

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра машиноведения

Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов

# **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.04 Авиастроение

Оренбург  
2018

УДК 531.011  
ББК 22.213я73  
К88

Рецензент – доцент, кандидат технических наук Е.В. Дырдина

**Кудина, Л.И.**

К88

Исследование вынужденных колебаний механической системы с тремя степенями свободы: методические указания / Л. И. Кудина; А. А. Гаврилов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 62 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения о нерезонансных вынужденных колебаниях механических систем с конечным числом степеней свободы без учета сил сопротивления при действии гармонического внешнего возбуждения, общие рекомендации по решению задач о вынужденных колебаниях механических систем, задачи для самостоятельного решения и пример исследования вынужденных колебаний системы с тремя степенями свободы с использованием системы Mathcad.

Предназначены для самостоятельной работы обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.04 Авиастроение при углубленном изучении дисциплины «Аналитическая динамика и теория колебаний». Будут полезны студентам транспортных, энергетических, машиностроительных направлений подготовки всех форм обучения при изучении специальных курсов, посвященных теории колебаний механических систем.

**Методические указания подготовлены в рамках реализации проекта по совершенствованию содержания и технологий целевого обучения студентов в интересах организаций оборонно-промышленного комплекса («Новые кадры ОПК–2017»).**

УДК 531.011  
ББК 22.213я73

© Кудина Л.И.,  
Гаврилов А.А., 2018  
© ОГУ, 2018

## Содержание

Введение .....	4
1 Краткие теоретические сведения .....	5
1.1 Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы с тремя степенями свободы и их общее решение .....	5
1.2 Решение дифференциальных уравнений вынужденных колебаний в главных координатах .....	10
1.3 Решение задач вынужденных колебаний механической системы матричным способом .....	14
1.4 Общие рекомендации по решению задач на вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы матричным способом .....	18
2 Вопросы для самоконтроля .....	19
3 Задачи для самостоятельного решения .....	21
4 Пример исследования вынужденных колебаний механической системы с тремя степенями свободы .....	24
5 Литература, рекомендуемая для изучения темы .....	62

## Введение

Изучение свойств колебательных движений необходимо для понимания природы многих явлений, с которыми инженеру приходится сталкиваться в процессе проектирования и эксплуатации летательных аппаратов (ЛА).

Реальный летательный аппарат представляет собой систему с бесконечно большим числом степеней свободы, а значит, и с бесконечным числом собственных частот и форм колебаний. При расчетах реальная конструкция заменяется идеализированной расчетной схемой, число степеней свободы которой имеет конечное значение. Например, для самолетов с массивным фюзеляжем при колебаниях крыльев фюзеляж практически остается неподвижным. Это обстоятельство позволяет при исследовании колебаний схематизировать крыло жестко заземленной консольной балкой или пластиной с сосредоточенными массами, упруго связанными между собой. Аналогичная картина наблюдается при колебаниях рулей, тяг рулевого управления, панелей обшивки и других элементов.

Причиной возникновения вынужденных колебаний ЛА являются периодические возбуждающие нагрузки, вызываемые неуравновешенностью вращающихся масс двигателя, работой силовой установки, срывным обтеканием некоторых частей корпуса ЛА.

Несмотря на различную физическую природу вынужденных колебаний, они описываются одинаковыми математическими уравнениями, следовательно, и их основные особенности будут одними и теми же.

В настоящих методических указаниях рассматриваются вынужденные колебания механических систем с тремя степенями свободы как частный случай систем, имеющих конечное число степеней свободы. Задачи, предлагаемые для самостоятельного решения, могут быть использованы в качестве заданий с элементами научного исследования при углубленном изучении дисциплины «Аналитическая динамика и теория колебаний».

# 1 Краткие теоретические сведения

## 1.1 Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы с тремя степенями свободы и их общее решение

Рассмотрим консервативную механическую систему материальных точек с голономными стационарными связями, имеющую три степени свободы. Будем считать, что система находится в положении устойчивого равновесия. Так как система имеет три степени свободы, то ее положение можно однозначно определить заданием трех обобщенных координат  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , которые будем отсчитывать от положения устойчивого равновесия.

Предположим, что на точки системы действуют потенциальные восстанавливающие силы  $\bar{F}_k^{\Pi}$  и возмущающие силы  $\bar{F}_k^B(t)$ , являющиеся некоторыми заданными функциями времени.

Получим дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах, воспользовавшись уравнениями Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad (1.1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;

$Q_i$  – обобщенная сила, соответствующая выбранной обобщенной координате  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Обобщенные силы  $Q_i$ , соответствующие выбранным обобщенным координатам  $q_i$ , представим в виде:

$$Q_i = Q_i^{\Pi} + Q_i^B(t), \quad (1.2)$$

где  $Q_i^\Pi$  – составляющая обобщенной силы, обусловленная действием потенциальных сил  $\bar{F}_k^\Pi$ ;

$Q_i^B(t)$  – составляющая обобщенной силы, обусловленная действием возмущающих сил  $\bar{F}_k^B(t)$ .

Из курса теоретической механики известно [1], что *составляющая обобщенной силы от действия потенциальных сил равна взятой с противоположным знаком частной производной от потенциальной энергии по обобщенной координате:*

$$Q_i^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.3)$$

где  $\Pi(q_1, q_2, q_3)$  – потенциальная энергия системы.

С учетом выражений (1.2) и (1.3) дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (1.1) примут вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i^B(t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.4)$$

Составляющая обобщенных сил, обусловленная действием на систему возмущающих сил  $\bar{F}_k^B(t)$ , определяется выражением:

$$Q_i^B(t) = \sum_{k=1}^n \left( \bar{F}_k^B(t) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.5)$$

где  $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, q_3)$  – радиус-вектор точки приложения силы  $\bar{F}_k^B(t)$ ;

$n$  – число возмущающих сил  $\bar{F}_k^B(t)$ .

Как известно из курса теоретической механики [1], с точностью до величин

второго порядка малости *кинетическая энергия механической системы является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей:*

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (1.6)$$

где  $s$  – число степеней свободы системы;

$a_{ij}$  – обобщенные коэффициенты инерции, характеризующие инертность механической системы, причем  $a_{ij} = a_{ji}$ .

*Потенциальная энергия консервативной механической системы с указанной степенью точности является однородной квадратичной формой обобщенных координат:*

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^s c_{ij} q_i q_j, \quad (1.7)$$

где  $c_{ij}$  – обобщенные коэффициенты жесткости, характеризующие упругие свойства механической системы, причем  $c_{ij} = c_{ji}$ .

Заметим, что значения и размерности обобщенных коэффициентов инерции  $a_{ij}$  и обобщенных коэффициентов жесткости  $c_{ij}$  зависят от выбранных обобщенных координат  $q_i$ .

Обобщенные коэффициенты жесткости определяются соотношениями:

$$c_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, s). \quad (1.8)$$

Здесь и далее обозначение  $(\dots)_0$  показывает, что соответствующее выражение

вычисляется в положении равновесия при  $q_i = q_j = 0$ .

Для рассматриваемой системы с тремя степенями свободы выражения для кинетической (1.6) и потенциальной (1.7) энергий примут соответственно вид:

$$T = \frac{1}{2} \left( a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + a_{33} \dot{q}_3^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2a_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right), \quad (1.9)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + c_{33} q_3^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + 2c_{13} q_1 q_3 + 2c_{23} q_2 q_3 \right). \quad (1.10)$$

Подставляя выражения (1.9), (1.10) в уравнения (1.4) и учитывая, что коэффициенты  $a_{ij}$  и  $c_{ij}$  постоянны, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial q_3} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 + a_{13} \dot{q}_3;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{12} \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2 + a_{23} \dot{q}_3; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = a_{13} \dot{q}_1 + a_{23} \dot{q}_2 + a_{33} \dot{q}_3;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + a_{13} \ddot{q}_3; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = a_{12} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + a_{23} \ddot{q}_3;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = a_{13} \ddot{q}_1 + a_{23} \ddot{q}_2 + a_{33} \ddot{q}_3; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = c_{11} q_1 + c_{12} q_2 + c_{13} q_3;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = c_{12} q_1 + c_{22} q_2 + c_{23} q_3; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = c_{13} q_1 + c_{23} q_2 + c_{33} q_3;$$



$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + a_{13}\ddot{q}_3 = -(c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}q_3) + Q_1^B(t); \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + a_{23}\ddot{q}_3 = -(c_{12}q_1 + c_{22}q_2 + c_{23}q_3) + Q_2^B(t); \\ a_{13}\ddot{q}_1 + a_{23}\ddot{q}_2 + a_{33}\ddot{q}_3 = -(c_{13}q_1 + c_{23}q_2 + c_{33}q_3) + Q_3^B(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + a_{13}\ddot{q}_3 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}q_3 = Q_1^B(t); \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + a_{23}\ddot{q}_3 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 + c_{23}q_3 = Q_2^B(t); \\ a_{13}\ddot{q}_1 + a_{23}\ddot{q}_2 + a_{33}\ddot{q}_3 + c_{13}q_1 + c_{23}q_2 + c_{33}q_3 = Q_3^B(t). \end{cases} \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) являются дифференциальными уравнениями вынужденных колебаний механической системы с тремя степенями свободы в обобщенных координатах без учета сопротивления.

Общее решение системы уравнений (1.11) находится как сумма общего решения соответствующей системы однородных дифференциальных уравнений и частного решения системы (1.11):

$$q_i = q_i^c + q_i^e \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.12)$$

Общее решение  $q_i^c$  ( $i = 1, 2, 3$ ) линейной системы однородных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$q_i^c = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \sin(k_j t) + B_{ij} \cos(k_j t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.13)$$

где  $A_{ij}, B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – некоторые произвольные постоянные, определяемые

из начальных условий движения;

$k_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – частоты свободных колебаний системы.

Общее решение однородных дифференциальных уравнений  $q_i^c$  ( $i = 1, 2, 3$ ) представляет свободные колебания, которые при наличии сопротивления быстро затухают. Поэтому практический интерес представляет именно частное решение  $q_i^e$  ( $i = 1, 2, 3$ ), определяющее вынужденные колебания системы.

## 1.2 Решение дифференциальных уравнений вынужденных колебаний в главных координатах

Исследование вынужденных колебаний механических систем существенно упрощается, если перейти от произвольных обобщенных координат  $q_i$  к главным координатам  $\xi_i$ . Движение системы в данном случае можно представить независимыми друг от друга дифференциальными уравнениями, что существенно упрощает их решение.

*Главными (нормальными) координатами* механической системы называются обобщенные координаты, выбранные таким образом, чтобы выражения для кинетической (1.6) и потенциальной (1.7) энергий содержали только квадраты обобщенных координат и скоростей.

Для системы с тремя степенями свободы выражения для кинетической и потенциальной энергий в главных координатах будут соответственно иметь вид:

$$T = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{11}\dot{\xi}_1^2 + \tilde{a}_{22}\dot{\xi}_2^2 + \tilde{a}_{33}\dot{\xi}_3^2); \quad \Pi = \frac{1}{2}(\tilde{c}_{11}\xi_1^2 + \tilde{c}_{22}\xi_2^2 + \tilde{c}_{33}\xi_3^2). \quad (1.14)$$

Очевидно, что значения обобщенных коэффициентов инерции и жесткости  $\tilde{a}_{11}$ ,  $\tilde{a}_{22}$ ,  $\tilde{a}_{33}$ ,  $\tilde{c}_{11}$ ,  $\tilde{c}_{22}$  и  $\tilde{c}_{33}$  отличаются от коэффициентов квадратичных форм (1.9) и (1.10)  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{22}$  и  $c_{33}$ .

Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергий (1.14) в уравнения Лагранжа (1.4), получим дифференциальные уравнения движения механической рассматриваемой системы в главных координатах:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_1} = \frac{\partial T}{\partial \xi_2} = \frac{\partial T}{\partial \xi_3} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_1} = \tilde{a}_{11}\dot{\xi}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_2} = \tilde{a}_{22}\dot{\xi}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_3} = \tilde{a}_{33}\dot{\xi}_3;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_1} \right) = \tilde{a}_{11}\ddot{\xi}_1; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_2} \right) = \tilde{a}_{22}\ddot{\xi}_2; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_3} \right) = \tilde{a}_{33}\ddot{\xi}_3;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} = \tilde{c}_{11}\xi_1; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2} = \tilde{c}_{22}\xi_2; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_3} = \tilde{c}_{33}\xi_3;$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}\ddot{\xi}_1 = -\tilde{c}_{11}\xi_1 + \tilde{Q}_1^B(t); \\ \tilde{a}_{22}\ddot{\xi}_2 = -\tilde{c}_{22}\xi_2 + \tilde{Q}_2^B(t); \\ \tilde{a}_{33}\ddot{\xi}_3 = -\tilde{c}_{33}\xi_3 + \tilde{Q}_3^B(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}\ddot{\xi}_1 + \tilde{c}_{11}\xi_1 = \tilde{Q}_1^B(t); \\ \tilde{a}_{22}\ddot{\xi}_2 + \tilde{c}_{22}\xi_2 = \tilde{Q}_2^B(t); \\ \tilde{a}_{33}\ddot{\xi}_3 + \tilde{c}_{33}\xi_3 = \tilde{Q}_3^B(t). \end{cases} \quad (1.15)$$

Полученные уравнения движения системы (1.15) в главных координатах представляют собой три независимых линейных уравнения второго порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную обобщенную координату.

Общее решение системы уравнений (1.15), как и в случае системы уравнений

(1.11), находится как сумма общего решения соответствующей системы однородных дифференциальных уравнений и частного решения системы:

$$\xi_i = \xi_i^c + \xi_i^b \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.16)$$

Общее решение линейной системы однородных дифференциальных уравнений  $\xi_i^c$  ( $i = 1, 2, 3$ ) представляет собой главные свободные колебания и имеет вид:

$$\xi_i^c = \tilde{A}_i \cos(k_i t) + \tilde{B}_i \sin(k_i t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.17)$$

где  $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – некоторые произвольные постоянные, определяемые из начальных условий движения;

$k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – частоты свободных колебаний системы, являющиеся физическими константами системы и потому совпадающими с частотами в выражении (1.13).

