия между множествами вершин (при $|V_1|=|V_2|=n$ таких соответствий будет $n!$) или же находить устойчивые характеристики графов, не совпадающие у G_1 и G_2.

Если дополнения графов изоморфны между собой, то исходные графы также будут изоморфны. При сложном изображении графов легче установить изоморфизм их дополнений.

Свойства графа, сохраняющиеся при изоморфизмах (число вершин, число ребер, число вершин заданной степени, число циклов заданной длины и т.д.) называются *инвариантами*. К сожалению, полная система инвариантов (такой их набор, что совпадение всех инвариантов из этого набора для G_1 и G_2 гарантирует, что они изоморфны) до сих пор неизвестна.

Примеры решения задач

16) Покажите, что следующие два графа изоморфны.

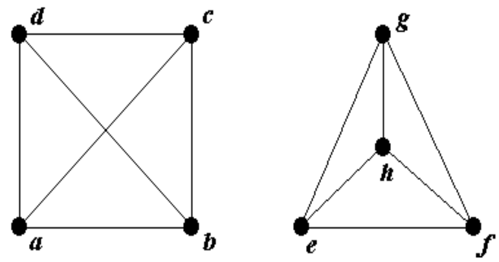
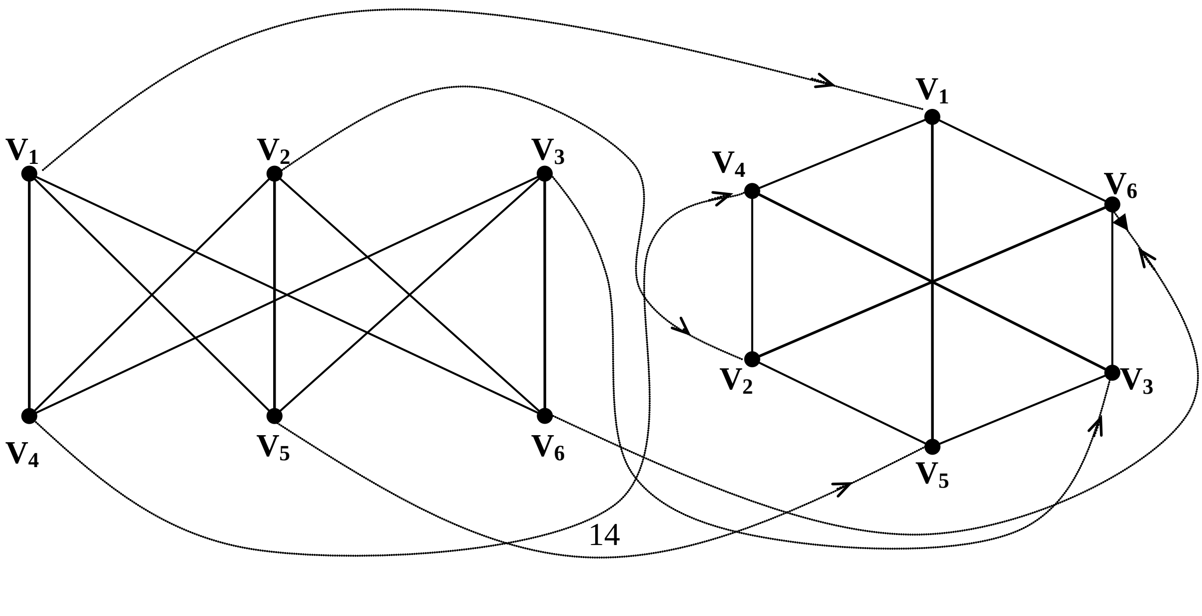


Рисунок 11

Решение. Отображение, являющееся изоморфизмом легко представить как модификацию первого графа, передвигающую вершину *d* в центр рисунка.

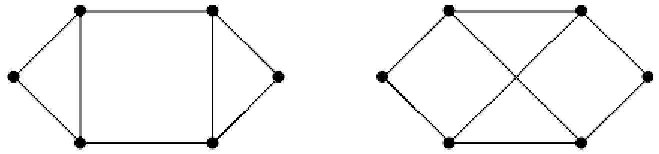
17) Изоморфны ли следующие два графа?



Решение. Заданные графы изоморфны. Один из возможных в данном случае изоморфизмов задан нумерацией вершин и для наглядности показан стрелками.

Задачи для самостоятельного решения

18) Проверьте, изоморфны ли графы.



19) Какие графы на рисунке 12 изоморфны между собой?

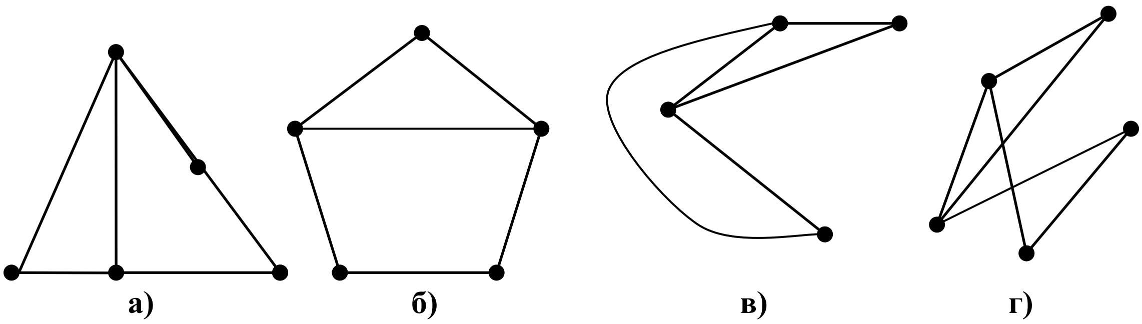


Рисунок 12

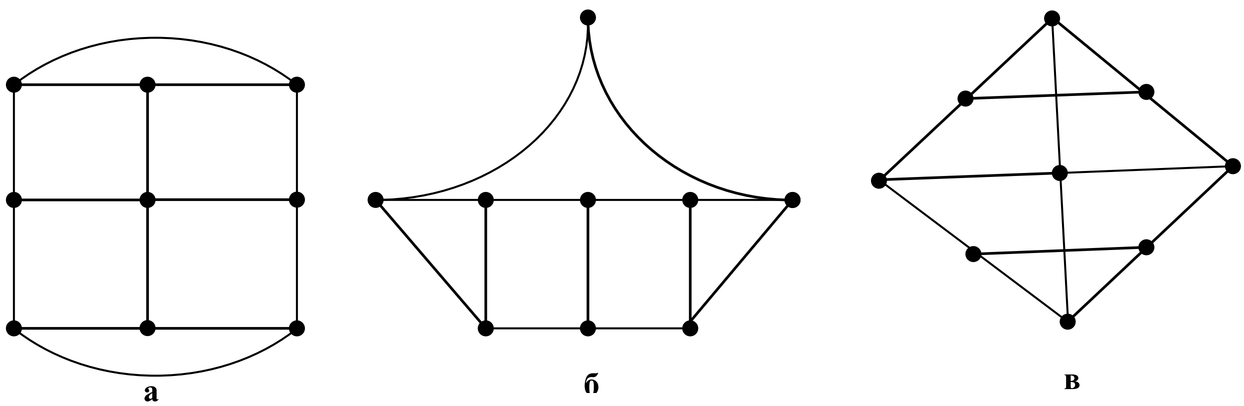


Рисунок 13

20) Постройте изоморфизм графов.

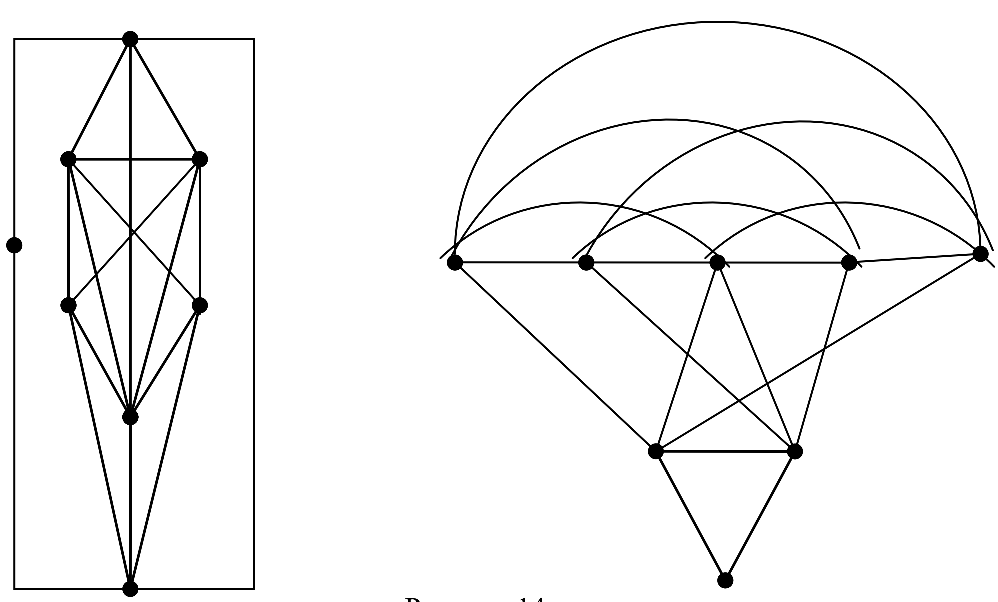
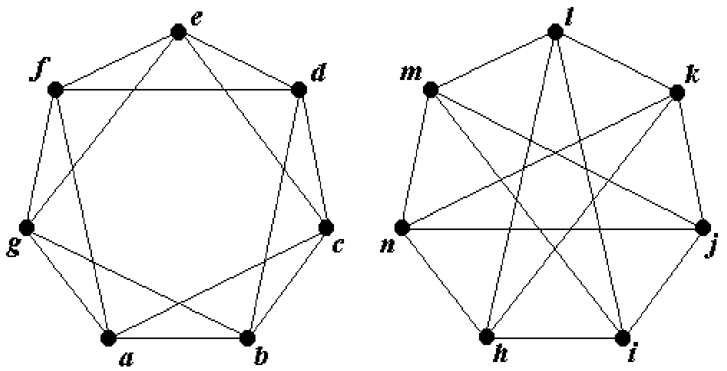


Рисунок 14



21) Определите, изоморфны ли графы на рис. 13. Построить их матрицы смежности.

22) Изоморфны ли графы, представленные на рис.14 между собой. Если да, то укажите изоморфизм.

1.1.5. Маршрут. Виды маршрутов

Маршрутом в графе $G=<V,X>$ называется последовательность вершин вида $v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_n$, где $v_i \in V$, $i \in [0,n]$. Вершины v_0, v_n называются *связанными данным маршрутом* (или просто *связанными*). Вершину v_0 называют *началом*, а v_n – концом маршрута. Если $v_0 = v_n$, то маршрут называют *замкнутым*. Число n называется *длиной маршрута*.

Маршрут, в котором все рёбра попарно различны, называется *цепью*. Замкнутый маршрут, являющийся цепью, называется *циклом*. Маршрут, в котором все вершины попарно различны, называется *простой цепью*. Цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, попарно различны, называется *простым циклом*.

Примеры решения задач

23) Приведите пример маршрута, цепи, простой цепи, цикла, простого цикла.

Решение. Маршрут *a,b,c,a,d* в графе является цепью, но не является простой цепью и циклом. Маршрут *d,c,a,b* – простая цепь, но не цикл. Маршрут *a,b,c,d* – простой цикл, но не цепь.

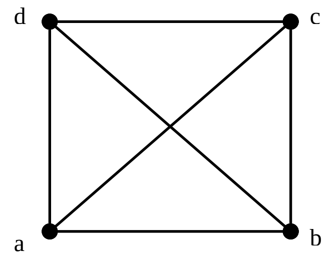


Рисунок 15

Задачи для самостоятельного решения

24) Задан граф и последовательности вершин (рис. 16). Определите, какие из этих последовательностей являются маршрутами, цепями, простыми цепями, циклами, простыми циклами?

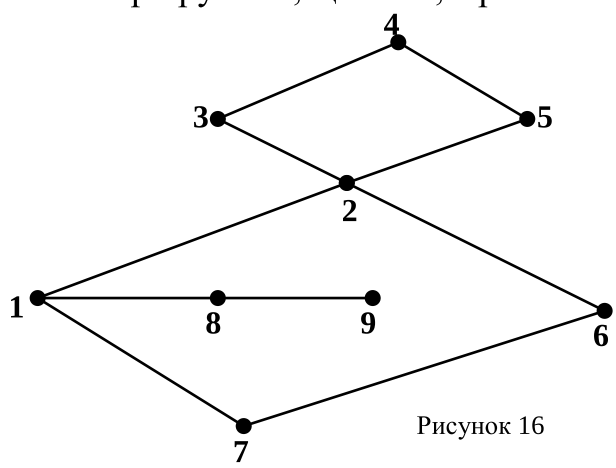


Рисунок 16

a) (1, 2, 3, 4, 5,2,1,7,6,2,1,7,6);

b) (6,7,1,2,6);

c) (1,2,3,4,5,2,1,7,6);

d) (1,2,3,4,5,2,6);

e) (1,2,6);

f) (1,7,6);

g) (1,2,3,4,5,2,3,4,5,2,6,7,1,2,6,7,1);

h) (1,2,3,4,5,2,6,7,1);

i) (1,2,6,7,1);

25) На рис. 17 задан граф G. Выполните следующие упражнения:

a) Составьте матрицу смежности, инцидентности.

b) Укажите степени вершин графа и его цикломатическое число.

c) Составьте три маршрута длины 5, различные цепь и простую цепь, соединяющие вершину V_2 и вершину V_5.

d) Постройте простой цикл, содержащий вершину V_4.

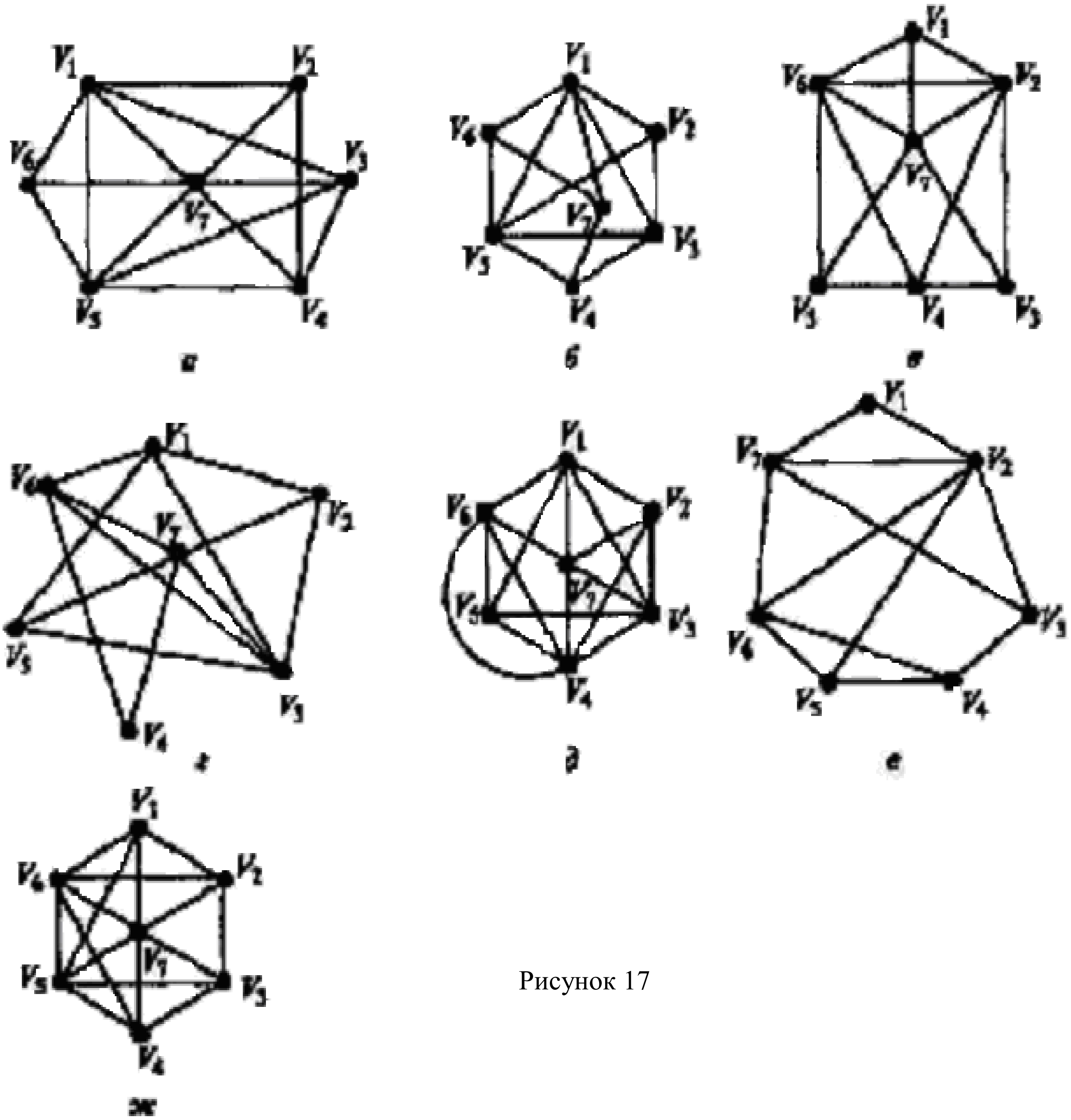


Рисунок 17

1.1.6. Расстояния в графе. Центры графа

Расстоянием между двумя вершинами в графе $G=<V,X>$ называется длина кратчайшего маршрута, их связывающего. *Матрица расстояний* – квадратная матрица $n\times n$ вида:

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ \dots \\ V_i \\ \dots \\ V_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & \dots & V_j & \dots & V_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \dots & \dots & d(V_i,V_j) & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$d(V_i, V_j)$ –расстояние между вершинами V_i и V_j

Диаметром графа D называется наибольшее из расстояний между вершинами графа.

Вершина, наибольшее из расстояний от которой до остальных вершин графа является наименьшим, называется *центром* графа, а расстояния – *радиусами R*. Если D=R, то все вершины центры.

Примеры решения задач

26) Постройте матрицу расстояний, определите диаметр, радиус, центры графа, изображенного на рисунке 18.

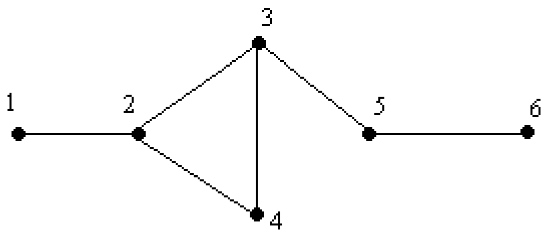


Рисунок 18

Решение. Строим матрицу расстояний 6×6.

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0&1&2&2&3&4\\ 1&0&1&1&2&3\\ 2&1&0&1&1&2\\ 2&1&1&0&2&3\\ 3&2&1&2&0&1\\ 4&3&2&3&1&0 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \max \\ 4\\3\\2\\3\\3\\4 \end{array}$$

В каждой строке находим максимальное расстояние и выписываем его в столбец max.
Максимальное число в столбце max – диаметр.
Минимальное число в столбце max – радиус.
Вершины, где в столбце max минимум – центры.
В данной задаче: D=4, R=2, центр – вершина 3.

Задачи для самостоятельного решения

27) Постройте матрицу расстояний, определите диаметр, радиус, центры графов, изображенных на рисунке 19.

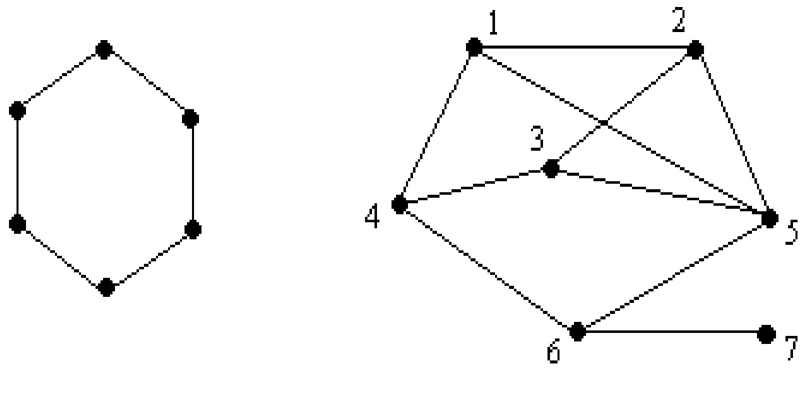


Рисунок 19

1.1.7. Эйлеровы циклы

Цикл, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз, называется *Эйлеровым*. Граф, имеющий эйлеров цикл, тоже будем называть эйлеровым. Эйлеровых графов почти нет.

Теорема. (*Критерий эйлеровости графа*). Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин – чётные числа.

Кроме понятия эйлерова цикла, в задачах часто возникает необходимость нахождения цепи, проходящей по каждому ребру ровно один раз (снимается требование замкнутости). Такие цепи будем называть *эйлеровыми цепями*. Задачи на проведение эйлеровых линий без повторений и без отрыва карандаша от бумаги являются одним из математических развлечений.

Теорема. В связном графе существует эйлерова цепь тогда и только тогда, когда граф содержит не более двух вершин нечётной степени.

Примеры решения задач

28) Построить эйлеров цикл для заданных графов.

Решение. Для первого графа (Рис. 20) это a, *,b, e,d, c, f,* a. Для второго графа (Рис. 21) это *h, l, i, m, h, i, j, m, l, k, h*.

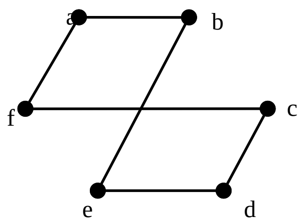


Рисунок 20

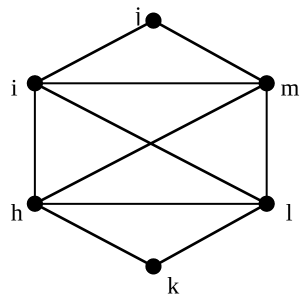


Рисунок 21

Задачи для самостоятельного решения

29) Какие из графов, упоминающихся в задачах и примерах, являются эйлеровыми?

30) Имеют ли пятиугольник и пятигранник-пирамида с петлями в некоторых вершинах эйлеров цикл (цепь)?

1.1.8. Алгоритм построения Эйлерова цикла

Алгоритм построения эйлерова цикла:

1. Выберем в графе произвольный простой цикл и удалим его из графа.

2. В оставшемся графе снова выберем простой цикл, удалим его и т.д., в результате чего, исходный граф будет разобран на простые циклы.

3. Склеим полученные циклы в одно целое, отправляясь от некоторого цикла и приклеивая каждый новый цикл ровно в одной точке.

4. Выпишем эйлеров цикл в исходном графе.

Примеры решения задач

31) Найдите эйлеров цикл для графа G, изображенного на рис. 22.

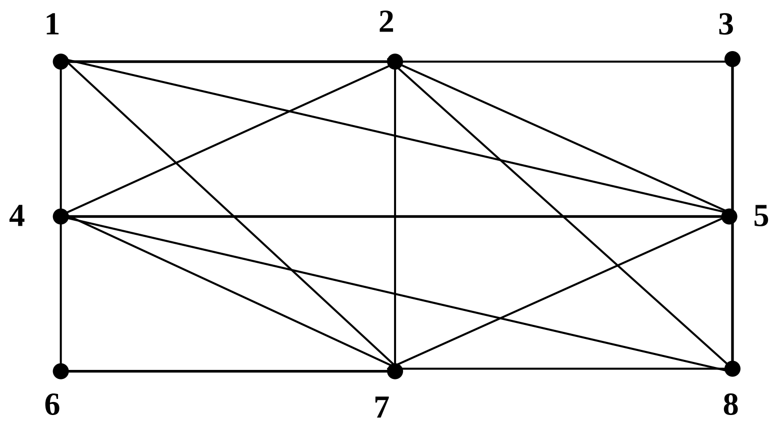
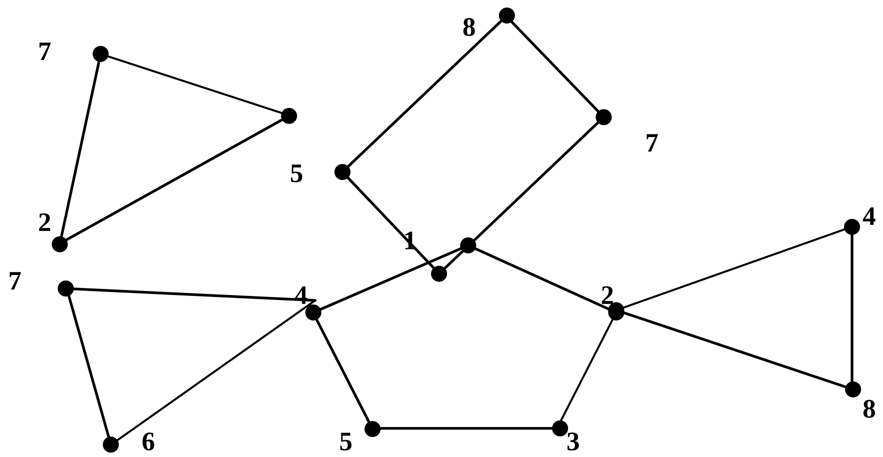


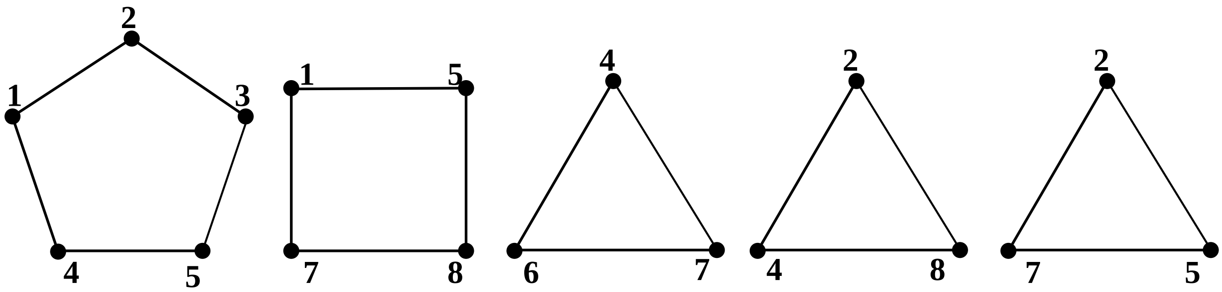
Рисунок 22

Решение. Воспользуемся алгоритмом построения эйлерова цикла в графе.



