

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

Ю.Г. Полкунов

ПРЯМОЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Оренбургский государственный университет» для
обучающихся по образовательной программе высшего образования –
программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре
09.06.01 Информатика и вычислительная техника

Оренбург

2018

УДК 517.95(076.5)

ББК 22.161.6я7

П 51

Рецензент – профессор, доктор технических наук А.М. Пищухин

Полкунов Ю.Г.

П51 Прямой метод граничных элементов: методические указания / Ю.Г. Полкунов; Оренбургский гос. ун-т. - Оренбург: ОГУ, 2018. - 21с.

Методические указания содержат постановку задачи, краевые условия для дифференциальных уравнений с частными производными, основные соотношения прямого метода граничных элементов и алгоритмы реализации задач.

Методические указания по факультативной дисциплине «Методы граничных элементов» предназначены для обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 09.06.01 Информатика и вычислительная техника.

УДК 517.95(076.5)
ВБК 22.161.6я7

© Полкунов Ю.Г., 2018
© ОГУ, 2018

Содержание

Введение.....	4
1 Постановка и краевые условия	5
2 Основные соотношения прямого метода граничных элементов	7
2.1 Вычисление значения потенциала внутри моделируемой области.....	7
2.2 Вычисление значения потенциала на границе.....	8
2.3 Вычисление скорости потока внутри моделируемой области.....	8
2.4 Граничные интегральные уравнения общие для трех краевых задач	9
3 Метод граничных элементов в краевых задачах	11
3.1 Задача Дирихле.....	11
3.2 Задача Неймана	11
3.3 Смешанная краевая задача	11
3.4 Определение потенциала во внутренних точках моделируемой области для трех краевых задач	12
4 Алгоритмы решения задач прямым методом граничных элементов	13
4.1 Алгоритм решения задачи Дирихле.....	16
4.2 Алгоритм решения задачи Неймана.....	17
4.3 Алгоритм смешанной краевой задачи	18
Список использованных источников	21

Введение

Настоящие методические указания составлены в соответствии с содержанием рабочей программы по дисциплине «Методы граничных элементов».

Цель методических указаний - помочь аспиранту усвоить и разобраться в алгоритмах по реализации краевых задач прямым методом граничных элементов.

Данные методические указания позволяют использовать их для реализации математических моделей в диссертационных исследованиях.

1 Постановка и краевые условия

Решить уравнение Лапласа методом граничных элементов с краевыми условиями на границе (рисунок 1-3).

а) Задача Дирихле (первая основная краевая задача)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$p|_S = p^*, \quad (x, y) \in S,$$

где p^* - значение потенциала на границе.

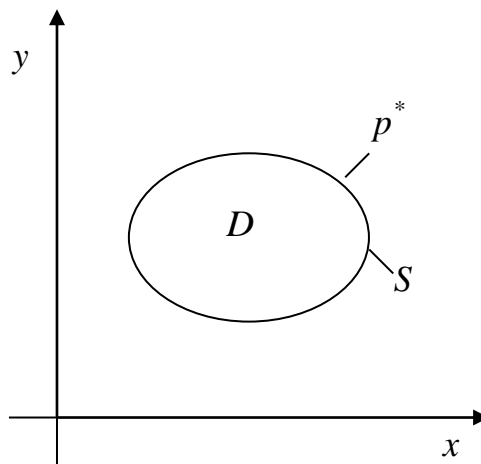


Рисунок 1 - Краевые условия задачи Дирихле

б) Задача Неймана (вторая основная краевая задача)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = q, (x, y) \in S,$$

где q - значение скорости нормального потока на границе.