Общую последовательность определения частного решения  $\xi_i^b$  ( $i = 1, 2, 3$ ) рассмотрим на примере действия возмущающих сил  $F_i^B(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), изменяющихся по гармоническому закону. Такие силы наиболее часто встречаются в различных областях техники и потому представляют наибольший интерес.

Пусть обобщенные возмущающие силы (1.5) также будут гармониками вида:

$$\tilde{Q}_i^B(t) = \tilde{Q}_{i0} \sin(u_i t + \alpha_i) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.18)$$

где  $Q_{i0}$  – амплитудное значение обобщенной возмущающей силы;

$u_i$  – частота обобщенной возмущающей силы;

$\alpha_i$  – начальная фаза.

В случае отсутствия резонанса частное решение системы (1.15) будем искать в

виде:

$$\xi_i^6(t) = \xi_{i0}^6 \sin(u_i t + \alpha_i) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.19)$$

где  $\xi_{i0}^6$  – постоянные коэффициенты, подлежащие определению (в дальнейшем, амплитуды главных координат).

После подстановки частного решения (1.19) в уравнения (1.15) получим систему трех независимых алгебраических уравнений относительно амплитуд главных координат  $\xi_{i0}^6$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{cases} -p_1^2 \tilde{a}_{11} \xi_{10}^6 + \tilde{c}_{11} \xi_{10}^6 = \tilde{Q}_{10}; \\ -p_2^2 \tilde{a}_{22} \xi_{20}^6 + \tilde{c}_{22} \xi_{20}^6 = \tilde{Q}_{20}; \\ -p_3^2 \tilde{a}_{33} \xi_{30}^6 + \tilde{c}_{33} \xi_{30}^6 = \tilde{Q}_{30}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Откуда:

$$\begin{cases} \xi_{10}^6 = \frac{\tilde{Q}_{10}}{\tilde{c}_{11} - p_1^2 \tilde{a}_{11}}; \\ \xi_{20}^6 = \frac{\tilde{Q}_{20}}{\tilde{c}_{22} - p_2^2 \tilde{a}_{22}}; \\ \xi_{30}^6 = \frac{\tilde{Q}_{30}}{\tilde{c}_{33} - p_3^2 \tilde{a}_{33}}. \end{cases} \quad (1.21)$$

После получения частного решения (1.21) может быть осуществлен обратный переход к обобщенным координатам (1.12).

Система неоднородных дифференциальных уравнений движения (1.15) второ-

го порядка в главных координатах является линейной. Поэтому в случае, если обобщенные силы в главных координатах (1.18) представляют собой сумму гармоник различной частоты, частное решение  $\xi_i^g(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) можно найти как сумму отдельных решений вида (1.19), соответствующих каждой частоте возмущающих воздействий.

### 1.3 Решение задач вынужденных колебаний механической системы матричным способом

Запишем уравнения (1.11) в матричной форме.

$$\mathbf{A}\{\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{q\} = \{Q^B\}. \quad (1.22)$$

Здесь матрица коэффициентов инерции (матрица инерции)

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.23)$$

Матрица коэффициентов жесткости (матрица жесткости)

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.24)$$

Вектор-столбец обобщенных возмущающих сил

$$\{Q^B\} = \begin{Bmatrix} Q_1^B(t) \\ Q_2^B(t) \\ Q_3^B(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{10}^B \sin(p_1 t + \delta_1) \\ Q_{20}^B \sin(p_2 t + \delta_2) \\ Q_{30}^B \sin(p_3 t + \delta_3) \end{Bmatrix}, \quad (1.25)$$

где  $Q_{i0}^B$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – амплитуда  $i$ -той обобщенной возмущающей силы;

$p_i$  – частота обобщенной возмущающей силы;

$\delta_i$  – начальная фаза.

Векторы-столбцы обобщенных координат  $\{q\}$  и обобщенных ускорений  $\{\ddot{q}\}$  имеют соответственно вид:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.26)$$

Умножив уравнения (1.22) слева на матрицу, обратную матрице инерции, получим уравнения движения в виде:

$$\{\ddot{q}\} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\{q\} = \mathbf{A}^{-1}\{Q^B\}. \quad (1.27)$$

Переход от обобщенных координат  $\{q\}$  к главным осуществим с помощью соотношения [3]:

$$\{q\} = \mathbf{M}\{\xi\}, \quad (1.28)$$

где  $\{\xi\}$  – вектор-столбец главных координат, имеющий компонентами нормальные координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ;

$\mathbf{M}$  – матрица преобразования, столбцами которой будут составляющие

собственных векторов (матрица форм колебаний [6]).

Обратный переход от главных координат, как следует из выражения (1.28), будет иметь вид:

$$\{\xi\} = \mathbf{M}^{-1}\{q\}. \quad (1.29)$$

Представим частотную матрицу  $\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$  в виде [6]:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{k}^2) \cdot \mathbf{M}^{-1}, \quad (1.30)$$

где  $\mathbf{D}(\mathbf{k}^2)$  – диагональная матрица, компонентами которой являются квадраты частот собственных колебаний системы.

С учетом соотношения (1.30) уравнения (1.27) после умножения слева на матрицу  $\mathbf{M}^{-1}$  примут вид:

$$\mathbf{M}^{-1}\{\ddot{q}\} + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{k}^2) \cdot \mathbf{M}^{-1}\{q\} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\{Q^B\},$$

или с учетом выражения (1.29)

$$\{\ddot{\xi}\} + \mathbf{D}(\mathbf{k}^2)\{\xi\} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\{Q^B\}. \quad (1.31)$$

Уравнения (1.31) представляют собой матричную форму записи дифференциальных уравнений движения системы в главных координатах.

Запишем матричное уравнение (1.31) в виде:

$$\{\ddot{\xi}\} + \mathbf{D}(\mathbf{k}^2)\{\xi\} = \{\tilde{Q}\} \sin(ut + \alpha), \quad (1.32)$$



где  $\{\tilde{Q}\}$  – матрица-столбец амплитуд обобщенного внешнего воздействия в главных координатах;

$u$  – частота обобщенного внешнего воздействия;

$\alpha$  – начальная фаза.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1.32) будем искать в виде, соответствующем виду правой части уравнения:

$$\{\xi\beta(\tilde{Q}, u)\} = \{F\} \sin(ut + \alpha), \quad (1.33)$$

где  $\{F\}$  – матрица-столбец амплитуд главных координат (вынужденных колебаний).

После подстановки (1.33) в уравнение (1.32) и преобразований получим:

$$\{F(\tilde{Q}, u)\} = [\mathbf{D}(\mathbf{k}^2) - u^2 \mathbf{E}]^{-1} \cdot \{\tilde{Q}\}, \quad (1.34)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица вида

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

В результате частное решение (1.33), определяющее вынужденные колебания в главных координатах, будет иметь вид:

$$\{\xi\beta(\tilde{Q}, u)\} = [\mathbf{D}(\mathbf{k}^2) - u^2 \mathbf{E}]^{-1} \cdot \{\tilde{Q}\} \cdot \sin(ut + \alpha). \quad (1.35)$$

## 1.4 Общие рекомендации по решению задач на вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы матричным способом

Исследование вынужденных колебаний механических систем с конечным числом степеней свободы представляет собой сложную вычислительную задачу. Поэтому при решении подобных задач рекомендуется в полной мере использовать возможности современных систем компьютерной математики. Среди последних особого внимания заслуживает система Mathcad, во-первых, потому что использование системы не требует изучения специальных языков программирования, а во-вторых, благодаря широчайшим возможностям визуализации получаемых результатов.

Укажем общую последовательность решения задач на вынужденных колебаний консервативных механических систем с  $S$  степенями свободы при отсутствии резонанса:

- 1 Выбрать обобщенные координаты системы  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ).
- 2 Выяснить физический смысл обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ).
- 3 Составить выражение для кинетической энергии системы  $T$  как функции обобщенных скоростей в виде (1.6).
- 4 Определить обобщенные коэффициенты инерции  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, S$ ), являющиеся компонентами матрицы инерции  $\mathbf{A}$  (1.23).
- 5 Составить выражение для потенциальной энергии системы  $\Pi$  как функции обобщенных скоростей в виде (1.7).
- 6 Определить обобщенные коэффициенты жесткости  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, S$ ), являющиеся компонентами матрицы жесткости  $\mathbf{C}$  (1.24).
- 7 Определить обобщенные возмущающие силы  $Q_i^B(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ), соответствующие выбранным обобщенным координатам  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ).
- 8 Составить дифференциальные уравнения движения системы в виде (1.27).
- 9 Найти собственные частоты колебаний системы, определив собственные

значения (квадраты собственных частот) частотной матрицы  $\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ .

10 Вычислить матрицу преобразования  $\mathbf{M}$ , как матрицу собственных векторов частотной матрицы  $\mathbf{K}$ .

11 Перейти от дифференциальных уравнений движения в произвольно выбранных обобщенных координатах (1.27) к дифференциальным уравнениям движения системы в главных координатах в виде (1.31), используя для перехода соотношение (1.29).

12 Задавшись частным решением полученной системы дифференциальных уравнений в главных координатах в виде (1.17), найти значения амплитуд главных координат (1.21).

13 Выполнить обратный переход от главных координат к обобщенным координатам  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ) с помощью соотношений (1.28).

Подробный ход решения задач будет рассмотрен в пункте 4 Пример исследования вынужденных колебаний механической системы с тремя степенями свободы.

## 2 Вопросы для самоконтроля

1 Какой вид имеют выражения для кинетической и потенциальной энергий системы с тремя степенями свободы в обобщенных координатах?

2 Какой вид имеют дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы с тремя степенями свободы?

3 Какое упрощение вносит использование главных координат в исследование вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы?

4 Изменяются ли компоненты матрицы инерции  $\mathbf{A}$  и матрицы жесткости  $\mathbf{C}$  при переходе к главным координатам?

5 Какой физический смысл имеет матрица преобразования  $\mathbf{M}$ ? Как она вычисляется?

6 Как осуществляется переход от произвольных обобщенных координат к

главным и наоборот?

7 Какой вид имеют выражения для кинетической и потенциальной энергий системы с конечным числом степеней свободы в главных координатах?

8 Какой вид имеют дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы в главных координатах?

9 Какой вид имеет общее решение дифференциальных уравнений движения системы при действии внешнего возмущения?

10 Какой вид имеет частное решение дифференциальных уравнений вынужденных колебаний в произвольно выбранных обобщенных координатах при гармоническом внешнем возмущении?

11 Какой вид имеет частное решение дифференциальных уравнений вынужденных колебаний в главных координатах при гармоническом внешнем возмущении?

12 Зависит ли амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий движения?

13 Как записываются уравнения вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы в матричной форме?

14 Как вычисляется частотная матрица  $\mathbf{K}$ ?

15 Какие физические величины являются собственными значениями частотной матрицы  $\mathbf{K}$ ?

16 По какому закону изменяется каждая из главных координат системы в случае гармонического внешнего возмущения?

### 3 Задачи для самостоятельного решения

Для механической системы с тремя степенями свободы при действии периодических возмущающих сил  $F_i(t) = F_{i0} \sin(\omega_i t)$  и возмущающих моментов  $M_i(t) = M_{i0} \sin(\omega_i t)$  требуется:

1) составить систему дифференциальных уравнений движения в выбранных обобщенных координатах, пренебрегая силами сопротивления и массами пружин;

2) получить дифференциальные уравнения движения механической системы в главных координатах;

3) построить графики вынужденных колебаний и соответствующие фазовые траектории в обобщенных и главных координатах на произвольно выбранном интервале времени;

4) разложить вынужденные колебания по каждой обобщенной координате на главные;

5) найти общее решение системы дифференциальных уравнений движения системы в обобщенных координатах (при нулевых начальных условиях);

б) проанализировать и сравнить полученные результаты.

Схемы механических систем в положении равновесия изображены на рисунках 1 – 2. Необходимые для решения исходные данные приведены в таблице 1.

Исходные данные для решения задач выбираются по двузначному шифру: первая цифра – номер условия в таблице 1, вторая цифра – номер схемы на рисунках 1 – 2.

Диски, для которых не указан радиус инерции, считать сплошными однородными, стержни – тонкими однородными. Качение дисков происходит без проскальзывания. В положении равновесия все нити между телами системы натянуты и не проскальзывают по блокам. Пружины с коэффициентами жесткости  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  в состоянии покоя системы деформированы (растянуты или сжаты) соответственно на величины  $f_{cm1}$ ,  $f_{cm2}$  и  $f_{cm3}$ .

Частоты внешних возмущающих воздействий принять равными:

$$p_1 = 1,2k_1; \quad p_2 = 0,6(k_1 + k_2); \quad p_3 = 0,7k_3;$$

где  $k_1 > k_2 > k_3$  – частоты собственных колебаний системы.

Амплитуды внешних воздействий определяются соотношениями:

$$F_{i0} = F_0 \cdot 0,8i; \quad M_{i0} = M_0 \cdot 1,2i;$$

где  $i$  – порядковый номер тела, к которому приложено соответствующее воздействие.