1. Выберем цикл (1,2,3,5,4,1) и удалим его из графа, при этом удалятся вершины степени 2, ребра выбранного цикла, а степени вершин, входивших в этот цикл, уменьшатся на 2.

2. Из оставшегося графа выбираем простой цикл (1,5,8,7,1).

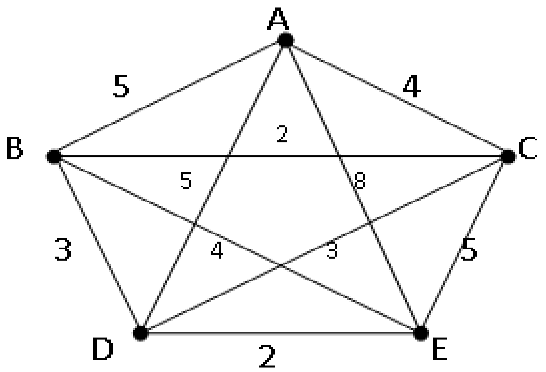


3. Следующие простые циклы: (7,4,6,7), (2,4,8,2) и (7,2,5,7).

4. Склеим полученные циклы и выпишем эйлеров цикл в исходном графе: (1,5,2,7,5,8,7,1,2,4,8,2,3,5,4,6,7,4,1).

Задачи для самостоятельного решения

32) Найдите эйлеровы циклы в графе на рис. 23, 24. Найдите в нем циклы длины 3,4,5,6, и 7.



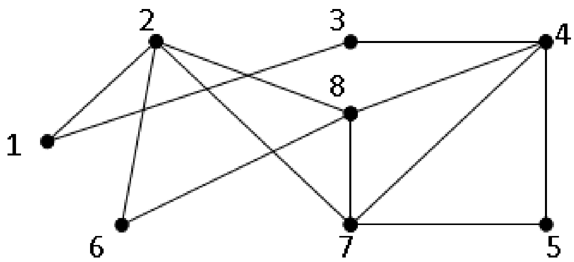


Рисунок 23 Рисунок 24

33) Укажите эйлеров цикл в графах на рис. 25 и 26, если он имеется.

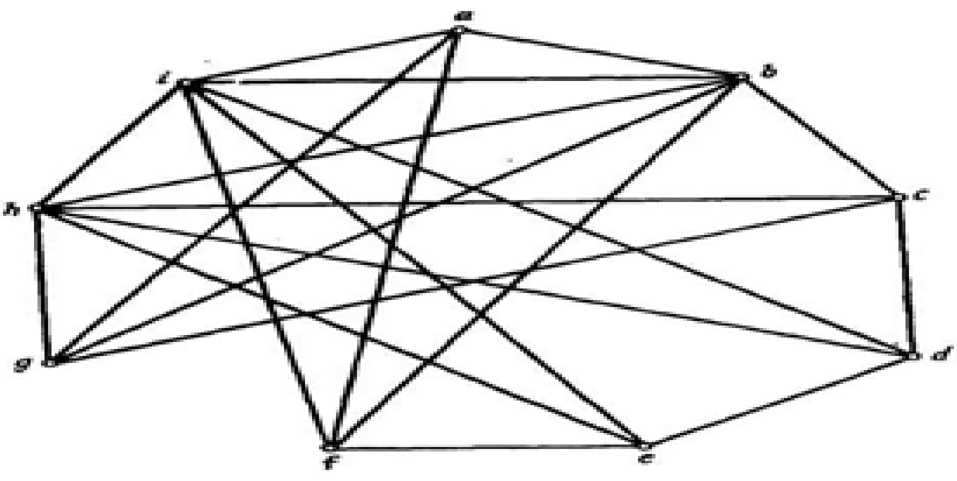


Рисунок 25

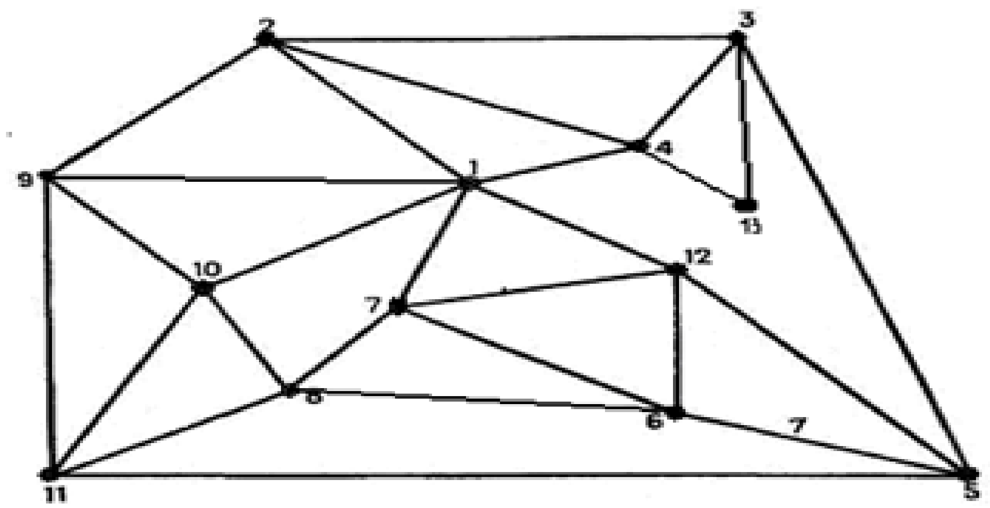


Рисунок 26

1.1.9. Гамильтоновы циклы

Гамильтоновым называется цикл, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз. Интуитивно ясно, что если граф содержит много ребер и эти ребра достаточно равномерно распределены, то граф скорее всего будет гамильтоновым. Вообще, почти все графы Гамильтоновы.

Теорема (***Дирака***). В связном графе $G=(V,E)$, $|V|=n\geq 3$, гамильтонов цикл существует, если степень каждой вершины не менее $n/2$. Данная теорема является достаточным условием, т.е. если степень вершины окажется меньше $n/2$, то нельзя сделать вывод, что граф гамильтоновым не является.

Теорема (***Оре***). Если для любой пары u и v несмежных вершин графа G порядка $n\geq 3$ выполняется неравенство $deg\ u+deg\ v\geq n$, то G-гамильтонов граф.

Примеры решения задач

34) Построить гамильтоновы циклы, цепи графов на рис. 27.

Решение. В графе G_1 существует гамильтонов цикл $(a,b,c,d,e,f,g,q,n,m,l,h,a)$. В G_1 существует и гамильтонова цепь, для чего в гамильтоновом цикле достаточно удалить одно ребро.
В графе G_2 гамильтонова цикла нет: чтобы пройти через вершины a,b,c внешнего треугольника

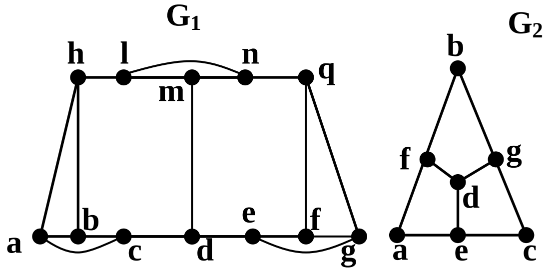


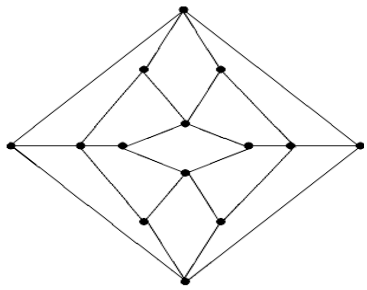
Рисунок 27

графа G_2 гамильтонов цикл должен содержать все лежащие на этих сторонах ребра, но тогда он не проходит через расположенную в центре треугольника вершину d. Однако гамильтонова цепь в графе G_2 существует, например, a,f,b,g,c,e,d.

Задачи для самостоятельного решения

35) Все ли графы, упоминающиеся в задачах и примерах, содержат гамильтонов цикл?

36) Содержит ли гамильтонов цикл граф ромбического додекаэдра? Если да, то найдите его.



37) Имеют ли пятиугольник с петлями в некоторых вершинах и пятигранник-призма гамильтонов цикл (цепь)?

38) Найдите гамильтоновы циклы в графе на рис. 23, 24.

39) Укажите гамильтонов цикл в графах на рис. 25 и 26, если он имеется.

1.1.10. Алгоритм построения гамильтонова цикла в графе

Задача коммивояжера принадлежит к классу задач математического программирования. Требуется найти такой путь коммивояжера, по которому необходимо посетить n-1 городов и вернуться домой, причем протяженность пути должна быть минимальной. Т.о. задача коммивояжера сводится к задаче нахождения гамильтонова цикла с наименьшим весом. Эффективные алгоритмы решения этой задачи неизвестны. Например, решение этой задачи для 50 городов на самых перспективных ЭВМ потребовало бы миллиарды лет.

Алгоритм 1 (жадный):

1. Выбираем ребро минимального веса и включаем его в цикл.

2. У каждого из концов построенной цепочки просматриваем ребра, выбираем ребро минимального веса, которое не образует цикл.

3. Если цепочка построена на всех вершинах, то замыкаем её оставшимся ребром.

Гамильтонов цикл всегда есть в полном графе. Если граф не полный, то его дополняют ребрами очень большой дины до полного. И если такое ребро попадет в построенную цепочку, это будет означать, что гамильтонова цикла в графе нет.

Так как алгоритм жадный, то построенный обход может отличаться от оптимального на <u>любую</u>! величину.

Алгоритм 2: решение задачи коммивояжера с помощью остовного дерева:

1. Находим в графе минимальное остовное дерево (с помощью алгоритмов Краскала или Прима).

2. В минимальном остовном дереве дублируем каждое ребро (получаем мультиграф).

3. В полученном мультиграфе степень каждой вершины четна, следовательно, в нем есть эйлеров цикл.

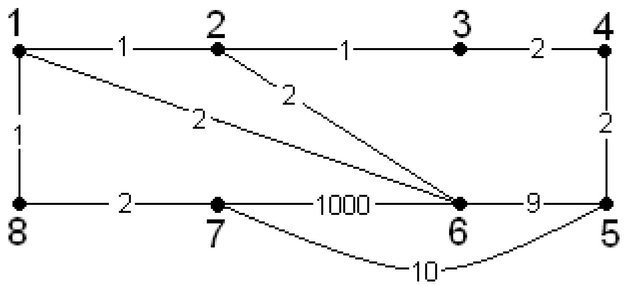
4. Находим эйлеров цикл.

5. Строим гамильтонов цикл по эйлерову: рассматриваем эйлеров цикл и включаем каждую вершину в гамильтонов цикл, если она ещё не вошла в него. В противном случае – её пропускаем. Продолжаем до тех пор, пока все вершины не будут соединены.

Для данного алгоритма есть оценка. Найденная длина может быть хуже, чем длина оптимального обхода, но не более, чем в два раза.

Примеры решения задач

40) Найти гамильтонов цикл минимального веса в заданном графе.



Решение. Очевидный обход: 1,6,2,3,4,5,7,8,1. Вес этого цикла 22.

Жадный алгоритм работает так:

1. 1,2
2. 1,2,3 $\to$ 8,1,2,3 $\to$ 7,8,1,2,3 $\to$ 7,8,1,2,3,4 $\to$ 7,8,1,2,3,4,5 $\to$ 7,8,1,2,3,4,5,6.
3. Замыкаем цепочку: 7,8,1,2,3,4,5,6,7 .
4. Считаем вес: 2+1+1+1+2+2+9+1000=1018.

Задачи для самостоятельного решения

41) Докажите, что графы на рис.28, 29 не имеют гамильтоновых циклов.

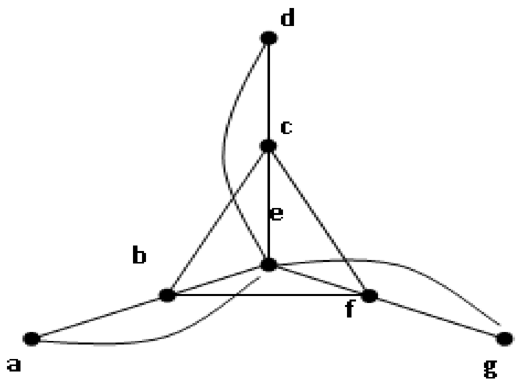


Рисунок 28

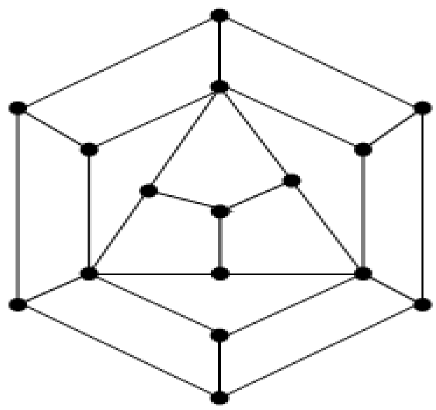


Рисунок 29

42) Покажите, что граф на рис. 30 не имеет гамильтонова цикла.

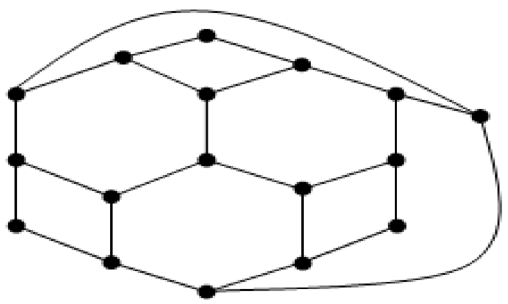


Рисунок 30

43) Используя алгоритм ближайшего соседа, найдите гамильтонов цикл в нагруженном графе (рис. 23), взяв за исходную

а) вершину A; б) вершину D.

1.1.11. Алгоритмы поиска в графе

Алгоритм 1: Поиск в ширину.

Подобно тому как, согласно принципу Гюйгенса, каждая точка волнового фронта является источником вторичной волны, мы, отправляясь из заданной вершины A, посещаем все смежные с ней вершины (т.е. вершины, в которые ведут стрелки из A). Каждая посещенная вершина становится источником новой волны и т.д. При этом необходимо позаботиться о том, чтобы не вернутся в ту вершину, в которой уже были.

Для программной реализации алгоритма понадобятся:

матрица ***m***[1..n, 1..n] - матрица смежности графа;

вспомогательный массив ***q***[1..n], в котором будет формироваться очередь, т.е. тип данных первый вошел – первый вышел (FIFO). Размер его достаточен, так как мы не посещаем вершины дважды. С массивом ***q*** связаны две переменные - ***head*** и ***tail***. В переменной head будет находиться номер текущей вершины, из которой идет волна, а при помощи переменной tail новые вершины помещаются в "хвост" очереди ***q;***

вспомогательный массив ***visited***[1..n], который нужен для того, чтобы отмечать уже пройденные вершины (visited[i]=TRUE <=> вершина i пройдена);

вспомогательный массив ***prev***[1..n] для хранения пройденных вершин. В этом массиве и будет сформирован искомый путь;

переменная ***f***, которая примет значение TRUE, когда путь будет найден.

Алгоритм 2: Поиск в глубину.

Идея поиска в глубину проста: отправляясь от текущей вершины, мы находим новую (еще не пройденную) смежную с ней вершину, которую помечаем как пройденную и объявляем текущей. После этого процесс возобновляется. Если новой смежной вершины нет (тупик), возвращаемся к той вершине, из которой попали в текущую, и делаем следующую попытку. Если попадем в вершину B, печатаем путь. Если все вершины исчерпаны - такого пути нет.

Заметим, что построенный таким образом алгоритм способен находить все пути из A в B, но первый найденный необязательно должен быть кратчайшим.

Как обычно, алгоритм с возвратами легче всего оформить с помощью рекурсивной процедуры. Для ее программной реализации нам понадобятся: матрица ***m***[1..n, 1..n] - матрица смежности графа; вспомогательный массив ***visited***[1..n], который мы будем для того, чтобы отмечать уже пройденные вершины (visited[i]=TRUE <=> вершина i пройдена); переменная ***f***, которая примет значение TRUE, когда путь будет найден.

Примеры решения задач

44) Дан граф (см. рис. 31). Занумеруйте вершины согласно очередности, в которой они посещаются в процессе поиска в ширину.

Решение.

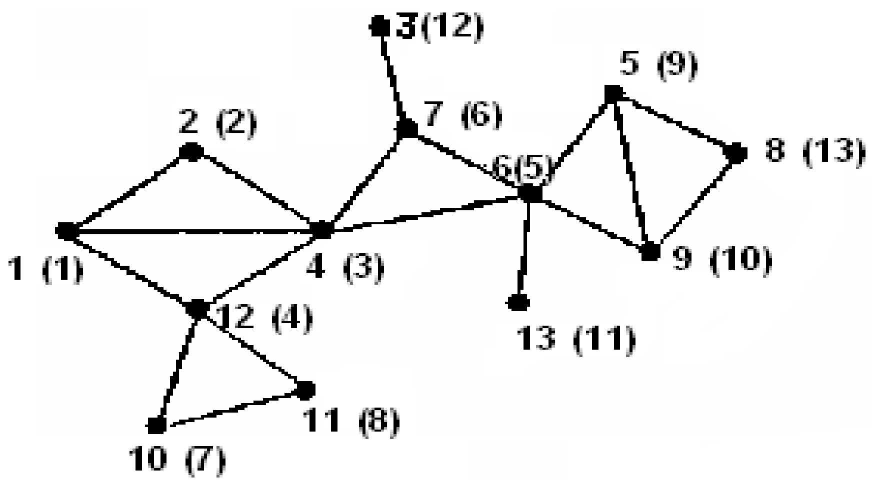


Рисунок 31

1.2 Деревья

1.2.1 Основные определения

Связный граф без циклов называется *деревом*. Висячие вершины за исключением корневой, называются *листьями.*

Алгоритм выявления корня дерева:

1. из дерева T удаляют листья вместе с инцидентными им ребрами, получают дерево T_1.

2. из дерева T_1 удаляют листья и получают дерево T_2 и так до тех пор, пока не останется одна вершина (или две, соединенные ребром), которая (которые) и называется *корнем* дерева.

Любое дерево с n вершинами имеет n-*1* ребро. Число различных деревьев, которые можно построить на n нумерованных вершинах, равно n^{n-2}.

Пусть G_1, G_2, ..., G_k — непересекающиеся деревья, т.е. $\forall i,j \in (1, ..., k)$ $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Тогда *упорядоченное* объединение деревьев $G = \cup G_i$, представляет собой несвязный граф, называемый *лесом*. Компонентами связности леса являются деревья.

Матричная теорема о деревьях. Если G – связный неориентированный граф, то все алгебраические дополнения элементов матрицы M равны между собой и равны числу различных остовов графа G. (Матрицу M получают следующим образом: в матрице смежности заменяют все единицы на -1 и каждый (i,i)-й элемент на $\deg V_i$.)

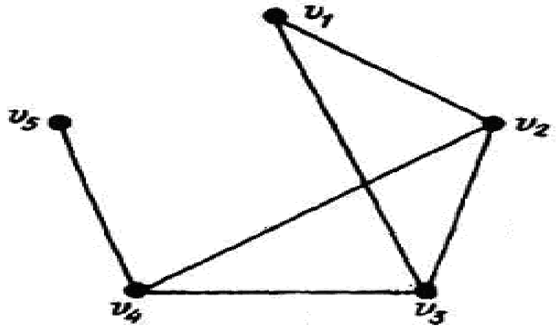
Каждая вершина дерева называется узлом.

Если каждый узел ориентированного дерева имеет полустепень исхода не больше 2, то такой вид деревьев называется *бинарными деревьями***.** Бинарные деревья применяются в информатике для операции бинарного поиска, который основан на методе половинного деления.

Бинарное дерево уровня n называется *полным***,** если каждый его узел уровня n является листом, а из каждого узла уровня меньше, чем n, исходит ровно две дуги.

Примеры решения задач

45) Подсчитать число остовов данного графа.



Решение. Составим матрицу смежности данного графа и заменим 1 на -1 и элементы главной диагонали на значения степени соответствующих вершин. $Deg(V_1)=2$, $Deg(V_2)=3$, $Deg(V_3)=3$, $Deg(V_4)=3$, $Deg(V_5)=1$.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ M=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдем алгебраическое дополнение (2,2) –го элемента этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =2(9-1-3)- \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =10-(3-1)=8.$$

Задача о нахождении остовов заданного графа часто возникает в приложениях, например, при рассмотрении возможных способов соединения нескольких городов в единую энергетическую сеть.

46) На рис. 32-35 представлены четыре графа. Определите, являются ли они деревьями. Какие из них являются бинарными, полными бинарными деревьями уровня *n*.

Решение. Все четыре графа являются деревьями, причем бинарными из них являются только два (рис. 32, 34). Дерево на рис. 35 не бинарное, т.к. есть узлы, не являющиеся листьями и не образующие два поддерева. Дерево на рис. 33 не бинарное, т.к. есть узлы, из которых исходит три дуги. Бинарное дерево на рис. 34 является полным.

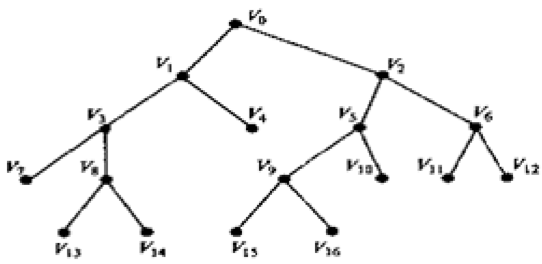


Рисунок 32

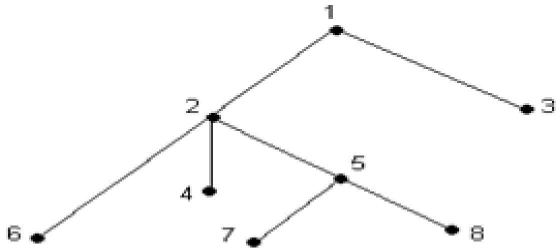


Рисунок 33

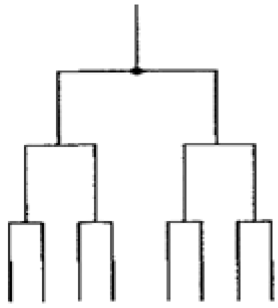


Рисунок 34

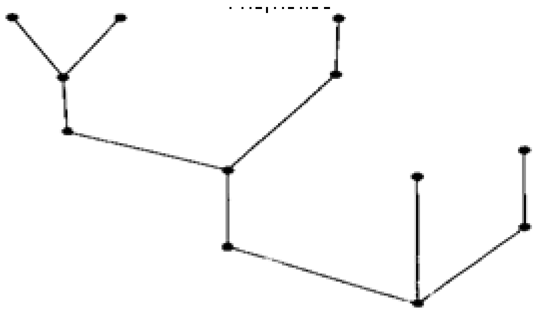
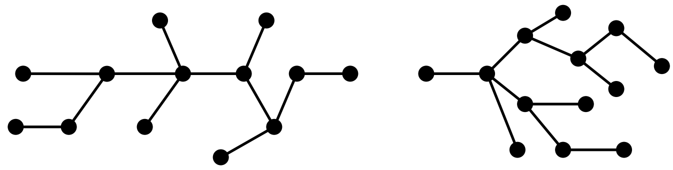


Рисунок 35

Задачи для самостоятельного решения

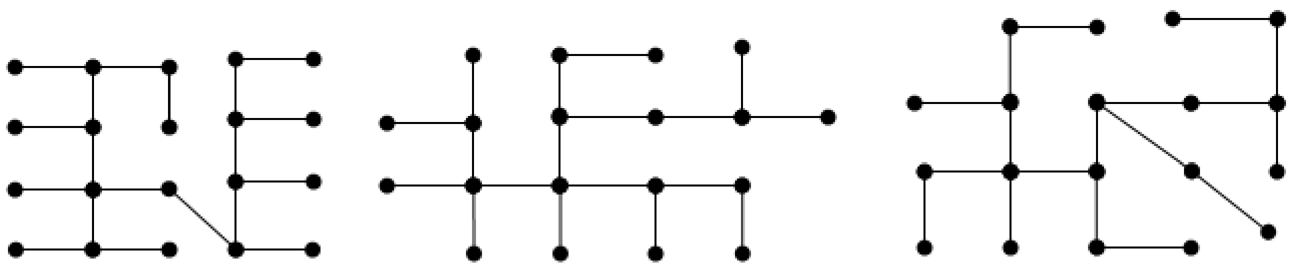
47) Определите корни предложенных деревьев. Каково их



а **б**

цикломатическое число?

48) Найдите корни деревьев. Являются ли эти деревья бинарными (рис.36)?



а б в

Рисунок 36

49) Выясните, являются ли графы, задаваемые следующими матрицами смежности, деревьями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для графа, не являющегося деревом, найти количество остовов, используя матричную теорему о деревьях.

1.2.2 Алгоритмы построения минимального остовного дерева

Остовом (*остовным деревом*) связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом (говорят: «покрывающим его деревом»). *Минимальное остовное дерево* – это остов с наименьшей суммой весов ребер.

Алгоритм Прима.

1. Выбираем любую вершину и включаем её в дерево $V_1=\{v\}$. В этот момент $X_1=\varnothing$.
2. Среди вершин, соседних с v, выбираем вершину w так, чтобы вес ребра (v,w) был минимальным. $V_1= V_1\cup\{v,w\}$, $X_1= X_1\cup\{(v,w)\}$.
3. Просматриваем ребра, выходящие из вершин построенного множества V_1 и выбираем минимальное ребро. Добавляем найденное ребро в множество X_1 и соответствующую вершину во множество V_1.
4. Процедура повторяется, пока все вершины графа не будут включены в дерево.

