Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Оренбург
2018

УДК 378.016:519.1(076.5)
ББК 22.176 я 7+74.48 я 7
Л 12

Рецензент - кандидат физико-математических наук, доцент С.А.Герасименко
Авторы: О.А. Пихтилькова, Т.М. Отрыванкина, Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

Л 12 Лабораторные работы по дискретной математике**:** методические указания / О. А. Пихтилькова, Т. М. Отрыванкина, Л. Б. Усова, Д. У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 57 с.

В методических указаниях содержатся лабораторные работы к дисциплине «Дискретная математика» по темам: «Теория множеств. Основные операции над множествами», «Отношения. Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений», «Комбинаторика. Комбинаторные схемы. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона», «Булевы функции. Вектор значения булевой функции. СДНФ. СКНФ. Полином Жегалкина».

Методические указания предназначены для обучающихся по направлениям подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии.

УДК 378.016:519.1(076.5)
ББК 22.176 я 7+74.48 я 7

Содержание

Раздел 1. Элементы теории множеств

Теоретические сведения к лабораторным работам №1-№6.

Определение. Множество - это совокупность объектов любой природы.

Пример. Множество всех станций метро, множество всех букв алфавита, множество всех чисел, множество всех книг, которые когда-то были написаны и т.д.

Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, F, и т.д. Множество может быть задано тремя способами: перечислением своих элементов, характеристическим свойством и порождаемой процедурой. Для удобства рассмотрений вводится одно специальное множество, называемое пустым и обозначаемое символом $\varnothing$. Оно не содержит ни одного элемента.

Между двумя множествами A и B может выполняться *отношение включения* $\subseteq$: $A\subseteq B$ тогда и только тогда, когда каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B, т.е. является истинной следующая импликация: $(x\in A)\Rightarrow(x\in B)$, а множество A называется *подмножеством* множества B. Множества считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. одновременно $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$. В этом случае является истинной следующая равносильность $(x\in A)\Leftrightarrow(x\in B)$. Наряду со знаком включения “$\subseteq$” используется также знак “$\subset$” *строгого включения*, который означает “включено, но не совпадает”. Если $A\subset B$, то множество A называется собственным подмножеством множества B. Пусть, например, A={1,2,3}, B={1,3}, C={4,5,6}, D={3,2,1}. Тогда $B\subseteq A$, причем, также и $B\subset A$. Утверждение, что $C\subseteq A$ является неверным. Выполняется отношение $D\subseteq A$, но отношение $D\subset A$ уже не выполняется. *Множество всех подмножеств* множества X имеет специальное обозначение: **P(X)** и называется *булеаном множества* X, в связи с чем используется также обозначение 2^X. Например, если X={1,2,3}, то $P(X)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. Важнейшей характеристикой множества является его *мощность*, т.е. количество элементов в нем. Мощность множества X обозначается: как **|X|** или как **card(X)**. Например, для множества A из предыдущего примера имеем |A|=4, что также можно записать в виде card(A)=4, для множества B имеем |B|=2. Интересным является тот факт, что для любого множества A выполняется равенство: $|P(A)|=2^{|A|}$. Например, для множества A={1,2,3}, для которого $|A|=3$, множество P(A) уже было выписано нами ранее и легко видеть, что $|P(A)|=8=2^{3}$. Мощность пустого множества равна 0: $|\varnothing|=0$. Если $B\subseteq A$, то $|B| \le |A|$, если же включение строгое: $B\subset A$, то и неравенство строгое $|B|<|A|$. Над множествами выполняются различные операции: *объединение, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность.*

Определение. Пусть даны два множества A и B.

Объединение множеств: $\mathbf{A\cup B}=\{x: x\in A$ или $x\in B\}$,

Пересечение множеств: $\mathbf{A\cap B}=\{x: x\in A$ и $x\in B\}$,

Разность множеств: $\mathbf{A\backslash B}=\{x: x\in A$ и $x\notin B\}$,

Симметрическая разность множеств: $\mathbf{A\Delta B}=\{x:((x\in A)$ и $(x\notin B))$ или $:((x\notin A)$ и $(x\in B))\}$.

Таким образом, объединение включает все элементы обоих множеств, пересечение - элементы, которые входят в оба множества одновременно, разность - элементы, входящие в первое множество и не входящие во второе, симметрическая разность- элементы, которые не входят одновременно в оба множества.

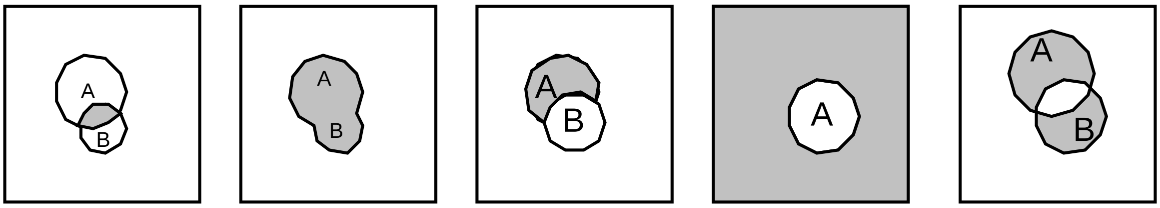
Пример. Пусть A={1,2,3,4}, B={3,4,5}. Тогда, согласно определениям имеем: $\mathbf{A\cup B}=\{1,2,3,4,5\}$, $\mathbf{A\cap B}=\{3,4\}$, $\mathbf{A\backslash B}=\{1,2\}$, $\mathbf{A\Delta B}=\{1,2,5\}$.

Чтобы определить четвертую важную операцию, *дополнение* нужно использовать понятие «*универсального множества*»**,** т.е. такого множества, которое содержит элементы всех множеств рассматриваемой задачи. Универсальное множество обозначается буквой U.

Определение. *Дополнение*м множества A называется такое множество $\mathbf{A^d}$, которое состоит из всех элементов, т.е. элементов универсального множества, не входящих в A. Таким образом, имеем: $\mathbf{A^d}=E\backslash A=\{x: x\in U$ и $x\notin A\}$. Пусть, например, изучается задача о свойствах натуральных чисел в пределах от 1 до 10. Т.е. универсум в данной задаче имеет вид U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. Рассмотрим множество A={2,9,10}. Тогда A^d={1,3,4,5,6,7,8}.

Операции над множествами становятся абсолютно понятными, если использовать *диаграммы Эйлера Венна*. При этом универсуму U соответствует геометрический квадрат, а различные его подмножества изображаются в виде различных фигур в квадрате. Операции над множествами изображаются следующим образом:

$A \cap B$ $A \cup B$ $A \setminus B$ A^d $A \Delta B$



Свойства операций над множествами

1) *Законы коммутативности* объединения и пересечения:

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

2) *Закон ассоциативности* объединения и пересечения:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3) *Дистрибутивность* объединения относительно пересечения и дистрибутивность пересечения относительно объединения:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4) *Свойства нуля и единицы* в алгебре множеств:

$A \cup \varnothing = A$; $A \cap U = A$; $A \cup U = U$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

5) *Свойство дополнения* множества A, $A^d = \overline{A}$ в универсуме:

$A \cup A^d = U$; $A \cap A^d = \varnothing$.

6) *Дополнения нуля и единицы*: $\varnothing^d = U$; $U^d = \varnothing$.

7) *Законы идемпотентности* объединения и пересечения:

$A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

8) *Законы поглощения*, $A \cup B$ поглощает A, A поглощает $A \cap B$:

$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.

9) *Законы де Моргана*: $(A \cup B)^d = A^d \cap B^d$; $(A \cap B)^d = A^d \cup B^d$.

10) *Логическое определение операции дополнения*,

если $A \cup B = U$ и $A \cap B = \varnothing$ то $A = B^d$.

11) *Выражение операции дополнения через операцию разности множеств:* $A^d = U \setminus A$.

12) *Закон двойного дополнения:* $(A^d)^d = A$.

13) *Выражение операции разности множеств через операцию дополнения:* $A \setminus B = A \cap B^d$.

14) *Выражение операции симметрической разности через операции пересечения, объединения и дополнения:* $A \Delta B = (A \cap B^d) \cup (A^d \cap B)$.

15) *Коммутативность симметрической разности:* $A \Delta B = B \Delta A$.

16) *Ассоциативность симметрической разности:* $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

17) *Пустое множество является нулем относительно операции симметрической разности:* $A \Delta \varnothing = A$.

18) *Логическое определения отношения включения:*
$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B^d = \varnothing)$.

Представление множеств в ЭВМ

Рассмотрим конечный универсум U, число элементов, в котором не превосходит разрядности ЭВМ. $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, u_n\}$

Подмножество A универсума можно задать машинным кодом (битовой шкалой) $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ по следующему правилу: $a_i = \begin{cases} 1, \text{если } u_i \in A, \\ 0, \text{если } u_i \notin A. \end{cases}$

Пример.

Если $U = \{1,2,3,4\}$, то набору 1001 соответствует множество $A = \{1,4\}$, набору 0110 – $B = \{2,3\}$, набор 1101 кодирует $C = \{1,2,4\}$, а 0010 – $D = \{3\}$.

Определение. *Прямым (декартовым) произведением* множеств A и B называется множество $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$. В общем случае $A \times B \neq B \times A$. Т.е. операция декартова умножения *не коммутативна*.

Пример.

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$; $A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$,

$B\times A=\{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$.

2) $A=[0, 1]$, $B=[-2, 0]$; $A\times B=[0, 1]\times[-2, 0]=\{(x, y) \mid 0\le x\le 1, -2\le y\le 0\}$.

Декартово произведение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначается $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ или $\prod_{i=1}^{n} A_i$ и состоит из всех кортежей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i\in A_i$, $i=1, \ldots, n$.

Если $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, то $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = A^n$. При $n=0$ полагают $A^0=\varnothing$.

Определение. *n-местным (n-арным) отношением* между множествами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется подмножество прямого произведения этих множеств.

Определение. *Бинарным отношением* между множествами A и B называется подмножество декартова произведения $A\times B$: Обозначается $P\subseteq A\times B$.

Таким образом, бинарное отношение – это множество упорядоченных пар. Если пара (x, y) связана отношением P, то пишут $(x, y)\in P$ или xPy.

Пример.

1) Рассмотрим $\mathbf{Z}_+$ – множество положительных целых чисел. Сформируем из его элементов упорядоченные пары. Пусть P – отношение делимости, а именно, $xPy \Leftrightarrow x \mid y$ («x делит y»). Тогда $(2, 6)\in P$, а $(4, 7)\notin P$.

2) Пусть ρ – отношение "меньше, чем", т.е. $(x, y)\in P \Leftrightarrow$ (для некоторого положительного z $x+z = y$). *Что вы скажете о парах (8, 19) и (7, 3)?* Это отношение имеет специальное обозначение $<$, и вместо xPy мы пишем $x<y$.

Бинарные отношения удобно изображать графически. Один из вариантов: элементы множеств A, B изображаются на взаимно перпендикулярных прямых. Тогда элементы бинарного отношения изобразятся точками с координатами (x,y), где $x\in A$, $y\in B$, xPy. Второй способ состоит в изображении множеств некоторой очерченной областью (обычно овалом) и соединении точек-элементов, связанных отношением P, линиями со стрелками, направленными от первого элемента пары (x,y) ко второму.

Пример.

$P\subseteq A\times B$, $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$, $P=\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,3),(c,1), (c,4)\}$.

Определение. *Областью определения* бинарного отношения P называется множество $D_P=\{x\in A \mid xPy$ для некоторого $y\in B\}$.

Определение. *Областью значений* бинарного отношения P называется множество $E_P=\{y\in B \mid xPy$ для некоторого $x\in A\}$.

Пример. **(**см. выше**)** $D_P=\{a, b, c\}$, $E_P=\{1, 2, 3, 4\}$.

Определение. *Обратным* к P бинарным отношением называется множество $P^{-1}=\{(y, x) \mid (x, y)\in P\}$.