Таблица 1 – Исходные данные

Номер условия	Массы тел, кг			Коэффициенты жесткости пружин, Н/см			Расстояние $l$ , м	Амплитуды внешних воздействий	
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$		$F_0, Н$	$M_0, Нм$
<b>1</b>	6	4	8	30	40	30	1,2	10	6
<b>2</b>	8	5	10	10	25	5	1,5	12	15
<b>3</b>	4	2	5	15	20	40	1,8	14	8
<b>4</b>	4	3	8	40	20	-	2,6	8	12
<b>5</b>	2	7	5	65	55	45	2,0	6	10
<b>6</b>	10	15	12	80	40	50	3,0	4	12
<b>7</b>	12	6	5	60	30	50	2,5	20	8
<b>8</b>	9	12	6	35	70	20	2,2	18	6
<b>9</b>	12	8	4	20	30	25	1,4	25	10
<b>0</b>	8	4	5	40	30	60	1,6	5	24

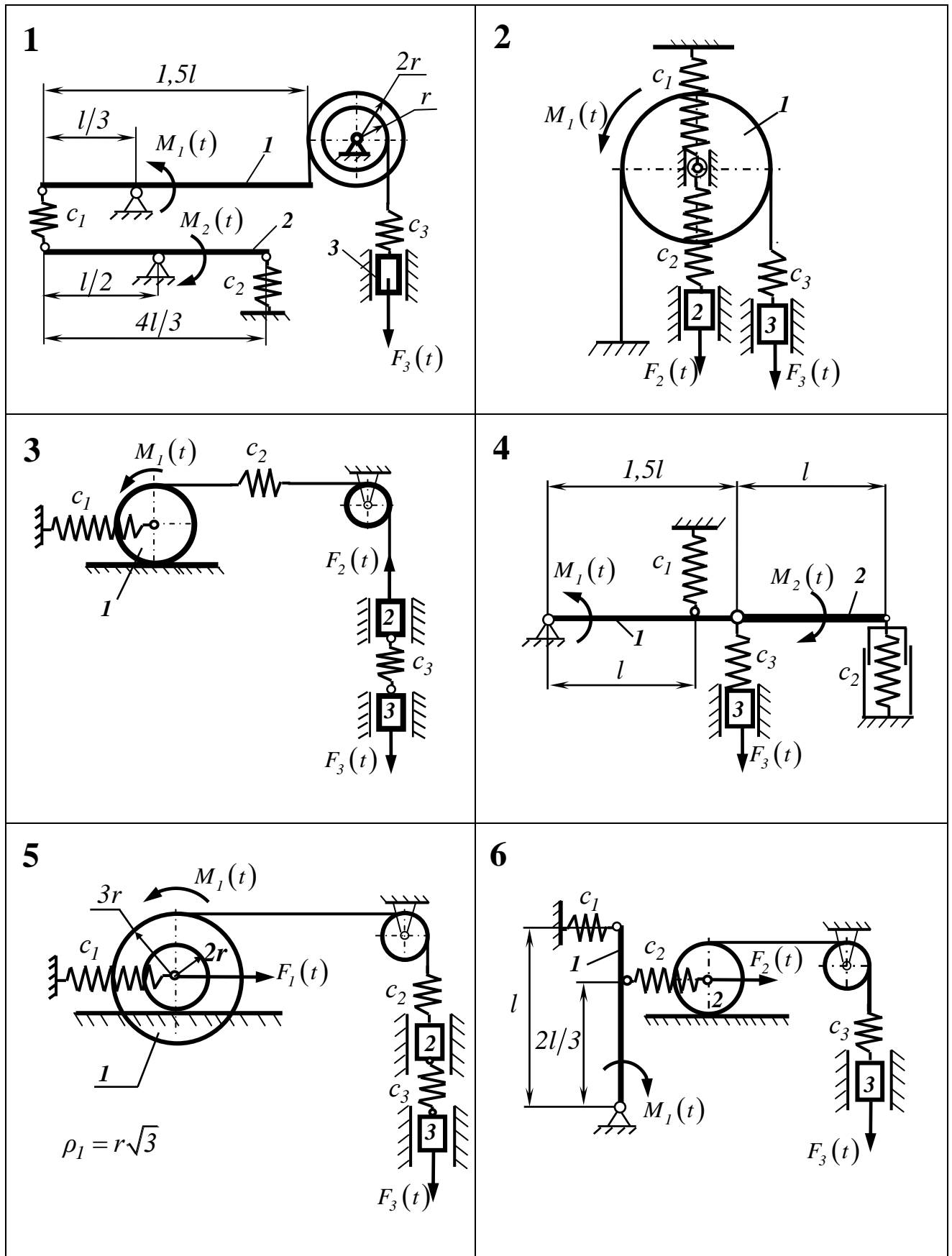


Рисунок 1

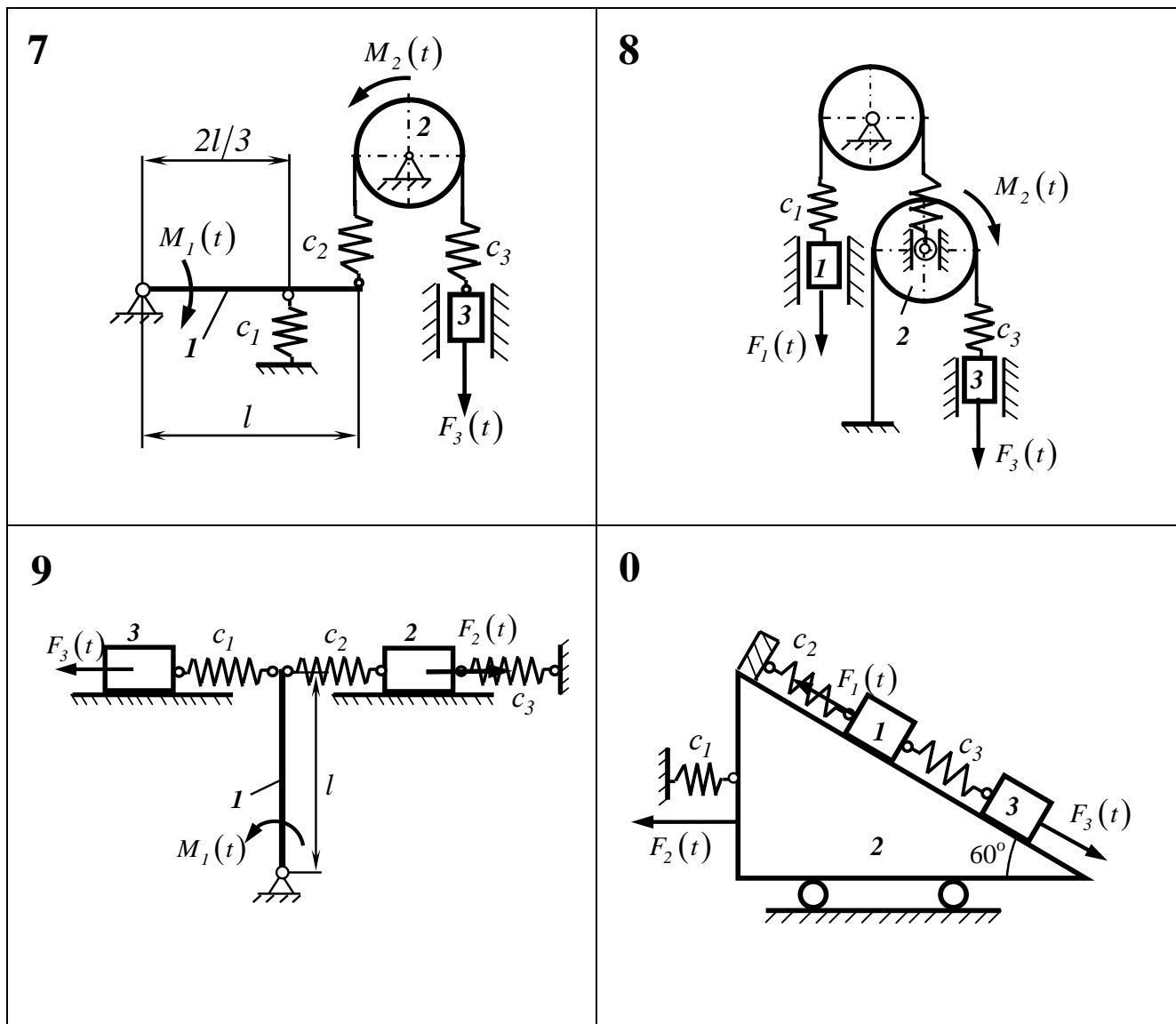


Рисунок 2

#### 4 Пример исследования вынужденных колебаний механической системы с тремя степенями свободы

Механическая система состоит из груза  $1$  и неоднородного диска  $2$ , к центру которого шарнирно прикреплен однородный стержень  $3$  длиной  $l$  (рисунок 3). На тела системы действуют возмущающие силы  $F_1(t) = F_{10} \sin(p_1 t)$ ,  $F_2(t) = F_{20} \sin(p_2 t)$  и возмущающий момент  $M_3(t) = M_{30} \sin(p_3 t)$ . Радиус инерции диска  $2$  равен  $\rho_2$ . Массы тел соответственно равны  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ . В состоянии покоя



стержень занимает вертикальное положение. Пружины с коэффициентами жесткости  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  в состоянии покоя системы деформированы (растянуты или сжаты) соответственно на величины  $f_{cm1}$ ,  $f_{cm2}$  и  $f_{cm3}$ .

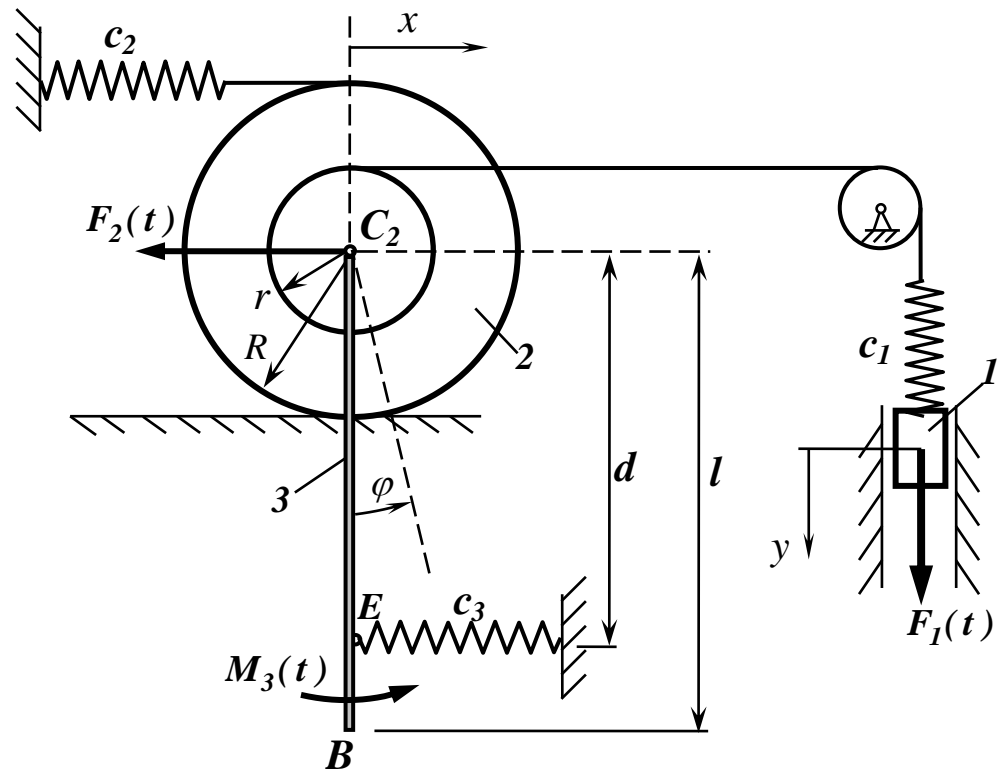


Рисунок 3

Для заданной механической системы требуется:

- 1) составить систему дифференциальных уравнений движения в выбранных обобщенных координатах, пренебрегая силами сопротивления и массами пружин;
- 2) получить дифференциальные уравнения движения механической системы в главных координатах;

3) построить графики вынужденных колебаний и соответствующие фазовые траектории в обобщенных и главных координатах на произвольно выбранном интервале времени;

4) разложить вынужденные колебания по каждой обобщенной координате на главные;

5) найти решение системы дифференциальных уравнений движения системы в обобщенных и главных координатах (при нулевых начальных условиях);

б) проанализировать и сравнить полученные результаты.

*Дано:*  $m_1=2$  кг,  $m_2=12$  кг,  $m_3=4$  кг;  $c_1=4000$  Н/м;  $c_2=2000$  Н/м;  $c_3=1000$  Н/м;  
 $l=3$  м;  $d=2,5$  м;  $R=3r$ ;  $\rho_2 = r\sqrt{3}$ ;  $F_{10} = 12$  Н;  $F_{20} = 6$  Н;  $M_{30} = 25$  Нм.

**Решение.**

*1 Составление дифференциальных уравнений движения в обобщенных координатах*

Рассматриваемая механическая система имеет три степени свободы.

За обобщенные координаты, характеризующие положение системы, примем (рисунок 3):

$q_1 = y$  – вертикальное смещение груза 1 от положения равновесия;

$q_2 = x$  – горизонтальное смещение центра масс  $C_2$  диска 2 от положения равновесия;

$q_3 = \varphi$  – угол отклонения стержня 3 от вертикального положения.

Тогда, обобщенные скорости будут (рисунок 4):

$\dot{q}_1 = \dot{y} = v_1$  – скорость груза 1;

$\dot{q}_2 = \dot{x} = v_{C_2}$  – скорость центра масс  $C_2$  диска 2;

$\dot{q}_3 = \dot{\varphi} = \omega_3$  – угловая скорость стержня 3.