Алгоритм Краскала.

1. Сортируем ребра в порядке неубывания веса.
2. Берем первое ребро из списка, его концы помечаем меткой 1.
3. Просматриваем отсортированный список, при этом ребро включается в дерево, если оно не образует цикл с предыдущими.

a. если концы добавляемого ребра помечены одинаковыми ненулевыми метками, то ребро образует цикл, его не включаем.

b. если концы добавляемого ребра помечены меткой 0, то включаем это ребро, помечая вершины меткой, на единицу больше текущей метки.

c. если концы добавляемого ребра помечены разными ненулевыми метками, то включаем его в список, помечая все вершины с меньшей меткой меткой другой вершины.

d. если одна из меток рассматриваемого ребра 0, а другая не 0, то включаем это ребро, при этом нулевая вершина помечается меткой второго конца.

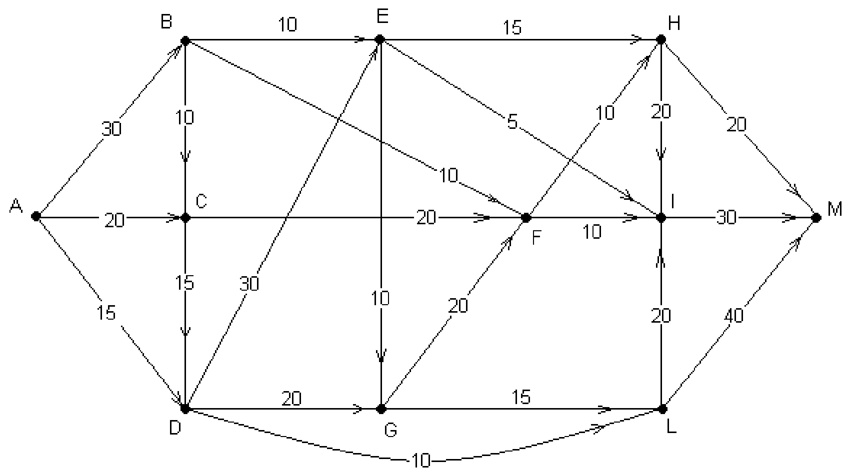
4. Повторяем пункт 3 до тех пор, пока все ребра не кончатся.

При построении дерева алгоритмом Прима дерево строится из корня. При построении дерева алгоритмом Краскала дерево строится кусками.

Реальная задача, сводящаяся к построению минимального остовного дерева: имеется набор населенных пунктов. Требуется связать их телефонными линиями, если известна стоимость прокладки линии от одного населенного пункта до любого другого.

Примеры решения задач

50) Дан взвешенный граф. Построить минимальное остовное дерево с помощью алгоритма Краскала.



Решение.

1. Сортируем ребра в порядке неубывания: (E,I), (B,C), (B,E), (B,F), (D,L),

5 10 10 10 10

(E,G), (F,H), (F,I), (G,L), (A,D), (C,D), (E,H), (A,C), (C,F),

10 10 10 15 15 15 15 20 20

(D,G), (G,F), (L,I), (H,I), (H,M), (A,B), (D,E), (I,M), (L,M).

20 20 20 20 20 30 30 30 40

2. Помечаем все вершины меткой 0 (рис.37).

3. Просматриваем список ребер, включаем их в дерево, изменяя метки вершин в соответствии с алгоритмом до тех пор, пока не включим 11-1 ребер (для 11 вершин).

№ ребра	Рассматрива-емое ребро	Метка вершин, образующих это ребро	Новые метки вершин (те, что изменились)	Вес ребра, включен-ного в дерево	Графич иллюстр
1	(E,I)	(0,0)	m(E)=1, m(I)=1	5	Рис. 38
2	(B,C)	(0,0)	m(B)=2, m(C)=2	10	Рис. 39
3	(B,E)	(2,1)	m(E)=2, m(I)=2	10	Рис. 40
4	(B,F)	(2,0)	m(F)=2	10	Рис. 41
5	(D,L)	(0,0)	m(D)=3, m(L)=3	10	Рис. 42
6	(E,G)	(2,0)	m(G)=2	10	Рис. 43
7	(F,H)	(2,0)	m(H)=2	10	Рис. 44
	(F,I)	(2,2)	Ребро образует цикл, не включаем		
8	(G,L)	(2,3)	m(G)=3, m(E)=3, m(B)=3, m(C)=3, m(F)=3, m(H)=3, m(I)=3	10	Рис. 45
9	(A,D)	(0,3)	m(A)=3	15	Рис. 46
	(C,D)	(3,3)	Ребро образует цикл, не включаем		
	(E,H)	(3,3)	Ребро образует цикл, не включаем		
	(A,C)	(3,3)	Ребро образует цикл, не включаем		
	(C,F)	(3,3)	Ребро образует цикл, не включаем		
	(D,G)	(3,3)	Ребро образует цикл, не включаем		
	(G,F)	(3,3)	Ребро образует цикл, не включаем		
	(L,I)	(3,3)	Ребро образует цикл, не включаем		
	(H,I)	(3,3)	Ребро образует цикл, не включаем		
10	(H,M)	(3,0)	m(M)=3	20	Рис. 46

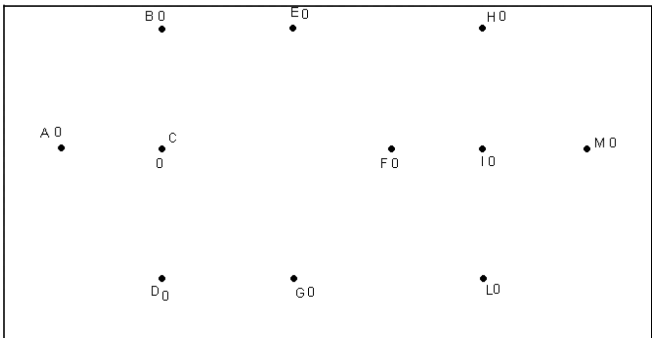


Рисунок 37

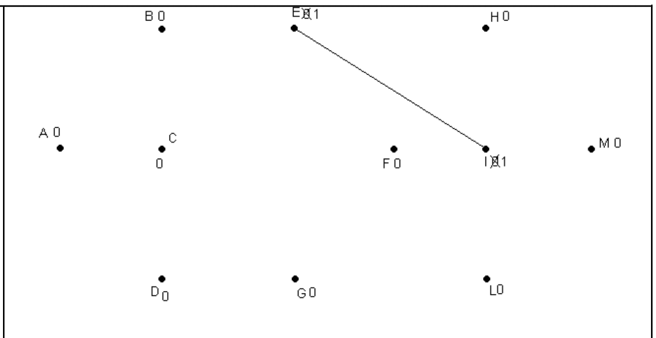


Рисунок 38

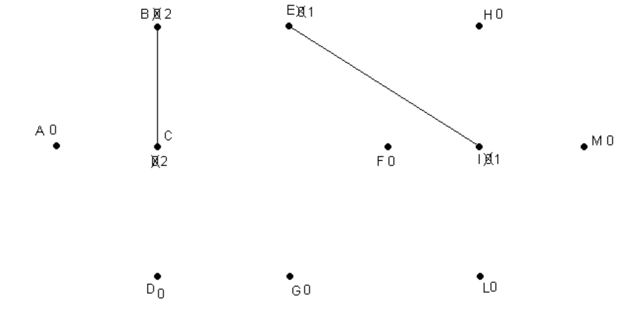


Рисунок 39

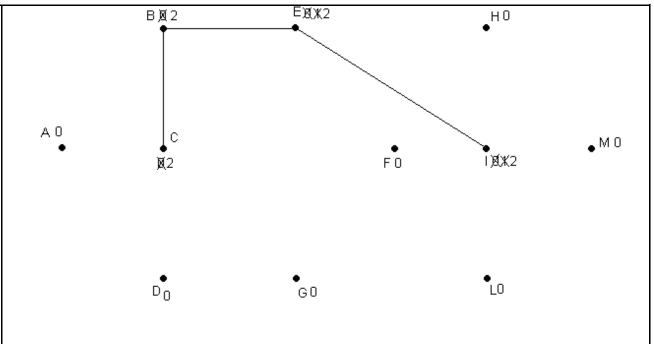


Рисунок 40

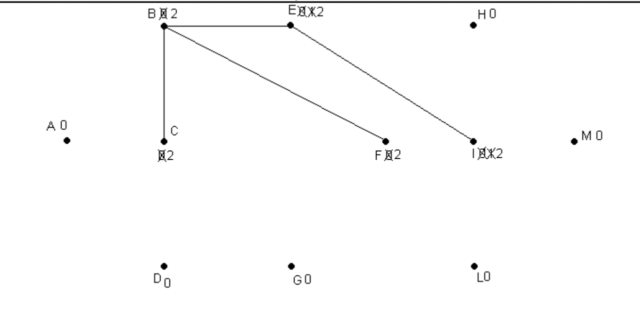


Рисунок 41

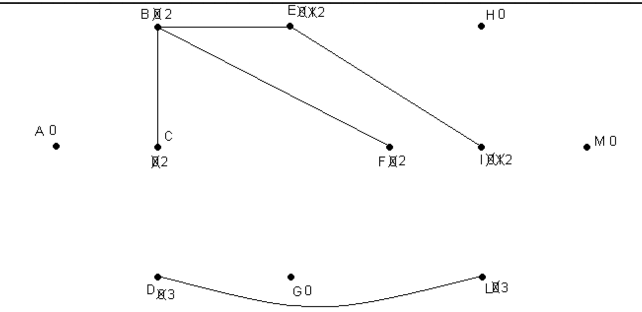


Рисунок 42

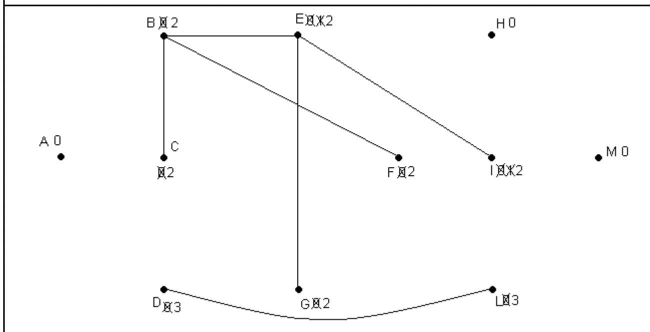


Рисунок 43

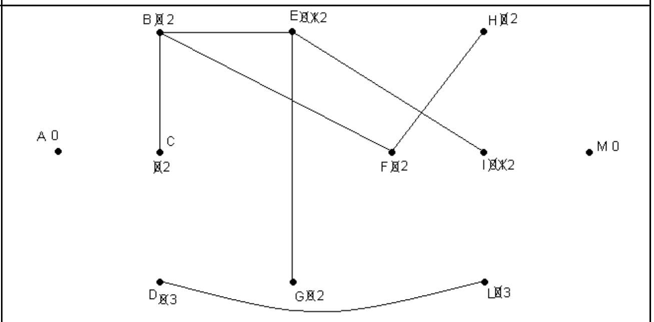


Рисунок 44

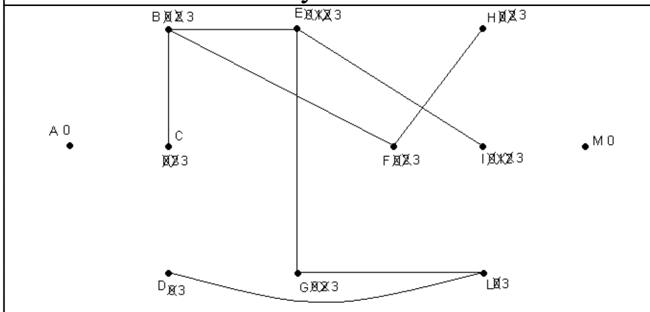


Рисунок 45

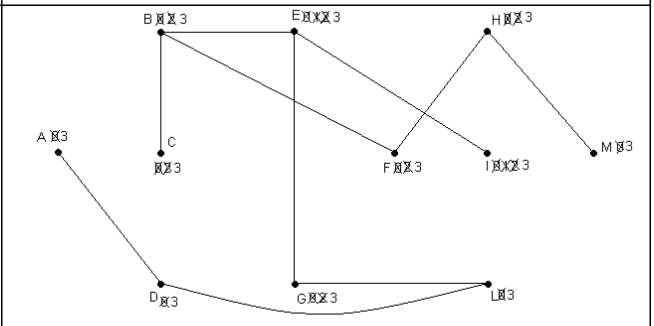


Рисунок 46

Таким образом, минимальное остовное дерево построено. Его вес: 5+10+10+10+10+10+10+10+15+20=110.

51) Для взвешенного графа предыдущей задачи построить минимальное остовное дерево с помощью алгоритма Прима.

Решение.

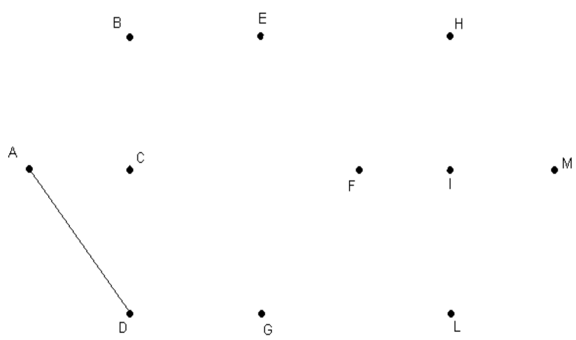
Действуем по описанному алгоритму. Результаты работы алгоритма занесем в таблицу.

Итак, берем произвольную вершину, например, A, добавляем эту вершину к множеству вершин (строка 1, столбец 2 в таблице). Рассматриваем все ребра, выходящие из этой вершины (столбец 3), выбираем ребро наименьшего веса AD и добавляем его к списку ребер строящегося дерева (столбец 4), одновременно добавляем вершину D к списку множества вершин (строка 2, столбец 2).

Теперь рассматриваем все ребра, выходящие из вершин A и D, выбираем из них наименьшее и включаем его в множество ребер и т.д.

Одной чертой будем вычеркивать ребра, которые уже включены в дерево, двумя чертами – ребра, которые образуют цикл с уже включенными в дерево.

1	2	3	4	5	6
№	Множество вершин V_1	Рассматриваемые ребра, выходящие из множества вершин и их веса	Множество ребер	Вес включенного в дерево ребра	Графич иллюстр
1	A	AB(30), ~~AC(20)~~, ~~AD(15)~~	AD	15	Рис. 47
2	D	~~DC(15)~~, DE(30), ~~DG(20)~~, ~~DL(10)~~	DL	10	Рис. 48
3	L	~~LG(15)~~, ~~LI(20)~~, LM(40)	LG	15	Рис. 49
4	G	~~GE(10)~~, ~~GF(20)~~	GE	10	
5	E	~~EB(10)~~, ~~EI(5)~~, ~~EH(15)~~	EI	5	
6	I	~~IH(20)~~, ~~IF(10)~~, IM(30)	IF	10	
7	F	~~FB(10)~~, ~~FC(20)~~, ~~FH(10)~~	EB	10	Рис. 50
8	B	~~BC(10)~~	FH	10	
9	H	HM(20)	BC	10	
10	C		HM	20	
11	M				
			Вес	110	



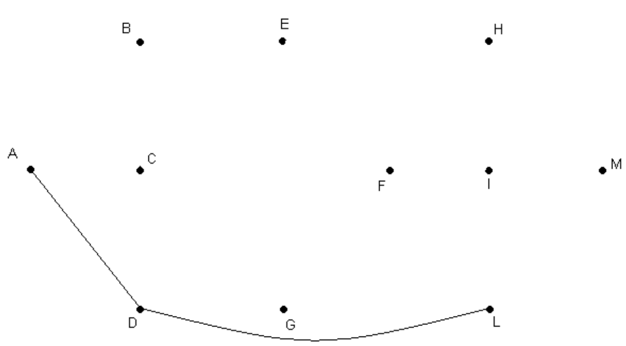


Рисунок 47 Рисунок 48

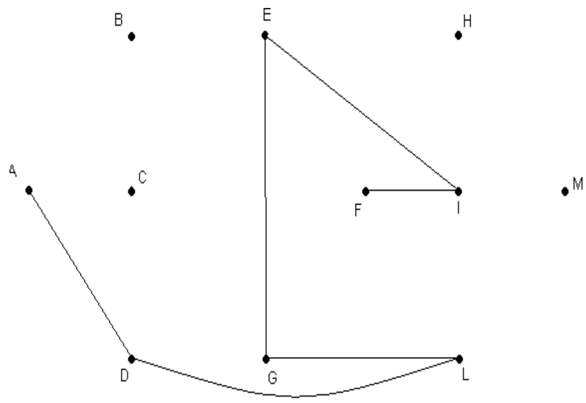


Рисунок 49

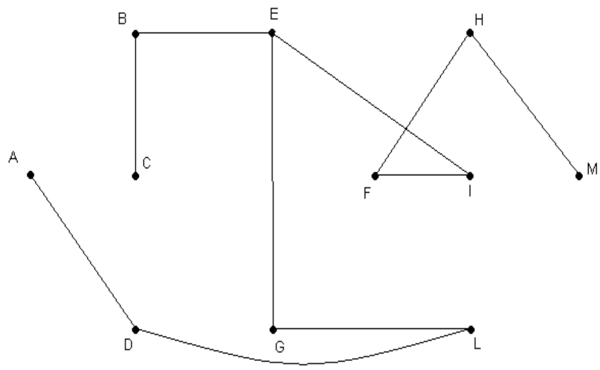


Рисунок 50

Задачи для самостоятельного решения

52) Найдите два остовных дерева в графе, изображенном на рис. 51.

53) Найдите минимальный остов графа (рис. 52).

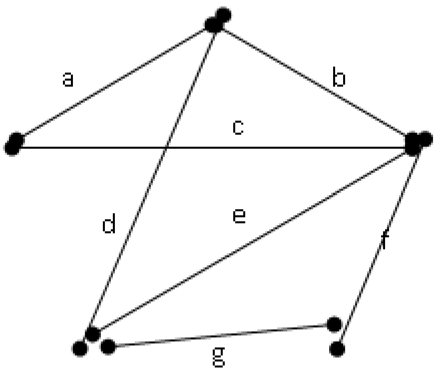


Рисунок 51

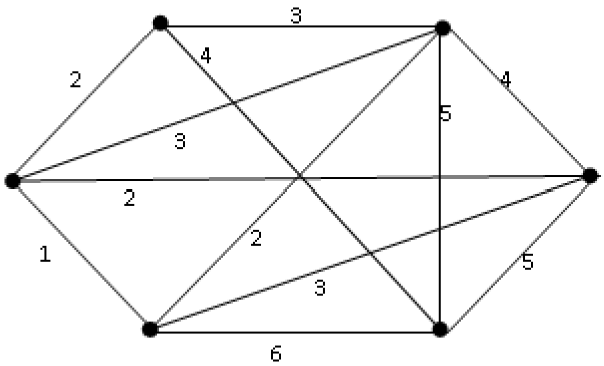


Рисунок 52

54) Изобразите граф на 7 вершинах и с 12 ребрами и постройте три различных остовных дерева.

55) В таблице дано расстояние (в милях) между пятью деревнями A, B, C, D и E. Найдите кратчайшее соединение (минимальное остовное дерево).

	A	B	C	D	E
A	-	13	3	9	9
B	13	-	11	11	13
C	3	11	-	9	7
D	9	11	9	-	2
E	9	13	7	2	-

56) В таблице приведены расстояния (в милях) между шестью городами Ирландии. Используя алгоритмы поиска минимального остовного дерева, найдите сеть дорог минимальной общей длины, связывающую все шесть городов.

	Атлон	Дублин	Голуэй	Лимерик	Слайго	Уэксфорд
Атлон	-	78	56	73	71	114
Дублин	78	-	132	121	135	96
Голуэй	56	132	-	64	85	154
Лимерик	73	121	64	-	144	116
Слайго	71	135	85	144	-	185
Уэксфорд	114	96	154	116	185	-

57) Расстояние между потребителями электроэнергии А, Б, В, Г, Д, Е в десятках километров дано в таблице. Требуется построить сеть линий электропередач так, чтобы количество затраченных проводов было минимальным и можно было передать энергию из каждого города в любой другой.

	А	Б	В	Г	Д	Е
А	0	7	11	6	8	15
Б	7	0	9	12	6	7
В	11	9	0	3	7	3
Г	6	12	3	0	2	4
Д	8	6	7	2	0	1
Е	15	7	3	4	1	0

58) Расстояние между городами А, Б, В, Г, Д, Е, Ж в сотнях километров дано в таблицах. Требуется построить сеть железных дорог так, чтобы количество затраченных рельсов было минимальным, и пассажир мог из каждого города попасть в любой другой. Укажите число возможных деревьев.

а)

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**	**Ж**
А	0	5	11	6	8	15	8
Б	5	0	9	12	6	7	2
В	11	9	0	3	6	3	7
Г	6	12	3	0	2	4	13
Д	8	6	6	2	0	1	5
Е	15	7	3	4	1	0	4
Ж	8	2	7	13	5	4	0

б)

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**	**Ж**
А	0	5	11	6	3	15	8
Б	5	0	7	12	6	7	2
В	11	7	0	3	6	3	7
Г	6	12	3	0	2	4	13
Д	3	6	6	2	0	2	5
Е	15	7	3	4	1	0	4
Ж	8	2	7	13	5	4	0

в)

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**	**Ж**
А	0	6	11	6	8	8	8
Б	6	0	9	12	6	7	2
В	11	9	0	3	6	3	7
Г	6	12	3	0	2	3	13
Д	8	6	6	2	0	1	5
Е	8	7	3	3	1	0	3
Ж	8	2	7	13	5	3	0

г)

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
А	0	5	11	6	8	3	8
Б	5	0	9	12	5	7	2
В	11	9	0	2	6	3	7
Г	6	12	2	0	2	4	13
Д	8	5	6	2	0	1	5
Е	3	7	3	4	1	0	4
Ж	8	2	7	13	5	4	0

д)

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
А	0	5	1	3	8	15	8
Б	5	0	9	12	6	7	2
В	1	9	0	3	5	3	7
Г	3	12	3	0	2	4	11
Д	8	6	5	2	0	1	5
Е	15	7	3	4	1	0	4
Ж	8	2	7	11	5	4	0

е)

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
А	0	5	11	6	3	15	8
Б	5	0	9	12	4	7	2
В	11	9	0	3	6	3	7
Г	6	12	3	0	2	4	13
Д	3	4	6	2	0	11	5
Е	15	7	3	4	11	0	1
Ж	8	2	7	13	5	1	0

59) На рис. 53 показаны расстояния между телевизионными центрами США. Найдите конфигурацию кратчайшей кабельной сети, которой их можно было бы соединить.

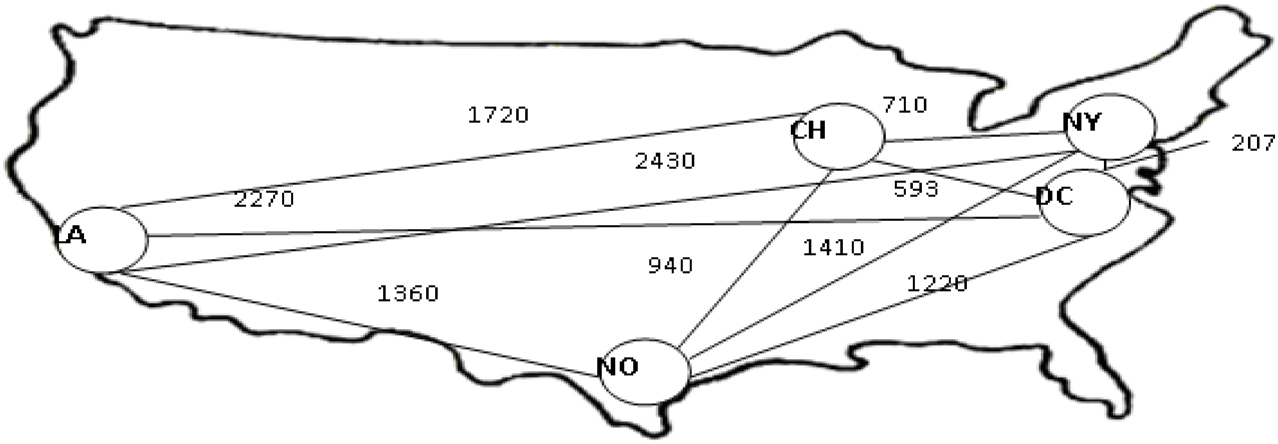


Рисунок 53

1.2.3 Обходы дерева

Основные операции на деревьях: поиск элемента, добавление элемента, удаление элемента. Для поиска элемента в произвольном бинарном дереве необходимо обойти все элементы этого дерева. Существует два основных способа обхода дерева: в глубину и в ширину.

Алгоритм обхода дерева в глубину.

Обход в глубину производится рекурсивно либо с использованием стека. В обоих случаях можно обходить узлы дерева в различной последовательности.

Обход начинается от корня. Выделяют три наиболее важных порядка обхода в глубину:

- префиксный (прямой, левосторонний) обход — сначала обрабатывается текущий узел, затем левое и правое поддеревья;

- инфиксный (симметричный) обход — сначала обрабатывается левое поддерево текущего узла, затем корень, затем правое поддерево;

- постфиксный (обратный, от листьев к корню) обход — сначала обрабатываются левое и правое поддеревья текущего узла, затем сам узел.

Алгоритм обхода дерева в ширину.

Обход в ширину производится с помощью очереди. Первоначально в очередь помещается корень, затем, пока очередь не пуста, выполняются следующие действия:

Из очереди выталкивается очередной узел;

Этот узел обрабатывается;

В очередь добавляются оба потомка этого узла.

Заметим, что перечисление узлов происходит в порядке удаления от корня, что делает поиск в ширину удобным, например, для поиска узла дерева со значением k, наиболее близкого к корню, и т.д.