Пример. **(**см. выше**)** $P^{-1}=\{(1,a), (2,a), (2,b), (3,b), (1,c), (4,c)\}$.

Определение. *Композицией (произведением)* бинарных отношений $P_1\subseteq A\times B$, $P_2\subseteq B\times C$ называется множество $P_1\circ P_2=\{(x, y) \mid x\in A, y\in C$, и найдется такой элемент $z\in B$, что $(x, z)\in P_1$, $(z, y)\in P_2\}$.

Пример. $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C=\{к, л, м, н, о, п, р\}$.

$P\subseteq A\times B$, $P=\{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 4)\}$.

$Q\subseteq B\times C$, $Q=\{(1,к), (3, н), (4, о), (4, п), (5, о)\}$.

$P\circ Q=\{(a, k), (b, н), (c, к), (c, о), (c, п)\}$.

Пусть $P\subseteq A\times B$, $|A|=m$, $|B|=n$.

Определение. *Матрицей бинарного отношения* P называется матрица $[P]$ размера $m\times n$, в которой $p_{ij}=\begin{cases}1, \text{если } (a_i, b_j)\in P,\\ 0, \text{в противном случае}, i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.\end{cases}$

Пример. $P\subseteq A\times B$, $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P=\{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 4)\}$.

$$[P]=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Аналогично описанию обычных множеств двоичными наборами мы указали способ описания бинарных отношений двоичными матрицами. Переход от теоретико-множественного задания отношения к матрице однозначен, как и восстановление по матрице состава бинарного отношения.

Итак, битовая шкала – код множества в конечном универсуме, то матрица – код бинарного отношения между конечными множествами.

Мы рассмотрели, как операции над двоичными наборами описывают операции над обычными множествами. Необходимо описать на языке матриц и операции над бинарными отношениями.

Пусть P, $Q \subseteq A\times B$, и заданы (или получены) их матрицы $[P]$, $[Q]$. Тогда:

1 $[P'] = \mathbf{1} - [P]$, где $\mathbf{1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

2 $[P^{-1}] = [P]^T$.

3 $[P\cap Q] = [P] * [Q]$, где $*$ – поэлементное умножение матриц.

4 $[P\cup Q] = [P] + [Q]$, где + – логическое сложение, т.е. 1+1=1.

5 $[P\circ Q] = [P] \cdot [Q]$, где обычное умножение матриц выполняется по правилам логических операций.

Пусть $P\subseteq A^2$.

Определение. P называется *рефлексивным*, если для любого $x\in A$ $(x,x)\in P$.

Определение. P называется *симметричным*, если для любых $x,y\in A$

$(x,y)\in P \Rightarrow (y,x)\in P$.

Определение. P называется *антисимметричным*, если для любых $x,y\in A$ условие $[(x,y)\in P$ и $(y,x)\in P]$ влечет $x=y$.

Определение. P называется *транзитивным*, если для любых $x,y,z\in A$ условие

$[(x,y)\in P$ и $(y,z)\in P]$ влечет $(x,z)\in P$.

Пример.

1 A – множество прямых на плоскости. P – отношение параллельности на множестве, т.е. $(x,y)\in P$ означает $x\|y$. *Какими из указанных свойств обладает P?*

2 A–множество прямых на плоскости. Q–отношение перпендикулярности на множестве, т.е. $(x,y)\in Q$ означает $x\perp y$. *Какими из указанных свойств обладает Q?*

3 $A=\mathbf{Z}$,$\rho=\{(x, y)|x,y\in \mathbf{Z}$ и $x|y\}$. *Какими из указанных свойств обладает* ρ*?*

4 A – множество треугольников на плоскости, P – отношение подобия треугольников, т.е. $(x,y) \in P$ означает «треугольник x подобен треугольнику y». *Какими свойствами обладает* P*?*

5 $A=P(U)$, где U–некоторый универсум. Q–отношение «быть подмножеством» на элементах булеана $P(U)$. *Какими свойствами обладает* Q*?*

Отношение $P \subseteq A^2$ называется *тождественным*, если $P=\{(x,x) | x \in A\}$. Обозначается id_A.

Отношение $P \subseteq A^2$ называется *полным*, если $P=A^2$.

Какая матрица является матрицей тождественного отношения? полного?

Сформулированные выше определения можно было дать иначе.

Определение. P называется *рефлексивным*, если $id_A \subseteq P$.

Определение. P называется *симметричным*, если $P=P^{-1}$.

Определение. P называется *антисимметричным*, если $P \cap P^{-1} \subseteq id_A$.

Определение. P называется *транзитивным*, если $P \circ P \subseteq P$.

Пример.

Бинарные отношения δ, τ, ρ на универсуме $U=\{1,2,a,b\}$ даны следующим образом: бинарное отношение δ дано своей матрицей, например, $M(\delta)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, а бинарные отношения τ, ρ заданы перечислением своих кортежей например, следующим образом. $\tau=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$, $\rho=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$.

Найти бинарные отношения – результаты следующих операций

1) $\beta_1=\delta \cap \tau$; 2) $\beta_2=\delta \setminus \tau$; 3) $\beta_3=(\delta \cap \tau) \oplus \rho$;

4) $\beta_4=\tau^{-1}$; 5) $\beta_5=\tau \circ \rho$;

Решение. Выполним указанные операции используя матричное представление отношений. Сначала сформируем матрицы отношений τ, ρ.

Имеем: $M(\tau)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $M(\rho)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

1)Имеем:

$$M(\beta_1)=M(\delta\cap\tau)=M(\delta)\cap M(\tau)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cap\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0\cap0&1\cap1&0\cap0&1\cap1\\1\cap0&0\cap0&1\cap1&1\cap0\\0\cap0&1\cap0&0\cap0&0\cap0\\1\cap0&1\cap1&1\cap0&1\cap0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Итак, найдена матрица первого расчетного отношения: $M(\beta_1)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ Из матричного представления получаем кортежный состав отношения $\beta_1=\{\langle1,2\rangle,\langle1,4\rangle,\langle2,3\rangle,\langle4,2\rangle,\}$

Для выполнения второй операции имеем:

$$M(\beta_2)=M(\delta\setminus\tau)=M(\delta)\cap\overline{M(\tau)}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cap\overline{\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}}=$$

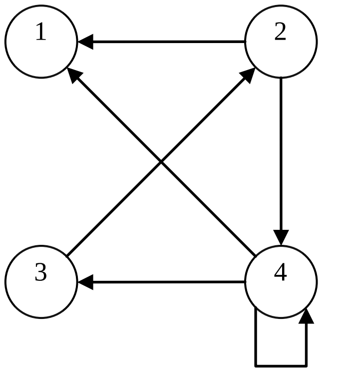
$$\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cap\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cap1&1\cap0&0\cap1&1\cap0\\1\cap1&0\cap1&1\cap0&1\cap1\\0\cap1&1\cap1&0\cap1&0\cap1\\1\cap1&1\cap0&1\cap1&1\cap1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

Таким образом, получен ответ относительно результата во втором задании:

$$M(\beta_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем кортежный состав отношения β_2: $\beta_2 = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$.



Также мы можем выразить состав отношения β_2 в виде ориентированного графа:

Аналогично выполняем расчет состава отношения β_3 третьего пункта. Имеем:

$$M(\beta_3) = M((\delta \cap \tau) \oplus \rho) = M(\delta \cap \tau) \oplus M(\rho) = (M(\delta) \wedge M(\tau)) \oplus M(\rho) =$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

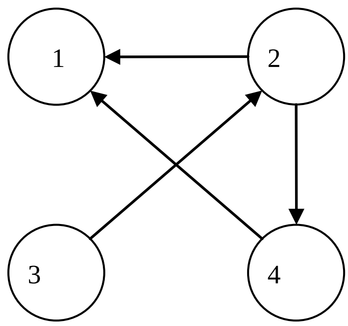
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\oplus 0 & 1\oplus 1 & 0\oplus 0 & 1\oplus 0 \\ 0\oplus 0 & 0\oplus 0 & 1\oplus 0 & 0\oplus 1 \\ 0\oplus 0 & 0\oplus 0 & 0\oplus 0 & 0\oplus 1 \\ 0\oplus 1 & 1\oplus 0 & 0\oplus 0 & 0\oplus 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, нашли, что $M(\beta_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$. Отсюда, далее, получаем: $\beta_3=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.

Выполним задание 4). Воспользуемся свойством матрицы транспонированного отношения: $M(\tau^{-1})=(M(\tau))^T$, т.е. для получения матрицы обратного отношения, к матрице данного отношения нужно применить операцию транспонирования. Имеем: $M(\tau^{-1})=(M(\tau))^T=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

При этом мы использовали определение операции транспонирования: $(M^T)_{i,j}=M_{j,i}$, которое на практике означает, что для получения транспонированной матрицы строки исходной матрицы записываются столбцами. Таким образом, мы получаем состав обратного отношения $\tau^{-1}=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$ и его граф: $G(\tau^{-1})=$



.

Для выполнения пятого задания используем свойство $M(\tau\circ\rho)=M(\rho)\cdot M(\tau)$, т.е. для получения матрицы композиции отношений нужно перемножить матрицы данных отношений. Умножение матриц выполняем по формуле $(M\cdot N)_{i,j}=sign\left(\sum_{k=1}^{n}M_{i,k}\cdot N_{k,j}\right)$, т.е. каждую строку первой матрицы умножаем на каждый столбец второй матрицы и применяем функцию $sign(t) = \begin{cases} 1, t \neq 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$.

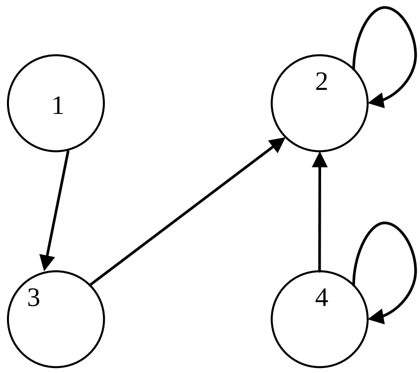
Получаем:

$$M(\tau \circ \rho) = M(\rho) \cdot M(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$sign\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

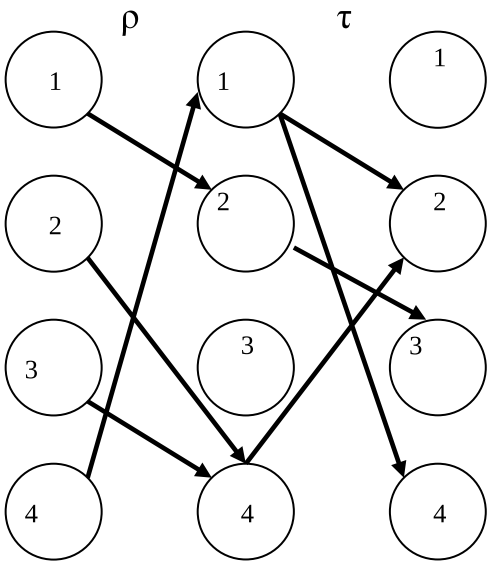
Получаем состав отношения $\rho \circ \tau$ его граф:

$$\tau \circ \rho = \{\langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$$

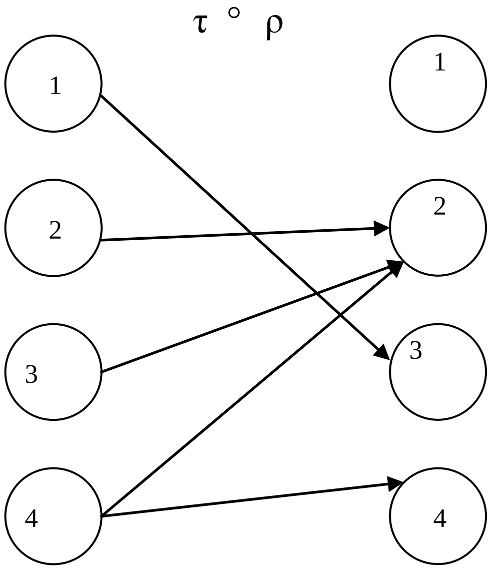


$$G(\tau \circ \rho) =$$

Этот ответ, т.е. вычисление композиции отношений, удобно получить также методом графов:



Рассматривая составной переход, сначала по стрелкам отношения ρ, а затем по стрелкам отношения



Задание.