Для получения дифференциальных уравнений движения механической системы воспользуемся уравнениями (1.4):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = Q_1^B(t); \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = Q_2^B(t); \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = Q_3^B(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

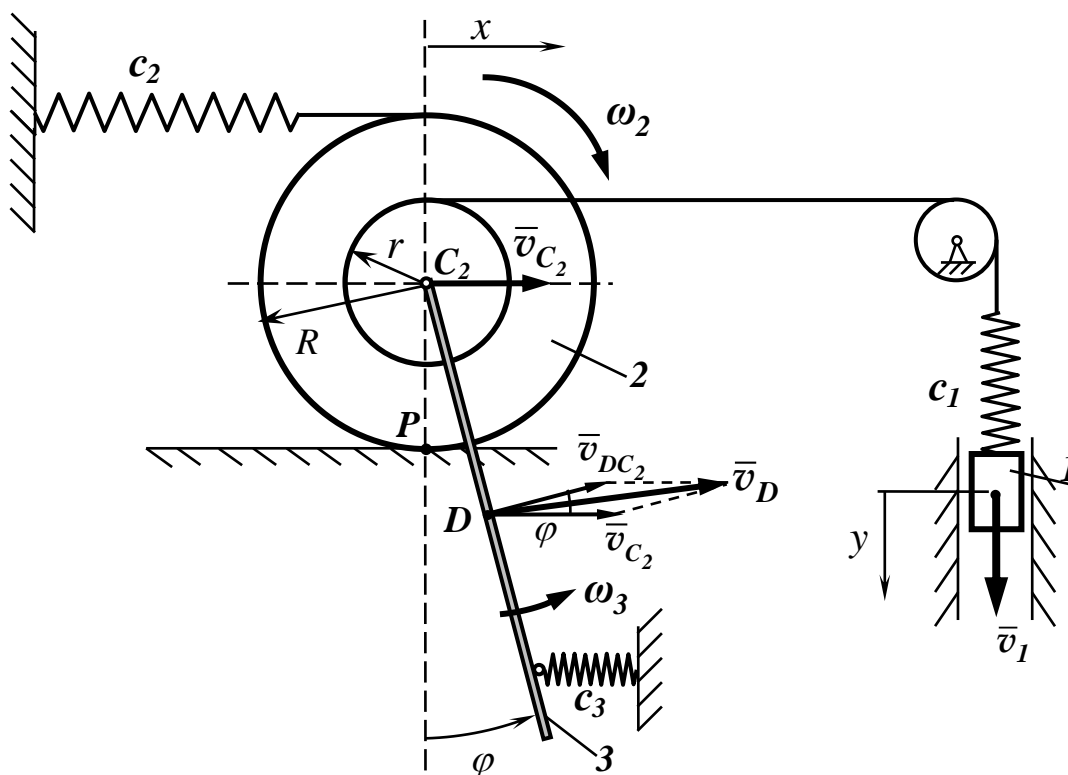


Рисунок 4

Вычислим с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенных скоростей  $\dot{y}$ ,  $\dot{x}$  и  $\dot{\varphi}$  кинетическую энергию системы  $T$ .

Кинетическую энергию механической системы найдем как сумму кинетических энергий входящих в систему тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (4.2)$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2}. \quad (4.3)$$

Кинетическая энергия диска 2, совершающего плоскопараллельное движение:

$$T_2 = \frac{m_2 v_{C_2}^2}{2} + \frac{J_{C_2} \omega_2^2}{2}, \quad (4.4)$$

где  $J_{C_2}$  – момент инерции диска 2 относительно оси вращения, проходящей через центр масс  $C_2$ ;

$v_{C_2}$  – скорость центра масс  $C_2$  диска 2;

$\omega_2$  – угловая скорость диска 2.

Для неоднородного диска момент инерции:

$$J_{C_2} = m_2 \rho_2^2 = 3m_2 r^2. \quad (4.5)$$

Выразим угловую скорость диска 2 через скорость его центра масс  $C_2$  (обобщенную скорость  $\dot{x} = v_{C_2}$ ):

$$\omega_2 = \frac{v_{C_2}}{C_2 P} = \frac{v_{C_2}}{R} = \frac{\dot{x}}{3r}. \quad (4.6)$$

С учетом (4.5) и (4.6) выражение (4.4) примет вид:

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{3m_2 r^2}{2} \left( \frac{\dot{x}}{3r} \right)^2 = \frac{2m_2}{3} \dot{x}^2. \quad (4.7)$$

Кинетическая энергия стержня 3, совершающего плоскопараллельное движение:

$$T_3 = \frac{m_3 v_D^2}{2} + \frac{J_D \omega_3^2}{2}, \quad (4.8)$$

где  $J_D$  – момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через его центр масс точку  $D$ ;

$v_D$  – скорость центра масс стержня точки  $D$ ;

$\omega_3$  – угловая скорость стержня.

Скорость центра масс стержня точки  $D$  найдем по известной из кинематики теореме о сложении скоростей при плоском движении:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_{C_2} + \bar{v}_{DC_2}, \quad (4.9)$$

где  $v_{C_2}$  – скорость точки  $C_2$ , принятой за полюс;

$v_{DC_2}$ , – относительная скорость точки  $D$  во вращении вокруг полюса  $C_2$ .

По теореме косинусов имеем:

$$v_D^2 = v_{C_2}^2 + 2v_{C_2} v_{DC_2} \cos \varphi + v_{DC_2}^2. \quad (4.10)$$

Ограничиваясь в формуле разложения

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \quad (4.11)$$

первым членом и учитывая, что  $v_{DC_2} = \omega_3 \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \dot{\varphi}$ , получим

$$v_D^2 = \dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2. \quad (4.12)$$

Момент инерции однородного стержня относительно центральной оси:

$$J_D = \frac{m_3 l^2}{12}. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.12), (4.13) в (4.8), после преобразований получим:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left( \dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2 \right). \quad (4.14)$$

С учетом полученных выражений (4.3), (4.7) и (4.14) кинетическая энергия механической системы (4.2) будет равна:

$$T = \frac{1}{2} \left[ m_1 \dot{y}^2 + \left( \frac{4m_2}{3} + m_3 \right) \dot{x}^2 + \frac{m_3 l^2}{3} \dot{\varphi}^2 + m_3 l \dot{x} \dot{\varphi} \right]. \quad (4.15)$$

Сравнивая полученное выражение с квадратичной формой для кинетической энергии (1.9),

$$T = \frac{1}{2} \left( a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + a_{33} \dot{q}_3^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2a_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right), \quad (4.16)$$

получим , что обобщенные коэффициенты инерции определяются формулами:

$$a_{11} = m_1; a_{22} = \frac{4}{3}m_2 + m_3; a_{33} = \frac{m_3 l^2}{3}; a_{23} = a_{32} = \frac{m_3 l}{2};$$

(4.17)

$$a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0.$$

Подставляя в (4.17) исходные заданные величины, определим значения обобщенных коэффициентов инерции:

$$a_{11} = m_1 = 2\text{кг}; \quad a_{22} = \frac{4}{3}m_2 + m_3 = 20\text{кг};$$
$$a_{33} = \frac{m_3 l^2}{3} = 12\text{кг} \cdot \text{м}^2; \quad a_{23} = a_{32} = \frac{m_3 l}{2} = 6\text{кг} \cdot \text{м}.$$

Матрица обобщенных коэффициентов инерции  $\mathbf{A}$  (1.23) примет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix}. \quad (4.18)$$

Вычисление обобщенных коэффициентов инерции в Mathcad показано на рисунке 5. Для проверки положительной определенности квадратичной формы кинетической энергии использовался критерий Сильвестра [2], согласно которому все главные миноры матрицы инерции  $\mathbf{A}$  должны быть положительны. Формирование миноров производится с помощью встроенной функции *submatrix*, выделяющей блок, состоящий из элементов матрицы в пределах указанных номеров строк и столбцов. Встроенная функция *return* возвращает значение «Верно», если требуемое условие выполняется, и значение «Ошибка!» в противоположном случае.

Вычислим с точностью до величин второго порядка малости относительно

обобщенных координат  $y$ ,  $x$  и  $\varphi$  потенциальную энергию системы  $\Pi$ , как работу сил тяжести тел системы и сил упругости пружин при возвращении системы из некоторого состояния (рисунок 6), отклоненного от положения равновесия, в начальное положение, которым считаем положение покоя системы (рисунок 3):

$$\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_c. \quad (4.19)$$

Потенциальная энергия сил тяжести при указанном перемещении:

$$\Pi_{mg} = -m_1gy + m_3gh_D.$$

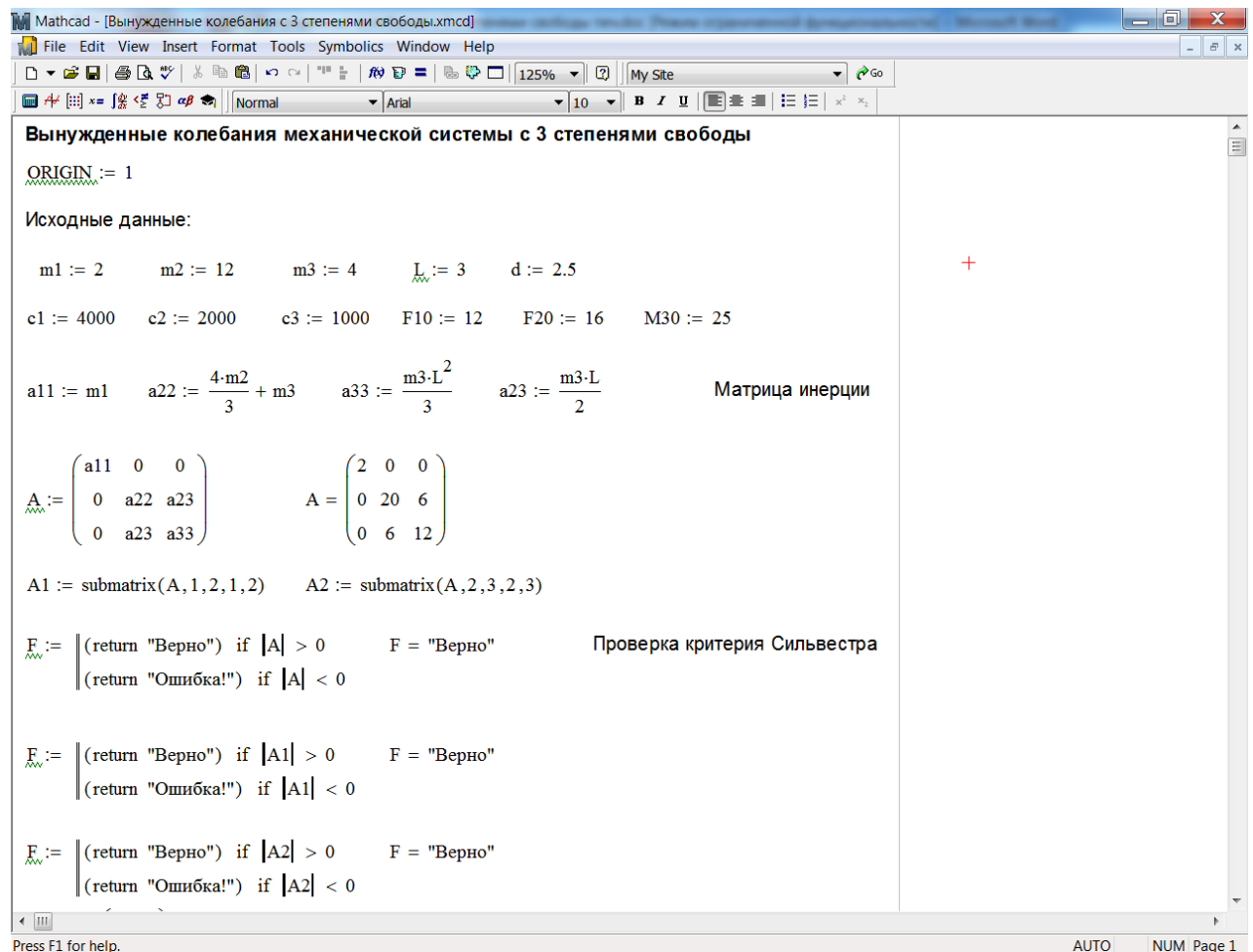


Рисунок 5



Вертикальное перемещение центра тяжести стержня 3 точки  $D$  с точностью до величин второго порядка малости с учетом разложения (4.11):

$$h_D = \frac{l}{2}(1 - \cos \varphi) = \frac{l}{2} \left( 1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) = \frac{l}{4} \varphi^2.$$

Тогда,

$$\Pi_{mg} = -m_1 g y + \frac{m_3 g l}{4} \varphi^2. \quad (4.20)$$

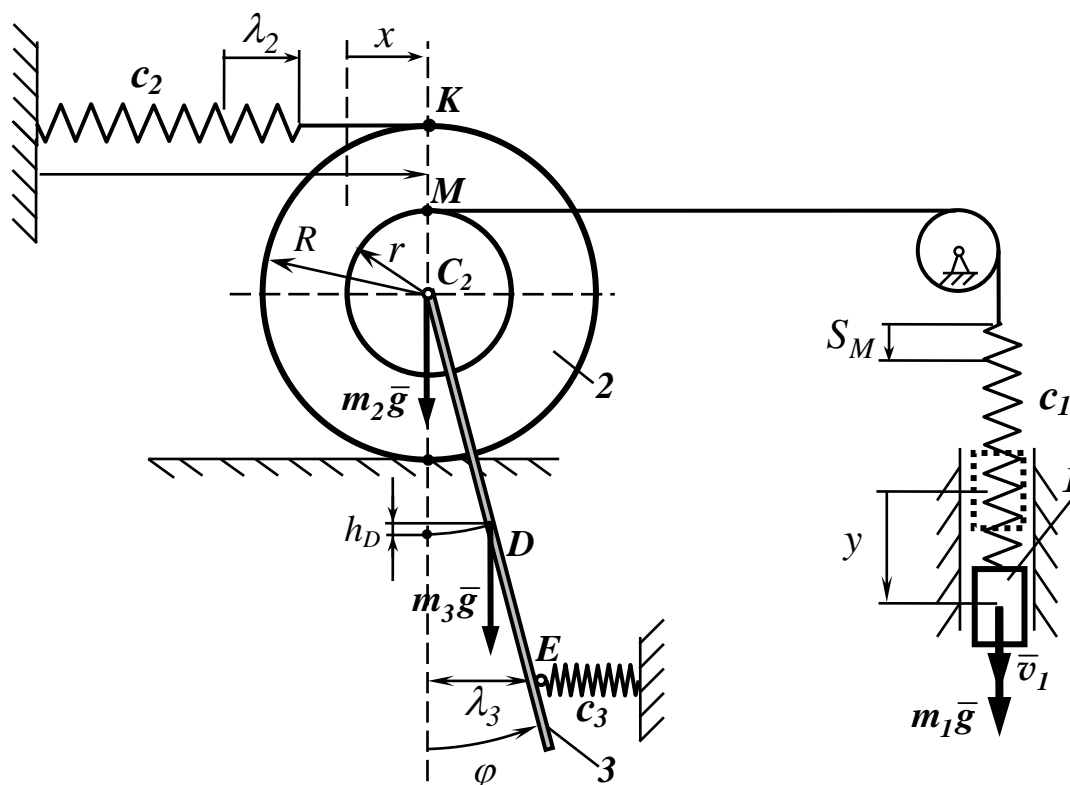


Рисунок 6

Потенциальная энергия деформированных пружин:

$$\Pi_c = \Pi_{c1} + \Pi_{c2} + \Pi_{c3}.$$

В состоянии покоя пружины с коэффициентами жесткости  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  деформированы соответственно на величины  $f_{cm1}$ ,  $f_{cm2}$  и  $f_{cm3}$ .