Примеры решения задач

60) Дан граф в виде дерева (рис. 54). Определите последовательности вершин при префиксном, инфиксном и постфиксном обходах графа в глубину.

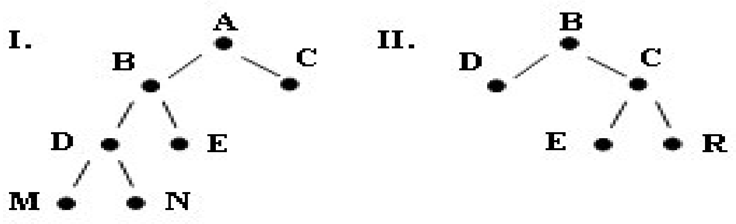


Рисунок 54

Решение.

Префиксный обход: **I.** A B D M N E C; **II.** B D C E R

Инфиксный обход: **I.** M D N B E A C; **II.** D B E C R

Постфиксный обход: **I.** M N D E B C A; **II.** D E R C B

61) Для графа на рис. 54 укажите обход данного дерева в ширину.

Решение.

Узлы дерева на рисунке перечисляются в порядке обхода в ширину следующим образом: **I.** A, B, C, D, E, M, N; **II.** B, D, C, E, R.

Задачи для самостоятельного решения

62) Для графов на рисунках 32-36 укажите последовательность вершин при обходе графа в глубину тремя способами: префиксным, инфиксным и постфиксным.

63) Для графов на рисунках 32-36 укажите последовательность вершин при обходе графа в ширину.

1.3 Ориентированные графы

Если все пары (V_i, V_j) во множестве X являются упорядоченными, т.е. кортежами длины 2, то граф называется *ориентированным*, *орграфом*. В таком случае ребра принято изображать стрелками. *Началом* ребра называется вершина, указанная в кортеже первой, *концом* — вторая вершина этой пары (графически она указана стрелкой). Ребра называются *дугами*.

Степенью входа (*выхода*) вершины ориентированного графа называется число ребер, для которых эта вершина является концом (началом). Степень входа вершины V будем обозначать $\boldsymbol{deg_{+}(V)}$, а степень выхода – $\boldsymbol{deg\text{-}(V)}$.

Дуги орграфа называются *кратными*, если они имеют одинаковые начальные и конечные вершины, т. е. одинаковые направления.

Матрица смежности для орграфа в общем случае не будет симметричной. В матрице инцидентности ставится 1, если дуга исходит из вершины, и -1, если дуга заходит в неё.

Путем в орграфе называется маршрут, который является ориентированным. *Контур* - это ориентированный цикл в орграфе.

Теорема. Связанный орграф содержит эйлеров контур тогда и только тогда, когда для каждой вершины число входящих дуг равно числу выходящих.

При установлении изоморфизма между ориентированными графами следует помнить, что ребро является упорядоченным множеством, и надо быть особенно внимательным, соблюдая порядок.

Примеры решения задач

64) Дан ориентированный граф (рис. 55). Определите степени входа и выхода вершин.

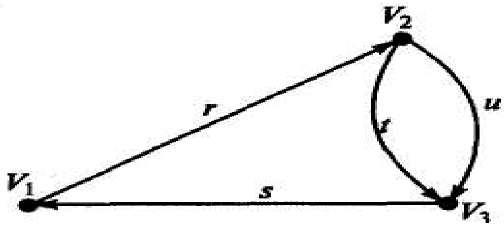


Рисунок 55

Решение. $\deg_+(V_1) = 1$, $\deg_+(V_2) = 1$, $\deg_+(V_3) = 2$, $\deg_-(V_1) = 1$, $\deg_-(V_2) = 2$, $\deg_-(V_3) = 1$.

65) В графе на рис. 53 укажите путь, контур, эйлеров контур, если он имеется.

Решение. *(u, s, r, t)* — путь, *(r, u)* — путь, *(s, r, t, u)* путем не является, *(s,r,t)* и *(u, s, r)* — контуры. Согласно теореме эйлерова контура в данном графе нет (в вершину V_2 входит одно ребро и выходит два).

Задачи для самостоятельного решения

66) Пусть орграф задан матрицей смежности. Постройте изображение этого графа, укажите степени его вершин $\deg_+$ и $\deg_-$. По матрице смежности постройте матрицу инцидентности этого графа.

а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

г) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ д) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ е) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

67) Для заданных ориентированных графов (рис. 56) построить матрицу смежности, матрицу инцидентности. Определите степени входа и выхода вершин. Выясните, имеется ли в них эйлеров контур. Имеются ли среди графов а-е изоморфные?

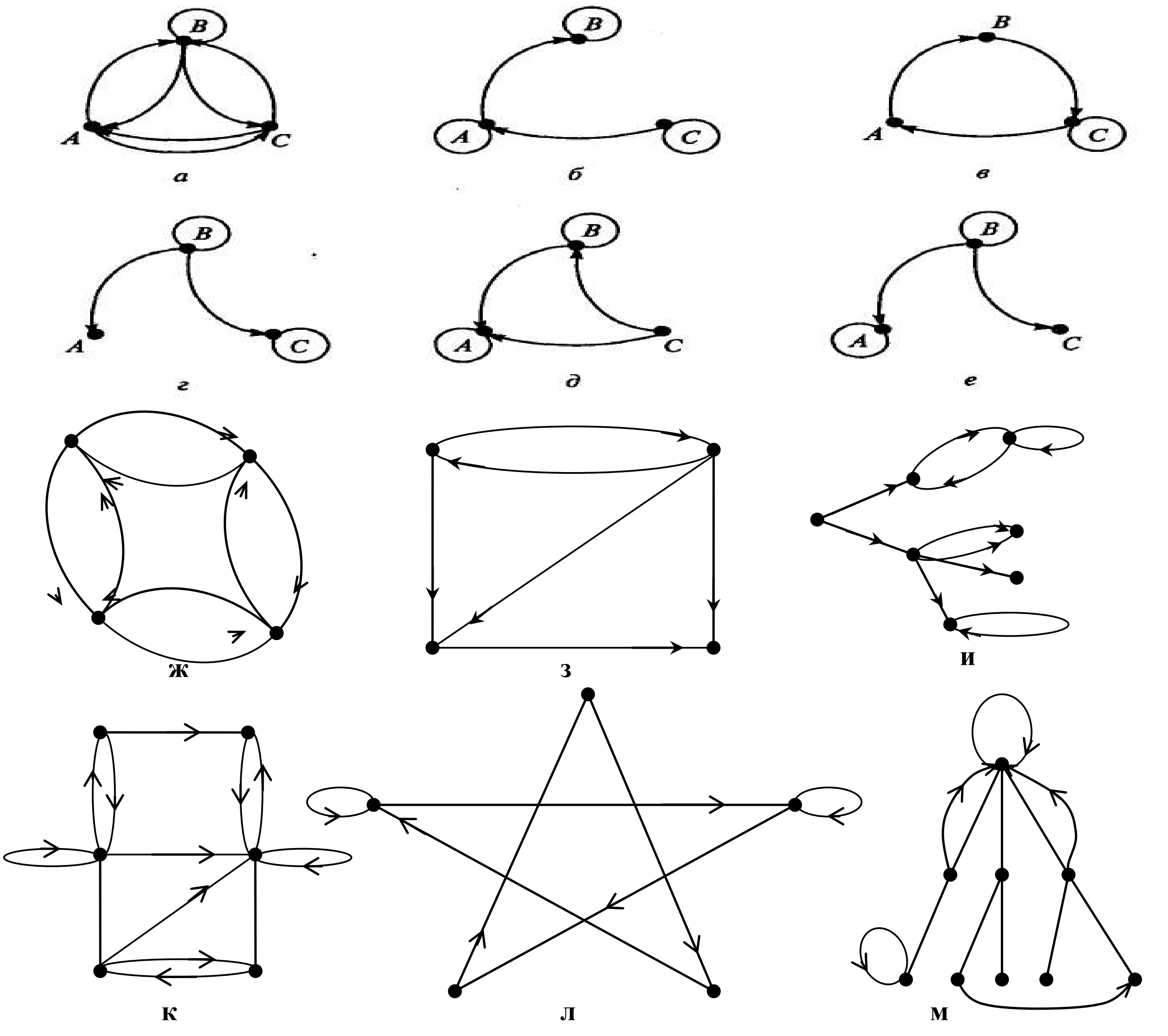


Рисунок 56

1.4 Раскраска. Планарные графы

1.4.1 Раскраска графов

Раскраской графа будем называть приписывание вершинам графа цветов (натуральных чисел).

Раскраску графа G будем называть *правильной*, если любые две его смежные вершины имеют различный цвет.

Наименьшее возможное число цветов, в которые можно правильно раскрасить граф G, будем называть его *хроматическим числом* и обозначать $\lambda(G)$. Поиск хроматического числа графа задача переборная.

Граф называется ***k*** *– раскрашиваемым*, если существует его правильная раскраска не более, чем в k цветов.

Правильная раскраска графа в наименьшее возможное число цветов называется *оптимальной*.

Алгоритм нахождения правильной раскраски графа минимальным числом краски.

1. Находим в графе наибольшее внутренне устойчивое множество вершин и красим его первым цветом.

2. Среди оставшихся вершин находим наибольшее внутренне устойчивое множество вершин и красим его вторым цветом и т.д.

Если в графе есть полный подграф на k вершинах, то $\lambda(G) \geq k$. С другой стороны $\lambda(G) \leq \max \deg V + 1$.

Примеры решения задач

68) Выполните правильную раскраску графа.

Решение.

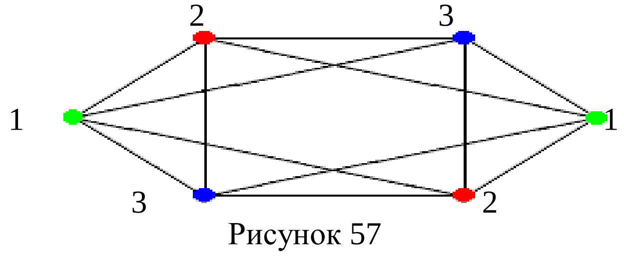


Рисунок 57

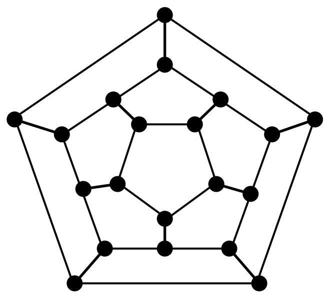
69) Предположим, что *n* пользователям требуются для работы некоторые из *k* ресурсов, причем один и тот же ресурс может использоваться в течение дня только одним пользователем. Необходимо таким образом составить расписание работы пользователей, чтобы за наименее возможное число дней все пользователи могли выполнить свою работу.

Решение. Рассмотрим граф с n вершинами, соответствующими пользователям, причем две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующими пользователям требуется для работы один и тот же ресурс. Группы пользователей, которые могут работать одновременно, соответствуют множествам вершин графа, не содержащим смежных вершин. Из определения правильной раскраски следует, что множество вершин, окрашенных в один цвет, смежных не содержат. Т.о., данная задача сводится к оптимальной раскраске соответствующего графа.

Задачи для самостоятельного решения

70) Найдите хроматические числа графов, упоминающихся в задачах и примерах.

71) Раскрасить граф правильным образом, Определите хроматическое



число, построить матрицу смежности данного графа.

1.4.2 Планарные и плоские графы

Планарный граф – это граф, допускающий укладку на плоскости, т.е. он может быть изображен на плоскости так, чтобы никакие два ребра не имели общих точек, кроме, быть может, своих вершин.

Изображение графа на плоскости с соблюдением этого условия будем называть *плоским графом*.

Грань плоского графа – часть плоскости, ограниченная ребрами данного графа и не разделенная никакими цепями (в частности у графа без циклов ровно одна грань). Для любого связного плоского графа справедлива формула Эйлера: В-Р+Г=2, где В – количество вершин, Р – количество ребер, Г – количество граней.

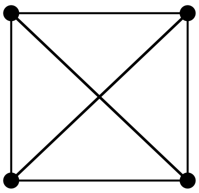
Теорема. Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

Непланарность того или иного графа объясняется по существу непланарностью только двух графов: K_5 и $K_{3,3}$.

Примеры решения задач

72) Является ли граф планарным?

Решение. Граф, изображенный на рисунке 58 слева является планарным, так как его можно изобразить на плоскости без пересечения ребер (смотреть его плоскую укладку на рис. 58 справа).



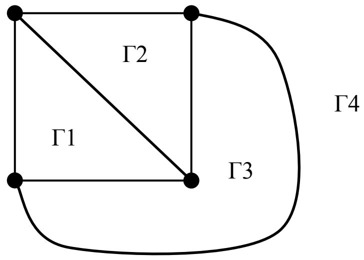


Рисунок 58

Задачи для самостоятельного решения

73) Являются ли графы планарными? (см. рис. 59-64)

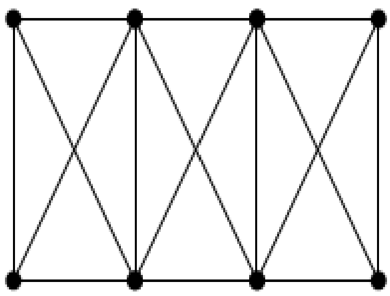


Рисунок 59

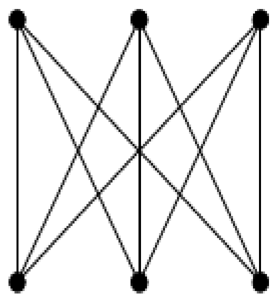


Рисунок 60

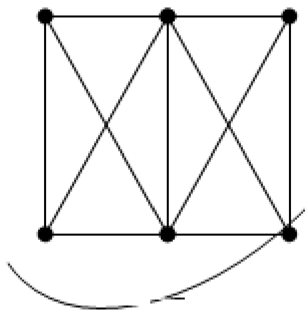


Рисунок 61

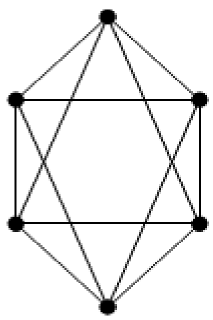


Рисунок 62

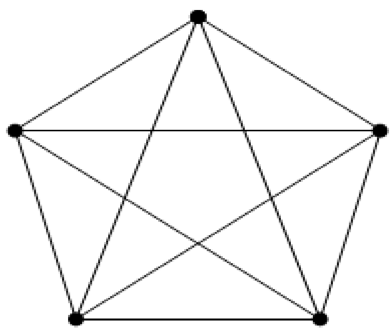


Рисунок 63

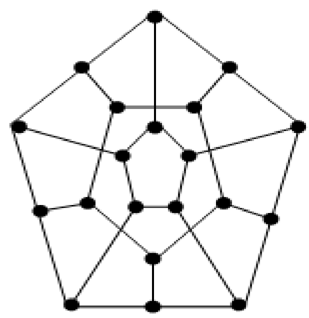


Рисунок 64

1.4.3 Гомеоморфизм (подобие) графов

Под *изъятием (добавлением)* проходных вершин (вершин степени 2) в

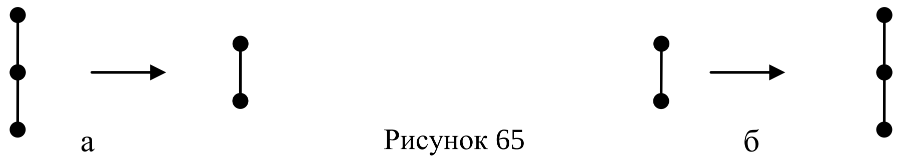


Рисунок 65

графе будем понимать удаление (или включение) в любое ребро графа вершины степени 2 (см. рис. 65).

Два графа *гомеоморфны* (подобны), если один из них получается из другого при помощи подходяще выбранных операций изъятия или добавления проходных вершин. Например, графы G_1 и G_2 подобны (см. рис. 66).

Два подобных графа планарны или нет одновременно.

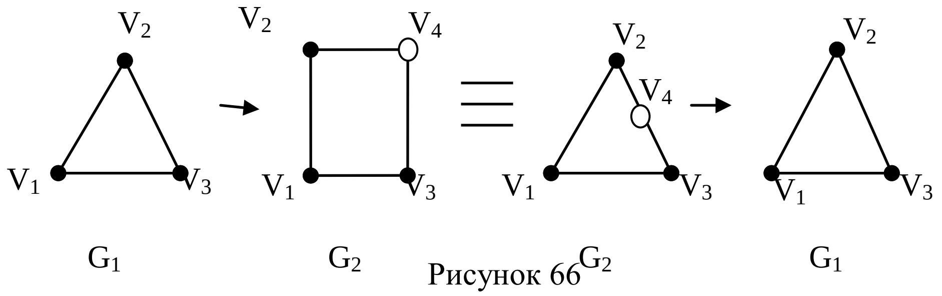


Рисунок 66

Теорема (критерий планарности **Куратовского-Понтрягина**). Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, подобного $K_{3,3}$ или K_5.

Под *операцией стягивания* ребра $e=\{v_1, v_2\}$, будем понимать операцию удаления ребра e и отождествления вершин v_1, v_2 (из получаемой одной вершины выходят все старые ребра обеих вершин, за исключением ребра e).

Граф G *стягиваем* к графу H, если H может быть получен из G применением (возможно, несколько раз) операции стягивания.

Теорема (критерий планарности **Куратовского-Понтрягина**). Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, стягиваемого к $K_{3,3}$ или K_5.

Примеры решения задач

74) Покажите, что граф Петерсена не планарен.

Решение. Изобразим граф по-другому. Теперь видно, что с помощью операции изъятия проходных вершин, получим граф гомеоморфный $K_{3,3}$.

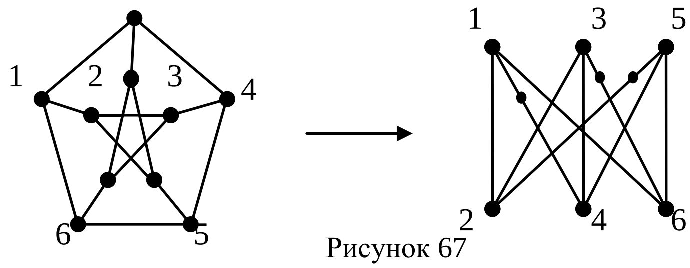


Рисунок 67

75) Покажите, что граф Петерсена стягиваем к K_5.

Решение. На рисунке видно, что второй граф получается из первого с помощью операции стягивания ребер e_1, e_2, e_3, e_4, e_5.

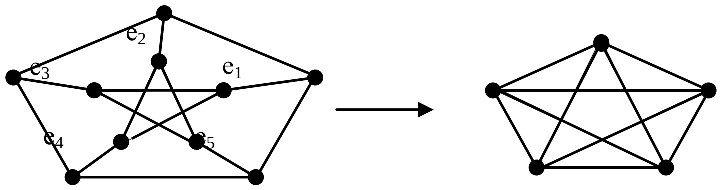


Рисунок 68

Задачи для самостоятельного решения

76) Планарны ли графы, изображенные на рис. 69 и 70? Ответ обосновать.

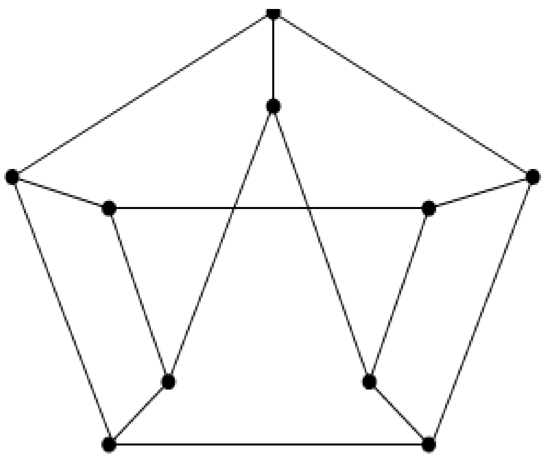


Рисунок 69

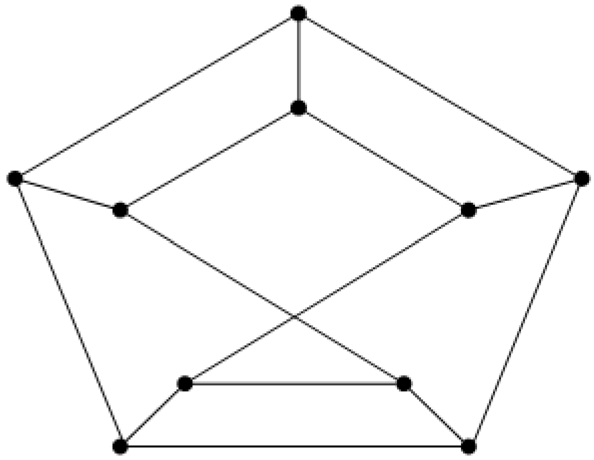


Рисунок 70

1.4.4 Проблема четырех красок. Двойственные графы

Исторический интерес к планарным графам был связан с проблемой четырех красок. Данная проблема возникла в связи с задачей раскрашивания географических карт. На языке графов: раскрасить грани так, чтобы грани, имеющие общую границу, имели разные цвета при минимальном числе различных цветов. Этой задаче соответствует задача о раскраске вершин двойственного графа.

Двойственный граф образуется так: Граням, в том числе и бесконечной, сопоставляются вершины. Вершины, соответствующие граням, имеющим общую границу, соединяются ребром.

Картам соответствуют только планарные графы. Гипотеза о четырех красках состояла в том, что любой планарный граф может быть правильно раскрашен в четыре цвета. Гипотеза оставалась недоказанной свыше 100 лет и лишь недавно (Аппель и Хакен) с применением ЭВМ удалось рассмотреть (перебрать) необходимые для доказательства случаи проблемы и подтвердить гипотезу. Для этого потребовалось более 1200 часов машинного времени. Попытки простого доказательства теоремы продолжаются по настоящее время с 1879 года.

***Теорема* (*о пяти красках*)**. Любой планарный граф 5-раскрашиваемый.

Примеры решения задач

77) Построить граф, двойственный графу куба.

Решение. Для многогранников существует очень наглядный способ получения двойственных графов. Он состоит в следующем. В центре каждой грани ставится точка – такие точки будут вершинами двойственного графа. Рёбрами надо соединить те вершины, грани которых разделены рёбрами в исходном графе. В результате получается многогранник, вписанный в исходный. Причём, если исходный граф правильный многогранник, то и двойственный тоже будет правильным.

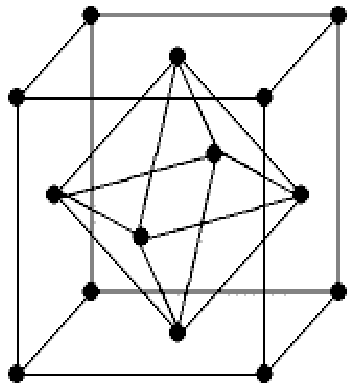


Рисунок 71

Задачи для самостоятельного решения

78) Построить графы, двойственные представленным на рисунке 72.

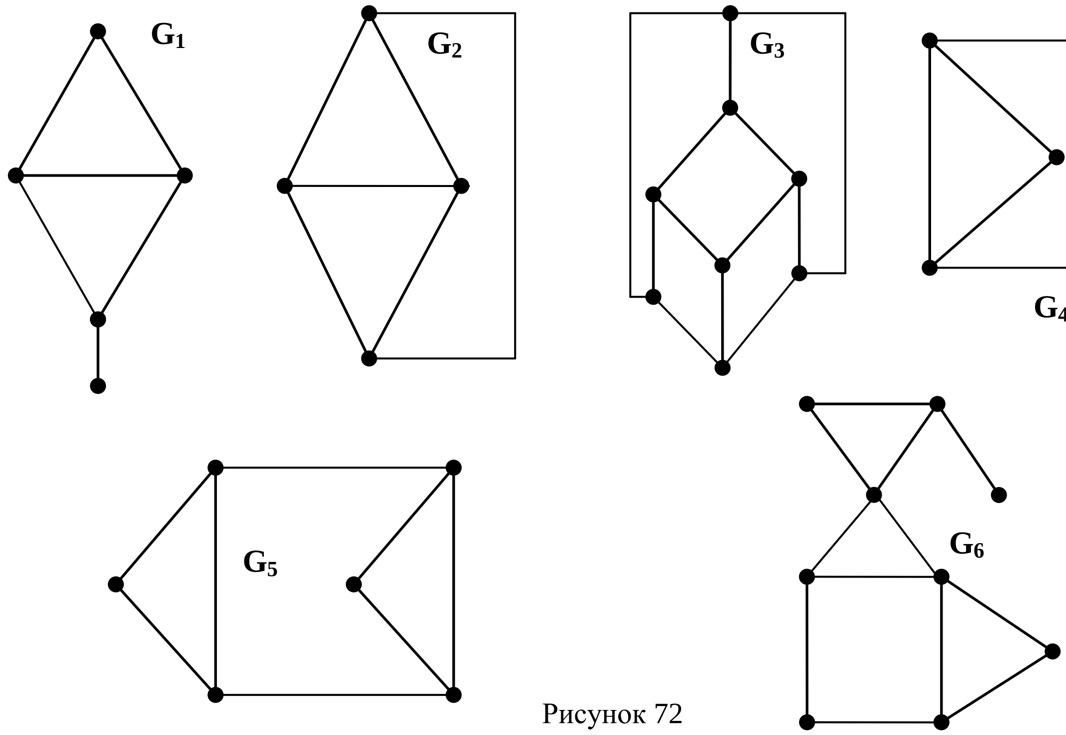


Рисунок 72

79) Построить граф, двойственный графу тетраэдра. Какой многогранник у вас получился?

80) Какой многогранник двойственен додекаэдру (двенадцатиграннику, рёбра которого являются правильными пятиугольниками)?

Задачи для повторения

81) По рис. 73 выполните следующие упражнения:

1. Выясните, является ли граф двудольным?
2. Постройте матрицу инцидентности.
3. Постройте матрицу смежности.
4. Выясните, является ли граф планарным?
5. Укажите Эйлеров путь в графе, если он существует.
6. Изобразите три клики.