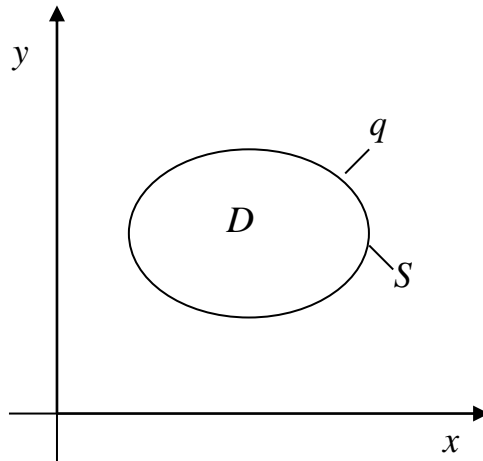


Рисунок 2 - Краевые условия задачи Неймана

в) Смешанная краевая задача

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

$$p|_S = p^*, (x, y) \in S_p,$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = q, (x, y) \in S_q.$$

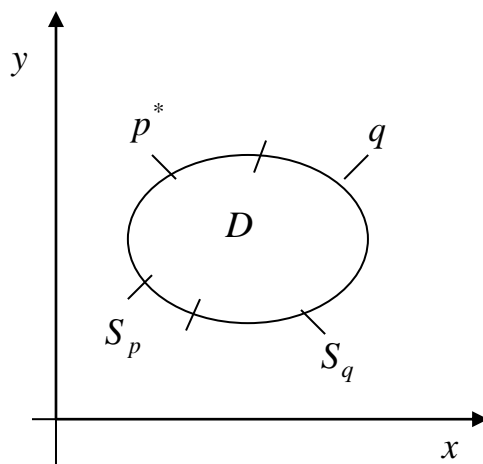


Рисунок 3 - Краевые условия смешанной задачи

2 Основные соотношения прямого метода граничных элементов

2.1 Вычисление значения потенциала внутри моделируемой области

$$p(\xi) = \int_S [p(x)F(x, \xi) - u(x)G(x, \xi)] dS(x), \quad x \in S, \quad \xi \in D, \quad (4)$$

где $x = (x_1, x_2)$;

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$;

$Ox_1x_2, O\xi_1\xi_2$ - декартовы системы координат;

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln r;$$

$$F(x, \xi) = \frac{r_1 n_1(x) + r_2 n_2(x)}{2\pi r^2};$$

$$r_1 = x_1 - \xi_1;$$

$$r_2 = x_2 - \xi_2;$$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2;$$

$p(\xi)$ - потенциал внутри моделируемой области;

$u(x)$ - скорость нормального потока на границе;

$p(x)$ - потенциал на границе области.

2.2 Вычисление значения потенциала на границе

$$\frac{1}{2} p(\xi_0) = \int_S [p(x)F(x, \xi_0) - u(x)G(x, \xi_0)] dS(x), \quad \xi_0, x \in S, \quad (5)$$

где $x = (x_1, x_2)$;

$\xi = (\xi_1^0, \xi_2^0)$;

$G(x, \xi_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln r$;

$F(x, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{r_1 n_1(x) + r_2 n_2(x)}{r^2}$;

$r_1 = x_1 - \xi_1^0$;

$r_2 = x_2 - \xi_2^0$;

$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = (x_1 - \xi_1^0)^2 + (x_2 - \xi_2^0)^2$;

$p(\xi_0)$ - потенциал на границе;

$u(x)$ - скорость нормального потока на границе;

$p(x)$ - потенциал на границе области.

2.3 Вычисление скорости потока внутри моделируемой области

$$u_1(\xi) = \frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi_1} = \int_S \left[p(x) \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi_1} - u(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi_1} \right] dS(x), \quad (6)$$

$$u_2(\xi) = \frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi_2} = \int_S \left[p(x) \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi_2} - u(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi_2} \right] dS(x),$$

$$\xi \in D, \quad x \in S,$$

ИЛИ

$$u_1(\xi) = \int_S [p(x)H_1(x, \xi) - u(x)F(x, \xi)] dS(x),$$

$$u_2(\xi) = \int_S [p(x)H_2(x, \xi) - u(x)F(x, \xi)] dS(x),$$

где $r_1 = x_1 - \xi_1$;

$$r_2 = x_2 - \xi_2;$$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2;$$

$$F(x, \xi) = \frac{r_1 n_1(x) + r_2 n_2(x)}{2\pi r^2};$$

$$H_1(x, \xi) = \left(\frac{k}{2\pi r^2} \right) \left[2r_1 \left(\frac{r_1 n_1(\xi) + r_2 n_2(\xi)}{r^2} \right) - n_1(\xi) \right] n_1(x);$$

$$H_2(x, \xi) = \left(\frac{k}{2\pi r^2} \right) \left[2r_2 \left(\frac{r_1 n_1(\xi) + r_2 n_2(\xi)}{r^2} \right) - n_2(\xi) \right] n_2(x);$$

$u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ - проекции вектора скорости потока внутри области на оси декартовой системы координат $O\xi_1$, $O\xi_2$ соответственно.