Потенциальная энергия деформированной пружины с коэффициентом жесткости  $c_1$ :

$$P_{c1} = \frac{c_1}{2} \left[ ((y - S_M) + f_{cm1})^2 - f_{cm1}^2 \right] = \frac{c_1}{2} \left[ (y - S_M)^2 + 2f_{cm1}(y - S_M) \right]. \quad (4.21)$$

где  $S_M$  – перемещение точки  $M$  диска 2.

Учитывая, что угол поворота диска 2 по аналогии с выражением (4.6) определяется соотношением

$$\varphi_2 = \frac{x}{3r},$$

найдем:

$$S_M = \varphi_2 \cdot (r + R) = \frac{x}{3r} \cdot 4r = \frac{4}{3} x. \quad (4.22)$$

Тогда, подставляя (4.22) в (4.21), получим:

$$P_{c1} = \frac{c_1}{2} \left[ \left( y - \frac{4}{3} x \right)^2 + 2f_{cm1} \left( y - \frac{4}{3} x \right) \right]. \quad (4.23)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины с коэффициентом жесткости  $c_2$ :

$$P_{c2} = \frac{c_2}{2} \left[ (\lambda_2 + f_{cm2})^2 - f_{cm2}^2 \right] = \frac{c_2}{2} (\lambda_2^2 + 2f_{cm2}\lambda_2), \quad (4.24)$$

где  $\lambda_2$  – удлинение пружины, прикрепленной к диску 2 в точке  $K$ .

$$\lambda_2 = S_K = \varphi_2 \cdot 2R = \frac{x}{3r} \cdot 6r = 2x. \quad (4.25)$$

Тогда, подставляя (4.25) в (4.24), получим:

$$П_{c2} = 2c_2(x^2 + f_{cm2}x). \quad (4.26)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины с коэффициентом жесткости  $c_3$ :

$$П_{c3} = \frac{c_3}{2} [(\lambda_3 + f_{cm3})^2 - f_{cm3}^2] = \frac{c_3}{2} (\lambda_3^2 + 2f_{cm3}\lambda_3), \quad (4.27)$$

где  $\lambda_3$  – удлинение пружины, прикрепленной к стержню 3 в точке  $E$ .

Пренебрегая изменением угла наклона пружины с точностью до величин первого порядка малости относительно обобщенных координат, имеем

$$\lambda_3 = S_{C_2} + d \cdot \sin \varphi. \quad (4.28)$$

Ограничиваясь в формуле разложения

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

первым слагаемым, получим:

$$\lambda_3 = x + \varphi d. \quad (4.29)$$

Тогда,

$$\Pi_{c3} = \frac{c_3}{2} \left[ (x + \varphi d)^2 + 2f_{cm3}(x + \varphi d) \right]. \quad (4.30)$$

С учетом (4.20), (4.23), (4.26) и (4.30) потенциальная энергия системы (4.19) примет вид:

$$\begin{aligned} \Pi = & -m_1 g y + \frac{m_3 g l}{4} \varphi^2 + \frac{c_1}{2} \left[ \left( y - \frac{4}{3} x \right)^2 + 2f_{cm1} \left( y - \frac{4}{3} x \right) \right] + \\ & + 2c_2 (x^2 + f_{cm2} x) + \frac{c_3}{2} \left[ (x + \varphi d)^2 + 2f_{cm3} (x + \varphi d) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Так как в положении равновесия, соответствующем статической деформации пружин, обобщенные силы (1.3) равны нулю, то

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ \varphi=0}} = 0; \quad \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ \varphi=0}} = 0; \quad \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right)_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ \varphi=0}} = 0. \quad (4.32)$$

Из (4.32) получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ \varphi=0}} &= \left[ -m_1 g + \frac{c_1}{2} \left( 2 \left( y - \frac{4}{3} x \right) + 2f_{cm1} \right) \right]_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ \varphi=0}} = -m_1 g + c_1 f_{cm1} = 0; \\ \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ \varphi=0}} &= \left[ -\frac{4}{3} c_1 \left[ \left( y - \frac{4}{3} x \right) + f_{cm1} \right] + 2c_2 (2x + f_{cm2}) + c_3 \left[ (x + \varphi d) + f_{cm3} \right] \right]_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ \varphi=0}} = \\ &= -\frac{4}{3} c_1 f_{cm1} + 2c_2 f_{cm2} + c_3 f_{cm3} = 0; \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right)_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ \varphi=0}} = \left[ \frac{m_3 g l}{2} \varphi + c_3 d ((x + \varphi d) + f_{cm3}) \right]_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ \varphi=0}} = c_3 d f_{cm3} = 0.$$

Откуда,

$$f_{cm1} = \frac{m_1 g}{c_1}; \quad f_{cm3} = 0; \quad f_{cm2} = \frac{2c_1}{3c_2} f_{cm1} = \frac{2m_1 g}{3c_2}. \quad (4.33)$$

Подставляя найденные значения статических деформаций пружин (4.33) в выражение (4.31), приведем выражение для потенциальной энергии системы к виду:

$$\Pi = \frac{m_3 g l}{4} \varphi^2 + \frac{c_1}{2} \left( y - \frac{4}{3} x \right)^2 + 2c_2 x^2 + \frac{c_3}{2} (x + \varphi d)^2. \quad (4.34)$$

После преобразований выражение для потенциальной энергии системы примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[ c_1 y^2 + \left( \frac{16}{9} c_1 + 4c_2 + c_3 \right) x^2 + \left( \frac{m_3 g l}{2} + c_3 d^2 \right) \varphi^2 - 2 \left( \frac{4c_1}{3} \right) yx + 2c_3 dx \varphi \right]. \quad (4.35)$$

Сопоставляя выражения (4.35) и (1.10), получим, что обобщенные коэффициенты жесткости равны:

$$c_{11} = c_1 = 4000 \text{ Н/м}; \quad c_{22} = \frac{16}{9} c_1 + 4c_2 + c_3 = 1611,1 \text{ Н/м};$$

$$c_{33} = \frac{m_3 g l}{2} + c_3 d^2 = 6308,8 \text{ Нм}; \quad c_{12} = c_{21} = -\frac{4}{3} c_1 = -5333,3 \text{ Н/м};$$

$$c_{23} = c_{32} = c_3 d = 2500 \text{ Н}; \quad c_{13} = c_{31} = 0.$$

Матрица обобщенных коэффициентов жесткости  $C$  (1.24) примет вид:

$$C = \begin{vmatrix} 4000 & -5333,3 & 0 \\ -5333,3 & 1611,1 & 2500 \\ 0 & 2500 & 6308,8 \end{vmatrix}. \quad (4.36)$$

Фрагмент программы Mathcad, иллюстрирующий вычисление обобщенных коэффициентов жесткости и проверку положительной определенности квадратичной формы потенциальной энергии, приведен на рисунке 7.

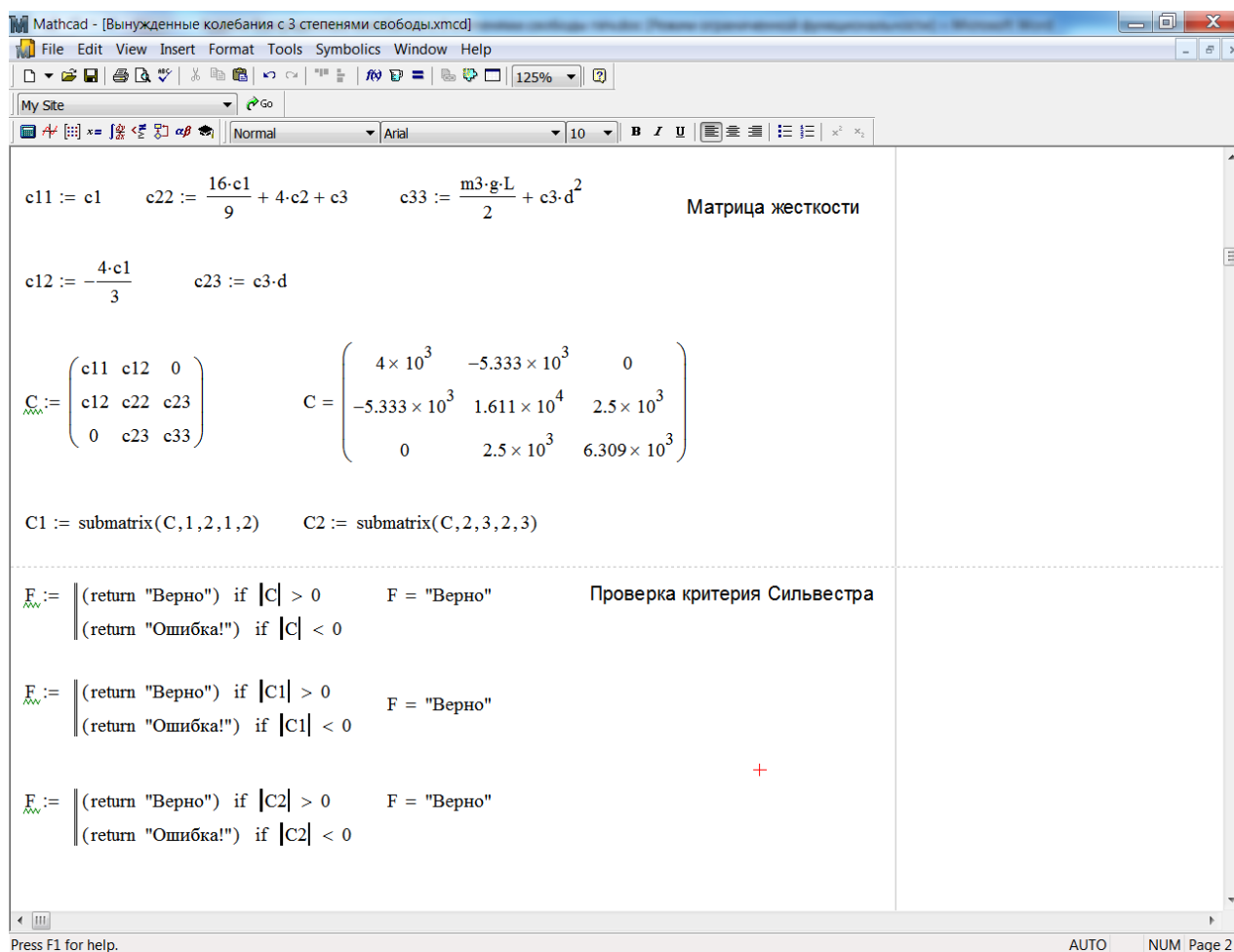


Рисунок 7

Для определения частот внешних воздействий найдем частоты собственных колебаний системы, как собственные числа матрицы  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ . Воспользуемся для этого специальными встроенными функциями Mathcad для определения собственных чисел и собственных векторов матриц (рисунок 8).

Определение собственных чисел матрицы  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ , представляющих собой квадраты частот свободных колебаний системы, выполняется с помощью встроенной функции *eigenvals*. Собственные векторы, характеризующие формы свободных колебаний системы, вычисляются с помощью встроенной функции *eigenvecs*. Порядок расположения собственных векторов соответствует порядку собственных значений, возвращаемых функцией *eigenvals*.

Векторы собственных чисел  $\lambda$  и частот свободных колебаний  $k = \sqrt{\lambda}$  имеют соответственно вид:

$$\lambda = \begin{Bmatrix} 2515,953 \\ 367,641 \\ 535,573 \end{Bmatrix}; \quad k = \begin{Bmatrix} 50,159 \\ 19,174 \\ 23,142 \end{Bmatrix} \text{ рад/с}. \quad (4.37)$$

Матрица собственных векторов (матрица преобразования (1.28)) имеет вид:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} -0,977 & 0,850 & -0,285 \\ 0,189 & 0,520 & -0,156 \\ -0,100 & -0,081 & 0,946 \end{Bmatrix}. \quad (4.38)$$

Вычислим частоты внешних возмущающих сил и моментов:

$$p_1 = 1,2k_{max} = 1,2 \cdot 50,159 = 60,191 \text{ рад/с};$$

$$p_2 = 0,6(k_{max} + k_2) = 0,6(50,159 + 23,142) = 43,981 \text{ рад/с};$$

$$p_3 = 0,7k_{min} = 0,7 \cdot 19,174 = 13,422 \text{ рад/с.}$$

Вычисление собственных частот и собственных векторов

$$\lambda := \text{eigenvals}(A^{-1} \cdot C) \quad \lambda = \begin{pmatrix} 2.516 \times 10^3 \\ 367.641 \\ 535.573 \end{pmatrix}$$

$$k := \sqrt{\lambda} \quad k = \begin{pmatrix} 50.159 \\ 19.174 \\ 23.142 \end{pmatrix} \quad \text{Частоты собственных колебаний}$$

$$D(k) := \text{diag}(k) \quad D(k) = \begin{pmatrix} 50.159 & 0 & 0 \\ 0 & 19.174 & 0 \\ 0 & 0 & 23.142 \end{pmatrix}$$

$$M := \text{eigenvcs}(A^{-1} \cdot C) \quad M = \begin{pmatrix} -0.977 & 0.85 & -0.285 \\ 0.189 & 0.52 & -0.156 \\ -0.1 & -0.081 & 0.946 \end{pmatrix} \quad \text{Матрица собственных векторов}$$

Рисунок 8

Найдем обобщенные силы внешнего воздействия. Для этого составим выражение для мощности внешних воздействий (сил  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  и момента  $M_3(t)$ ):

$$N = F_1(t) \cdot v_1 - F_2(t) \cdot v_{C_2} + M_3(t) \cdot \omega_3 = F_1(t) \cdot \dot{y} - F_2(t) \cdot \dot{x} + M_3(t) \cdot \dot{\phi}. \quad (4.39)$$

Из выражения (4.39) находим обобщенные силы внешнего воздействия:

$$Q_1^B(t) = F_1(t); \quad Q_2^B(t) = -F_2(t); \quad Q_3^B(t) = M_3(t). \quad (4.40)$$