82) Дан граф G (см. рис. 74). Для него построить:

a) дополнение $\overline{G}$;

b) матрицу смежности;

c) матрицу инцидентности;

d) цикл Эйлера;

e) цепь Эйлера;

f) цикл Гамильтона;

g) цепь Гамильтона.

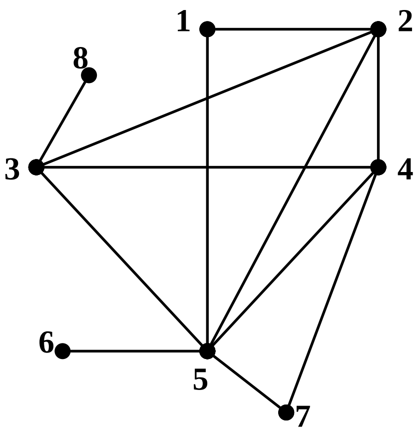


Рисунок 73

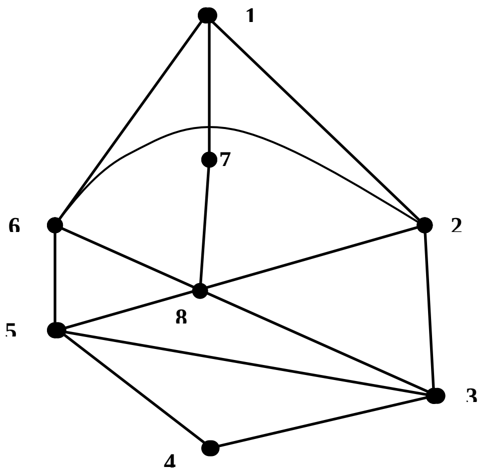


Рисунок 74

83) Изобразите граф по заданной матрице смежности и ответьте на следующие вопросы:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	0	1	0	0	1	1	0
V_2	1	1	1	0	0	1	0
V_3	0	1	0	1	0	0	0
V_4	0	0	1	0	0	2	0
V_5	1	0	0	0	0	2	0
V_6	1	1	0	2	2	0	1
V_7	0	0	0	0	0	1	0

1) Является ли полученный граф связным, полным, планарным, двудольным, мультиграфом, псевдографом? Ответ объясните.

2) Для полученного графа построить матрицу инцидентности.

3) Найдите степени вершин данного графа. Какие из вершин являются висячими, изолированными?

4) Указать два произвольных маршрута из V_3 в V_5, не являющихся цепями.

5) Указать цепь и простую цепь из V_4 в V_5.

6) Указать цикл и простой цикл.

7) Существует ли в графе Эйлеров цикл? Если да, укажите его. Если нет, объясните почему.

8) Существует ли в графе Эйлерова цепь? Если да, укажите её. Если нет, объясните почему.

9) Является ли полученный граф Эйлеровым? Объясните ответ.

84) Изобразите граф, состоящий из 10 вершин и 16 ребер, и ответьте на следующие вопросы:

1) Является ли он псевдографом, мультиграфом, орграфом?

2) Выпишите:

a) пары смежных вершин;

b) висячие вершины;

c) изолированные вершины.

3) Определите степень каждой вершины.

4) Укажите три маршрута из V_1 в V_7 и выясните, являются ли они цепью, простой цепью, найдите их длину.

5) Выясните, является ли граф связным? Если нет, укажите компоненты связности.

85) По рис. 75 и 76 ответьте на следующие вопросы:

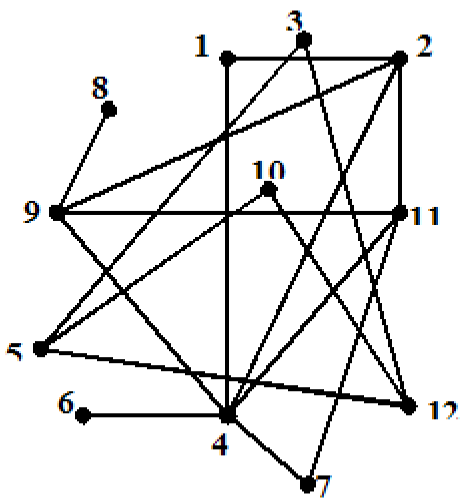


Рисунок 75

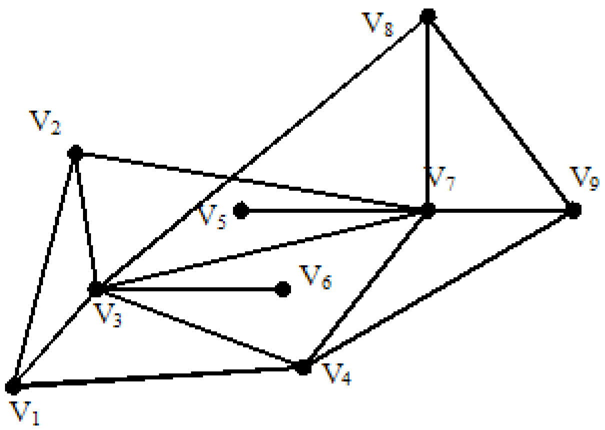


Рисунок 76

a) является ли данный граф связным? Если да, то укажите компоненты связности.

b) Сколько вершин в данном графе?

c) Сколько ребер?

d) Найдите степени всех вершин графа.

e) Перечислите изолированные вершины.

f) Перечислите висячие вершины.

g) Укажите два произвольных маршрута, не являющихся цепью и циклом.

h) Укажите цепь, не являющуюся циклом и цикл.

i) Укажите простую цепь и простой цикл.

j) Является ли граф полным?

k) Является ли граф регулярным?

l) Изобразите два остовных подграфа.

m) Изобразите подграф, порожденный вершинами V_1 , V_2 , V_4 , V_5 , V_7 .

86) Изобразите граф K_6 – полный граф на 6 вершинах.

87) Раскрасьте графы на рис. 59 - 64. Определите их хроматическое число.

88) Изобразите для графов на рис. 59 - 64:

a) Дополнение графа;

b) Матрицу смежности;

c) Матрицу инцидентности;

d) Эйлерову цепь;

e) Эйлеров цикл;

f) Гамильтонов цикл;

g) Остовное дерево.

89) Решите задачу, используя графы. Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, черная, красная, синяя и зеленая. Черная едет впереди синей, зеленая – впереди белой, но позади синей, красная впереди черной. Какая машина едет первой, какая последней?

Вопросы для повторения

1. Понятия граф, орграф, мультиграф, полный и связный граф, степень вершин. Способы задания графов.
2. Изоморфизм графов и операция дополнения графа. Примеры.
3. Понятия неориентированный граф, маршрут, цепь, цикл в графе, длина маршрута в неориентированном графе. Примеры.
4. Понятие ориентированный граф, путь и контур в ориентированном графе.
5. Понятия граф, подграф, остовный подграф, подграф, порожденный заданным множеством вершин, дерево, остовное дерево. Примеры. Алгоритмы Прима и Краскала
6. Понятие Эйлеров граф. Необходимое и достаточное условие существования Эйлерова цикла и Эйлеровой цепи в графе. Алгоритм построения эйлерова цикла в графе.
7. Понятия матрица смежности, матрица инцидентности и матрица достижимости. Примеры их построения для заданного графа и построения графа по заданной матрице.
8. Понятия полный и регулярный графы, двудольный граф. Критерий двудольности графа. Раскраска двудольного графа. Пример.
9. Задача коммивояжера и её приложение к теории графов. Алгоритмы.
10. Понятие планарный граф, плоский граф, грань графа. Формула Эйлера для планарных связных графов Теорема о планарности графов $K_{3,3}$ и K_5. Примеры.
11. Операция изъятия и добавления вершин. Гомеоморфные графы. Критерий планарности Куратовского-Понтрягина. Примеры.
12. Операции стягивания и разбиения ребра. Примеры. Теорема Куратовского-Понтрягина.
13. Понятия раскраска, правильная раскраска, хроматическое число, k-раскрашиваемые графы, оптимальная раскраска. Практическое применение оптимальной раскраски (задача о пользователях и ресурсах).

14. Проблема четырех красок. Понятие графа, двойственного данному. Раскраска географических карт. Теорема о пяти красках. Примеры.

1.5 Алгоритмы на графах

1.5.1 Алгоритмы нахождения расстояний между двумя вершинами

В ненагруженном графе можно считать вес каждого ребра равным единице. Если v и v' две вершины графа, то определим расстояние $\rho(v, v')$ между ними как число ребер в минимальной цепи, соединяющей вершины v и v'.

Алгоритм определения минимального расстояния в ненагруженном графе:

1. Присваиваем вершине V_1 метку 0, а всем вершинам, смежным с ней метку 1.

2. Присваиваем вершинам, смежным с вершинами, имеющими метку 1 и еще не помеченными метку 2 и т.д.

Рассмотрим 2 алгоритма определения минимального расстояния в нагруженном графе (с неотрицательными весами).

Алгоритм Форда.

Считается, что каждой вершине графа сопоставляется метка m(v).

Часть I. Расстановка меток.

1. Вершине s приписывается метка 0, а всем остальным - ∞.

2. В цикле по всем вершинам идет пересчет меток по следующему правилу:

$\forall v$: $m(v):=\min(m(v), m(w)+l(v, w))$, где $l(v, w)$- длина ребра, w – вершина, смежная с v.

В орграфе при таком пересчете вершину w такую, что в вершину v есть дуга (w,v).

3. Эта процедура повторяется до тех пор, пока ни одна из меток не изменится. Если метки перестали меняться, то метка вершины t и есть кратчайший маршрут из s в t.

Часть II. Поиск пути (производится только в обратном порядке).

1. Пусть получена метка вершины t: m(t). Вершину t включаем в путь.

2. Найдем вершину w, за счет которой получена метка вершины t: m(w)+l(w,t)=m(t).

3. Найдем вершину v_1, за счет которой получена метка вершины w: $m(v_1)+l(v_1,w)=m(w)$.

4. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не достигнем начальной вершины s.

Таким образом, получим путь: s, …, v_1, w, t.

Алгоритм Дейкстры.

Этот алгоритм является улучшенным алгоритмом Форда (эффективнее). Если, например, в графе n вершин, то он будет работать в n раз быстрее. Отличие этих алгоритмов состоит в том, что в алгоритме Форда пересчитываются все метки, а в алгоритме Дейкстры нет. Метки в алгоритме Дейкстры делятся на две категории: временные (как в алгоритме Форда) и постоянные (равные длине кратчайшего пути). Постоянные метки не пересчитываются.

Часть I. Расстановка меток (текущую вершину обозначим p).

1. Вершине *s* приписывается метка 0, а всем остальным - +∞. Текущая вершина на первом шаге s (p=s). Метка вершины s: m(s) –постоянная.

2. Пересчитываем метки (только у вершин, соседних с s с временными метками) по правилу: $\forall v: \exists (p,v): m(v):=min(m(v), m(p)+l(p,v))$

3. Среди всех вершин с временными метками находится вершина с минимальной меткой. Вершина становится текущей, а её метка постоянной.

4. Процедура продолжается до тех пор, пока вершина t не получит постоянную метку (причем у других вершин могут остаться временные метки).

Часть II. Поиск пути происходит также, как в алгоритме Форда.

Примеры решения задач

90) Пользуясь алгоритмом определения минимального расстояния в нагруженном графе (алгоритм Дейкстры), Найдите кратчайший путь из A в B (см. рис. 77,а)

Решение. На рис. 77, б-ж показан процесс решения задачи о длине кратчайшего пути из A в B. Постоянные метки заключены в квадрат, метка текущей вершины отмечена знаком +. Рассуждения в соответствии с описанным алгоритмом могут быть следующие:

1. Отмечаем начальную вершину меткой 0, а все остальные ∞. Текущая вершина на первом шаге A (p=A). Метка вершины A: m(A) –постоянная, заключаем её в квадрат.

2. Пересчитываем метки (только у вершин, соседних с A, имеющих временные метки) по правилу $\forall v\colon \exists(p,v)\colon m(v):=min(\ m(v),\ m(p)+l(p,v)\ )$. Т.о., временные пересчитаны метки вершин V_1 и V_2: $m(V_1)=0+2=2$, $m(V_2)=0+5=5$ (см. рис. 77, б)

3. Среди всех вершин с временными метками - вершина с минимальной меткой V_2. Эта вершина становится текущей ($p= V_2$), а её метка постоянной. Пересчет вершин, смежных с V_2: $m(V_4)=2+3=5$ (см. рис. 77, в).

4. Среди всех вершин с временными метками - вершина с минимальной меткой V_3 и V_4. Делаем (на выбор) текущей вершиной ($p= V_3$), её метка становится постоянной. Пересчет вершин, смежных с V_3: $m(V_5)=5+1=6$ (см. рис. 77, г).

5. Среди всех вершин с временными метками - вершина с минимальной меткой V_4. Делаем текущей вершиной ($p=V_4$), её метка становится постоянной. Пересчет вершин , смежных с V_3:$m(V_6)=5+5=10$ (см. рис. 77, д).

6. Среди всех вершин с временными метками - вершина с минимальной меткой V_5. Делаем её текущей вершиной ($p=V_5$), её метка становится постоянной. Пересчет вершин, смежных с V_5:$m(V_6)=6+2=8$ (см. рис. 77, е).

7. Осталась одна вершина с временной меткой, делаем её постоянной. Так как это вершина, до которой мы ищем расстояние, то действие первой части алгоритма на этом завершено (см. рис. 77, ж).

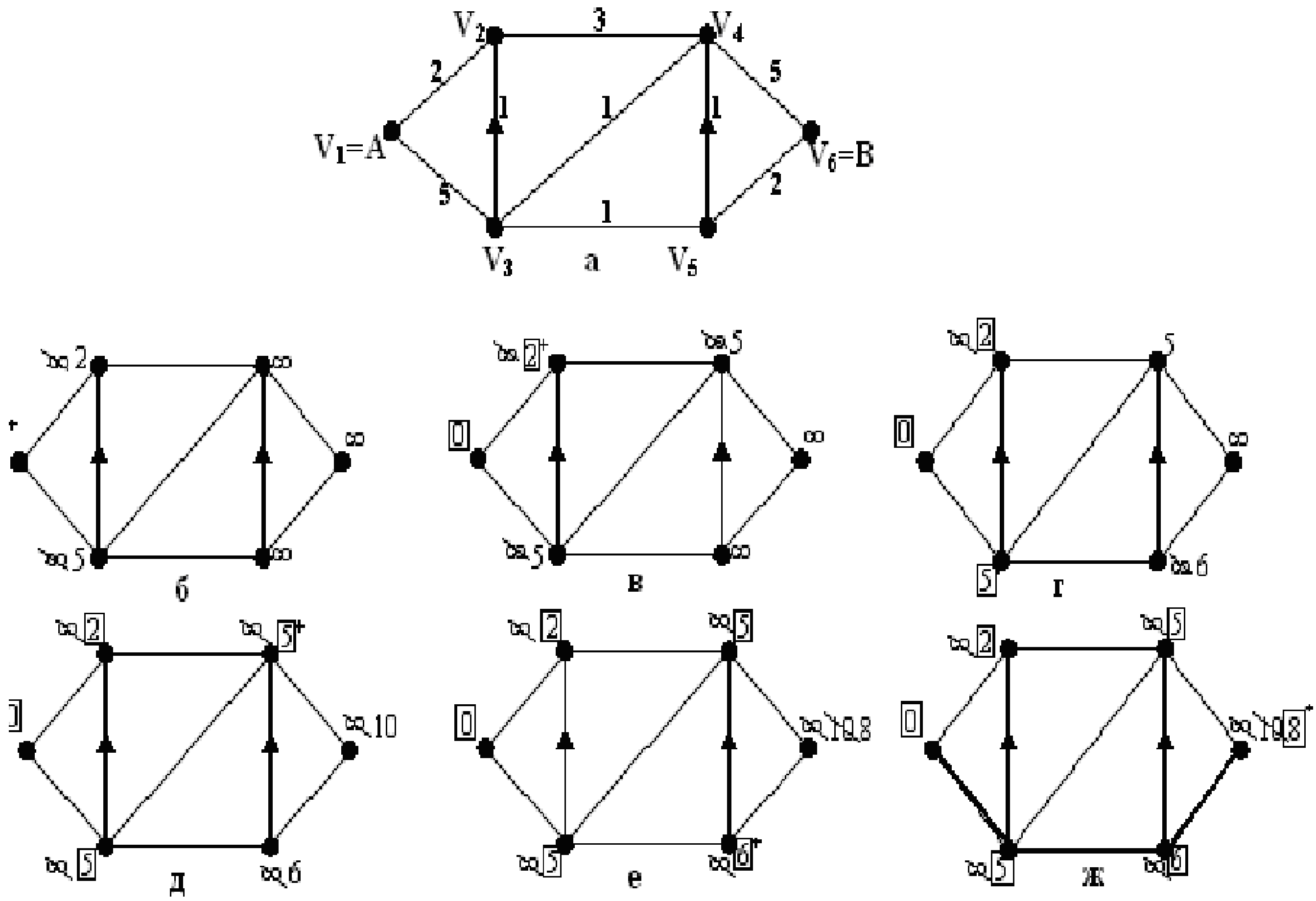


Рисунок 77

В данном случае кратчайший путь, начинающийся в V_1=A и заканчивающийся в V_6=B, соответствует (в обратном порядке) списку вершин, начинающемуся вершиной B, в котором каждая предыдущая вершина смежна с последующей, причем разность между метками соседних вершин равна весу ребра (или дуги), соединяющему эти вершины. На рис. 77,ж кратчайший путь выделен жирными линиями.

91) Пользуясь алгоритмом Форда найдите кратчайший путь из A в L (см. рис. 78)

Решение. На рис. 79-82 показан процесс решения задачи о нахождении длины кратчайшего пути из A в L. Рассуждения в соответствии с описанным алгоритмом могут быть следующие:

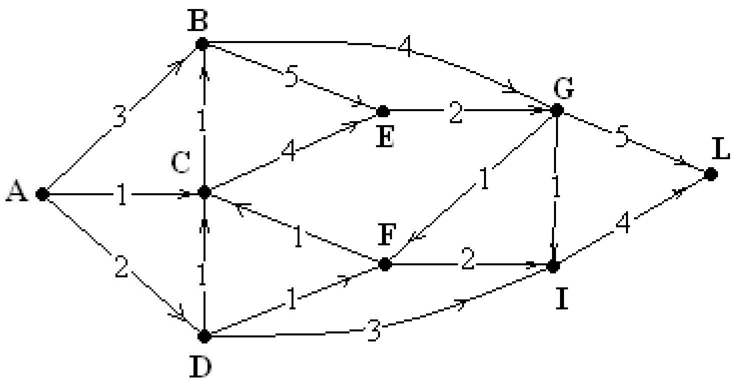
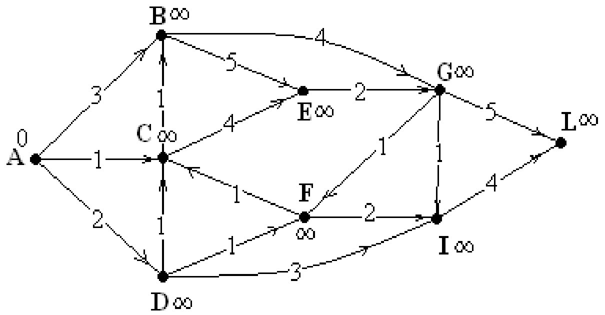


Рисунок 78

Часть 1.

1. Отмечаем начальную вершину меткой 0, а все остальные ∞ (см. рис 118).



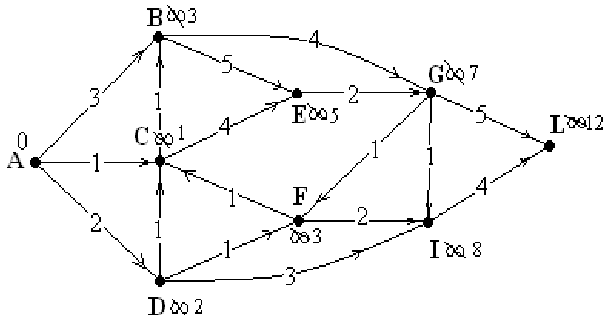
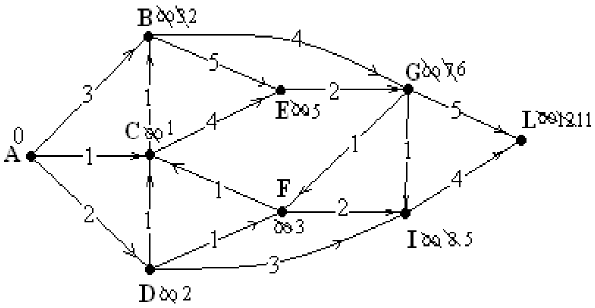


Рисунок 79 Рисунок 80



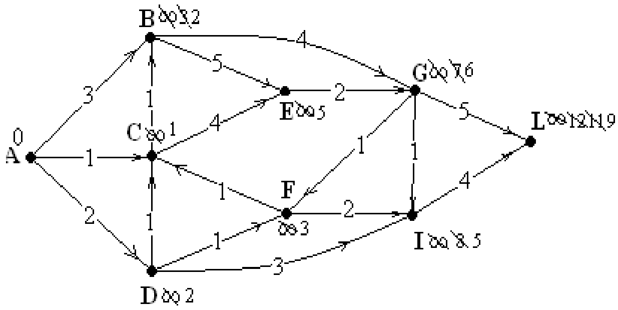


Рисунок 81 Рисунок 82

2. Пересчитываем метки всех вершин: m(B)=0+3=3; m(C)=0+1=1; m(D)=0+2=2; m(E)=1+4=5 (данная метка получена за счет вершины С, но она же могла быть получена за счет вершины В, тогда бы её метка равнялась 3+5=8. Как будут меняться метки зависит от способа обхода графа и не имеет значения); m(G)=3+4=7; m(F)=2+1=3; m(I)=7+1=8; m(L)=7+5=12. Данный этап проиллюстрирован на рис.80.

3. Ещё раз пересчитываем метки всех вершин: m(B)=1+1=2; m(G)=2+4=6; m(I)=3+2=5; m(L)=6+5=11 (см. рис. 81).

4. Ещё раз пересчитываем метки всех вершин: m(L)=5+4=9 (см. рис. 82).

Дальнейшая попытка пересчитать метки приводит к тому, что ни одна из меток не изменятся, следовательно, часть первая алгоритма закончена.

Часть 2. Поиск пути производим в обратном порядке от вершины L. Метка этой вершины получена за счет вершины I. Она в свою очередь получена за счет вершины D, а она за счет вершины A. Следовательно, искомый кратчайший путь: A, D, I, L.

Задачи для самостоятельного решения.

92) Найдите кратчайший путь из A в B в невзвешенном графе,

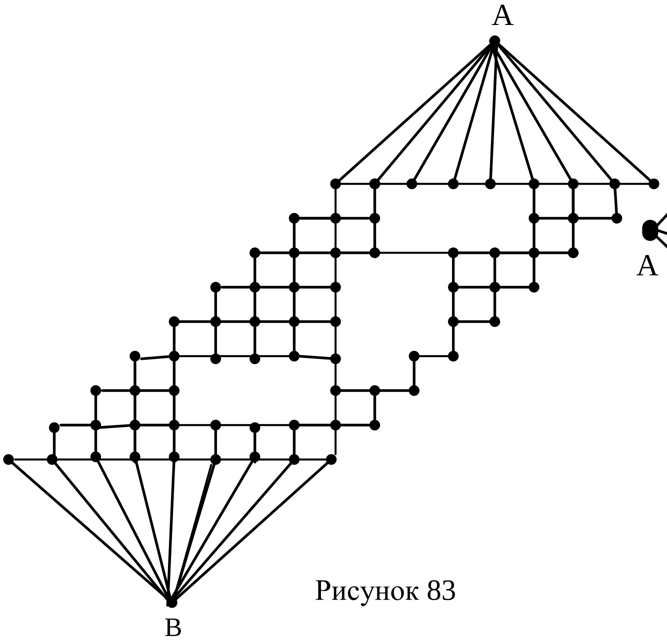


Рисунок 83

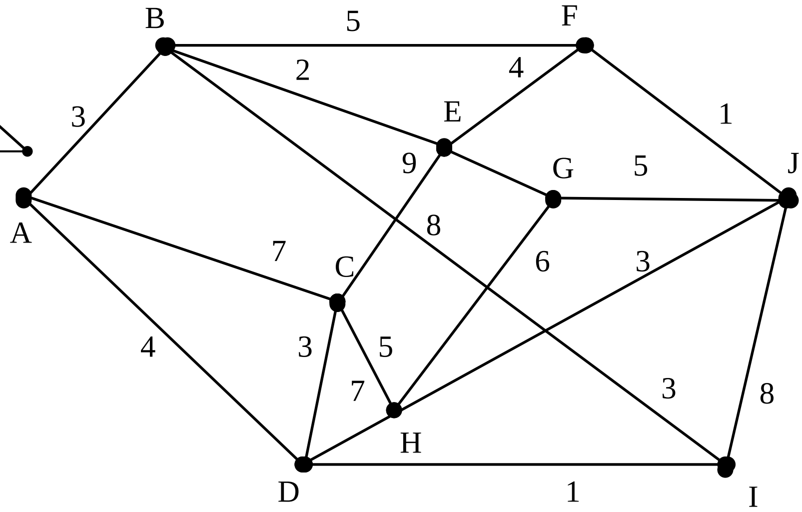


Рисунок 84

изображенном на рис. 83.

93) Найдите кратчайший путь из A в J во взвешенном графе (см. рис. 84)

94) Найдите минимальные расстояния от вершины A до остальных

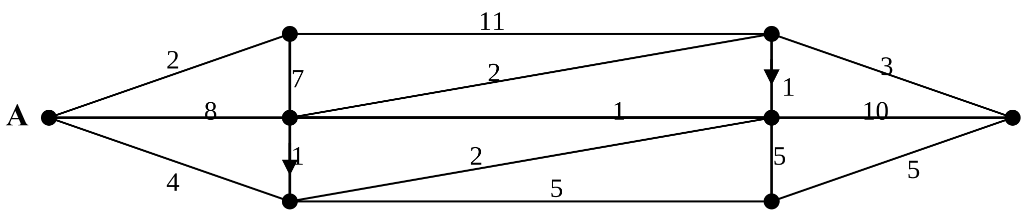


Рисунок 85

вершин графа на рис. 85.