Бинарные отношения δ, τ, ρ на универсуме $U = \{1, 2, a, b\}$ даны следующим образом: бинарное отношение δ дано своей матрицей, например, $M(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а бинарные отношения τ, ρ заданы перечислением своих кортежей например, следующим образом. $\tau = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$, $\rho = \{\langle 2,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$.

Найти бинарные отношения – результаты следующих операций

1) $\beta_1 = \delta \cap \tau$; 2) $\beta_2 = \delta \setminus \tau$; 3) $\beta_3 = (\delta \cap \tau) \oplus \rho$;

4) $\beta_4 = \tau^{-1}$; 5) $\beta_5 = \tau \circ \rho$;

Составить алгоритм и написать программу выполняющие данные операции над бинарными отношениями.

Определение. Отношение *P*, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называется *отношением эквивалентности*.

Пример.

1 Отношение равенства на числовом множестве.

2 Отношение подобия на множестве треугольников.

3 Отношение параллельности на множестве прямых.

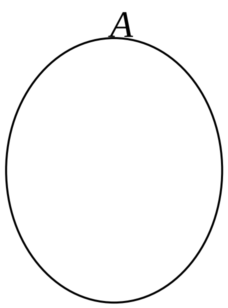
4 Отношение «быть одного роста» на множестве людей.

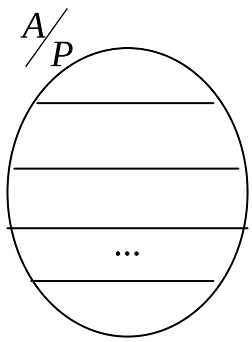
Понятие эквивалентности обобщает понятие равенства (тождества).

Пусть $P \subseteq A^2$ – отношение эквивалентности, $x \in A$.

Определение. *Классом эквивалентности* элемента *x* называется множество $[x]=\{y \in A \mid (x,y) \in P\}$.

Определение. Пусть *A* – некоторое множество и $P \subseteq A^2$ – отношение эквивалентности. *Фактор-множеством* множества *A* по отношению *P* называется множество всех классов эквивалентности, порожденных этим отношением. Обозначается A/P.





Пример. **(**Важная математическая конструкция**)**

Рассмотрим $\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел и фиксированное натуральное число n.

Зададим бинарное отношение P на $\boldsymbol{Z}$ условием: $(x,y)\in P \Leftrightarrow (x–y)\vdots n$.

P рефлексивно, т.к. для любого $x\in\boldsymbol{Z}$ $(x–x)\vdots n$.

P симметрично, т.к. для любых $x,y\in\boldsymbol{Z}$ $(x–y)\vdots n \Rightarrow (y–x)\vdots n$.

P транзитивно, т.к. для любых $x,y,z\in\boldsymbol{Z}$ $(x–y)\vdots n$ и $(y–z)\vdots n \Rightarrow (x–z)\vdots n$.

Значит, P – отношение эквивалентности на $\boldsymbol{Z}$.

Пусть $x\in\boldsymbol{Z}$. $[x]$=?

По определению $[x]=\{y\in\boldsymbol{Z} \mid (x–y)\vdots n\}=\{y\in\boldsymbol{Z} \mid x=y+kn,\ k\in\boldsymbol{Z}\}$.

По какому признаку неотличимы элементы одного класса?

Значит, получим:

$[0] = \{\dots, –3n, –2n, –n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$

$[1] = \{\dots, –3n+1, –2n+1, –n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \dots\}$

$[2] = \{\dots, –3n+2, –2n+2, –n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \dots\}$

$[3] = \{\dots, –3n+3, –2n+3, –n+3, 3, n+3, 2n+3, 3n+3, \dots\}$

…

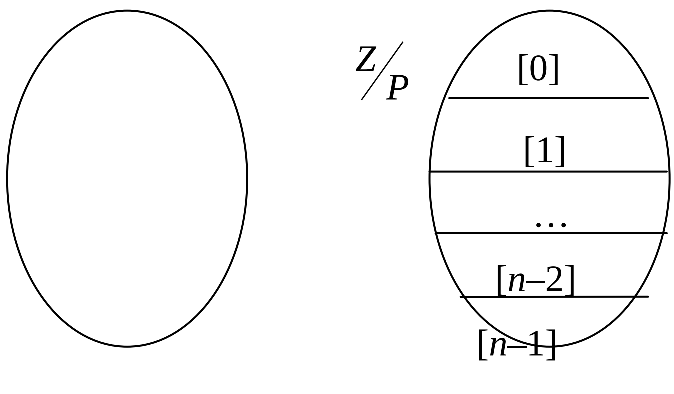
$[n–2] = \{\dots, –2n–2, –n–2, –2, n–2, 2n–2, 3n–2, 4n–2, \dots\}$

$[n–1] = \{\dots, –2n–1, –n–1, –1, n–1, 2n–1, 3n–1, 4n–1, \dots\}$

$[n]$ **= ?**

Таким образом, число классов эквивалентности и равно n.

$Z/P=\{[0], [1], [2], \dots, [n–2], [n–1]\}$.



Данное отношение P обычно обозначают $\equiv_n$, и про $(x,y)\in \equiv_n$ говорят, что «*x* и *y сравнимы по модулю n*».

Множество {0, 1, 2, …, *n*–2, *n*–1} называют приведенной системой вычетов по модулю *n* и обозначают $\boldsymbol{Z_n}$.

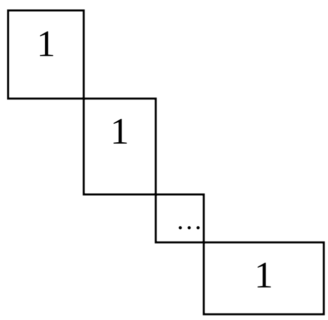
Пусть *P* – отношение эквивалентности на конечном множестве $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$. Элементы a_i, a_j эквивалентны по отношению *P* тогда и только тогда, когда *i*-ая и *j*-ая строки (а также столбцы) матрицы [*P*] совпадают. $[a_i]=\{a_j \mid p_{ij}=1\}$.

Перечислим элементы A в ином порядке:

$A=\{a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{m_1}^1, a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{m_2}^2, \ldots, a_1^k, a_2^k, \ldots, a_{m_k}^k\}$, где *k* – число классов эквивалентности, $m_1+m_2+\ldots+m_k=m$.

Тогда матрица [*P*] примет *блочно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Пример. *A*={1,2,3,4,5}

$A_1=\{1,3,4\}$, $A_2=\{2,5\}$; *P*={(1,1), (1,3), (1,4), (3,1), (3,3), (4,1),(4,3), (4,4), (2,2), (2,5), (5,5),(5,2)}

$$[P]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A={ 1, 3, 4, 2, 5}

$$[P]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание.

Отношение R на множестве $\boldsymbol{Z}$ определяется так: $xRy \Leftrightarrow 3|(x^2-y^2)$. Покажите, что R является отношением эквивалентности, и опишите классы эквивалентности.

Определение. Бинарное отношение $f \subseteq A \times B$ называется *функцией (отображением)* из A в B, если $D_f \subseteq A$, $E_f \subseteq B$ и $(x, y_1) \in$ f, $(x, y_2) \in$f влечет $y_1=y_2$.

Обозначение: f: $A \rightarrow B$. Если $(x, y) \in f$, то пишем $y=f(x)$.

Если $D_f \subset A$, то f называется *частично определенной* на A функцией, если $D_f = A$, то – *всюду определенной* на A.

Пример. Пусть $A=\{0, 2, 4, 6\}$ и $B=\{1, 3, 5, 7\}$.

Какие из отношений между множествами A и B, перечисленных ниже, являются функциями, определенными на A со значениями в B:

а) {(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)}; б) {(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)};

в) {(2, 1), (4, 5), (6, 3)}; г) {(6,1), (0, 3), (4,1), (0, 7), (2, 5)}?

Множество всех функций из A в B обозначается B^A.

Определение. Функция f: $A \rightarrow B$ называется *инъективной (взаимно однозначной)*, если для любых $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2) \in E_f$ $y_1=y_2$ влечет $x_1=x_2$.

Обозначается f: $A \xrightarrow{1-1} B$.

Определение. Функция f: $A \rightarrow B$ называется *сюръективной*, если $E_f=B$.

Сюръекцию еще называют отображением *на*. Обозначается f:$A \xrightarrow{на} B$.

Определение. Функция называется *биекцией*, если она инъективна и сюръективна. Обозначается f: $A \leftrightarrow B$.

Пример. (см. выше)

Какие из найденных функций инъективны, а какие сюръективны?

Пример. а) Рассмотрим функции f_i: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$:$f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=x\sin x$, $f_3(x)=2x-1$.

Первая из них инъективна и не сюръективна, вторая – сюръективна и не инъективна, а третья является биекцией.

Определение. Если функция f:$A \rightarrow B$ и $X \subseteq A$, то множество$\{f(x)|x \in X\}$

называется *образом* X при отображении f. Обозначается $f(X)$.

Определение. Функция f: $\boldsymbol{N} \rightarrow B$ называется *последовательностью*.

Ее элементы можно записать $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, …, $f(\mathrm{n})$, …, но обычно используют запись $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, где $b_n=f(n)$, или $\{b_n\}_{n\in \mathbf{N}}$.

Пример. 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; 2) $\{(-1)^n\}$; 3) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$.

Определение. *Преобразованием* множества A называется функция f: $A\to A$. Если она биективна, то называется *подстановкой* множества A.

Функция f: $A^n\to B$ называется *n-местной функцией* из A в B.

Функция f:$A^n\to A$ называется *n-местной алгебраической операцией на A*.

Принцип Дирихле.

Если f: $A\to B$ – всюду определенная функция, и $|A|>|B|$, то найдется значение функции, которое она примет, по крайней мере, дважды.

(Нельзя посадить 10 зайцев в девять клеток так, чтобы в каждой клетке сидел один заяц.)

Доказательство:

Пусть $|A|=n$, $|B|=m$.

Каждая функция указанного вида может быть задана вектором значений

$(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n))$. Предположим, что для каждой пары различных индексов i и j: $f(a_i)\neq f(a_j)$. Тогда множество B содержит, по крайней мере, n различных элементов, т.е. $m\geq n$, что противоречит условию.

Пример. В автобусе едет 15 людей. Покажите, что, по крайней мере, у двоих из них день рождения в одном и том же месяце.

Некоторые задачи могут быть решены только с помощью принципа Дирихле. Самым трудным является обнаружение подходящей функции.

Обобщенный принцип Дирихле:

Если f: $A\to B$ – всюду определенная функция, и $|A|>k|B|$, $k\in \mathbf{N}$, то найдется значение функции, которое она примет, по крайней мере, $k+1$ раз.

Задание. Известно, что в одном селе проживает 79 семей, в каждой из которых по два ребенка. Докажите, что, по крайней мере, у шестерых детей имена начинаются с одной и той же буквы.

Лабораторная работа №1

Задание.

Составить алгоритм, написать программу реализации основных операций над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение, симметрическая разность.

Дано универсальное множество U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, а также множества A и B(данные из таблицы). Данная программа должна определить и вывести следующие множества: $A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$, а также вывести битовые шкалы всех множеств. Индивидуальное задание по вариантам.