Матрица-столбец внешних воздействий будет иметь вид:

$$\{Q^B\} = \begin{Bmatrix} Q_1^B(t) \\ Q_2^B(t) \\ Q_3^B(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ -F_2(t) \\ M_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \sin(p_1 t) \\ -F_{20} \sin(p_2 t) \\ M_{10} \sin(p_3 t) \end{Bmatrix}. \quad (4.41)$$

Представим матрицу-столбец (4.41) в виде:

$$\{Q^B\} = \mathbf{QH} \cdot \{\sin(pt)\}. \quad (4.42)$$

Здесь диагональная матрица амплитуд обобщенных внешних воздействий (рисунк 9):

$$\mathbf{QH} = \begin{Bmatrix} F_{10} & 0 & 0 \\ 0 & -F_{20} & 0 \\ 0 & 0 & M_{30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{Bmatrix}. \quad (4.43)$$

Матрица-столбец  $\{\sin(pt)\}$  имеет вид:

$$\{\sin(pt)\} = \begin{Bmatrix} \sin(p_1 t) \\ \sin(p_2 t) \\ \sin(p_3 t) \end{Bmatrix}. \quad (4.44)$$

С учетом обозначений (4.43) и (4.44) дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах в матричной форме (1.27) примут вид

$$\{\ddot{q}\} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\{q\} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{QH} \cdot \{\sin(pt)\}, \quad (4.45)$$

или в развернутой форме

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = F_{10} \sin(p_1 t); \\ a_{22}\ddot{q}_2 + a_{23}\ddot{q}_3 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = -F_{20} \sin(p_2 t); \\ a_{23}\ddot{q}_2 + a_{33}\ddot{q}_3 + c_{33}q_3 = M_{10} \sin(p_3 t). \end{cases} \quad (4.46)$$

Mathcad - [Вынужденные колебания с 3 степенями свободы.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

My Site Go  $x=$   $\frac{d}{dx}$   $\frac{d^2}{dx^2}$   $\frac{d^3}{dx^3}$  Normal Arial 10 **B** *I* U

Частоты обобщенных внешних воздействий

$p1 := 1.2 \cdot k_1$      $p2 := 0.6(k_1 + k_3)$      $p3 := 0.7 \cdot k_2$

$p := \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix}$      $p = \begin{pmatrix} 60.191 \\ 43.981 \\ 13.422 \end{pmatrix}$     +

---

$QF := \begin{pmatrix} F10 \\ -F20 \\ M30 \end{pmatrix}$      $QH := \text{diag}(QF)$

Матрица амплитуд обобщенных внешних воздействий

$QH = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$

$Qm := M^{-1} \cdot A^{-1} \cdot QH$      $Qm = \begin{pmatrix} -4.659 & -1.202 & -0.99 \\ 1.585 & -1.294 & -0.313 \\ -0.356 & 0.261 & 2.461 \end{pmatrix}$

Матрица амплитуд внешних воздействий в главных координатах

Symbolic

- ⇄    Modifiers
- float    rectangular    assume
- solve    simplify    substitute
- factor    expand    coeffs
- collect    series    parfrac
- fourier    laplace    ztrans
- invfourier    invlaplace    invztrans
- $n^t \rightarrow$      $n^1 \rightarrow$      $|n| \rightarrow$
- explicit    combine    confrac
- rewrite

Matrix

$\begin{bmatrix} \times_n & \times^1 & \times_i \\ \frac{d}{dx} & n^2 & n^1 \cdot m_{i,j} \\ \frac{d^2}{dx^2} & \frac{d}{dx} & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}$

Press F1 for help.    AUTO    NUM Page 2

Рисунок 9

## 2 Получение дифференциальных уравнений движения системы в главных координатах

Умножив дифференциальные уравнения движения в выбранных обобщенных координатах (4.45) слева на матрицу  $\mathbf{M}^{-1}$ , с учетом выражения (1.29) получим дифференциальные уравнения движения системы в главных координатах:

$$\{\ddot{\xi}\} + \mathbf{D}(\mathbf{k}^2) \cdot \{\xi\} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{QH} \cdot \{\sin(pt)\}, \quad (4.47)$$

или

$$\{\ddot{\xi}\} + \mathbf{D}(\mathbf{k}^2) \cdot \{\xi\} = \mathbf{Qm} \cdot \{\sin(pt)\}, \quad (4.48)$$

где матрица амплитуд внешних воздействий в главных координатах имеет вид (рисунок 9):

$$\mathbf{Qm} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{QH} = \begin{vmatrix} -4,659 & -1,202 & -0,990 \\ 1,585 & -1,294 & -0,313 \\ -0,356 & 0,261 & 2,461 \end{vmatrix}. \quad (4.49)$$

Представим правую часть уравнений (4.48) в виде [6]:

$$\mathbf{Qm} \cdot \{\sin(pt)\} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{Qm}^{<j>} \cdot \sin(p_j t), \quad (4.50)$$

где  $\mathbf{Qm}^{<j>}$  –  $j$ -тый столбец матрицы  $\mathbf{Qm}$ .

С учетом выражения (4.50) уравнения движения в главных координатах (4.48) примут вид:

$$\{\ddot{\xi}\} + \mathbf{D}(\mathbf{k}^2) \cdot \{\xi\} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{Qm}^{\langle j \rangle} \cdot \sin(p_j t). \quad (4.51)$$

3 Получение частного решения систем дифференциальных уравнений движения механической системы в главных и обобщенных координатах

Частное решение системы линейных дифференциальных уравнений от суммы воздействий, равно сумме решений от каждого внешнего воздействия в отдельности. Поэтому частное решение системы (4.45), определяющее вынужденные колебания механической системы в главных координатах, будем искать в виде (1.33):

$$\{\xi^e\} = \sum_{j=1}^3 \left\{ F(\mathbf{Qm}^{\langle j \rangle}, p_j) \right\} \cdot \sin(p_j t), \quad (4.52)$$

где  $F(\mathbf{Qm}^{\langle j \rangle}, p_j)$  – введенная ранее функция пользователя, определяемая выражением (1.34).

Для построения фазовых диаграмм получим выражения для обобщенных скоростей, продифференцировав (4.52) по времени:

$$\{\dot{\xi}^e\} = \sum_{j=1}^3 \left\{ F(\mathbf{Qm}^{\langle j \rangle}, p_j) \right\} \cdot p_j \cdot \cos(p_j t). \quad (4.53)$$

Для перехода от главных координат к обобщенным воспользуемся соотношением (1.28), которое с учетом (4.52) примет вид:

$$\{q^e\} = \mathbf{M} \cdot \sum_{j=1}^3 \left\{ F(\mathbf{Qm}^{\langle j \rangle}, p_j) \right\} \cdot \sin(p_j t). \quad (4.54)$$

Соответствующий фрагмент программы Mathcad показан на рисунке 10. Обратим внимание на использование специального оператора векторизации при вычислении тригонометрических функций. Вызов оператора возможен либо с панели матричных операций, либо одновременным нажатием клавиш «CTRL» и «-». Оператор позволяет провести однотипную операцию (в данном случае, вычисление синуса или косинуса) над всеми элементами некоторого массива, что не допускается простым использованием тригонометрических функций.

Найденное решение дифференциальных уравнений вынужденных колебаний системы в главных координатах в графической форме представлено на рисунках 10-11.

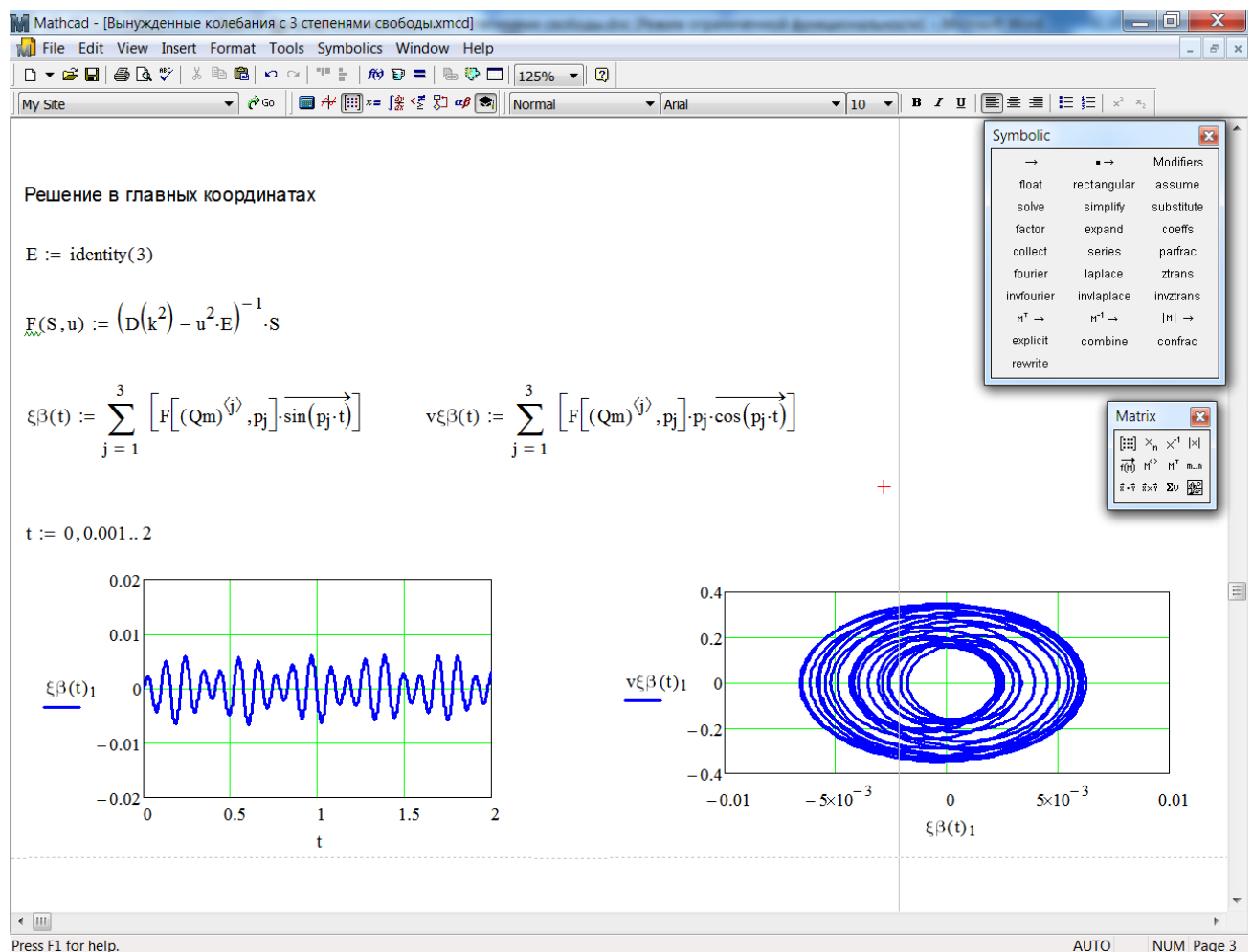


Рисунок 10

На рисунке 10 показаны график изменения первой главной координаты на отрезке времени  $[0; 2c]$  и соответствующая фазовая диаграмма в координатах «главная координата – соответствующая скорость (производная от главной координаты по времени)». На рисунке 11 показаны графики движения по второй и третьей главным координатам и соответствующие фазовые диаграммы.

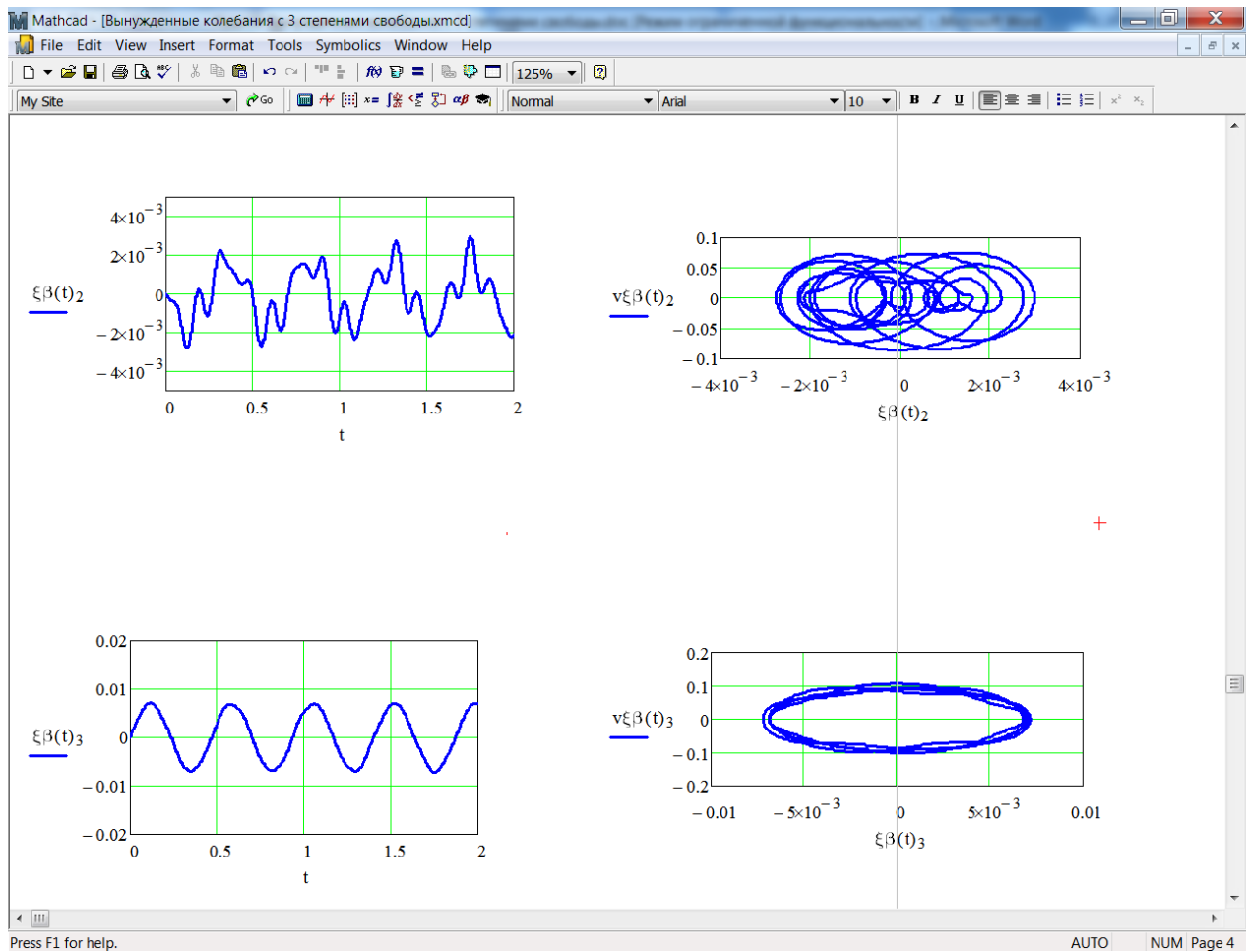


Рисунок 11

Как следует из построенных графиков изменения главных координат и фазовых диаграмм движение системы в главных координатах не является простым гармоническим движением. Это объясняется, прежде всего, тем, что обобщенное внешнее воздействие в главных координатах представляет собой сумму гармоник разной частоты. Вместе с тем, замкнутый характер построенных фазовых траекторий сви-

детельствует о периодичности процесса движения, что и позволяет называть его колебаниями.