2.4 Граничные интегральные уравнения общие для трех краевых задач

$$\frac{1}{2} p_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N p_i \left[\frac{r_{1ij} n_{1i} + r_{2ij} n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i - \left[-\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N u_i \ln r \Delta S_i \right]$$

или

$$\frac{1}{2} p_j - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N p_i \left[\frac{r_{1ij} n_{1i} + r_{2ij} n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N u_i \ln r \Delta S_i \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}$$

где

$$F_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } i = j, \\ -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{r_{1ij}n_{1i} + r_{2ij}n_{2i}}{r^2} \right] & \text{при } i \neq j, \end{cases},$$

$$G_{ji} = \begin{cases} -\frac{\Delta S_i}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2}{\Delta S_i} \right) + 1 \right] & \text{при } i = j, \\ \frac{\Delta S_i}{2\pi} \ln r & \text{при } i \neq j, \end{cases},$$

$$r_{1ij} = x_i - x_j;$$

$$r_{2ij} = y_i - y_j;$$

$$r^2 = r_{1ij}^2 + r_{2ij}^2;$$

n_{1i} - проекция вектора нормали \bar{n} в i -ой граничной точке на ось OX ;

n_{2i} - проекция вектора нормали \bar{n} в i -ой граничной точке на ось OY ;

(x_i, y_i) - координата i -ой граничной точки;

(x_j, y_j) - координата j -ой граничной точки;

ΔS_i - длина i -ого граничного элемента;

p_i - потенциал заданный на границе;

u_i - скорость нормального потока на границе;

N - количество граничных элементов на границе.

3 Метод граничных элементов в краевых задачах

3.1 Задача Дирихле

Выражение (7) можно представить в следующем виде

$$\sum_{i=1}^N u_i G_{ji} = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji}, \quad (j = \overline{1, N}) \quad (8)$$

где p_i - заданный потенциал на границе;

u_i - неизвестная определяемая величина на границе.

3.2 Задача Неймана

Выражение (7) представляется для данной краевой задачи в виде

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, N}) \quad (9)$$

где u_i - заданный поток на границе;

p_i - неизвестный определяемый потенциал на границе.

3.3 Смешанная краевая задача

Выражение (7) для смешанной краевой задачи представляется следующим образом (рис. 3)

$$\sum_{i=1}^N u_i G_{ji} = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji}, \quad (j = \overline{1, N_1}) \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{N_1 + 1, N}),$$

где в первом уравнении на участке границы ($j = \overline{1, N_1}$) задан потенциал p_i , а во втором ($j = \overline{N_1 + 1, N}$) нормальная составляющая скорости потока u_i .

3.4 Определение потенциала во внутренних точках моделируемой области для трех краевых задач

$$p_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N p_i \left[\frac{r_{1ij}n_{1i} + r_{2ij}n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i - \left[-\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N u_i \ln r \Delta S_i \right],$$

$$p_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N p_i \left[\frac{r_{1ij}n_{1i} + r_{2ij}n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N u_i \ln r \Delta S_i, \quad (j = \overline{1, M}) \quad (11)$$

или

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M})$$

где

$$F_{ji} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r_{1ij}n_{1i} + r_{2ij}n_{2i}}{r^2} \right] \Delta S_i;$$

$$G_{ji} = \frac{1}{2\pi} [\ln r] \Delta S_i;$$

$$r_{1ij} = x_i - x_j;$$

$$r_{2ij} = y_i - y_j;$$

$$r^2 = r_{1ij}^2 + r_{2ij}^2;$$

n_{1j} - проекция вектора нормали \vec{n} в i -ой граничной точке на ось OX ;

- n_{2j} - проекция вектора нормали \bar{n} в i -ой граничной точке на ось OY ;
- (x_i, y_i) - координата i -ой граничной точки;
- (x_j, y_j) - координата j -ой внутренней точки;
- ΔS_i - длина i -ого граничного элемента;
- M - количество внутренних точек;
- p_i - определенный потенциал в i -ой граничной точке;
- u_i - определенная нормальная составляющая скорости потока в i -ой граничной точке;
- p_j - неизвестный потенциал, определяемый в j -ой внутренней точке.