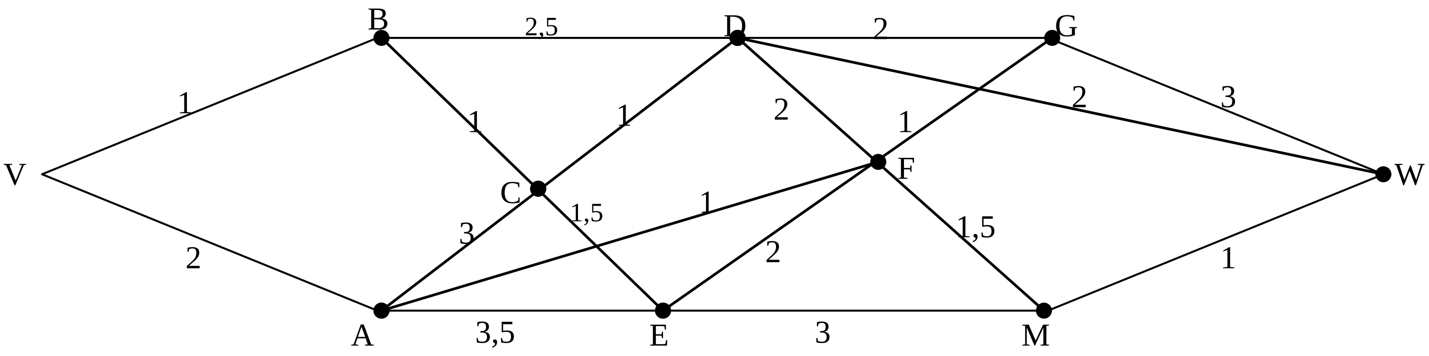


Рисунок 86

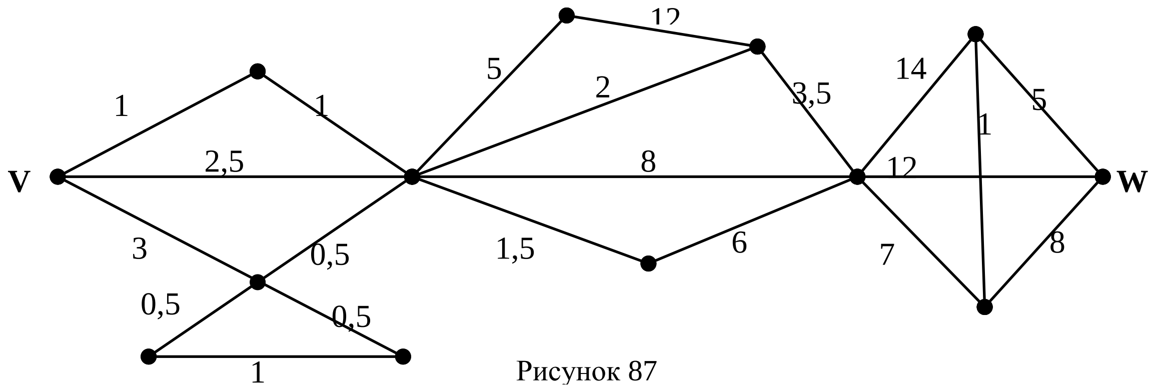


Рисунок 87

95) Даны взвешенные графы (рис. 86 и рис. 87). В них выделены две

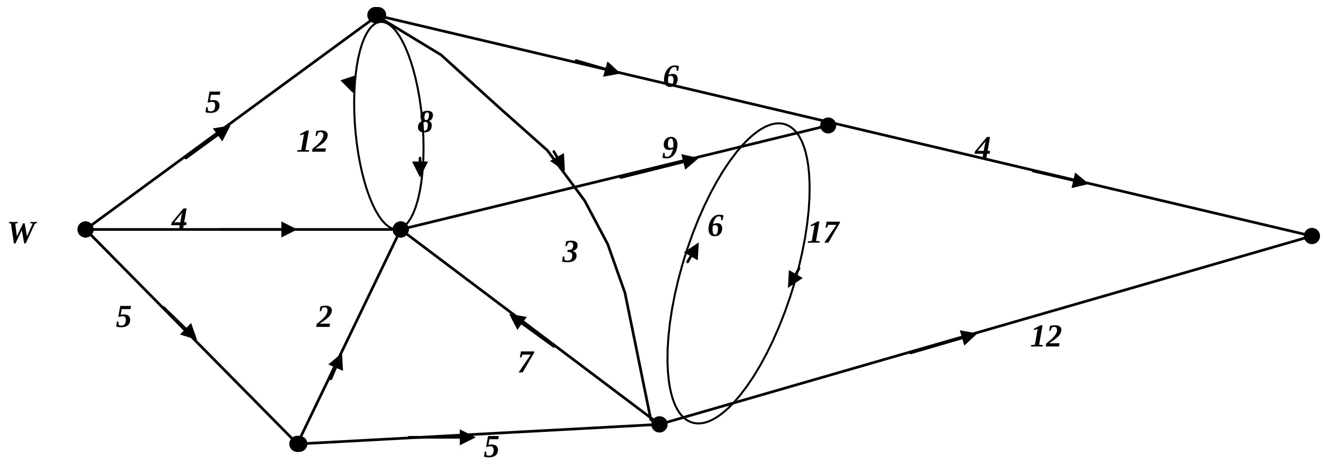


Рисунок 88

вершины V и W. Найдите кратчайшие расстояния между ними.

96) Найдите расстояние от вершины W до всех остальных вершин во взвешенном графе (рис. 88).

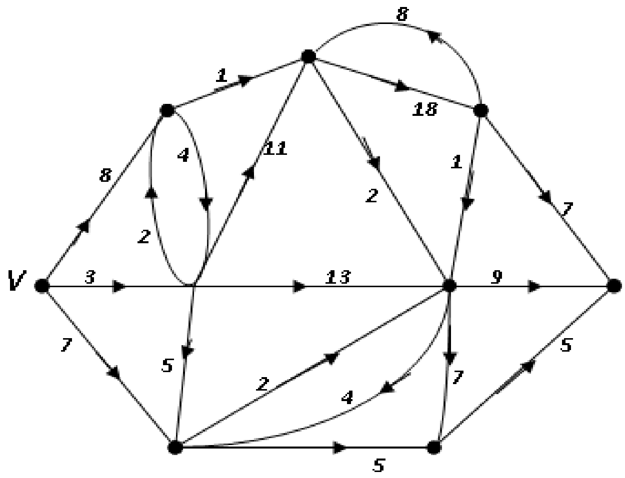


Рисунок 89

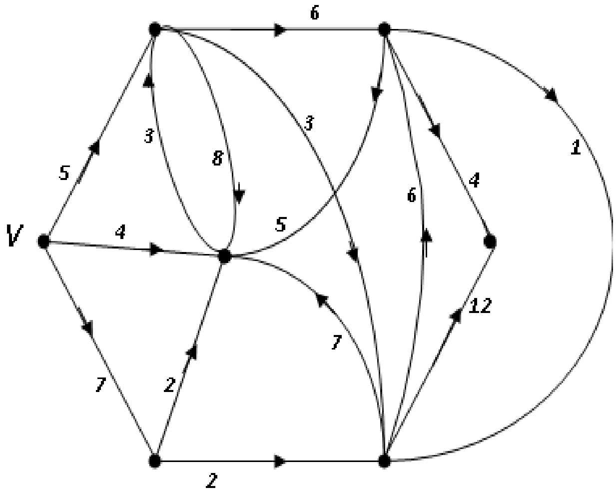


Рисунок 90

97) Найдите расстояние от вершины V до всех остальных вершин во взвешенных графах на рис. 89-90.

1.5.2 Алгоритм построения максимального потока

Транспортная сеть – связный ориентированный взвешенный граф, каждой дуге $\vec{u}$ которого приписана величина $c(\vec{u})$, называемая ее *пропускной способностью*. Кроме того, в нем существует единственная вершина *s*, из которой все дуги выходят и точно одна вершина *t*, в которую все дуги входят. Эти вершины называются *источником* и *стоком* соответственно.

Потоком в сети называется функция $\varphi(\vec{u})$, определенная на множестве дуг и удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $0\le \varphi(\vec{u})\le c(\vec{u})$ для любой дуги *, т.е.* поток через любую дугу не отрицателен и не превышает ее пропускной способности

2. $\sum\limits_{\vec{u}\in D_V^+}\varphi(\vec{u}) = \sum\limits_{\vec{u}\in D_V^-}\varphi(\vec{u})$, поток "входящий" в любую вершину V (отличную от источника и стока) равен "исходящему" из нее потоку (D_v^+, D_v^- -множество всех дуг, которые входят в V и выходят из V соответственно).

В любой сети существует по крайней мере один поток (нулевой).

Величиной потока назовем количество вещества, вытекающего из источника или равное ему количество вещества, втекающего в сток. $\varphi = \sum\limits_{\vec{u}\in D_s^-}\varphi(\vec{u}) = \sum\limits_{\vec{u}\in D_t^+}\varphi(\vec{u})$.

Нас будут интересовать потоки, имеющие наибольшее значение, эти потоки называются *максимальными*.

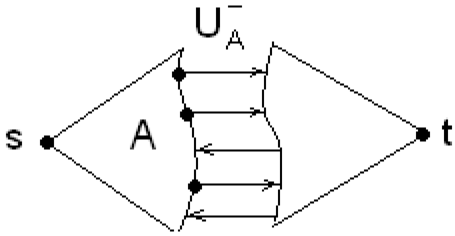
Реальные задачи, сводящиеся к поиску максимального потока в транспортной сети:

Задача 1. Имеется производитель электроэнергии, например, электростанция и потребители этой энергии. Требуется определить максимальное количество электроэнергии, которое можно передать.

Задача 2. Имеется сеть дорог, пропускные способности которых ограничены во времени. Определить минимальное время доставки груза от производителя к потребителю.

Разрезом сети N называется множество вершин A, где $s \in A$ и $t \notin$A, причем $A \cup \overline{A}$=V, $A \cap \overline{A}\, \varnothing$.

Обозначим множество всех дуг, начало которых лежит в A, а конец не принадлежит A - U_A^-.



$|U_A^-|$=3

Пропускной способностью разреза A называется сумма пропускных способностей дуг из множества U_A^-. *Минимальным* называется такой разрез, у которого пропускная способность принимает наименьшее значение.

Лемма 1. Величина любого потока φ не превосходит суммы пропускных способностей дуг любого разреза: $\varphi \le c(A)$.

Лемма 2. Если нашелся поток φ и разрез A такие, что $\varphi = c(A)$, то поток φ – максимальный, а разрез A – минимальный.

Назовем дугу *насыщенной*, если поток, идущий по ней равен её пропускной способности: $\varphi(\vec{u})$=c$(\vec{u})$. Поток называется *полным*, если на любом пути из источника в сток существует хотя бы одна насыщенная дуга. Очевидно, что $\varphi_{полн} \le$.

$\varphi_{макс}$. Любой максимальный поток является полным, но не любой полный поток является максимальным.

Теорема **(Форда-Фалкерсона)**. Во всякой сети величина максимального потока равна пропускной способности любого минимального разреза.

Алгоритм построения максимального потока:

Часть 1. Нахождение полного потока.

1 Находим произвольный поток в сети φ, например, нулевой поток: $\forall \vec{u} : \varphi(\vec{u})=0$.

2 Находим путь из источника в сток μ по ненасыщенным дугам, например, волновым алгоритмом. Увеличим поток по этому пути, для этого найдем следующую величину: $\varepsilon=\min(c(\vec{u})-\varphi(\vec{u}))$ по всем дугам пути μ.

3 Увеличиваем поток следующим образом: для любой дуги поток увеличивается на ε: $\varphi(\vec{u}):=\varphi(\vec{u})+\varepsilon$. Очевидно, что при таком увеличении хотя бы одна дуга станет насыщенной.

4 Пункты 2 и 3 повторяем до тех пор, пока не останется путей из s в t с ненасыщенными дугами. Т.о. найдем полный поток, но максимальный ли?

Часть 2. Нахождение максимального потока.

1 Находим пути μ из источника в сток такие, что ориентация дуг уже не учитывается, но любая дуга, которая проходится по ориентации (назовем её правильной) должна быть ненасыщенной, а по любой дуге, которая проходится против ориентации (назовем её неправильной) должен течь ненулевой поток.

2 Предположим, что такой путь μ нашли. Находим ε по правилам:

а) Для правильных дуг из μ: $\varepsilon_1=\min(c(\vec{u})-\varphi(\vec{u}))>0$.

б) Для неправильных дуг из μ: $\varepsilon_2=\min(\varphi(\overleftarrow{u}))$.

в) $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_1)>0$.

3 Меняем поток следующим образом:

а) Для правильных дуг из μ: $\varphi(\vec{u}):=\varphi(\vec{u})+\varepsilon$. (*)

б) Для неправильных дуг из μ: $\varphi(\overleftarrow{u}):=\varphi(\overleftarrow{u})-\varepsilon$. (**)

4 Пункты 2 и 3 повторяем до тех пор, пока существуют требуемые пути.

Алгоритм построения минимального разреза:

1 Вершину s отмечаем +.

2 Предположим, что часть вершин уже помечено «+». Тогда на следующем шаге будем помечать вершины «+» в двух случаях:

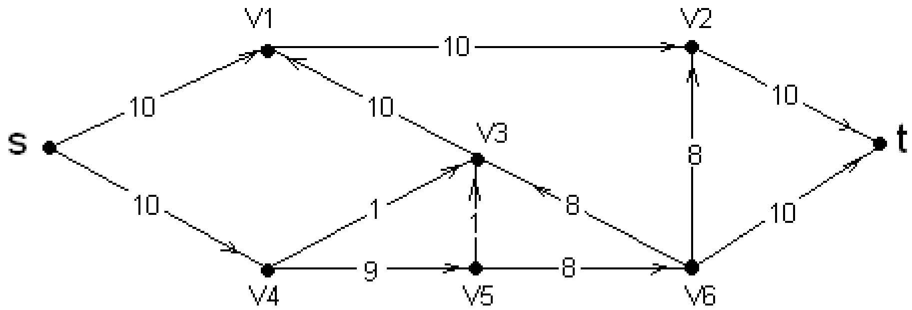
а) когда дуга правильная и ненасыщенная;

б) когда дуга неправильная и по ней течет ненулевой поток.

3 Повторяем пункт 2 до тех пор, пока множество помеченных вершин не перестанет изменяться. Это и будет минимальный разрез А.

Примеры решения задач

98) Пользуясь алгоритмом Форда-Фалкерсона найти максимальный поток в сети и минимальный разрез.



Решение.

Часть 1. Нахождение полного потока.

1. Пусть в сети течет нулевой поток.

Выбираем путь $s \underset{10}{,} V_4 \underset{9}{,} V_5 \underset{8}{,} V_6 \underset{8}{,} V_3 \underset{10}{,} V_1 \underset{10}{,} V_2 \underset{10}{,} t$. Внизу подписаны длины всех ребер, входящих в него.

Вычисляем ε: ε=min(10-0, 9-0, 8-0, 8-0, 10-0, 10-0, 10-0)=8. Увеличиваем поток по этому пути с 0 до 8 и отмечаем насыщенные дуги (см. рис. 91).

2. Выбираем путь $s \underset{10}{,} V_4 \underset{9}{,} V_5 \underset{1}{,} V_3 \underset{10}{,} V_1 \underset{10}{,} V_2 \underset{10}{,} t$.

Вычисляем ε: ε=min(10-8, 9-8, 1-0, 10-8, 10-8, 10-8)=1. Увеличиваем поток по этому пути на +1 и отмечаем насыщенные дуги (см. рис. 92).

3. Выбираем путь s, V_1, V_2, t.

Вычисляем ε: $\varepsilon=\min(\overbrace{10-0}^{10},\ \overbrace{10-9}^{10},\ \overbrace{10-9}^{10})=1$. Увеличиваем поток по этому пути на +1 и отмечаем насыщенные дуги (см. рис. 93).

4. Путей из s в t с ненасыщенными дугами больше нет, поэтому первая часть алгоритма закончена и найден полный поток $\varphi_{полн}=10$.

Часть 2. Нахождение максимального потока.

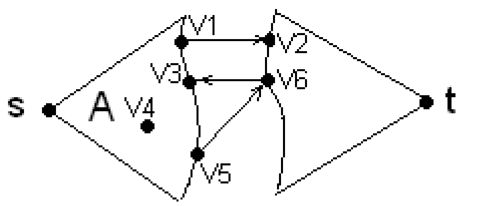
1. Выбираем путь s, V_4, V_3, V_6, t. Вычисляем величину увеличения потока ε: $\varepsilon_1=\min\ (10-9,\ 1-0,\ 10-0)=1$. Ребро V_3, V_6 пропускаем, т.к. оно неправильное.

$\varepsilon_2=\min\ (8)=8$, где 8 – поток по неправильным дугам выбранного пути.

$\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)=\min(1,8)=1$. Увеличиваем поток по этому пути на 1 по правильным ребрам и уменьшаем на 1 по неправильным (см. рис. 94).

2. Выбираем другой путь s, V_1, V_3, V_6, t. Вычисляем величину увеличения потока ε: $\varepsilon_1=\min\ (10-1,\ 10-1)=9$. Ребра V_1, V_3 и V_3, V_6 пропускаем, т.к. они неправильные. $\varepsilon_2=\min\ (9,\ 7)=7$, где 7 – поток по неправильным дугам выбранного пути. $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)=\min(9,7)=7$. Увеличиваем поток по этому пути на 7 по правильным ребрам и уменьшаем на 7 по неправильным (см. рис. 95).

Построение разреза. В соответствии с алгоритмом последовательно включаем в множество A следующие вершины: $A=\{s,V_1,V_3,V_4,V_5\}$ (см. рис. 96).



V_1, V_2 – правильное ребро, поток 10

V_3,V_6 – неправильное ребро, поток 0

V_5, V_6 – правильное ребро, поток 8

Итого: 18 – максимальный поток в сети и пропускная способность минимального разреза.

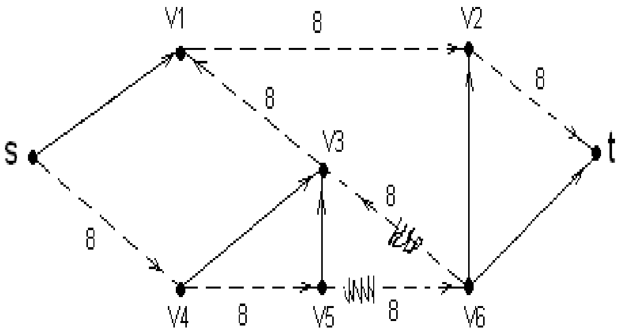


Рисунок 91

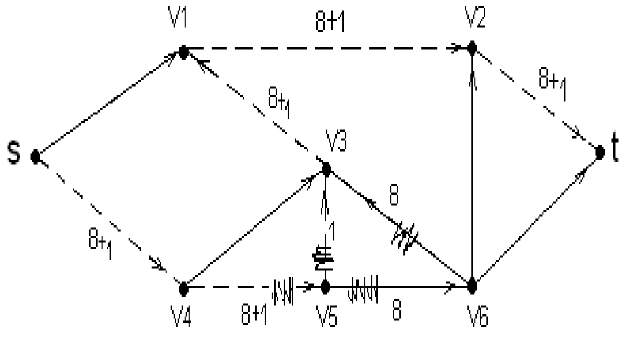


Рисунок 92

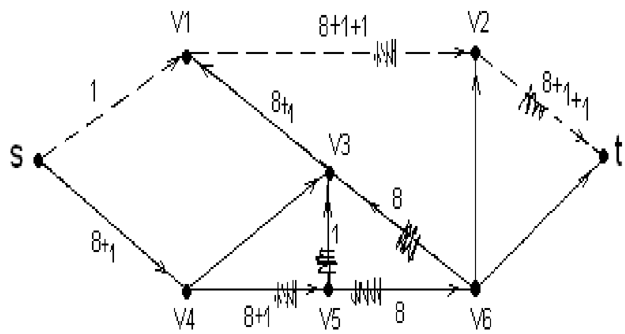


Рисунок 93

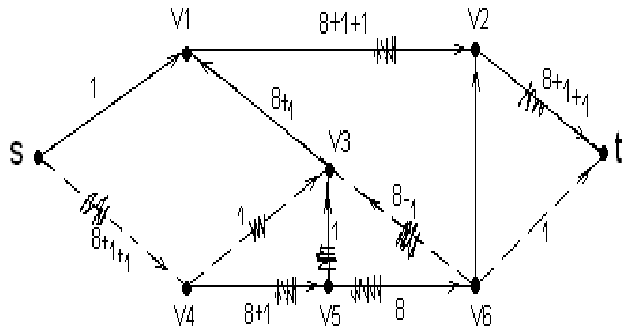


Рисунок 94

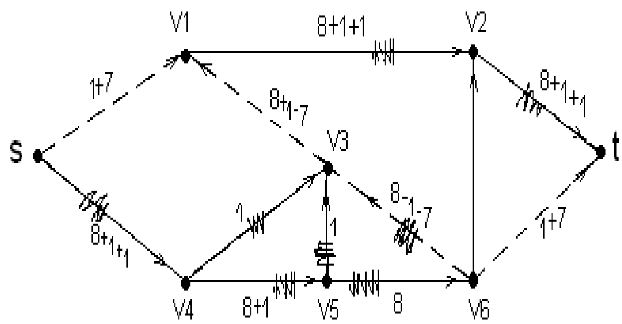


Рисунок 95

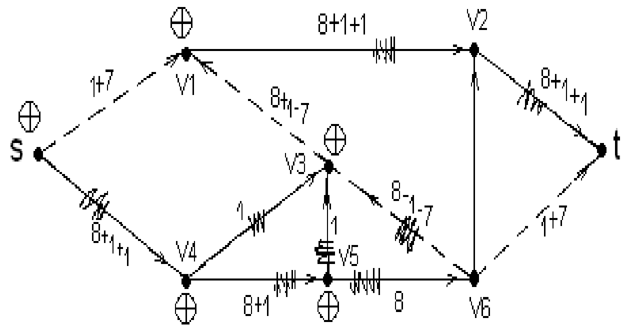


Рисунок 96

Для более компактной записи решение будем оформлять в виде таблицы:

Выбираемый путь	Расчет ε	Величина увеличения потока	Список насыщенных дуг
Часть 1. Нахождение полного потока.			
1. s,V_4,V_5,V_6,V_3,V_1,V_2,t	ε=min(10-0,9-0,8-0,8-0,10-0,10-0,10-0)=8	+8	V_6,V_3 и V_5,V_6
2. s,V_4,V_5,V_3,V_1,V_2,t	ε=min(10-8, 9-8,1-0,10-8,10-8,10-8)=1	+1	V_4,V_5 и V_5,V_3
3. s, V_1, V_2, t	ε=min(10-0,10-9,10-9)=1	+1	V_1,V_2 и V_2,t
	$\varphi_{полн}$=8+1+1=10		
Часть 2. Нахождение максимального потока.			
1. s,V_4,V_3,V_6,t	ε_1=min (10-9, 1-0, 10-0)=1, ε_2=min (8)=8, ε=min(ε_1, ε_2)=min(1,8)=1.	±1	s,V_4 и V_4,V_3
2. s,V_1,V_3,V_6,t	ε_1=min (10-1, 10-1)=9, ε_2=min (9, 7)=7,	±7	-

	$\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=\min(9,7)=7$.		
	$\varphi_{макс}=\varphi_{полн}+1+7=10+8=18$		
Разрез	$A=\{s, V_1, V_3, V_4, V_5\}$		
Пропускная способность разреза	$c(A)=60$		

Задачи для самостоятельного решения

99) Найдите максимальный поток в сети, приведенной на рис. 97, в которой пропускные способности всех дуг равны единице.

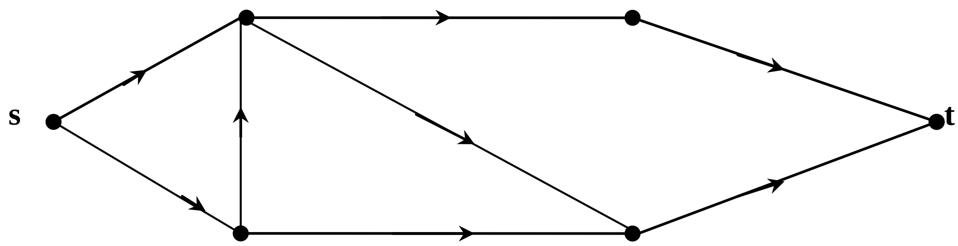


Рисунок 97

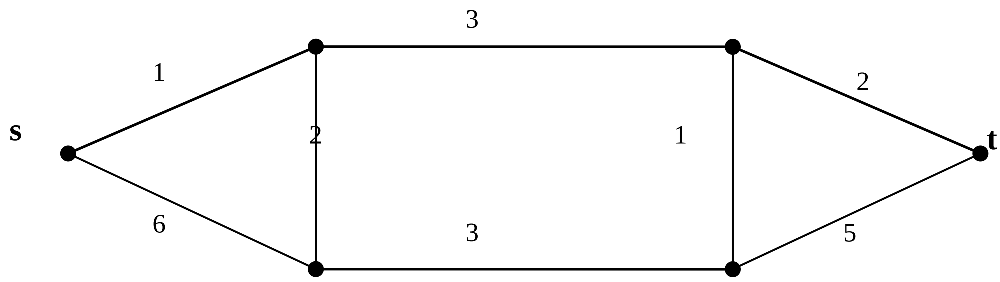


Рисунок 98

100) Найдите поток максимальной мощности в сети (рис. 98).