Решение дифференциальных уравнений вынужденных колебаний системы в обобщенных координатах в графической форме представлено на рисунке 12. На рисунке 12 показаны графики изменения обобщенных координат на отрезке времени  $[0; 2c]$  и соответствующие фазовые диаграммы в координатах « $j$ -тая обобщенная координата –  $j$ -тая обобщенная скорость». Как и в случае главных координат, вынужденные колебания системы в произвольно выбранных обобщенных координатах не являются простыми гармоническими колебаниями, хотя и имеют явно периодический характер. Замкнутый характер построенных фазовых диаграмм подтверждает сделанный вывод о периодическом характере движения.

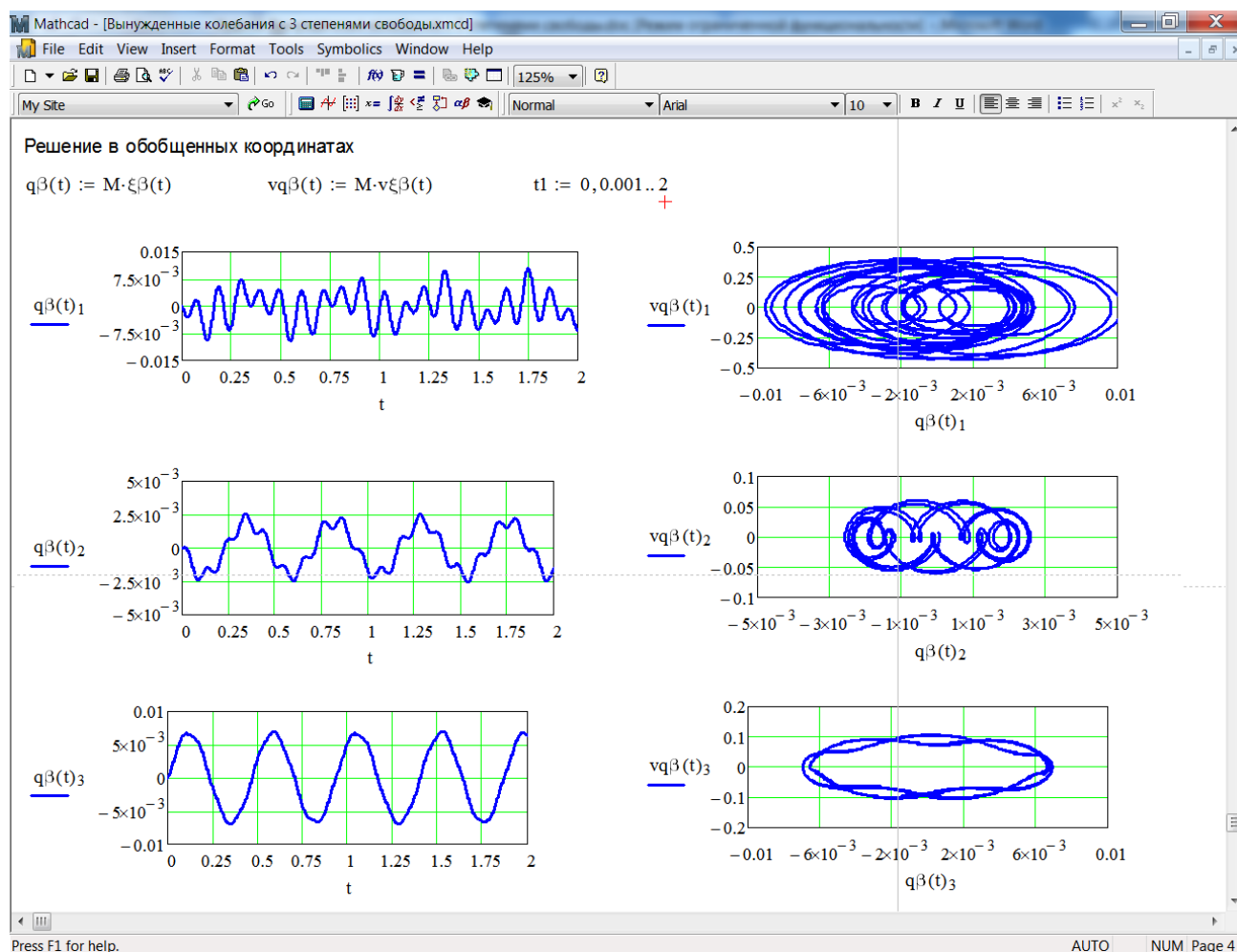


Рисунок 12

### 3 Разложение вынужденных колебаний в главных координатах на движение по каждой обобщенной координате

Как известно [2], движение механической системы по каждой обобщенной координате складывается из главных движений. При этом каждую из главных координат следует умножить на коэффициенты распределения, которые располагаются в строках матрицы  $\mathbf{M}$ , определяемой в данном примере выражением (4.38).

Таким образом, зависимость между выбранными обобщенными координатами  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и главными координатами  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеет вид:

$$q_i(t) = M_{i1}\xi_1(t) + M_{i2}\xi_2(t) + M_{i3}\xi_3(t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.55)$$

где  $M_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – элементы  $i$ -той строки матрицы  $\mathbf{M}$ .

Покажем каждую из обобщенных координат и ее составляющие на графиках.

Первая обобщенная координата  $q_1(t) = y(t)$  может быть представлена в виде суммы:

$$q_1(t) = \sum_{i=1}^3 M_{1i}\xi_i(t) = -0,977\xi_1(t) + 0,85\xi_2(t) - 0,285\xi_3(t). \quad (4.56)$$

Разложение вынужденных колебаний исследуемой механической системы по первой обобщенной координате  $q_1(t) = y(t)$  на составляющие движения по главным колебаниям показано на рисунке 13. Три кривые, приведенные на рисунке 13 слева, представляют собой соответственно колебания с высшей  $p_1$ , средней  $p_2$  и низшей  $p_3$  частотой. Справа приведен график изменения обобщенной координаты  $y(t)$ , полученный в результате сложения составляющих главных колебаний. На рисунке 13 также показан график изменения той же обобщенной координаты  $q_1(t) = y(t) = q\beta_1(t)$ , полученный ранее при решении системы дифференциальных уравнения движения в главных координатах (4.51) и обратного перехода к обобщен-



ным координатам (4.54). Полное совпадение приведенных графиков изменения обобщенной координаты  $q_1(t)$  и  $q\beta_1(t)$  подтверждает истинность утверждения, что результирующее движение механической системы в обобщенных координатах складывается из главных колебаний.

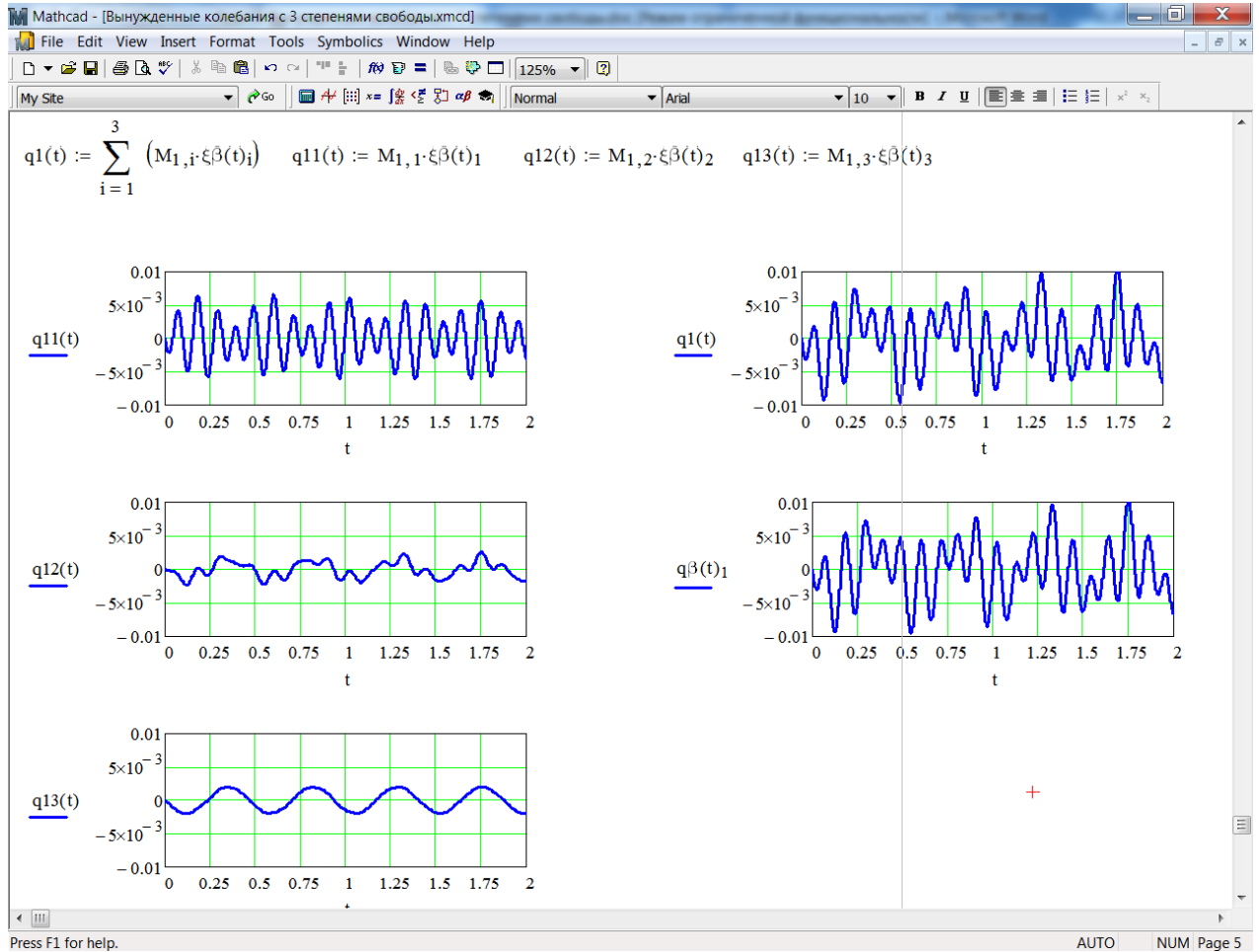


Рисунок 13

Вторая обобщенная координата  $q_2(t) = x(t)$  может быть представлена в виде суммы:

$$q_2(t) = \sum_{i=1}^3 M_{2i} \xi_i(t) = 0,189 \xi_1(t) + 0,52 \xi_2(t) - 0,156 \xi_3(t). \quad (4.57)$$

Разложение вынужденных колебаний исследуемой механической системы по первой обобщенной координате  $q_2(t) = x(t)$  на составляющие движения по главным колебаниям, результат сложения составляющих движений и полученный ранее график изменения обобщенной координаты  $x(t)$  показаны на рисунке 14.