4 Алгоритмы решения задач прямым методом граничных элементов

Пример

Определить распределение температуры в единичной пластине, когда

$$p|_S = \begin{cases} 50^0 & \text{при } y = 0, 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{на всей оставшей границе.} \end{cases}$$

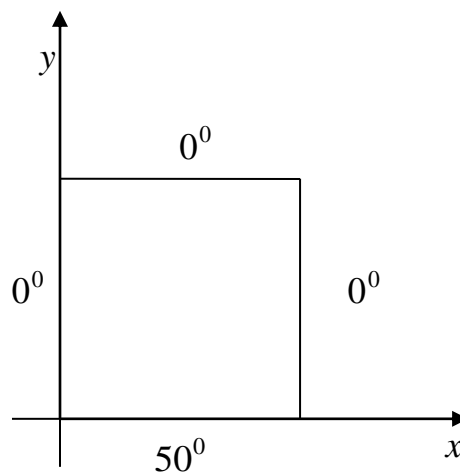


Рисунок 4 - Задание температуры на границе единичного

Пример разбивки границы на граничные элементы приведен на рисунке 5, а входные данные представлены в таблице 1.

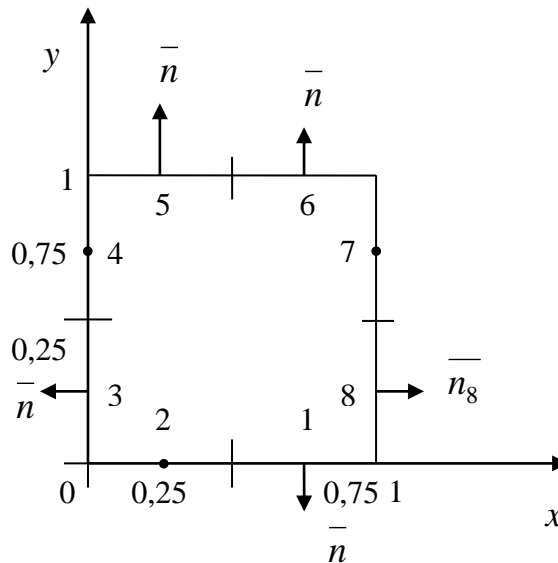


Рисунок 5 - Разбивка границы единичного квадрата на граничные элементы

Таблица 1 - Входные данные

N	x , см	y , см	ΔS , см	p , град	n_1	n_2
1	0,75	0	0,5	50	0	-1
2	0,25	0	0,5	50	0	-1
3	0	0,25	0,5	0	-1	0
4	0	0,75	0,5	0	-1	0
5	0,25	1	0,5	0	0	1
N	x , см	y , см	ΔS , см	p , град	n_1	n_2
6	0,75	1	0,5	0	0	1
7	1	0,75	0,5	0	1	0
8	1	0,25	0,5	0	1	0

Здесь:

N - количество граничных элементов;

(x, y) - координаты центров тяжести (середины) граничных элементов;

ΔS - длина граничного элемента;

p - значение температуры на сторонах квадрата;

n_1, n_2 - проекции вектора нормали на оси декартовой системы координат Ox, Oy .

Пример представления в области системы внутренних точек показан на рисунке 6, а в таблице 2 приведены входные данные координат внутренних точек.