В-т	Даны множества:	Определить множества:
1	*A* = {1,4,5,7,8}; *B*={3,5,6,10}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$.
2	*A* = {1,2,6,8}; *B*={4,5,6,10}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$.
3	*A* = {1,5,6,8}; *B*={3,6,9,10}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$.
4	*A* = {1,2,6,7,8}; *B*={5,6,9, 10}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$.
5	*A* = {1,2,6,7,8}; *B*={3,4,5, 9}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$.
6	*A*={1,2,3,6,7}; *B*={4,5,6,9, 10}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$
7	*A* = {1,3,4,7,8}; *B*={3,4,5, 10}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$.
8	*A*={2,3,6,7,8}; *B*={3,4,5, 10}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$.
9	*A*={1,2,3,4,5,6,7,8}; *B*={5,6,9}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$.
10	*A*={1,4,5,7,8}; *B*={3,9,10}.	$A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, A^d, B^d, $A \oplus B$.

Лабораторная работа №2

Задание.

1Составить алгоритм и написать программу, определяющую булеан P(A) множества A.

Дано множество *A*(из таблицы). Данная программа должна вывести булеан P(A).

2 Составить алгоритм и написать программу выводящую декартово произведение.

Даны множества *A*, *B* и *C* (из таблицы). Данная программа должна определить, вывести следующие множества D_1, D_2 и *D* и матриц бинарного отношения *D*. Индивидуальное задание по вариантам.

Вариант	Даны множества:	Определить множества:
1	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = A\Delta B$; $D_2 = C \setminus (A\cup B)$; $D = D_2\times D_1$
2	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = A\cap B\cap C$, $D_2 = (A\cup B) \setminus C$, $D = D_1\times D_2$.
3	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = C \setminus B$; $D_2 = A\cap B$; $D = D_2\times D_1$.
4	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = A \setminus B$; $D_2 = B\cap C$; $D = D_1\times D_2$.
5	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = B \setminus C$; $D_2 = A\cap C$; $D = D_2\times D_1$.
6	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = A \setminus C$; $D_2 = (A\cup B\cup C) \setminus (A\cup B)$; $D = D_1\times D_1$.
7	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = B \setminus A$;$D_2 = (A\cap C) \setminus B$;$D = D_2\times D_1$.
8	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = C \setminus A$;$D_2 = (A\cap B) \setminus C$;$D = D_1\times D_1$.
9	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = A\Delta C$;$D_2 = (B\cap C) \setminus A$;$D = D_2\times D_1$.
10	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.	булеан P(A). $D_1 = B\Delta C$;$D_2 = A \setminus (B\cup C)$;$D = D_1\times D_2$.

Лабораторная работа №3

Задание.

Составить алгоритм и написать программу в которой задано универсальное множество U имеющее мощность n, множество A мощности m ($m\leq n$) и бинарное отношение $P\subseteq A^2$. Составить матрицу бинарного отношения и проверить выполнимость свойств: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, антитранзитивность.

Дан универсум U={1,2,3,4,5} и бинарное отношение P (из таблицы). Составить матрицу данного бинарного отношения и проверить выполнимость свойств:

рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, антитранзитивность. Индивидуальное задание по вариантам.

В-т	Бинарное отношение
1	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{1;3},{1;5},{2;3},{3;1},{3;2},{3;3},{4;4},{5;1},{5;5},{5;3},{5;4}}.
2	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{1;3},{1;5},{2;3},{3;1},{3;2},{3;3},{4;4},{5;1},{5;5}}
3	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{1;5},{3;3},{4;4},{5;1}}.
4	P={{1;2},{2;2},{2;1},{1;3},{1;5},{2;3},{3;1},{3;2},{3;3},{4;4},{5;1},{5;5}}.
5	P={{1;1},{2;2},{1;5},{2;3},{3;2},{3;3},{4;4},{5;1},{5;5}}.
6	P={{1;2},{2;1},{1;3},{1;5},{2;3},{3;1},{3;2},{5;1}}.
7	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{1;5},{3;3},{4;4},{5;1},{5;5}}.
8	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{1;3},{1;5},{2;3},{3;1},{3;2},{3;3},{4;5},{5;1},{3;5},{5;3},{5;4}}.
9	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{1;3},{5;5},{2;3},{3;1},{3;2},{3;3},{4;4}}.
10	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{1;3},{1;5},{2;3},{3;1},{3;2},{3;3},{4;4},{5;1},{5;5},{5;3},{5;4},{3;5},{4;5}}.

Лабораторная работа №4

Задание.

Бинарные отношения δ, τ, ρ на универсуме $U = \{1,2,3,4\}$ даны следующим образом: бинарное отношение δ дано своей матрицей, а бинарные отношения τ, ρ заданы перечислением своих кортежей.

Найти бинарные отношения – результаты следующих операций

1) $\beta_1 = \delta \cap \tau$; 2) $\beta_2 = \delta \setminus \tau$; 3) $\beta_3 = (\delta \cap \tau) \oplus \rho$;

4) $\beta_4 = \tau^{-1}$; 5) $\beta_5 = \tau \circ \rho$;

Составить алгоритм и написать программу выполняющие данные операции над бинарными отношениями.

Индивидуальное задание по вариантам.

В-т	δ, τ, ρ	В-т	δ, τ, ρ

1	$M(\delta)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	2	$M(\delta)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$
3	$M(\delta)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	4	$M(\delta)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle\}$
5	$M(\delta)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	6	$M(\delta)=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 2,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$
7	$M(\delta)=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 2,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	8	$M(\delta)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 2,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$
9	$M(\delta)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 2,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	10	$M(\delta)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ $\tau=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ $\rho=\{\langle 2,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

Лабораторная работа №5

Задание.

Составить алгоритм и написать программу, позволяющую по данному бинарному отношению проверить отношение эквивалентности и вывести классы эквивалентности.

Дан универсум U={1,2,3,4,5,6} и бинарное отношение P. Составить матрицу данного бинарного отношения и проверить отношение эквивалентности и вывести классы эквивалентности.

Индивидуальное задание по вариантам.

В-т	Бинарное отношение
1	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{3;3},{4;4},{5;5},{4;3},{3;4}}.
2	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{1;3},{2;3},{3;1},{3;2},{3;3},{4;4},{5;4},{5;5},{4;5}}
3	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{3;4},{3;3},{4;4},{4;3},{5;5},{6;6}}.
4	P={{1;1}{1;2},{2;2},{2;1},{1;3},{1;4},{2;3},{3;1},{3;2},{2;4},{3;3},{3;4},{4;1},{4;2},{4;3},{4;4},{5;5},{5;6},{6;5},{6;6}}.
5	P={{1;1},{2;2},{1;5},{2;3},{2;4},{2;5},{3;2},{3;3},{3;4},{3;5},{4;2},{4;3},{4;4},{4;5},{5;2},{5;3},{5;4},{5;5},{6;6}}.
6	P={{1;1},{1;4},{2;2},{1;6},{1;5},{4;1},{4;4},{4;5},{4;6},{5;4},{5;5},{5;6},{6;1},{6;4},{6;5},{6;6},{2;3},{3;3},{3;2},{5;1}}.
7	P={{1;1},{1;5},{2;2},{2;3},{3;3},{3;2},{4;4},{5;1},{5;5},{6;6}}.
8	P={{1;1},{1;6},{2;2},{2;4},{2;3},{1;5},{3;4},{6;1},{3;2},{3;3},{6;5},{5;1},{6;6},{5;5},{5;6},{4;2},{4;3},{4;4}}.
9	P={{1;1},{1;2},{2;2},{2;1},{1;6},{5;5},{2;6},{6;1},{6;2},{6;6},{3;3},{4;4},{3;4},{4;3}}.
10	P={{1;1},{2;2},{2;3},{3;2},{3;3},{4;4},{5;4},{5;5},{5;6},{6;4},{6;5},{4;5},{4;6},{6;6}}.

Лабораторная работа №6

Задание.

Пусть даны соответствия f, g. Построить граф соответствия. Определить вид соответствия: всюду определенное, функциональное, сюръективное, инъективное, биективное.

Индивидуальное задание по вариантам.

Для всех вариантов $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

В-т	f, g
1	f={<2,3>,<3,4>,<5,3>,<8,9>}, g={<1,5>,<3,9>,<4,6>,<5,4>,<7,8>}
2	f={<2,3>,<3,4>,<5,3>,<8,9>} g={<3,9>,<4,6>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
3	f={<2,3>,<3,4>,<5,9>,<8,9>} g={<3,9>,<4,6>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
4	f={<2,3>,<3,4>,<5,9>,<8,9>} g={<3,9>,<4,3>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
5	f={<2,3>,<3,4>,<5,9>,<8,5>} g={<3,9>,<4,3>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
6	f={<2,3>,<3,4>,<5,9>,<8,5>,<9,9>} g={<3,9>,<4,3>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
7	f={<2,9>,<3,4>,<5,9>,<8,5>,<9,9>} g={<3,9>,<4,3>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
8	f={<2,4>,<3,3>,<5,9>,<8,7>,<9,9>} g={<3,9>,<4,3>,<5,3>,<7,8>,<9,5>}
9	f={<2,4>,<3,3>,<5,9>,<8,7>,<9,9>} g={<3,5>,<4,3>,<5,3>,<7,8>,<9,5>}
10	f={<2,4>,<3,3>,<5,9>,<8,7>,<9,9>}g={<3,5>,<4,3>,<5,3>,<7,3>,<9,5>}

Контрольные вопросы для самопроверки

1 Что называется множеством? Какие способы задания множеств вам известны?

2 Какие операции над множествами Вам известны? Напишите тождества, выражающие свойства теоретико-множественных операций.

3 Что называется булеаном? Какова мощность булеана конечного множества?

4 Что называется декартовым произведением множеств? Чему равна мощность декартова произведения n множеств, если они конечны и известна мощность каждого из них?

5 Дайте определение n-местного отношения между множествами. Когда отношение называется бинарным?

6 Сформулируйте определения области определения, области значений бинарного отношения.

7 Как можно изобразить бинарное отношение?

8 Какое бинарное отношение называется обратным данному? Что называется композицией бинарных отношений?

9 Какие еще операции можно выполнять над бинарными отношениями?

10 Что называется матрицей бинарного отношения? Для всякого ли бинарного отношения можно построить матрицу?

11 Какое бинарное отношение называется рефлексивным? симметричным? антисимметричным? транзитивным?

12 Как установить наличие тех или иных свойств бинарного отношения по его матрице?

13 Какое бинарное отношение называется отношением эквивалентности?

14 Дайте определения покрытия множества, разбиения множества?

15 Что называется классом эквивалентности? Может ли такой класс быть пустым? Сформулируйте определение фактор-множества данного множества по отношению эквивалентности.

16 Как связаны отношения эквивалентности на некотором множестве и его различные разбиения?

17 Какова особенность матрицы, описывающей отношение эквивалентности?

18 Что такое диаграмма Хассе и как ее построить?

19 Что называется всюду определенной функцией? частично определенной функцией?

20 Какая функция называется инъективной? сюръективной? биективной?

21 Что вы можете сказать о композиции инъекций? Сюръекций? биекций?

22 Какая функция называется последовательностью?

23 Сформулируйте определение n-местной операции.

24 Сформулируйте принцип Дирихле.

25 Как звучит обобщенный принцип Дирихле?

Раздел 2. Элементы комбинаторики

Теоретические сведения к лабораторным работам №7-№8.

Пусть X – конечное множество, состоящее из n элементов. Тогда говорят, что *объект x из X может быть выбран n способами*, и пишут $|X|=n$.

1 Правило суммы

Если X_1, X_2, …, X_k – попарно непересекающиеся множества, то, очевидно, имеет место равенство: $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$.

При k=2 указанное правило формулируется так: если объект x может быть выбран m способами, а объект y – n способами, то выбор «x или y» может быть осуществлён $m+n$ способами.

2 Правило произведения

Для случая двух объектов оно состоит в следующем: если объект x может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект y, в свою очередь, может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) может быть осуществлён $m \cdot n$ способами.