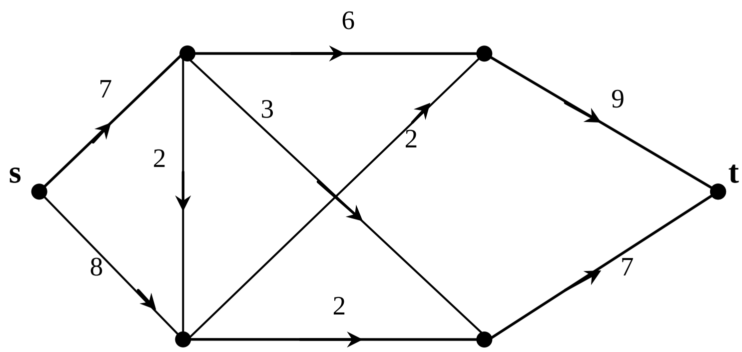


Рисунок 99

101) Постройте полный и максимальный потоки в транспортной сети (рис.99).

102) Найдите максимальный поток в сети. V –источник, W –сток (рис. 100, 101).

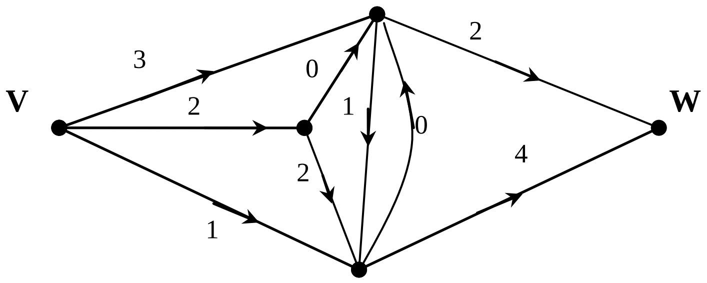


Рисунок 100

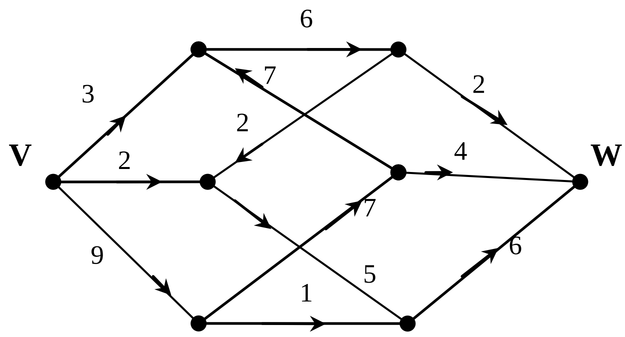


Рисунок 101

103) Найдите максимальный поток в транспортной сети и

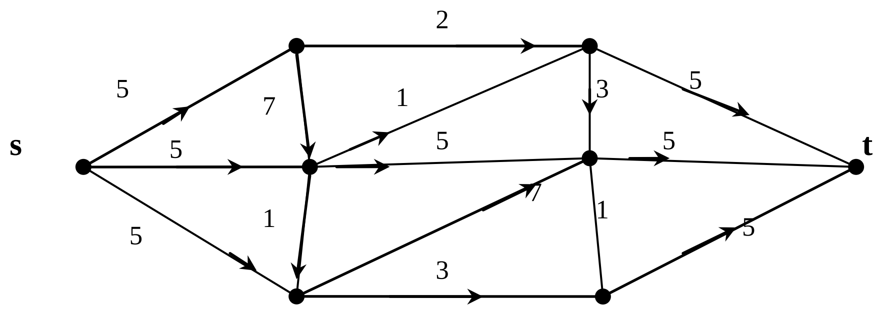


Рисунок102

соответствующий минимальный разрез (рис. 102).

104) Найдите максимальную пропускную способность сети между её источником и стоком (рис. 103).

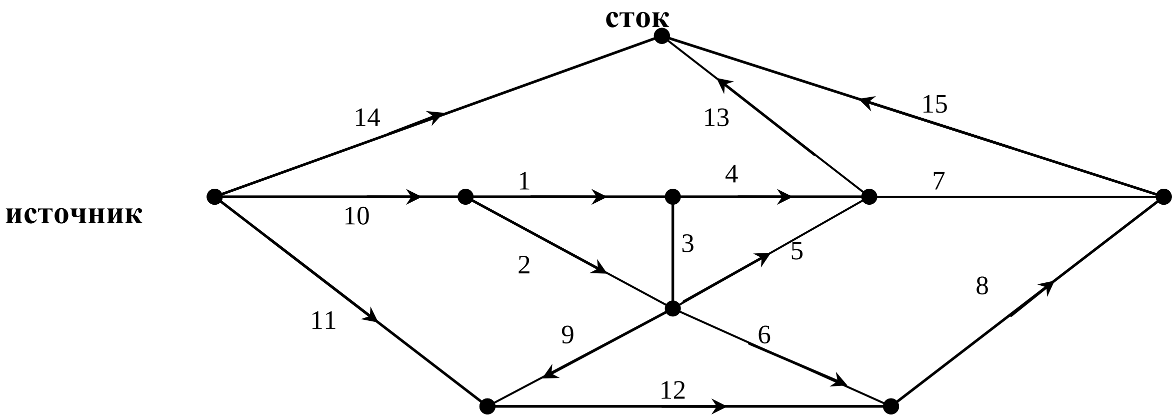


Рисунок 103

105) Найдите максимальный поток от x_1 к x_9 (рис. 104).

Вопросы для повторения

1. Алгоритм нахождения кратчайшего маршрута между заданными

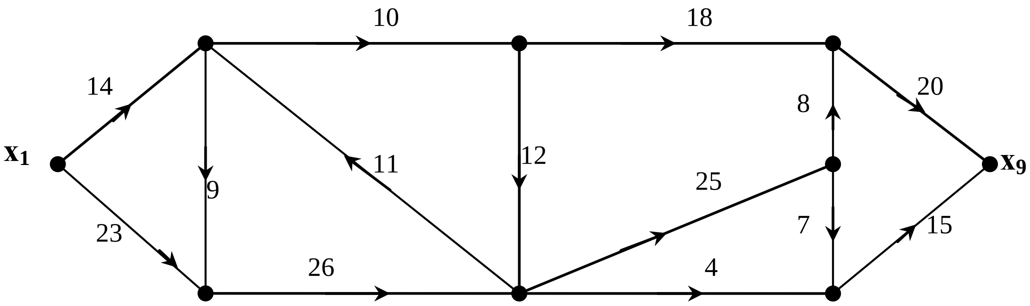


Рисунок 104

вершинами в невзвешенном графе и его длины. Пример.

2. Алгоритм Форда нахождения кратчайшего маршрута между заданными вершинами во взвешенном графе и его длины. Пример.

3. Алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего маршрута между заданными вершинами во взвешенном графе и его длины. Пример.

4. Основные понятия транспортной сети. Реальные задачи, сводящиеся к поиску максимального потока в транспортной сети

5. Алгоритм нахождения максимального потока в сетях.

Глава 2. Задачи по теории графов

2.1 Основные определения и примеры графов

1. В шахматном турнире по круговой системе участвуют семь студентов. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя – пять, Леша и Дима –по три, Семен и Илья – по две, Женя - одну. С кем сыграл Леша?

2. Покажите, что данные объекты можно рассматривать как графы:

a) вершины и ребра многогранника;

b) план лабиринта;

c) дружеские отношения в группе студентов;

d) генеалогическое дерево;

e) теннисный турнир;

f) страны на карте.

3. На рисунке 105 изображены молекулы этилена и бензола; через С и Н обозначены атомы углерода и водорода соответственно. Можно ли считать эти диаграммы графами? Если да, то что будет являться необходимым условием, для того чтобы граф представлял собой молекулу какого-либо углеводорода?

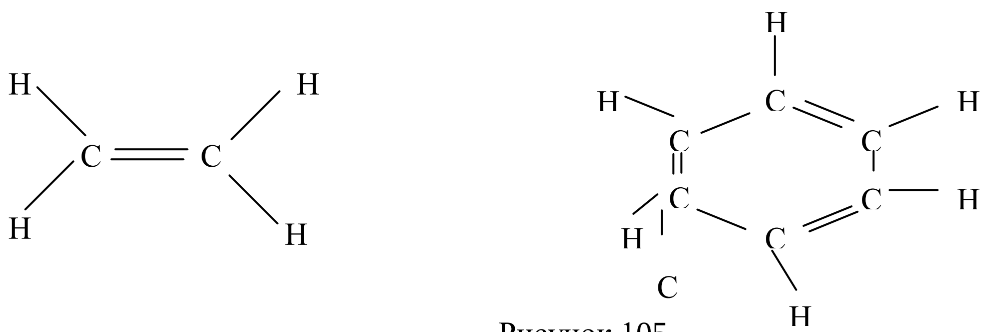


Рисунок 105

4. Могут ли степени вершины в простом графе быть равны:

a) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2;

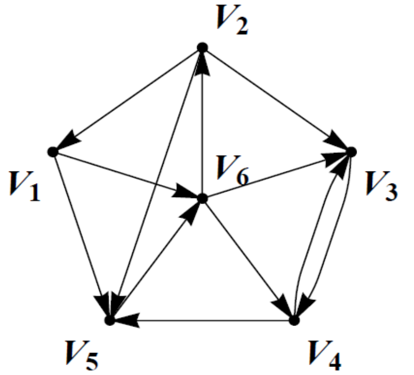
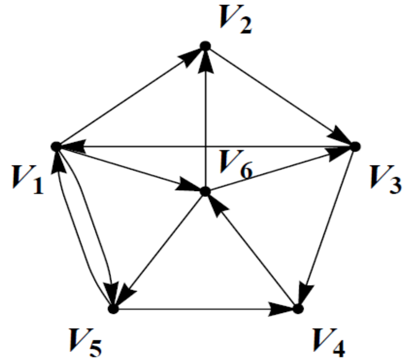
b) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1;

c) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2.

5. Дан ориентированный граф D.

1. Найдите матрицу смежности A.

2. С помощью алгоритма фронта волны найдите расстояния в ориентированном графе D; диаметр; радиус и центры.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1		2	

6. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

7. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

8. В группе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 11 - по 4 друга, а 10 - по 5 друзей?

9. В некоторой стране 19 регионов. Может ли оказаться так, что у каждого региона 1, 5 или 9 соседних регионов?

10. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

11. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

12. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

13. Нарисуйте полный граф с n вершинами, если: а) n = 2;б) n=3;в) n=5

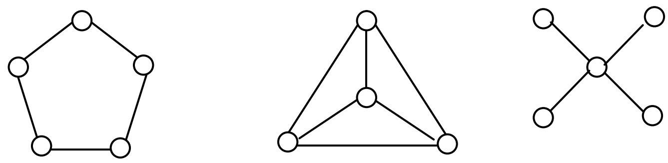
14. Какова степень каждой вершины полного графа, у которого n вершин?

15. Спортивные соревнования проводятся по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В соревновании с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько было сыграно встреч?

16. Может ли полный граф иметь 7, 8, 9, или 10 ребер?

17. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не боле одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

18. Какие из предложенных графов являются регулярными?

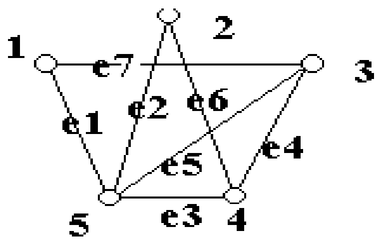


2.2 Матрицы, ассоциированные с графом

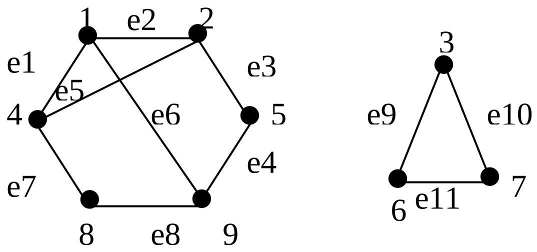
19. Дана симметричная матрица размером n x n. В каждой строке расположено нечетное число единиц, остальные элементы равны нулю. Элементы на главной диагонали равны нулю. Доказать, что n является четным.

20. Опишите матрицы смежности полных графов, вполне несвязных графов. Что можно сказать о матрице смежности простого графа и его дополнения?

21. Изобразите матрицу смежности и инциденций графа:



22. Изобразите матрицы смежности, инциденций графа:



23. Дана матрица смежности. Изобразите граф, ей соответствующий.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	1	0	1	0
2	0	0	0	0	1	0	1
3	1	0	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	0	1
6	1	0	1	0	0	0	0
7	0	1	0	1	1	0	0

24. Дана матрица инциденций. Изобразите граф, ей соответствующий.

	1	2	3	4	5
E1	1	0	0	0	1
E2	0	1	0	0	1
E3	0	0	0	1	1
E4	0	0	1	1	0
E5	0	0	1	0	1
E6	0	1	0	1	0
E7	1	0	1	0	0

25. Установить, какие из следующих матриц являются матрицами смежностей простого графа, какие - матрицами инциденций и какие не являются ни теми, ни другими.

а)

0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0

б)

0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0

в)

1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1

д)

1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0

г)

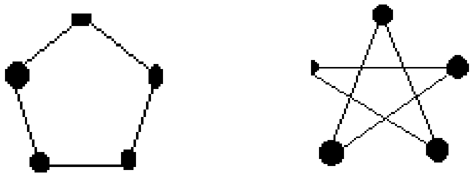
1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0

е)

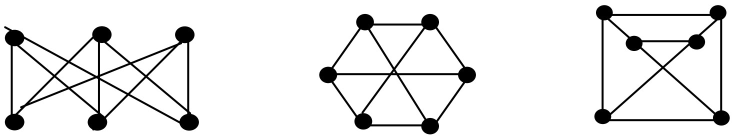
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0

2.3 Изоморфизм графов

26. Являются ли изоморфными графы? Ответ обосновать.



27. Докажите, что графы являются изоморфными.



28. Докажите, что графы являются изоморфными.

29. Докажите, что графы не изоморфны.

30. Докажите, что графы не изоморфны.

2.4 Достижимость и связность графов

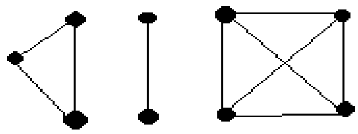
31. Дана матрица смежности графа. Не изображая граф, ответьте на следующие вопросы:

- Какова степень пятой вершины? Назовите смежные с ней вершины.
- Существует ли путь из вершины 2 в вершину 8?

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0

3	1	0	0	1	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0
7	0	0	0	0	1	1	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0

32. Изобразите матрицу достижимости графа.



33. Дана матрица смежности графа. Найти все вершины, входящие в одну компоненту связности с вершиной 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

34. Выделите компоненты связности графа:

а)

0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

б)

0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

в)

0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0

35. Дана матрица смежности графа. Найдите матрицу достижимостей этого графа, не изображая его.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0

2	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	1	0	0	1	1
7	1	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	1	0	0	1
9	0	0	0	0	1	1	0	1	0

36. По матрице смежности восстановите ориентированный граф D, взяв в качестве вершин V_1, V_2, V_3, V_4, V_5пять произвольных точек плоскости. Найдите:

1) матрицу инцидентности B, предварительно перенумеровав ребра;

2) матрицу достижимости T;

3) матрицу сильной связности;

4) компоненты сильной связности.

а) $A = \begin{pmatrix} 01001 \\ 00100 \\ 10000 \\ 00101 \\ 00000 \end{pmatrix}.$; б) $A = \begin{pmatrix} 00001 \\ 10000 \\ 01000 \\ 01101 \\ 00100 \end{pmatrix}.$

37. В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

38. В некотором государстве лишь один вид транспорта – автомобиль. Из столицы выходит 21 автомобильная дорога, из города Дальний - одна, а из всех остальных городов - по 20. Докажите, что из столицы можно доехать в Дальний (возможно, с пересадками).

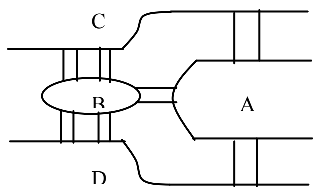
39. В одной стране каждая пара городов соединена только одним транспортным маршрутом: или железнодорожным, или автобусным. Докажите, что существует вид транспорта, которым можно доехать из любого города страны в любой другой (возможно, с пересадками)

40. На конференции по новым информационным технологиям студент Иванов познакомился с 52 студентами из разных городов России. По окончании конференции некоторые пары студентов обменялись адресами, причем у каждого из участников конференции оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Иванову понадобилось узнать адрес студента Петрова, который также участвовал в конференции. Докажите, что Иванов может узнать адрес Петрова.

41. Каждый из семи мальчиков имеет не менее трех братьев. Докажите, что все мальчики – братья.

2.5 Циклы

42. На рисунке изображена карта Кенигсбергских мостов.



Определите, можно ли, начав с некоторой точки, совершить прогулку и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно 1 раз.

43. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист: а) не с него начал и не на нем закончил? б) с него начал, но не на нем закончил? в) с него начал и на нем закончил?

44. Определите, является ли граф, заданный матрице смежности, эйлеровым.

0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0

а)

0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0

б)

0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0

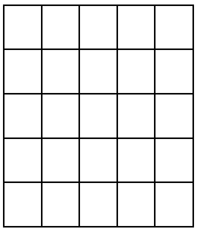
в)

45. Существует ли эйлеров граф, обладающий висячей вершиной?

46. Имеется полный граф на 16 вершинах. Каково минимальное число маршрутов в графе, которые в совокупности содержат все его ребра и все вершины?

47. Дан кусок проволоки длиной 120 см. а) Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

48. Можно ли нарисовать решетку, изображенную на рисунке, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя одну и ту же линию дважды? Какое наименьшее число раз придется оторвать карандаш от бумаги?



49. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть не распадающуюся на части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

50. Для каких чисел m, n граф G является эйлеровым:

1) K_n – полный граф с n вершинами?

2) K_{mn} – полный двудольный граф с n, m вершинами?

3) W_n – колесо с n вершинами?

51. Для каких чисел m, n граф является гамильтовым?

1) K_n – полный граф с n вершинами?

2) W_n – колесо с n вершинами?

52. Дана матрица смежности графа. Определить, является ли граф эйлеровым, гамильтоновым.

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	0

53. В стране некоторые пары городов соединены авиалиниями, причем каждый город соединен не менее чем с половиной других городов. Докажите, что туристическая фирма может найти такой маршрут облета городов, который начинается и заканчивается в одном и том же городе, причем каждый город посещает ровно один раз.

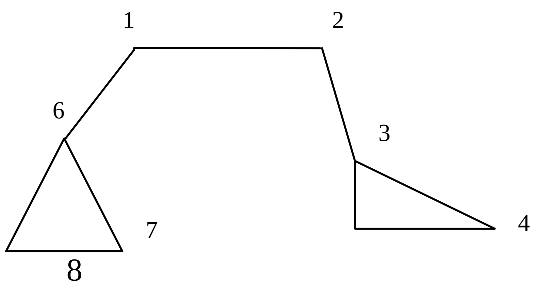
54. На пир при дворе короля Артура собралось четное число рыцарей, которые либо враждуют, либо дружат. Оказалось, что у каждого рыцаря друзей больше, чем врагов. Докажите, что можно рассадить рыцарей за круглым столом таким образом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

55. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

56. Можно ли перевести шахматного коня с клетки a1 на клетку h8, побывав при этом на каждой клетке шахматной доски ровно один раз?

2.6 Алгоритмы обхода связного графа

57. Перечислить вершины графа в порядке обхода а) в глубину; в) в ширину.



58. Граф задан матрицей смежности. Найти

- Какой-либо путь из вершины 2 в вершину 4;
- кратчайший путь из вершины 2 в вершину 4;
- кратчайшие пути из вершины 2 ко всем остальным вершинам.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
5	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1

8	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
9	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

2.7 Деревья

59. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

60. Какое максимальное число висячих вершин может иметь дерево, обладающее 9 вершинами?

61. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

62. В парке «Лотос» невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку содержит не более одного раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

63. В стране 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

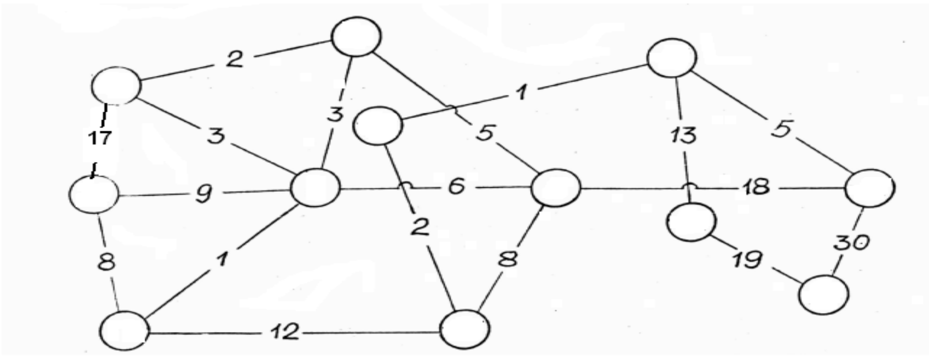
64. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.

65. Сколько ребер нужно удалить из связного графа, имеющего q ребер и p вершин, чтобы получить дерево, содержащее все вершины этого графа.

66. Докажите, что полный двудольный граф с n вершинами в одной доле и m вершинами в другой имеет не менее mn-m-n+1 различных циклов?

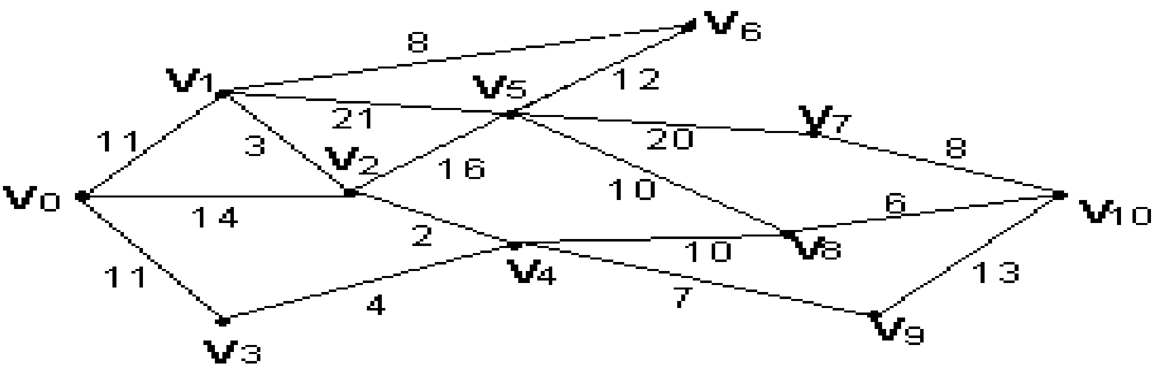
67. Найдите цикломатическое число для графов: K_n; $K_{m,n}$; W_n; графа Петерсона.

68. Найти хроматическое число графа. Является ли он эйлеровым, планарным?



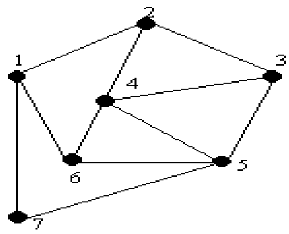
69. Построить минимальное остовное дерево (алгоритм Краскала, алгоритм Прима) графа и найти его длину.

70. Используя алгоритм Дейкстры и Форда-Белмана, найти кратчайший путь от V_0 до V_{10}.



71. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

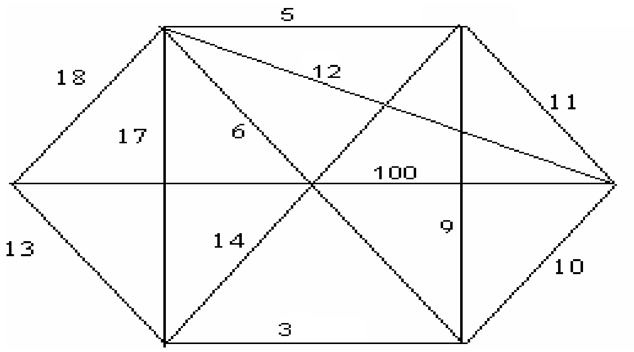
72. В несвязном графе с 5 компонентами связности любое ребро является



мостом. Сколько вершин в графе, если ребер 115?

73. Постройте остовы графа, изображенного на рисунке методами поиска в ширину и в глубину.

74. Найти минимальный каркас графа, изображенного на рисунке, используя алгоритм Краскала.



75. Решить задачу коммивояжера для графа, заданного матрицей расстояний

$$\begin{pmatrix} \propto & 5 & 7 & 9 & 15 & 21 \\ 3 & \propto & 6 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 6 & \propto & 7 & 11 & 14 \\ 2 & 5 & 6 & \propto & 9 & 12 \\ 6 & 3 & 7 & 8 & \propto & 20 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & \propto \end{pmatrix}.$$

76. Найдите какие-нибудь остовные деревья для графов К$_5$, К$_{33}$, и в графе Петерсона.

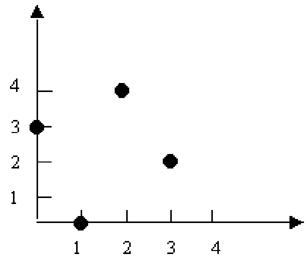
77. Постройте каркас минимального веса для графа заданного матрицей весов

0	20	∞	∞	∞	15	∞
20	0	∞	∞	1	∞	3
∞	∞	0	5	2	∞	2
∞	∞	5	0	3	∞	1
∞	1	2	3	0	10	∞
15	∞	∞	∞	10	0	∞
∞	3	2	1	∞	∞	0

0	∞	∞	∞	∞	3	2
∞	0	10	∞	∞	4	∞
∞	10	0	∞	∞	4	∞
∞	∞	∞	0	2	3	∞
∞	∞	∞	2	0	1	∞
3	4	4	3	1	0	1
2	∞	∞	∞	∞	1	0

0	2	∞	∞	∞	7	10
78. 2	0 Н	10	∞	∞	1	0
∞	10	0	2	∞	∞	∞
79. ∞	∞	2	0	5	1	∞
80. ∞	∞	∞	5	0	3	∞
7	1	∞	1	3	0	2
81. 10	∞	∞	∞	∞	2	0

82. Найти каркас минимального веса для полного графа на множестве вершин (x1, x2, x3, x4), как показано на рисунке, с весами ребер, определенных как расстояния между вершинами.



83. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

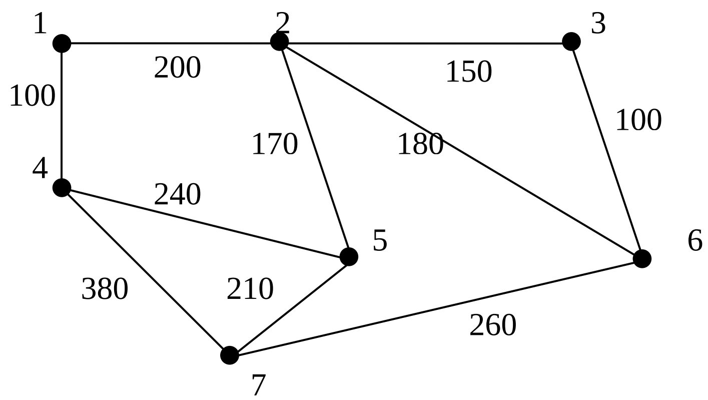
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	10	∞	5	∞	∞	14
2	10	-	6	2	4	8	∞
3	∞	6	-	3	1	1	∞
4	5	2	3	-	6	∞	3
5	∞	4	1	6	-	5	∞
6	∞	8	1	∞	5	-	2
7	14	∞	∞	3	∞	2	-

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	7	15	12	∞	10	∞
2	7	-	13	9	∞	∞	8
3	15	13	-	7	15	7	∞
4	12	9	7	-	9	∞	11
5	∞	∞	15	9	-	10	∞
6	10	∞	7	∞	10	-	12
7	∞	8	∞	11	∞	12	-

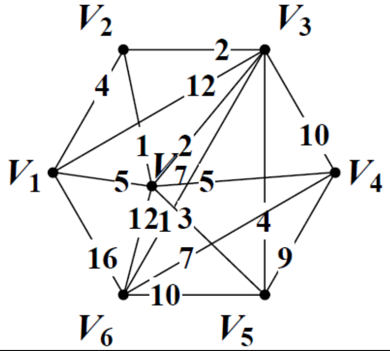
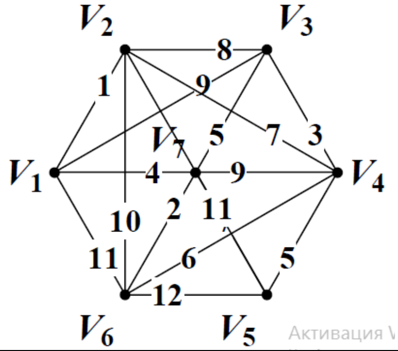
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	10	11	∞	14	∞	12
2	10	-	10	9	∞	∞	7
3	11	10	-	12	10	∞	6
4	∞	9	12	-	9	12	∞
5	14	∞	10	9	-	11	12
6	∞	∞	∞	12	11	-	∞
7	12	7	6	∞	12	∞	-

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	3	5	∞	6	∞	∞
2	3	-	10	6	8	∞	4
3	5	10	-	5	7	∞	9
4	∞	6	5	-	8	7	∞
5	6	8	7	8	-	9	11
6	∞	∞	∞	7	9	-	∞
7	∞	4	9	∞	11	∞	-

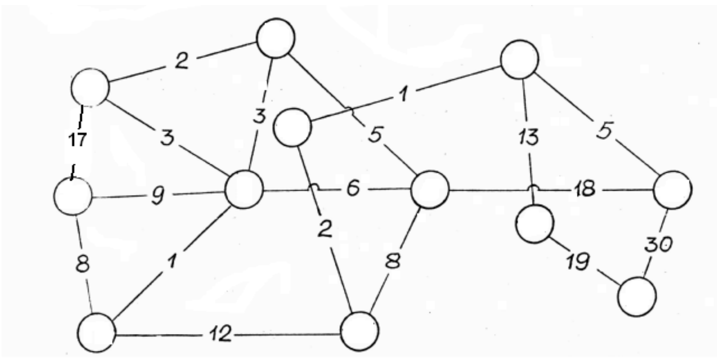
84. На строительном участке нужно создать телефонную сеть, соединяющую все бытовки. Для того чтобы телефонные линии не мешали строительству, их решили проводить вдоль дорог. Схема участка изображена на рисунке, где бытовкам соответствуют вершины графа и указаны длины дорог между ними. Каким образом провести телефонные провода, чтобы их общая длина была минимальной?



85. Найдите минимальное остовное дерево в неориентированном нагруженном графе.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1		2	

86. Для данного графа найти величину максимального потока. Найти произвольный минимальный разрез



87. Необходимо построить систему нефтепроводов, которые должны соединять семь нефтеочистительных заводов (Н1, Н2, Н3, Н4, Н5, Н6, Н7) , принадлежащих некоторой компании, с портом (П), куда поступает импортируемая сырая нефть. Стоимость прокладки нефтепровода между любыми двумя пунктами составляет 5000 долларов в расчете на одну милю. расстояния между всеми парами вершин задаются в следующей таблице:

	П	Н1	Н2	Н3	Н4	Н5	Н6	Н7
П	0	5	6	8	2	6	9	10
Н1		0	4	10	5	8	6	10
Н2			0	11	8	4	9	10
Н3				0	10	3	6	7
Н4					0	2	5	9
Н5						0	10	5
Н6							0	8
Н7								0

Найдите минимальную стоимость прокладки нефтепровода.

88. Есть бактерия, которая делится на 3 бактерии. В дальнейшем появляющиеся бактерии могут делиться на 4 бактерии, могут делиться на две, а могут и не делиться. Образовалось 102 бактерии. Определите число делений, если известно, что число бактерий, разделившихся на две в 6 раз больше, чем число бактерий, разделившихся на четыре.

89. Город имеет форму квадрата (100nx100n) метров с (n+1) прямолинейной улицей, идущей параллельно одной стороне квадрата, и (n+1) прямолинейной улицей, идущей параллельно другой его стороне. Расстояние между любыми двумя соседними параллельными улицами – 100 метров, длина каждой улицы – 100n метров. Мэр города решил выполнить свое предвыборное обещание: заасфальтировать за свой счет улицы так, чтобы с любого перекрестка на любой другой можно было проехать по асфальту. Конечно, мэр хочет истратить как можно меньше своих денег. Какой наименьшей длины асфальтовое покрытие улиц может сделать мэр?

2.8 Двудольные графы

90. Является ли двудольным графом: простая цепь?, дерево?, полный граф?

91. Докажите, что дерево является двудольным графом. Какие деревья являются полными двудольными графами.

92. В теннисном турнире каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных». Число игроков в командах одинаково и не более восьми. «Синие» выиграли в четыре раза больше встреч, чем «красные». Сколько человек в каждой из команд?

93. Школьники на кружке решали 16 задачи. Каждый из 16 школьников решил по четыре задачи, и каждая задача была решена четырьмя школьниками. Доказать, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый рассказал одну решенную им задачу и чтобы все задачи были разобраны.

94. Строительному управлению для выполнения работы требуются каменщик плотник, водопроводчик и слесарь. На эти должности имеются пять претендентов: один может работать каменщиком, другой – плотником, третий – каменщиком и водопроводчиком и еще двое имеют по две специальности – водопроводчика и слесаря. Можно ли охватить весь фронт работ (используя четверых рабочих)? Если да, то подробно проверьте выполнение условия теоремы Холла.

95. Десять кандидатов готовятся к двум космическим экспедициям на Марс. Поскольку экспедиции будут продолжаться несколько лет, а их участники окажутся в замкнутом пространстве небольшого объема, то большое значение приобретает психологическая совместимость членов экипажа. Путем тестирования установлены пары кандидатов, присутствие которых в одной и той же экспедиции было бы нежелательным. Результаты тестирования отражены в таблице. (Если на пересечении I строки j столбца находится знак «+», то участие I и j кандидатов в одной экспедиции нежелательно.) Разделите кандидатов на две группы для участия в экспедициях.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+	+	+						
2	+				+					
3	+						+			
4	+					+				
5		+						+		
6				+						+
7			+					+		+
8					+		+		+	
9								+		+
10						+	+		+	

96. В школе 4 кружка: домоводство, математический кружек, компьютеный клуб и кружек английского языка. Пять человек из класса посещают эти кружки, причем один и тот же ученик может являться членом нескольких кружков. Можно ли выбрать старосту в каждом кружке так, чтобы ни один человек не был старостой сразу в двух кружках, в следующих случаях:

1. Кружок домоводства посещают 1, 3 и 4 ученики, математический кружок – 1, 4 и 5, компьютерный клуб – 2, 3 и 5, кружок английского языка – 2, 4 и 5.

2. Кружок домоводства посещают 1 и 3 ученики, математический кружок – 2 и 3, компьютерный клуб – 2 и 1, кружок английского языка – 3.

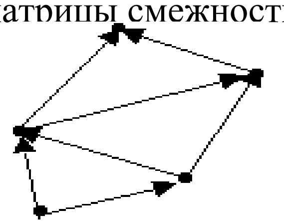
3. Кружок домоводства посещают 1, 3 и 4 ученики, математический кружок – 2 и 5, компьютерный клуб – 2 и 5, кружок английского языка – 2.

2.9 Ориентированные графы и мультиграфы

97. В некотором государстве каждый город соединен с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение, так чтобы, выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

98. Докажите, что на ребрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

99. Изобразите матрицы смежности и инциденций ориентированного графа:



100. Дана матрица смежности. Изобразить граф, ей соответствующий.

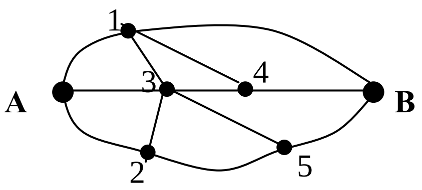
а)

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	1	1	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	1
3	1	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	1	0	1	0
7	0	1	0	0	1	0	0

б)

	1	2	3	4	5
1	1	2	0	0	1
2	0	0	3	0	0
3	0	0	2	1	0
4	1	0	1	0	1
5	1	0	0	0	0

101. Из города А в город В ведут несколько дорог (карта дорог на рисунке). Найдите число маршрутов из А в В, учитывая, что при движении необходимо всегда приближаться к В.



102. Может ли в ориентированном графе полустепень захода каждой вершины быть равна 3, а полустепень исхода – 4?

103. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

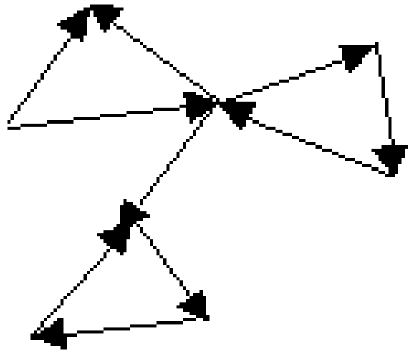
104. В некотором государстве 101 город. а) Каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением, причем в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из любого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам; б) Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причем в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трем дорогам

105. В стране Ориентация на всех дорогах введено одностороннее движение, причем из любого города в любой другой можно добраться, проехав не более чем по двум дорогам. Одну дорогу закрыли на ремонт так, что из каждого города по-прежнему можно добраться до каждого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать, проехав не более, чем по трем дорогам.

106. Найдите компоненты сильной связности графа, заданного матрицей смежности:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	1	0

107. Найдите компоненты сильной связности графа:



108. Дана матрица смежности графа, определить, является ли он эйлеровым. Ответ обоснуйте.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	1	0
5	1	0	0	1	0	0	0
6	1	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	1	0

109. На ребрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны. Докажите, что двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой.

110. По заданной матрице весов графа G найти величину минимального пути и сам путь от вершины 1 до вершины 6 по алгоритму Дейкстры, а затем величину максимального пути и сам путь между теми же вершинами:

	1	2	3	4	5	6
1	-	5	10	13	∞	∞
	∞	-	8	9	13	∞
3	∞	∞	-	5	3	6
4	∞	∞	∞	-	8	10
5	∞	∞	∞	∞	-	9
6	∞	∞	∞	∞	∞	-

	1	2	3	4	5	6
1	-	5	8	7	18	∞
2	∞	-	11	∞	∞	∞
3	∞	∞	-	∞	∞	17
4	∞	10	12	-	6	∞
5	∞	7	8	∞	-	11
6	∞	∞	∞	∞	∞	-

	1	2	3	4	5	6
1	-	6	8	11	10	∞
2	∞	-	∞	9	7	15
3	∞	8	-	7	14	11
4	∞	∞	∞	-	6	7
5	∞	∞	∞	∞	-	9
6	∞	∞	∞	∞	∞	-

111. В связном неориентированном графе степени всех вершин четны. Докажите, что на ребрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы выполнялись следующие условия: а) двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой; б) для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны.

112. На плоскости отмечено некоторое конечное число точек. Некоторые пары точек являются началами и концами векторов, причем число векторов, выходящих из любой точки равно числу входящих в неё. Найдите сумму векторов.

113. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.

114. Несколько команд сыграли между собой круговой турнир по волейболу. Будем говорить, что команда А сильнее команды В, если либо А выиграла у В, либо существует команда С такая, что А выиграла у С, а С - у В. а) Докажите, что есть команда, которая сильнее всех. б) Докажите, что команда, выигравшая турнир, сильнее всех.

115. В одном государстве 100 городов, и каждый соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

2.10 Плоские графы

116. Проверить формулу Эйлера для графов W_6 и $K_{2\,n}$.

117. Для шахматной доски размером К х К найдите числа p, q, r и убедитесь в справедливости теоремы Эйлера.

118. Обобщите формулу Эйлера для несвязных графов.

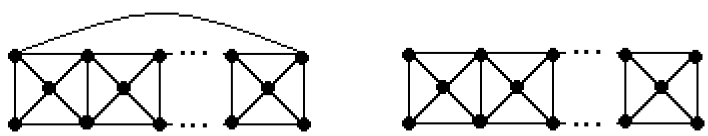
119. В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

120. Мэрия решила построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, универсам. Сколько будет построено универсамов?

121. Какие из графов являются планарными:

122. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

123. При каких n графы порядка 2n являются планарными?



124. Печатная плата представляет собой пластинку из изолирующего материала, в специально изготовленные гнезда, которой устанавливают электронные приборы. В качестве проводников, соединяющих эти приборы, служат напыленные металлические дорожки. Поскольку проводники не изолируются, то дорожки не должны пересекаться. Если это может произойти, то одну из дорожек переносят на другую сторону платы. Конструктор Иванов придумал схему печатной платы, которая состоит из 12 приборов и 32 проводников, соединяющих их. Можно ли изготовить такую плату так, что все проводники будут расположены на одной её стороне?

125. Докажите, что для плоского связного графа справедливо неравенство q<=3p-6

126. Докажите, что граф, имеющий 5 вершин, каждая из которых соединена ребром с любой другой, не является плоским.

127. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

128. Докажите, что для любого плоского графа (в том числе и несвязного) справедливо неравенство q<=3p-6.

129. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, - не плоский.

130. В графе степень любой вершины не меньше шести. Доказать, что его нельзя нарисовать на плоскости, так чтобы никакие два ребра его не пересекались.

131. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо «красный'», либо «синий» граф не является плоским.

132. Покажите, что граф W_6 стягиваем к графу K_4.

133. Докажите, что граф Петерсона не является планарным.

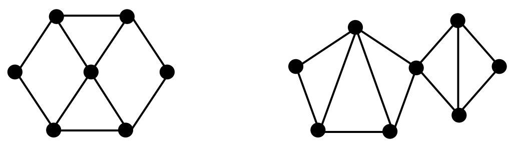
134. Инженер Иванов усовершенствовал свою плату. Теперь она имеет 9 приборов и 17 проводников. Схема платы представлена на рисунке. Можно ли изготовить такую плату так, что все проводники будут расположены на одной её стороне?

Стереографическая проекция

135. Докажите, что число вершин (p), ребер (q) и граней (r) любого выпуклого многогранника связано формулой p–q+r=2.

2.11 Двойственные графы

136. Найдите двойственные графы для следующих графов:



137. Плоский граф G имеет 7 вершин, 10 ребер и 5 граней. Сколько вершин, ребер и граней имеет двойственный к нему граф.

138. Докажите, что у выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом ребер.

139. Докажите, что не существует выпуклого многогранника, у которого все грани шестиугольники.

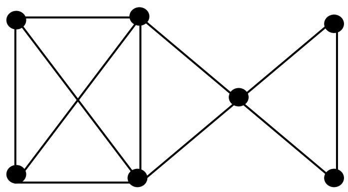
140. Может ли существовать плоский граф с пятью гранями, в котором каждая пара граней является смежными?

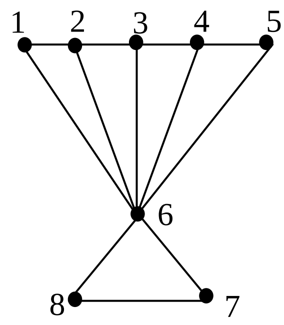
2.12 Раскраски графа

141. Найдите хроматические числа для:

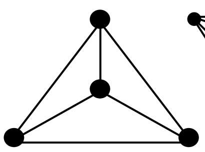
- полного графа с n вершинами;
- двудольного графа, доли которого имеют n и m вершин;
- дерева с n вершинами.

142. Для графов, изображенных на рисунке, найдите хроматические числа и какую-либо правильную раскраску.

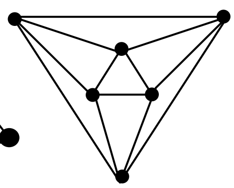




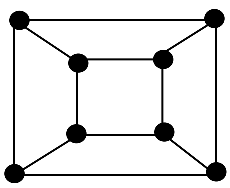
143. Определите хроматические числа для графов платоновых тел:



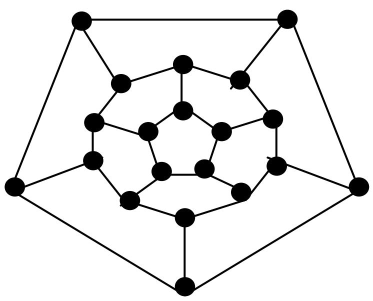
тетраэдр



октаэдр



куб



додекаэдр

144. Образовавшийся коммерческий университет арендует здание для проведения занятий. В четверг проводится 7 лекций: право, английский язык, французский язык, экономика, менеджмент, маркетинг, этикет. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно. В таблице крестиком помечены лекции, которые не могут читаться одновременно. Определите минимальное время, за которое могут быть прочитаны лекции в четверг.

	П	А	Ф	Э	М	М	Э
Право		+		+			+
Англ. яз.	+		+		+	+	
Фран. яз.		+			+	+	+
Экономика	+				+	+	
Менеджмент		+	+	+		+	
Маркетинг		+	+	+	+		
Этикет	+		+				

Тесты по теме «Теория конечных графов»

1. Следующее утверждение справедливо:«Если вершина графа имеет степень равную 0, то она называется »

а) стоком; б) истоком ; в) корневой; г) висячей; д) изолированной.

2. К унарным операциям над графом можно отнести следующие …

а) объединение; б) добавление вершины; в) произведение; г) дополнение; д) удаление ребра.

3. К бинарным операциям над графами можно отнести следующие …

а) объединение; б) добавление вершины; в) произведение; г) дополнение; д) соединение.

4. Если матрица смежности симметричная относительно главной диагонали, то граф: а) неориентированный; б) ориентированный.

5. Если граф является деревом, то количество компонент равно

а) 4; б) 2; в) 1; г) 0; д) 3.

6. Если граф является полным, то количество компонент равно

а) 4; б) 2;в) 1;г) 0; д) 3.

7. n -куб имеет … вершин: а) n; б) 2n; в) 2^n; г) n^2; д) n!.

8. n-куб имеет … ребер: а) $n \cdot 2^n$; б) 2n; в) 2^n; г) n^2; д) $n \cdot 2^{n-1}$.

9. Полный граф K_2 имеет …ребер: а) 8; б) 2; в) 4; г) 1; д) 0.

10. Полный граф K_3 имеет …вершин: а) 3; б) 2; в) 4; г) 1; д) 0.

11. Орграф с матрицей смежности $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеет … дуг.

а) 4; б) 6; в) 8; г) 10; д) 12.

12. Орграф с матрицей смежности $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеет … вершин.

а) 4; б) 6; в) 8; г) 10; д) 12.

13. В орграфе с матрицей смежности $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ вершина вторая имеет

а) 2 полустепени исхода и 1 полустепень захода

б) 2 полустепени исхода и 2 полустепень захода

в) 1 полустепени исхода и 2 полустепень захода

г) 2 полустепени исхода и 3 полустепень захода

д) 1 полустепени исхода и 1 полустепень захода

14. Граф с матрицей смежности $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, имеет степень первой вершины равной: а) 3; б) 2; в) 1; г) 6 ; д) 0.

15. Если графы G_1 и G_2 имеют 6 и 8 вершин соответственно, то произведение этих графов $G_1 \times G_2$ имеет … вершин (-ы).

а) 6; б) 8; в) 14; г) 48; д) 24.

16. Граф заданный матрицей смежности $A_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеет ….петель(и): а) 1; б) 2; в) 3;г) 4; д) 0.

17. Если матрица инцидентности графа имеет вид $B_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, то можно утверждать, что: а) он ориентированный; б) он имеет две висячие вершины; в) он имеет 4 вершины и 4 дуги; г) он имеет 3 вершины и 4 дуги; д) он не содержит петель, но имеет кратные дуги.

18. Если матрица инцидентности графа имеет вид $B_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, то можно утверждать, что граф имеет …петель :а) 7; б) 5 в) 3; г) 4; д) 1.

19. Сумма элементов столбца матрицы смежности неориентированного графа характеризует….

а) полустепень исхода вершины; б) полустепень захода вершины; в) степень вершины; г) количество инцидентных ребер вершины; д) минимальную длину замкнутого маршрута для вершины.

20. Вычислительная сложность задачи о коммивояжере оценивается как …

а) O(n!); б) O(n) в) $O(n^n)$; г) $O(\sqrt{n})$;д) O(log n).

21. Поиск минимального пути в произвольном графе осуществляется с помощью алгоритма: а) фронта волны; б) Крафта-Макмиллана; в) Форда-Фалкерсона; г) Форда-Беллмана; д) Гамильтона-Кэли

22. Поиск максимального потока, который равен минимальной пропускной способности разреза осуществляется с помощью алгоритма: а) фронта волны; б) Крафта-Макмиллана; в) Форда-Фалкерсона; г) Форда-Беллмана; д) Гамильтона-Кэли

23. Количество остовных деревья графа с матрицей смежности

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а) 3;б) 4;в) 8;г) 2.

24. Эйлеров цикл в графе содержит

а) каждую вершину ровно один раз; б) каждое ребро ровно один раз.

25. Гамильтонов цикл в графе содержит

а) каждую вершину ровно один раз; б) каждое ребро ровно один раз

26. Для существования Гамильтонова цикла условие Дикара является:

а) необходимым; б) достаточным; в) необходимым и достаточным;

г) данного условия для Гамильтонова цикла нет

27. Какие из графов $K_{3,3}, K_4, K_5$ являются планарными:а) K_5 ;б) K_4 ;в) $K_{3,3}$

28. Пропускной способностью или величиной разреза $R(A/B)$ называется величина равная:

а) $C(A/B) = C(R^+) - C(R^-) = \sum\limits_{v_i \in A,\, v_j \in B} c(v_i; v_j) - \sum\limits_{v_i \in B,\, v_j \in A} c(v_i; v_j)$.

б) $F(A/B) = F(R^+) - F(R^-) = \sum\limits_{v_i \in A,\, v_j \in B} f(v_i; v_j) - \sum\limits_{v_i \in B,\, v_j \in A} f(v_i; v_j)$.

29. Потоком через разрез $R(A/B)$ называется величина, которая определяется следующей формулой:

а) $C(A/B) = C(R^+) - C(R^-) = \sum\limits_{v_i \in A,\, v_j \in B} c(v_i; v_j) - \sum\limits_{v_i \in B,\, v_j \in A} c(v_i; v_j)$.

б) $F(A/B) = F(R^+) - F(R^-) = \sum\limits_{v_i \in A,\, v_j \in B} f(v_i; v_j) - \sum\limits_{v_i \in B,\, v_j \in A} f(v_i; v_j)$.

30. Количество фундаментальных циклов в связном графе K_4 равно

а) 1;б) 2;в) 4 ;г) 3.

31. Количество фундаментальных разрезов в связном графе K_5 равно

а) 6; б) 2; в) 4 ; г) 3.

Список использованных источников

1 Березина, Л. Ю. Графы и их применение: популярная книга для школьников и преподавателей / Л. Ю. Березина. – 2-е изд. испр. и доп. – Москва: ЛИБРОКОМ, 2009. – 146 с.

2 Гаврилов, Г. П. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики: учебное пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – М.: Физматлит, 2003.

3 Галушкина, Ю.И. Конспект лекций по дискретной математике /Ю.И. Галушкина. – М.: Айрис-пресс, 2007.

4 Гладких, О.Б. Основные понятия теории графов: учебное пособие / О.Б Гладких, О. Н. Белых. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2008. –175 с.

5 Горбатов, В. А. Дискретная математика / В. А. Горбатов. – М.: ООО «Издательство АСТ»: ООО «Издательство Астрель», 2003.

6 Молчанов, В. А. Дискретная математика: учебное пособие / В.А. Молчанов. – Саратов, 2013. – 132 с.

7 Редькин, Н. П. Дискретная математика: Курс лекций для студентов-механиков: Учебник для вузов / Н. П. Редькин. – СПб.: Лань, 2003.

8 Судоплатов, С. В. Дискретная математика / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.

9 Уилсон, Р. Дж. Введение в теорию графов / Р. Дж. Уилсон. – М., 1977.

10 Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М.: Высш. шк., 2002.