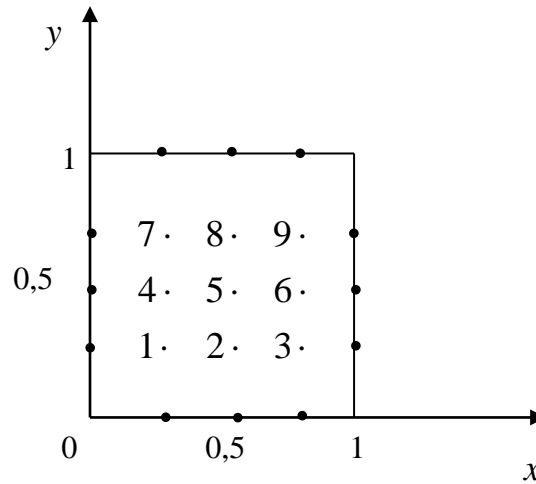


Рисунок 6 - Пример представления области в виде системы внутренних точек

Таблица 2 - Входные данные координат внутренних точек

M	$x, \text{ см}$	$y, \text{ см}$
1	0,25	0,25
2	0,5	0,25
3	0,75	0,25
4	0,25	0,5
5	0,5	0,5
6	0,75	0,5
7	0,25	0,75
8	0,5	0,75
9	0,75	0,75

Здесь:

M - количество внутренних точек;

(x, y) - координаты внутренних точек.

4.1 Алгоритм решения задачи Дирихле

Решить систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^N u_i G_{ji} = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji}, \quad (j = \overline{1, N}) \quad (8)$$

и определить значения потенциала во внутренних точках моделируемой области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (11)$$

а) Ввод входных данных, представленных в таблицах 1 и 2.

б) Формирование матрицы G_{ji} (7)

$$G_{ji} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & G_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix} = A.$$

с) Формирование вектор-столбца правой части системы линейных уравнений (7)

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N p_i F_{1i} \\ \sum_{i=1}^N p_i F_{2i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N p_i F_{Ni} \end{pmatrix}.$$

d) Решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

методом Гаусса.

e) Вычисление значений потенциала во внутренних точках области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (11)$$

f) Выдача результатов значений потенциала во внутренних точках моделируемой области p_j ($j = \overline{1, M}$).

4.2 Алгоритм решения задачи Неймана

Определить распределение температуры в единичной пластине (рис. 4), когда

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = u = \begin{cases} 10 & \text{при } y = 0, 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{на всей оставшейся границе.} \end{cases}$$

Решить систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, N}) \quad (9)$$

и определить значения потенциала во внутренних точках моделируемой области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (11)$$

Алгоритм расчета выполняется аналогично как для задачи Дирихле, а входные данные представлены в таблицах 1 и 2.

4.3 Алгоритм смешанной краевой задачи

Определить распределение температуры в единичной пластине (рис. 4), когда

$$p|_S = \begin{cases} 50^0 & \text{при } x = 0, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{при } y = 1, 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_S = u = \begin{cases} 10 & \text{при } x = 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{при } y = 0, 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решить систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^N u_i G_{ji} = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji}, \quad (j = \overline{1, N_1}), \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N p_i F_{ji} = \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{N_1 + 1, N}).$$

и определить значения потенциала во внутренних точках моделируемой области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (11)$$

a) Ввод входных данных, представленных в таблицах 1 и 2.

b) Формирование матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N1,1} & G_{N1,2} & \dots & G_{N1+N} \\ F_{N1,1} & F_{N1+1,2} & \dots & F_{N1+1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1} & F_{N2} & \dots & F_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1,N} & A_{N1,2} & \dots & A_{N1,N} \\ A_{N1+1,1} & A_{N1+1,2} & \dots & A_{N1+1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}.$$

c) Формирование вектор-столбца правой части системы линейных уравнений

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{N1} \\ b_{N1+1} \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N p_i F_{1i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N p_i F_{N1i} \\ \sum_{i=1}^N u_i G_{N1+1,i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N u_i G_{Ni} \end{pmatrix}.$$

d) Обозначение неизвестных величин

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_{N1} \\ \dots \\ z_{N1+1} \\ \dots \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{N1} \\ \dots \\ p_{N1+1} \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix}.$$

е) Решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

методом Гаусса.

ф) Вычисление значений потенциала во внутренних точках области

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i F_{ji} + \sum_{i=1}^N u_i G_{ji}, \quad (j = \overline{1, M}). \quad (11)$$

г) Выдача значений потенциала $p_j (j = \overline{1, M})$ во внутренних точках моделируемой области D .

Список использованных источников

1. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. - М.: Мир, 1984. - 494 с.
2. Власова, Е.А. Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 700 с.