В общем случае правило произведения формулируется так: если объект x_1 может быть выбран n_1 способами, после чего объект x_2 может быть выбран n_2 способами, и для любого k такого, что k=2, …, m, после выбора объектов x_1, x_2, …, x_{k-1} объект x_k может быть выбран n_k способами, то выбор упорядоченного набора $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ может быть осуществлён $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами: $|X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_k| = \prod_{i=1}^{k} |X_i|$.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – произвольное конечное множество. Набор, состоящий из r элементов множества X, называется *выборкой объёма r из n элементов* или *(n, r)-выборкой*. Выборка называется *упорядоченной*, если порядок следования элементов в ней задан. Как следствие этого, две выборки, отличающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными. Выборка называется *неупорядоченной*, если порядок следования элементов в ней не является существенным.

В выборках могут допускаться и не допускаться повторения элементов. Упорядоченная (n, r)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется (n, r)-*размещением с повторениями*. Если элементы упорядоченной (n, r)-выборки попарно различны, то она называется (n, r)-*размещением без повторений* или просто (n, r)-размещением. *Перестановками* элементов множества X будем называть (n, n)-размещения без повторений. Неупорядоченная (n, r)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется (n, r)-*сочетанием с повторениями*. Неупорядоченная (n, r)-выборка, в которой повтор элементов исключен, называется (n, r)-*сочетанием без повторений* или просто (n, r)-сочетанием. Заметим, что любое (n, r)-сочетание можно рассматривать как r-элементное подмножество n-элементного множества.

Пример. Пусть $X = \{1,2,3\}$.

Найти: а) (3,2)-размещения с повторениями;

б) (3,2)-размещения;

в) (3,2)-сочетания с повторениями;

г) (3,2)-сочетания.

Решение.

а) (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

б) (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2);

в) {1,1}, {2,2}, {3,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3};

г) {1,2}, {1,3}, {2,3}.

Обозначим: A_n^r – число различных (n, r)-размещений,

$\overline{A}_n^r$ – число различных (n, r)-размещений с повторениями,

C_n^r – число различных (n, r)-сочетаний,

$\overline{C}_n^r$ – число различных (n, r)-сочетаний с повторениями,

P_n – число перестановок (по определению $P_n = A_n^n$).

Теорема 1. $\overline{A}_n^r = n^r$.

Теорема 2. $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, $r \le n$. или $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, $r \le n$

Следствие. $P_n = n!$

Теорема 3. $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $r \le n$.

Теорема 4. $\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$.

Пусть X – конечное множество, $|X|=n$. $\{X_i\}_{i=1,\ldots,k}$ – *разбиение* X, т.е. семейство непустых попарно не пересекающихся подмножеств данного множества, объединение которых совпадает с X.

Подсчитаем число разбиений указанного вида, если каждое X_i содержит n_i элементов. Очевидно, что при этом $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Отметим, что некоторые X_i могут быть пусты. Рассматриваем элементы разбиения в фиксированном порядке, т.е. как упорядоченный набор $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$.

Число всевозможных разбиений X на подмножества мощности $n_1, n_2, \ldots, n_k$ обозначим $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Теорема 5. $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Пример. В группе – выборы старосты. Из 25 студентов «за» предложенную кандидатуру проголосовали 20 человек, «против» – 3 и 2 человека воздержались. Сколько способов проголосовать подобным образом существует?

Решение: $C_{25}^{20,3,2} = \dfrac{25!}{20!3!2!}$

Множество всех отображений вида f: $X \to Y$ обозначается Y^X.

Теорема 6. $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.

Теорема 7. $|Y^X|_{ин} = A_{|Y|}^{|X|}$.

Теорема 8. $|Y^X|_{биек} = P_{|Y|}$.

Теорема 9. $|Y^X|_{сюр} = C_{|Y|}^{|X|}$.

Числа C_n^r часто называют биномиальными коэффициентами.

Свойства биномиальных коэффициентов:

а) $C_n^k = C_n^{n-k}$

б) $C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^{r} = C_n^r$

в) $\sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$

г) $\sum\limits_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r = 0$

Теорема 10. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ (бином Ньютона).

Треугольник Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

...

Обобщением биномиальной формулы служит:

Теорема 11. (полиномиальная формула)

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k},$$

где суммирование ведется по всевозможным неотрицательным целым решениям уравнения $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$.

Пример. $(a+b+c)^3 = \sum\limits_{n_1+n_2+n_3=3} C_3^{n_1,n_2,n_3} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} =$

$n_1 + n_2 + n_3 = 3$

n_1	n_2	n_3
1	1	1
0	0	3

0	3	0
3	0	0
0	1	2
0	2	1
1	0	2
1	2	0
2	0	1
2	1	0

$= 6abc+a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2$

Лабораторная работа №7

Задание.

Составить алгоритм и написать программу, реализующую размещение с повторениями, размещение без повторений, перестановки, сочетание с повторениями, сочетание без повторений. Определить количество элементов и вывести их на экран. Данные представлены в таблице по вариантам.

Пример: Пусть $X = \{1,2,3,4\}$.

Определить и вывести на экран:

а) $\overline{A}_n^r$ – число различных (n, r)-размещений с повторениями. (4,2)-размещения с повторениями: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4),(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4),(4,1),(2,3), (3,2),(2,4),(4,2),(3,4),(4,3);

б) A_n^r – число различных (n, r)-размещений. (4,2)-размещения: (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4),(4,1),(2,3), (3,2),(2,4),(4,2),(3,4),(4,3);

в) $\overline{C}_n^r$ – число различных (n, r)-сочетаний с повторениями. (4,2)-сочетания с повторениями: {1,1},{2,2},{3,3},{4,4},{1,2},{1,3}, {1,4},{2,3},{2,4},{3,4};

г) C_n^r – число различных (n, r)-сочетаний. (4,2)-сочетания: {1,2},{1,3}, {1,4},{2,3},{2,4},{3,4};

д) P_n–число перестановок (по определению $P_n = A_n^n$). (4,4)-размещения:

(1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4),(1,3,4,2), (1,4,2,3),(1,4,3,2),

(2,1,3,4), (2,1,4,3), (2,3,4,1), (2,3,14), (2,4,1,3), (2,4,3,1),

(3,1,2,4), (3,1,4,2), (3,2,1,4), (3,2,4,1), (3,4,1,2), (3,4,2,1),

(4,1,2,3), (4,1,3,2), (4,2,3,1), (4,2,1,3), (4,3,1,2), (4,3,2,1).

Вариант	Выборка (n, r)
1	(4,2)
2	(4,3)
3	(5,2)
4	(5,3)
5	(5,4)
6	(6,2)
7	(6,3)
8	(6,4)
9	(6,5)
10	(3,2)

Лабораторная работа №8

Задание.

Составить алгоритм и написать программу построения и вывода на экран треугольника Паскаля при заданном значении степени n, а также формулы бинома Ньютона (для суммы и для разности элементов) при определенных значениях степени n.

Например: пусть степень n=8

Определить и вывести на экран: треугольник Паскаля

						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		7		1

формулу бинома Ньютона для n=5

$$(x+y)^5=1x^0y^5+5x^1y^4+10x^2y^3+10x^3y^2+5x^4y^1+1x^5y^0.$$

Индивидуальные задания по вариантам.

Вариант	n	$(x+y)^n$
1	4	$(x+y)^6$
2	5	$(x-y)^7$
3	6	$(x+y)^8$

4	7	$(x-y)^5$
5	8	$(x-y)^6$
6	9	$(x+y)^7$
7	10	$(x-y)^8$
8	11	$(x+y)^9$
9	12	$(x-y)^9$
10	13	$(x+y)^{10}$

Контрольные вопросы для самопроверки

1 Сформулируйте правило суммы.

2 Сформулируйте правило произведения.

3 Что такое выборка? Какой она бывает?

4 Какая выборка называется размещением с повторениями? без повторений?

5 Какая выборка называется сочетанием с повторениями? без повторений?

6 Что такое перестановка?

7 Как подсчитать число размещений с повторениями? без повторений?

8 Как подсчитать число сочетаний с повторениями? без повторений?

9 Как подсчитать число разбиений некоторого конечного множества на подмножества фиксированной мощности?

10 Какие числа называются биномиальными коэффициентами? Какие свойства этих чисел вам известны?

11 Напишите бином Ньютона.

12 Что называется треугольником Паскаля?

13 Напишите полиномиальную формулу.

Раздел 3. Булевы функции

Теоретические сведения к лабораторным работам №9-№10.

Определение *Булевой функцией n аргументов* называют отображение вида:

f: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$.

Будем обозначать аргументы булевой функции привычными символами x, y, z, …, x_1, x_2, x_3, …

Булева функция может быть заданы различными способами:

а) *таблицей значений*

x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0	f(0, 0, ..., 0, 0)
0	0	...	0	1	f(0, 0, ..., 0, 1)
...	...	...	1	0	f(0, 0, ..., 1, 0)
0	1	...	1	1	...
0	1	...	...	...	...
1	0	...	0	0	...
1	0	...	0	1	...
...	...	...	...	...	...
1	1	...	1	0	f(1, 1, ..., 1, 0)
1	1	...	1	1	f(1, 1, ..., 1, 1)

Можно ли таблично полностью задать функцию, определенную на бесконечном множестве?

б) *вектором значений*: (f(0, 0, ..., 0, 0), f(0, 0, ..., 0, 1), f(0, 0, ..., 1, 0), ..., f(1, 1, ..., 1, 0), f(1, 1, ..., 1, 1))

в) *указанием наборов*, на которых функция принимает значение 0 (1)

г) *аналитически (формулой)*

Пример. Судейская коллегия состоит из трех человек. Они принимают решение большинством голосов. Задать функцию, описывающую процесс голосования.

а)

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0

1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

б) f(x,y,z)=(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)

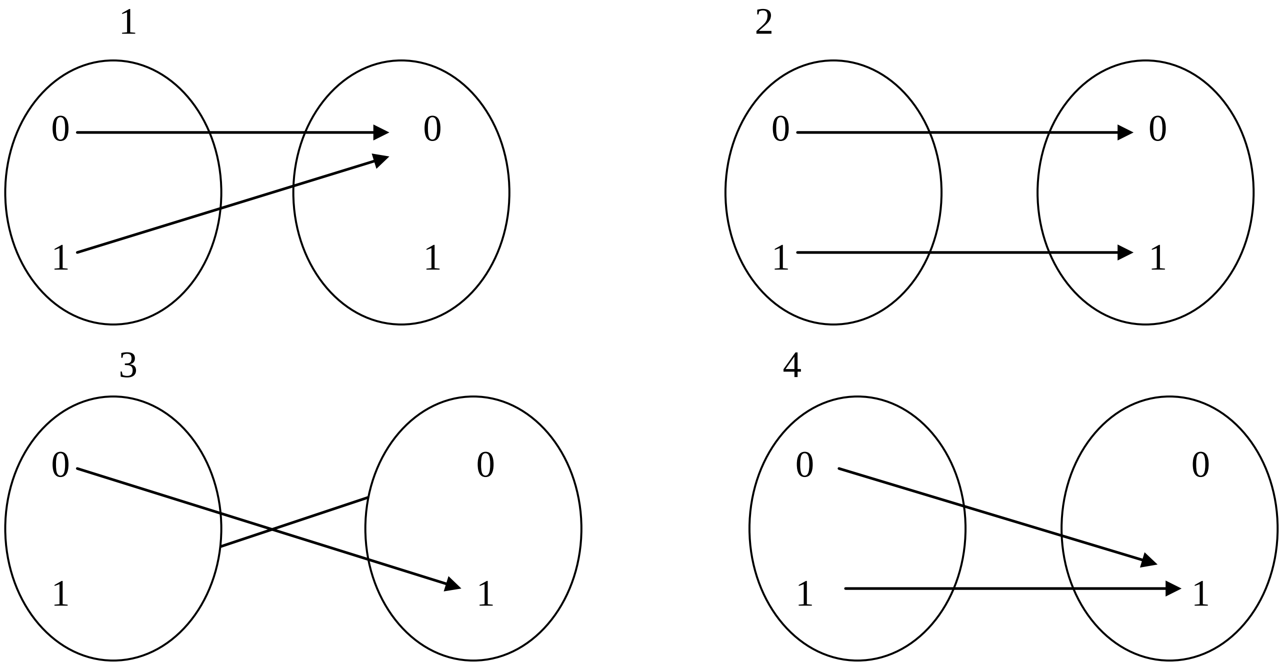
в) f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(0,1,0)=f(1,0,0)=0

г) f(x,y,z)= ...

Как бы Вы записали аналитическое выражение для этой функции?

Теорема. Существует ровно 2^{2^n} различных булевых функций от n аргументов.

Рассмотрим булевы функции одного аргумента. Согласно определению это отображения вида f: $\{0, 1\} \to \{0, 1\}$.



Опишем их таблично:

x	f(x)	f_0(x)	f_1(x)	f_2(x)	f_3(x)
0	f(0)	0	0	1	1
1	f(1)	0	1	0	1

Легко перейти к аналитической записи:

f_0(x)=0 – тождественный ноль, f_1(x)=x – тождественная,

f_2(x)=x′ – отрицание, f_3(x)=1 – тождественная единица.

Рассмотрим булевы функции двух аргументов. Это отображения вида

f: $\{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$.

x	y	f(x, y)	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	f(0, 0)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	f(0, 1)	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	f(1, 0)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	f(1, 1)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0(x,y)=0$ – тождественный ноль, $f_1(x,y)=x\cdot y$ – конъюнкция,

$f_2(x,y)=(x\to y)'$, $f_3(x,y)=x$, $f_4(x,y)=(y\to x)'$, $f_5(x,y)=y$

$f_6(x,y)=(x\leftrightarrow y)'=x+y$ – сумма Жегалкина (сумма по модулю 2, XOR, «исключающее или»), $f_7(x,y)=x\vee y$ – дизъюнкция,

$f_8(x,y)=(x\vee y)'=x\downarrow y$ – стрелка Пирса, $f_9(x,y)=x\leftrightarrow y$ – эквивалентность,

$f_{10}(x,y)=y'$, $f_{11}(x,y)=y\to x$,$f_{12}(x,y)=x'$,$f_{13}(x,y)=x\to y$ – импликация,

$f_{14}(x,y)=(x\cdot y)'=x\,|\,y$ – штрих Шеффера,$f_{15}(x,y)=1$ –тождественная единица

Определение. Переменная x_i функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *существенной*, если на некотором конкретном двоичном наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1,} x_{i+1}, \ldots, x_n)$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

В этом случае говорят, что f *зависит существенным образом* от переменной x_i. В противном случае, переменная x_i называется *несущественной (фиктивной*), и говорят, что функция зависит от нее *несущественно*.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет несущественную переменную x_i. Удалим из таблицы значений f строки, соответствующие наборам $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i\in\{0,1\}$, i=1, 2,…, i-1, i+1, …, n, и столбец значений переменной x_i. Получим таблицу значений функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1,} x_{i+1}, \ldots, x_n)$, про которую будем говорить, что она получена из f *удалением фиктивной переменной*. Обратный переход от g к f называется *введением фиктивной переменной* x_i.

Пример. Определить существенные и фиктивные переменные функции (11110011).

Таблица истинности имеет вид:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Проверим, является ли переменная x существенной или фиктивной. Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной x: $f(0,0,0)=1$, $f(1,0,0)=0$. $\Rightarrow$ $f(0,0,0)\neq f(1,0,0)$. Значит, переменная x – существенная. Рассмотрим теперь значения функции на наборах, соседних по переменной y:

$f(0,0,0)=1$, $f(0,0,1)=1$, $f(1,0,0)=0$,
$f(0,1,0)=1$. $f(0,1,1)=1$. $f(1,1,0)=1$.

$f(1,0,0)\neq f(1,1,0)$. Следовательно, переменная y – существенная.

Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной z:

$f(0,0,0)=1$, $f(0,1,0)=1$, $f(1,0,0)=0$, $f(1,1,0)=1$,
$f(0,0,1)=1$. $f(0,1,1)=1$. $f(1,0,1)=0$. $f(1,1,1)=1$.

На всех парах соседних по переменной z наборов значений переменных функция принимает равные значения, следовательно, переменная z – фиктивная.

Пример. Функция f задана таблицей

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Ее анализ показывает, что x – фиктивная переменная, y – существенная, z – существенная.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Получим таблицу

y	z	g(y,z)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Проиллюстрируем добавление в f еще одной фиктивной переменной t:

x	y	z		f(x,y,z)
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		0
1	1	0		0
1	1	1		1

x	y	z	t	h(x,y,z,t)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0

1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Определение. Булевы функции, которые получаются одна из другой добавлением или удалением фиктивных переменных, называются *равными*.

Теперь мы можем рассматривать все булевы функции, зависящими от одного и того же перечня переменных, т.е. с точностью до фиктивных переменных.

Замечание. Класс функций с определенными свойствами будет рассматриваться только в том случае, если эти свойства инвариантны относительно операций введения и удаления фиктивных переменных.

Свойства булевых операций:

1) идемпотентность конъюнкции, дизъюнкции: $x\cdot x=x$, $x\vee x=x$

2) ассоциативность конъюнкции, дизъюнкции, суммы Жегалкина:

$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$, $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$, $(x+y)+z=x+(y+z)$

3) коммутативность конъюнкции, дизъюнкции, суммы Жегалкина:

$x\cdot y=y\cdot x$, $x\vee y=y\vee x$, $x+y=y+x$

4) дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции, дизъюнкции относительно конъюнкции, конъюнкции относительно суммы Жегалкина: $x\cdot(y\vee z)=(x\cdot y)\vee(y\cdot z)$, $x\vee(y\cdot z)=(x\vee y)\cdot(y\vee z)$, $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(y\cdot z)$

5) инволютивность отрицания: $x''=x$

6) законы поглощения: $(x\cdot y)\vee x=x$, $(x\vee y)\cdot x=x$

7) законы де Моргана: $(x\cdot y)'=x'\vee y'$, $(x\vee y)'=x'\cdot y'$

8) свойства 0 и 1: $x\cdot 0=0$, $x\cdot 1=x$, $x\vee 0=x$, $x\vee 1=1$, $x+0=x$, $x+1=x'$

9) свойства отрицания: $x\cdot x'=0$, $x\vee x'=1$, $x+x'=1$

10) выражения операций $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ через другие операции:

$x\rightarrow y= x'\vee y$, $x\leftrightarrow y=(x\rightarrow y)\cdot(y\rightarrow x)$

Будем считать конъюнкцию самой сильной операцией, и вместо (x·y) писать x·y или просто xy.

Говорят, что *формула F представляет булеву функцию f*, если их таблицы значений совпадают.

Введем обозначение: $x^{\delta} = \begin{cases} x, если \delta = 1, \\ x', если \delta = 0. \end{cases}$ Выражение x^{δ} называют *литерой*.

Теорема. (первая теорема Шеннона) Любая булева функция $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ представима в виде разложения Шеннона

$$f(x_1, x_2, x_3, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n)}} x_1^{\delta_1} \cdot x_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\delta_k} \cdot f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Это представление называется *разложением функции по переменным* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$.

Теорема. (вторая теорема Шеннона) Любая булева функция $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ представима в виде разложения Шеннона

$$f(x_1, x_2, x_3, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= \prod_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n)}} x_1^{1-\delta_1} \vee x_2^{1-\delta_2} \vee \ldots \vee x_k^{1-\delta_k} \vee f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Теорема. (о функциональной полноте) Для любой булевой функции f найдется формула F, представляющая функцию f. Если f – не тождественный ноль, то существует представляющая ее формула, находящаяся в СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n), \\ \text{на которых} \\ f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n) = 1}} x_1^{\delta_1} \cdot x_2^{\delta_2} \cdot x_3^{\delta_3} \ldots \cdot x_n^{\delta_n},$$

и это представление единственно с точностью до порядка следования конъюнктов.

Если f – не тождественная единица, то существует представляющая ее формула, находящаяся в СКНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n), \\ \text{накоторых} \\ f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n) = 0}} x_1^{1-\delta_1} \vee x_2^{1-\delta_2} \vee x_3^{1-\delta_3} \ldots \vee x_n^{1-\delta_n},$$

и это представление единственно с точностью до порядка следования дизъюнктов.

Замечание. СДНФ и СКНФ – разложения функции по всем n переменным.

Теорема. (Жегалкина) Всякая булева функция представима полиномом Жегалкина, т.е. выражением вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1} x_1 x_2 + \ldots + a_{2^n - 1} x_1 x_2 \ldots x_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_{2^n - 1} \in \{0,1\}$ и знак + обозначает сумму по модулю 2.

Другими словами, можно записать f в виде

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{\text{по некоторым} \\ \text{наборам} \\ (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k)}} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot x_{i_3} \ldots \cdot x_{i_k} + a_0,$$

где i_j (j=1,…,k) попарно различны, $i_j \in \{1,..,n\}$, $a_0 \in \{0,1\}$.

Представление булевой функции в виде полинома Жегалкина единственно с точностью до порядка слагаемых.

Определение. Булева функция называется *линейной*, если ее многочлен Жегалкина первой степени, и *нелинейной* в противном случае.

Пример. Построим многочлен Жегалкина для f(x,y)=x∨y.

1 способ – метод неопределенных коэффициентов.

x∨y=axy+bx+cy+d

(0,0)	0=d
(0,1)	c+d=1, c=1
(1,0)	b+d=1, b=1
(1,1)	a+b+c+d=1, a=1

Значит, x∨y=xy+x+y

2 способ – тождественные преобразования.

x∨y=(x′·y′)′=(x+1)(y+1)+1=xy+x+y+1+1=xy+x+y

Полученное представление означает, что дизъюнкция нелинейна.

Правило его составления многочлена Жегалкина

1 Выделить наборы значений переменных, на которых функция F принимает значение 1.

2 Для каждого их таких наборов составить совершенный конъюнкт, который принимает значение 1 на этом наборе и только на нем.

3 Полученные конъюнкты соединить знаком + и преобразовать полученное выражение, пользуясь тождествами $x'=x+1$, $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(y\cdot z)$, $x+x=0$.

Пример.

x	y	z	f(x, y, z)	С-конъюнкты	С-дизъюнкты
0	0	0	0		$x\vee y\vee z$
0	0	1	0		$x\vee y\vee z'$
0	1	0	1	$x'yz'$	
0	1	1	1	$x'yz$	
1	0	0	1	$xy'z'$	
1	0	1	1	$xy'z$	
1	1	0	0		$x'\vee y'\vee z$
1	1	1	1	xyz	

СДНФ f(x, y, z): $\mathbf{x'yz' \vee x'yz \vee xy'z' \vee xy'z \vee xyz}$

СКНФ f(x, y, z): $\mathbf{(x\vee y\vee z)\ (x\vee y\vee z')\ (x'\vee y'\vee z)}$

Многочлен Жегалкина f(x, y, z): $x'yz' + x'yz + xy'z' + xy'z + xyz =$

$= x'y(z'+z)+xy'(z'+z)+xyz=(x+1)y + x(y+1) +xyz =xy+y+xy+x+xyz=\mathbf{xyz + x + y}$

Обозначим все множество булевых функций P_2.

Пусть М – некоторая (система) класс булевых функций $\{f_1,f_2, f_3, \ldots, f_m\}$.

Определение. Говорят, что булева функция g есть *элементарная суперпозиция (суперпозиция 1-го ранга)* функций $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$, если она получена:

а) переименованием некоторой переменной одной из указанных функций;

б) подстановкой в функцию f_i, $i=1, \ldots, m$, вместо любой из ее переменных какой-нибудь функции из М.

Пример. $M=\{0, x, x\to y\}$. $g_1=y\to z$, $g_2=t$, $g_3=0\to y=1$ – некоторые элементарные суперпозиции функций 0, x, $x\to y$.

Обозначим M_1 – класс всех суперпозиций первого ранга функций из M. Применим к функциям из M_1 операцию элементарной суперпозиции. Множество полученных функций обозначим M_2 и т.д.

Определение. *Суперпозицией* функций из M назовем любую функцию множества $\bigcup_{i\geq 0} M_i$, где M_0=M.

Определение. Класс булевых функций M={f_1, f_2, f_3, …, f_m} называется *полным*, если любая булева функция может быть выражена через f_1, f_2, f_3, …, f_m с помощью суперпозиций.

Пример. Какие из следующих систем полные:

а) $\{0, x, x\to y\}$; б) P_2; в) $\{x, x'\}$; г) $\{0, 1\}$; д) $\{x\cdot y, x\vee y, x'\}$?

Теорема. Пусть система M={f_1, f_2, f_3, …, f_m} – полная, и любая из функций f_1, f_2, f_3, …, f_m может быть выражена через функции g_1, g_2, g_3, …, g_k с помощью суперпозиций. Тогда система {g_1, g_2, g_3, …, g_k**}** **–** полная.

Следствие. Полными являются следующие системы булевых функций:

а) $\{\cdot, \vee, '\}$, б) $\{\cdot, '\}$, в) $\{\vee, '\}$, г) $\{\to, '\}$, д) $\{+, \cdot, 1\}$, е) $\{|\}$, ж) $\{\downarrow\}$.

Определение. *Замыканием* класса булевых функций M называется множество, состоящее из этих функций и их всевозможных суперпозиций. Обозначается [M] или $\overline{\text{M}}$.

Определение. Класс булевых функций M={f_1, f_2, f_3, …, f_m} называется *замкнутым*, если [M] = M.

Пример. Какие из следующих систем замкнутые:

а) $\{0, x, x\to y\}$; б) P_2; в) $\{x, x'\}$; г) $\{0, 1\}$; д) $\{x\cdot y, x\vee y, x'\}$?

Введенный термин позволяет иначе сформулировать определение полного класса функций: класс M полный, если [M] = P_2.

Понятие функционально замкнутого класса позволит сформулировать критерий полноты системы булевых функций.

Важнейшие замкнутые классы.

Введем следующие обозначения.

$T_0=\{f\in P_2 |\ f(0, 0, 0, \ldots, 0)=0\}$ – класс функций, *сохраняющих ноль*.

$T_1=\{f\in P_2|\ f(1, 1, 1, \ldots, 1)=1\}$ – класс функций, *сохраняющих единицу*.

$T_S=\{f\in P_2|\ f=f^*\}$ – класс *самодвойственных* функций.

Напомним, что справедливо равенство $f'(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f^*(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n')$. Тогда $f=f^* \Leftrightarrow f'(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n')$. Другими словами, f – самодвойственна, если на противоположных наборах она принимает противоположные значения.

Определение. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n) \in \{0, 1\}^n$. Говорят, что α *предшествует* β, если $\alpha_i\leq \beta_i$ по всем i=1, …, n. Обозначается $\alpha\leq \beta$.

$T_M=\{f\in P_2|$ по всем $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^n \ \alpha\leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)\}$ – класс *монотонных* функций.

$T_L=\{f\in P_2|\ f=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n,\ a_i\in\{0, 1\},\ i=1, \ldots, n\}$ – класс *линейных* функций.

Проверка принадлежности булевой функции замкнутым классам 1-4 осуществляется по таблице истинности. Проверка принадлежности булевой функции классу T_L осуществляется путем построения полинома Жегалкина.

Пример.

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$f(x, y, z)= xyz + x + y$

$f\in T_0, T_1, f\notin T_S, T_M, T_L$

Теорема. **(Поста)**

1. Система M булевых функций функционально полна тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, T_S, T_M, T_L.

2. Система М булевых функций функционально полна тогда и только тогда, когда для каждого из классов T_0, T_1, T_S, T_M, T_L найдется не принадлежащая ему функция из М.

Для проверки функциональной полноты системы булевых функций строится *таблица Поста*, в которой отмечается принадлежность функций системы замкнутым классам с помощью знаков + и –.

3.Система М булевых функций функционально полна тогда и только тогда, когда в каждом столбце таблицы Поста есть хотя бы один минус.

Пример. Проверить функциональную полноту системы булевых функций $A = \{x + y, xy, 1\}$.

Проверим принадлежность замкнутым классам функции $f(x, y) = x + y$ Построим таблицу истинности данной функции.

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f(0,0) = 0$, следовательно $f(x, y) \in T_0$. $f(1,1) = 0$, следовательно $f(x, y) \notin T_1$.

$f(0,0) = f(1,1)$, следовательно, $f(x, y) \notin T_S$. $f(1,0) = 1 > 0 = f(1,1)$, следовательно, $f(x, y) \notin T_M$. Функция представляет собой полином Жегалкина первой степени, следовательно, $f(x, y) \in T_L$. Результаты можно занести в первую строку таблицы Поста. Остальные функции исследуются аналогично.

Построим таблицу Поста:

	T_0	T_1	T_S	T_M	T_L
$x \oplus y$	+	-	-	-	+
xy	+	+	-	+	-
1	-	+	-	+	+

В каждом столбце таблицы имеется минус, следовательно, система A функционально полна.

Определение. Минимальная функционально полная система называется *базисом* пространства булевых функций.

Пример. {|} – базис P_2.

Любая булева функция может быть представлена формулой в виде ДНФ (КНФ). Равносильными преобразованиями можно получить формулу, содержащую меньшее, чем исходная, число переменных.

Пример. $(x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_2') = x_1$, $(x_1 \cdot x_2) \vee x_1 = x_1$, $(x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3) = x_1 \cdot (x_2 \vee x_3)$

Рассмотрим задачу поиска для данной булевой функции ДНФ, содержащей наименьшее число вхождений переменных.

Определение. Формула $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ называется *импликантой* формулы $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, если φ - конъюнкт, содержащий каждую переменную не более одного раза и $\varphi \cdot \psi = \varphi$. (Как соотносятся в этом случае таблицы значений формул φ и ψ?)

Формула $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ называется *импликантой* булевой функции f, если φ – импликанта СДНФ, представляющей f. Импликанта φ называется *простой*, если после отбрасывания любой литеры из φ полученная формула не является импликантой.

Пример. $f(x,y)=x \to y$

x	y	$x \to y$	x'	y'	xy	$x'y$	xy'	$x'y'$
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0

Какие из конъюнктов являются импликантами $f(x,y)=x \to y$?

Какие из них простые?

Определение. Дизъюнкция всех простых импликант данной формулы (функции) называется *сокращенной* ДНФ.

Теорема. Любая булева функция, отличная от тождественного нуля, представима в виде сокращенной ДНФ.

Определение. Сокращенная ДНФ называется *тупиковой*, если она не содержит «лишние» импликанты, т.е. конъюнкты, удаление которых не меняет таблицы значений формулы.

Замечание. Представление функции в виде тупиковой ДНФ в общем случае неоднозначно.

Выбор из всех тупиковых форм формы с наименьшим числом вхождений переменных дает *минимальную* ДНФ (МДНФ).

Существует несколько методов нахождения МДНФ данной булевой функции.

1 Метод минимизирующих карт

Не отличается большой эффективностью, но прост и нагляден.

Построим таблицу

x_1	x_2	…	x_n	x_1x_2	x_1x_3	…	$x_{n-1}x_n$	$x_1x_2\ x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\ x_n$	…	$x_1x_2\ldots\ x_n$
x_1'	x_2	…	x_n	$x_1'x_2$	$x_1'x_3$	…	$x_{n-1}x_n$	$x_1'x_2\ x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\ x_n$	…	$x_1'x_2\ldots\ x_n$
x_1	x_2'	…	x_n	x_1x_2'	x_1x_3	…	$x_{n-1}x_n$	$x_1x_2'x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\ x_n$	…	$x_1x_2'\ldots\ x_n$
…												
x_1	x_2	…	x_n'	x_1x_2	x_1x_3	…	$x_{n-1}x_n'$	$x_1x_2\ x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\ x_n'$	…	$x_1x_2\ldots\ x_n'$
x_1'	x_2'	…	x_n	$x_1'x_2'$	$x_1'x_3$	…	$x_{n-1}x_n$	$x_1'x_2'x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\ x_n$	…	$x_1'x_2'\ldots\ x_n$
…												
x_1'	x_2'	…	x_n'	$x_1'x_2'$	$x_1'x_3'$	…	$x_{n-1}'x_n'$	$x_1'x_2'x_3'$	…	$x_{n-2}'x_{n-1}'x_n'$	…	$x_1'x_2'\ldots\ x_n'$

Теорема. Если совершенный конъюнкт i-ой строки таблицы не входит в состав СДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, то никакой конъюнкт этой строки не содержится в составе никакой ДНФ, выражающей данную функцию.

Алгоритм

1Вычеркнем все конъюнкты в строках, не соответствующих составу СДНФ

2В остальных строках вычеркнем конъюнкты, удаленные на шаге1

3 В каждой строке из оставшихся элементов выберем конъюнкты с наименьшим числом сомножителей, остальные вычеркнем.

4 В каждой строке выберем по одному из оставшихся конъюнктов и составим из них ДНФ.

5 Из всех полученных ДНФ выберем минимальную.

Пример. Применить указанный метод для минимизации функции:

$f(x, y, z) = x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz$

x	y	z	xy	xz	yz	xyz	*
x′	y	z	x′y	x′z	yz	x′yz	*
x	y′	$\cancel{z}$	xy′	xz	y′z	xy′z	*
x	y	z′	xy	xz′	yz′	xyz′	*
x′	y′	z	x′y′	x′z	y′z	x′y′z	
x′	y	z′	x′y	x′z′	yz′	x′yz′	*
x	y′	z′	xy′	xz′	y′z′	xy′z′	
x′	y′	z′	x′y′	x′z′	y′z′	x′y′z′	

$f(x, y, z) = y \vee xz.$

2 Метод Квайна

Основан на трех операциях:

а) операции полного склеивания: $\varphi \cdot x \vee \varphi \cdot x' = \varphi$;

б) операции неполного склеивания: $\varphi \cdot x \vee \varphi \cdot x' = \varphi \vee \varphi \cdot x \vee \varphi \cdot x'$;

в) операции элементарного поглощения: $\varphi \cdot x \vee \varphi = \varphi$, $\varphi \cdot x' \vee \varphi = \varphi$.

Теорема. (теорема Квайна) Если в СДНФ функции произвести все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ.

Пример.

$f(x, y, z) = x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz =$

$= x'yz' \vee x'yz \vee x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz' \vee xyz \vee xyz \vee xyz =$

$= x'y \vee yz' \vee yz \vee xz \vee xy \vee x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz =$

$= x'y \vee yz' \vee yz \vee xz \vee xy \vee x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz =$

$= y \vee yz' \vee yz \vee xz \vee x'y \vee xy \vee x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz =$

$= y \vee yz' \vee yz \vee xz \vee x'y \vee xy \vee x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz =$

$= y \vee xz$.

На практике при выполнении операций неполного склеивания на каждом этапе можно не писать члены, участвующие в этих операциях, а писать только результаты всевозможных полных склеиваний и конъюнкты, не участвующие ни в каком склеивании.

Пример.

$f(x, y, z) = x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz =$

$= x'yz' \vee x'yz \vee x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz' \vee xyz \vee xyz \vee xyz =$

$= x'y \vee yz' \vee yz \vee xz \vee xy = x'y \vee yz' \vee yz \vee xz \vee xy = y \vee xz$.

Для получения МДНФ из сокращенной используется *матрица (таблица) Квайна*. Ее столбцы индексируются конъюнктами СДНФ функции, а строки – импликантами сокращенной ДНФ, звездочкой помечаются те пересечения строк и столбцов, для которых конъюнкт из заголовка строки входит в С-конъюнкт заголовка столбца.

Пример. (см. выше)

$f(x, y, z) = x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz = y \vee xz$.

	$x'yz'$	$x'yz$	$xy'z$	xyz'	xyz
y	*	*		*	*
xz			*		*

В тупиковую ДНФ выбирается минимальное число простых импликант, дизъюнкция которых сохраняет все С-конъюнкты.

3 Карты Карно (диаграммы Вейча)

Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Карта Карно для n переменных содержит 2^n ячеек, каждая из которых соответствует одному из С-конъюнктов (одному из двоичных наборов длины n). Карта строится так, чтобы соседние ячейки отличались значением только одной переменной. Стандартные карты Карно для n=1, 2, 3, 4, 5, 6.

	x	x′
y		
y′		

	x	x′	
y			z′
			z
y′			z′

Стандартный куб SQ

	x		x′		
y					z′
					z
y′					z′
	t′	t		t′	

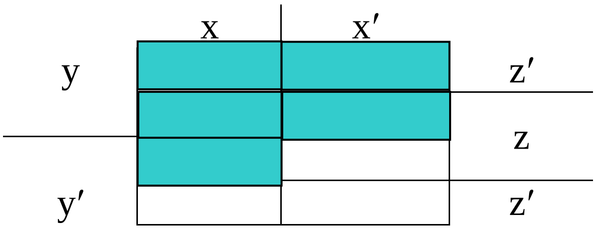
x	x′
SQ	SQ

	x	x′
y	SQ	SQ
y′	SQ	SQ

Булева функция представляется на КК заштриховыванием ячеек, которые отражают состав ее СДНФ (*1-ячеек*).

Пример. (см. выше)

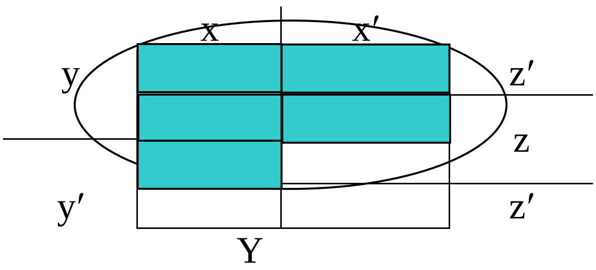
$f(x, y, z) = x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz$

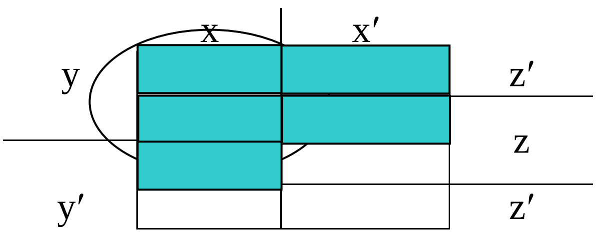


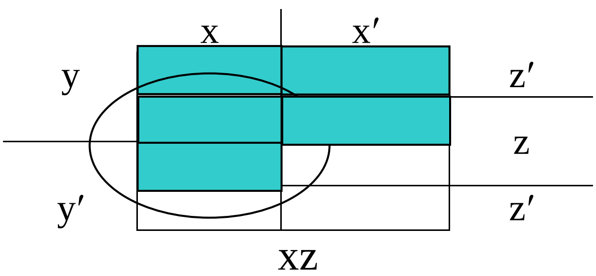
Для построения импликант берутся совокупности соседних ячеек, образующих максимальные по включению прямоугольники.

Пример. (см. выше)

$f(x, y, z) = x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz$







После нахождения простых импликант с помощью карты составляется и изучается таблица Квайна.

В силу принципа двойственности все приведенные понятия и рассуждения можно преобразовать для нахождения минимальных КНФ.

Лабораторная работа №9

Задание.

Составить алгоритм и написать программу генерации таблицы истинности. Дана функция от трех переменных заданная аналитически (формулой). Найти вектор значение функции (значение функции таблично) по вариантам.

Вариант	$f(x, y, z)$
1	$(x \vee \neg y \vee z)(\neg x \neg y \neg z);$
2	$(\neg x \neg y \vee \neg y \neg z) \equiv (x \vee z \to y);$
3	$xy \vee x(z \vee y)z;$
4	$(\neg x \to \neg y) \to (xy \to xz);$
5	$(z \to x) \to (\neg(y \vee z) \to x);$
6	$\neg(xy \to x) \vee \big(z(y \vee x)\big);$
7	$\neg\big(x(y \vee z)\big) \to (xy \vee z);$
8	$\big((x \to y) \to (z \to \neg x)\big) \to (\neg y \to \neg z);$
9	$\Big(\Big(\big((x \to y) \to \neg x\big) \to \neg y\Big) \to \neg z\Big) \to z;$
10	$\big(x \to (y \to z)\big) \to \big((x \to \neg z) \to (x \to \neg y)\big).$

Лабораторная работа №10

Задание.

Составить алгоритм и написать программу построение СДНФ, СКНФ, полином Жегалкина для функции от трех переменных заданной вектором значения. Для функции f(x,y,z) заданной векторно, найти СДНФ, СКНФ, полином Жегалкина.

Индивидуальное задание по вариантам.

Вариант	f(x,y,z)
1	(11110000)
2	(10010111)
3	(01011100)
4	(01010101)

5	(10010001)
6	(10101011)
7	(01010101)
8	(10010111)
9	(01010001)
10	(00111001)

Правило составления СДНФ (СКНФ) по таблице истинности

1Выделить наборы переменных, на которых F принимает значение 1(0).

2 Для каждого их таких наборов составить совершенный конъюнкт (дизъюнкт), который принимает значение 1 (0) на этом наборе и только на нем.

3 Полученные конъюнкты (дизъюнкты) соединить знаком $\vee$ ($\wedge$).

Правило его составления многочлена Жегалкина по таблице истинности

1 Выделить наборы значений переменных, на которых F принимает значение1.

2 Для каждого их таких наборов составить совершенный конъюнкт, который принимает значение 1 на этом наборе и только на нем.

3 Полученные конъюнкты соединить знаком + и преобразовать полученное выражение, пользуясь тождествами $x'=x+1$, $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(y\cdot z)$, $x+x=0$.

Алгоритм нахождения полинома Жегалкина для произвольной функции методом неопределенных коэффициентов:

1) Записываем общий вид полинома Жегалкина:

$f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_1x_2$ для двух переменных;

$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_4x_1x_2 \oplus a_5x_1x_3 \oplus a_6x_2x_3 \oplus a_7x_1x_2x_3.$ для трех переменных.

2) Берем нулевой набор (0,0,0) и находим a_0.

3) Рассматриваем все наборы с одной единицей: (1,0,0), (0,1,1), (0,0,1) и находим a_1, a_2, a_3.

4) Рассмотрим все наборы с двумя единицами: (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1) и находим a_4, a_5, a_6..

5) Рассматриваем набор (1,1,1) и находим коэффициент a_7.

Пример.

Для функции f(x,y,z)=(11010001) заданной векторно найти СДНФ, СКНФ и полином Жегалкина.

x	y	z	f(x, y, z)	f(x, y, z)	C-дизъюнкт	C-конъюнкт
0	0	0	f(0,0,0)	1		7x∧7y∧7 z
0	0	1	f(0,0,1)	1		7x∧7y∧z
0	1	0	f(0,1,0)	0	x∨7y∨z	
0	1	1	f(0,1,1)	1		7x∧y∧z
1	0	0	f(1,0,0)	0	7x∨y∨z	
1	0	1	f(1,0,1)	0	7x∨y∨7z	
1	1	0	f(1,1,0)	0	7x∨7y∨z	
1	1	1	f(1,1,1)	1		x∧y∧z

Итак, СКНФ: f(x,y,z) ≅ (x∨7y∨z) ∧ (7x∨y∨z) ∧ (7x∨y∨7z) ∧ (7x∨7y∨z).

СДНФ: f(x,y,z) ≅(7x∧7y∧7 z)∨(7x∧7y∧z)∨(7x∧y∧z)∨(x∧y∧z)

полином Жегалкина: *f(x,y,z) ≅ xy+yz+x+y+1.*

Пример

Построить полином Жегалкина для функции x→y методом неопределенных коэффициентов.

Решение. $x \to y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x \cdot y$.

(0,0): $0 \to 0 = 1 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 \cdot 0 \Rightarrow a_0 = 1.$

(1,0): $1 \to 0 = 0 = 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow a_1 = 1.$

(0,1): $0 \to 1 = 1 = 1 + 1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 \cdot 1 \Rightarrow 1 = 1 + a_2 \Rightarrow a_2 = 0.$

(1,1): $1 \to 1 = 1 = 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow a_3 = 1.$

Следовательно, $x \to y = 1 + x + x \cdot y$.

Контрольные вопросы для самопроверки

1 Сформулируйте определение булевой функции от n аргументов.

2 Сколько различных булевых функций от n аргументов существует?

3 Опишите таблично все булевы функции одного аргумента.

4 Задайте аналитически булевы функции одного (двух)аргумента.

5 Задайте аналитически булевы функции двух аргументов, назовите их.

6 Что значит задать булеву функцию вектором значений?

7 Напишите известные Вам тождества для булевых функций.

8 Для всякой ли булевой функции существует ее запись в виде СДНФ?

9 Для всякой ли булевой функции существует ее запись в виде СКНФ?

10 Что значит разложить булеву функцию по некоторой переменной?

11 Что называется многочленом Жегалкина?

12 Как получить многочлен Жегалкина для заданного булева выражения?

13 Сформулируйте определение полной системы булевых функций.

14 Приведите примеры полных систем булевых функций.

15 Приведите примеры неполных систем булевых функций.

16 Что называется замыканием класса булевых функций?

17 Какая система булевых функций называется замкнутой?

18 Приведите примеры замкнутых систем булевых функций.

19 Приведите примеры незамкнутых систем булевых функций.

20 Перечислите наиболее важные замкнутые классы булевых функций.

21 Охарактеризуйте с точки зрения линейности, самодвойственности, монотонности каждую из булевых функций одного и двух аргументов.

22 Сформулируйте теорему Поста (критерий полноты класса булевых функций).

23 Что называется базисом системы булевых функций?

24 Какие предполные классы булевых функций Вам известны?

25 Что понимают под переключательной схемой?

26 Какая ДНФ называется тупиковой? минимальной? сокращенной?

27 Какие методы построения минимальной ДНФ Вам известны?

28 Опишите метод минимизирующих карт.

29 Опишите метод Квайна построения минимальной ДНФ.

30 Как построить минимальную ДНФ с помощью карт Карно?

Список использованных источников

1 Асеев, Г.Г. Дискретная математика: учебное пособие/ Г.Г. Асеев, О.М. Абрамов, Д.Э. Ситников. - Ростов; Харьков: Феникс: Торсинг, 2003. - 141 с.

2 Белоусов, А. И. Дискретная математика: учебник/ А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - Москва: МГТУ им Н.Э. Баумана, 2001. - 743с.

3 Гаврилов, Г. П. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики/Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко.- Москва: Наука, 1992.-368 с.

4 Горбатов, В.А Дискретная математика: учебник для студентов втузов/ В.А. Горбатов, А.В. Горбатов, М.В. Горбатова - Москва: АСТ, Астрель, 2003. - 447 с.

5 Кобзев, В. М. Математика. Дискретная математика: метод. указ. для самостоятельной работы студентов очной формы обучения /В. М. Кобзев.- Брянск: БГТУ, 2008. - 35 с.

6 Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. - 3-е изд., Санкт Петербург: Лань, 2004. - 394 с.

7 Спирина, М.С. Дискретная математика: учебник / М.С. Спирина, П.А. Спирин. - Москва: ACADEMIA, 2004. - 367 с.

8 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику: учеб. пособие для вузов/ С.В. Яблонский. - 3-е изд., стер. - Москва: Высшая школа, 2001. - 384 с.