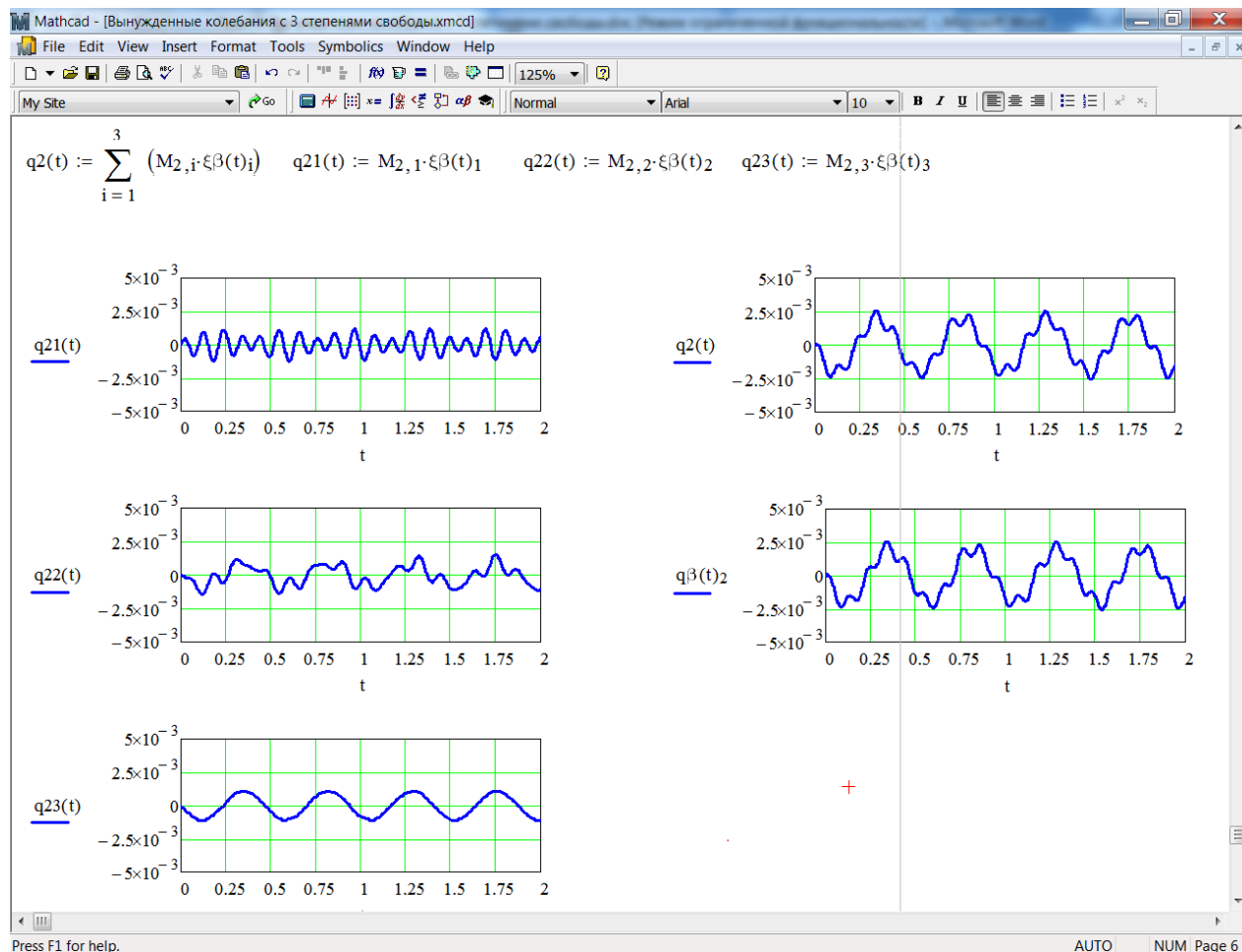


Рисунок 14

Три кривые, приведенные на рисунке 14 слева, представляют собой соответственно колебания с высшей  $p_1$ , средней  $p_2$  и низшей  $p_3$  частотой. Справа приведен график изменения обобщенной координаты  $x(t)$ , полученный в результате сложения составляющих главных колебаний. На рисунке 14 также показан график изменения той же обобщенной координаты  $q_2(t) = x(t) = q\beta_2(t)$ , полученный ранее при решении системы дифференциальных уравнения движения системы (4.51). Как и в

предыдущем случае имеет место полное совпадение приведенных графиков изменения обобщенной координаты  $x(t)$ , полученных различным путем.

Третья обобщенная координата  $q_3(t) = \varphi(t)$  находится как сумма:

$$q_3(t) = \sum_{i=1}^3 M_{3i} \xi_i(t) = -0,1 \xi_1(t) - 0,081 \xi_2(t) + 0,946 \xi_3(t). \quad (4.58)$$

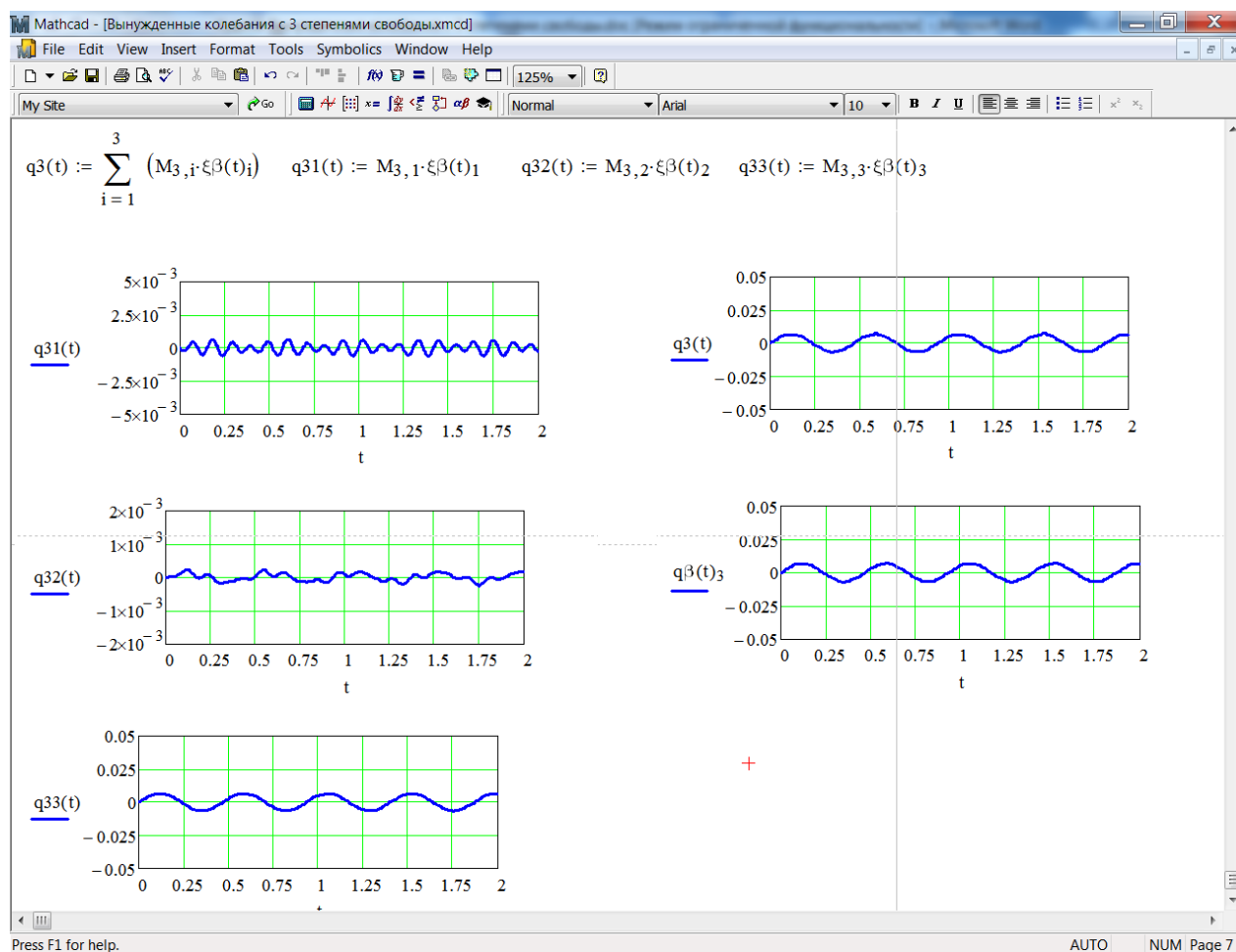


Рисунок 15

Разложение вынужденных колебаний исследуемой механической системы по первой обобщенной координате  $q_3(t) = \varphi(t)$  на составляющие движения по главным колебаниям, результат сложения составляющих движений и полученный ранее график изменения обобщенной координаты  $\varphi(t)$  показаны на рисунке 15. Как и в

случае двух других координат наблюдается полное совпадение результатов вычислений, полученных различными способами.

#### 4 Решение системы дифференциальных уравнений вынужденных колебаний системы в главных координатах

Вернемся к системе дифференциальных уравнений движения в главных координатах (1.32), которые в рассматриваемом примере примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1^2 \xi_1 = Qm_{11} \sin(p_1 t) + Qm_{12} \sin(p_2 t) + Qm_{13} \sin(p_2 t); \\ \ddot{\xi}_2 + k_2^2 \xi_2 = Qm_{21} \sin(p_1 t) + Qm_{22} \sin(p_2 t) + Qm_{23} \sin(p_2 t); \\ \ddot{\xi}_3 + k_3^2 \xi_3 = Qm_{31} \sin(p_1 t) + Qm_{32} \sin(p_2 t) + Qm_{33} \sin(p_2 t); \end{cases} \quad (4.59)$$

где  $Qm_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – элементы матрицы амплитуд  $\mathbf{Qm}$  внешних воздействий в главных координатах (4.49).

Уравнения (4.59) являются независимыми, что позволяет решать их по отдельности.

Общее решение системы уравнений (4.59) находится как сумма общего решения соответствующей системы однородных дифференциальных уравнений и частного решения системы:

$$\xi_i = \xi_i^c + \xi_i^b \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.60)$$

Общее решение линейной системы однородных дифференциальных уравнений  $\xi_i^c$  ( $i = 1, 2, 3$ ) представляет собой главные свободные колебания и имеет вид:

$$\xi_i^c = \tilde{A}_i \cos(k_i t) + \tilde{B}_i \sin(k_i t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.61)$$

где  $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – некоторые произвольные постоянные, определяемые из начальных условий движения;

$k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – частоты свободных колебаний механической системы, определяемые выражением (4.53).

Правая часть неоднородных дифференциальных уравнений (4.59) представляет собой сумму гармонических функций  $\sum_{j=1}^3 Qm_{ij} \sin(p_j t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) различной частоты. В силу линейности дифференциальных уравнений частное решение  $\xi_i^c$  ( $i = 1, 2, 3$ ) можно найти как сумму отдельных решений, соответствующих виду гармонических функций, входящих в правую часть уравнений.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{\xi}_i + k_i^2 \xi_i = Qm_{ij} \sin(p_j t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.62)$$

будем искать в виде, соответствующем виду правой части

$$\xi_i^* = H_i \sin(p_j t). \quad (4.63)$$

Продифференцировав (4.63) дважды по времени и подставив в (4.62), получим:

$$-p_j^2 H_i \sin(p_j t) + k_i^2 H_i \sin(p_j t) = Qm_{ij} \sin(p_j t);$$

$$-p_j^2 H_i + k_i^2 H_i = Qm_{ij};$$

$$H_i = \frac{Qm_{ij}}{k_i^2 - p_j^2};$$

$$\xi_i^* = \frac{Qm_{ij}}{k_i^2 - p_j^2} \sin(p_j t). \quad (4.64)$$

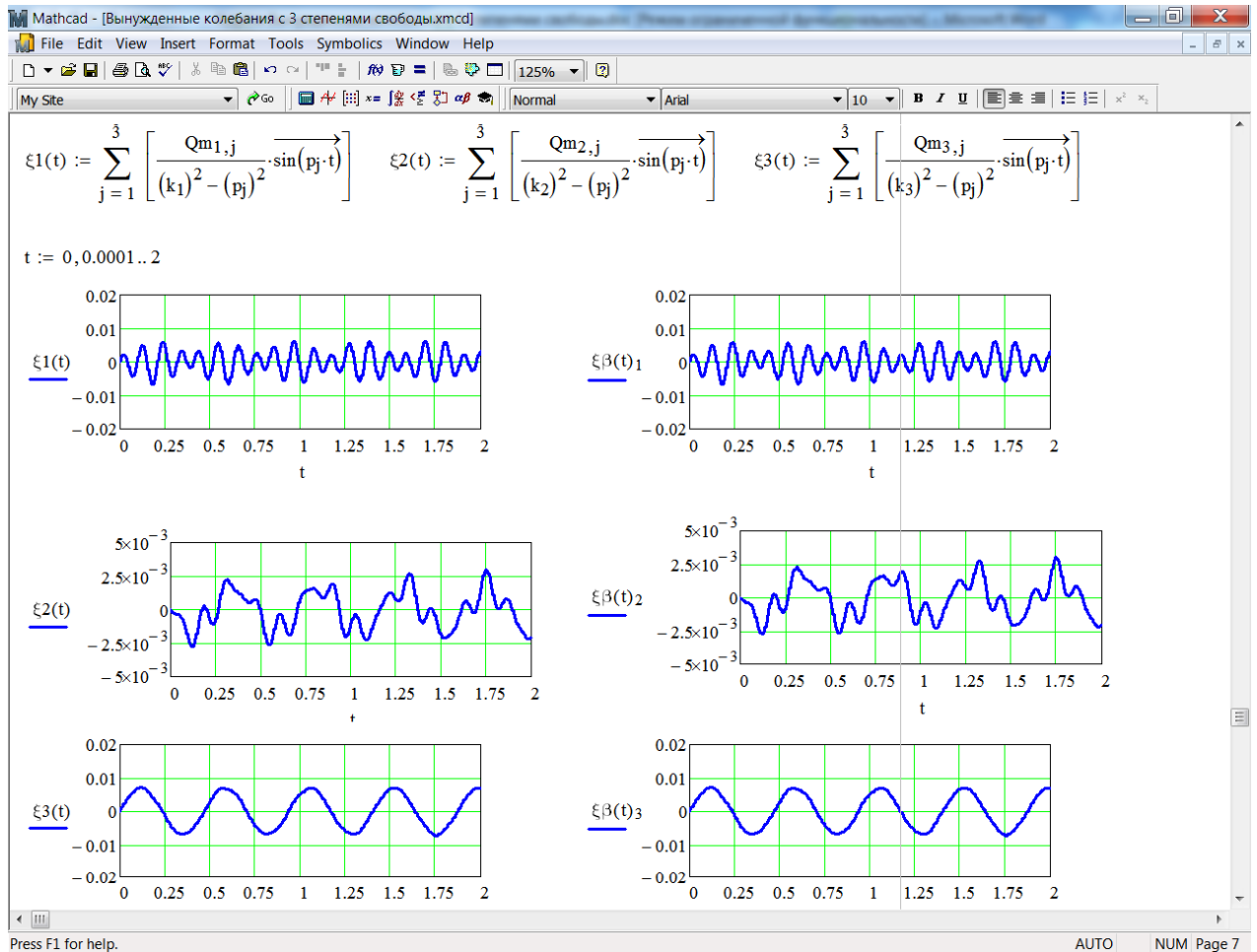


Рисунок 16

С учетом полученного выражения (4.64) частное решение  $\xi_i^6$  ( $i = 1, 2, 3$ ) системы дифференциальных уравнений (4.59) будет иметь вид:

$$\xi_i^e = \sum_{j=1}^3 \frac{Qm_{ij}}{k_i^2 - p_j^2} \sin(p_j t). \quad (4.65)$$

Построенные графики вынужденных колебаний в главных координатах  $\xi_1^e(t)$ ,  $\xi_2^e(t)$ , и  $\xi_3^e(t)$ , построенные по выражениям (4.65), показаны на рисунке 16. Для сравнения там же приведены полученные ранее графики изменения главных координат  $\xi\beta_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Полное совпадение результатов свидетельствует о достоверности полученных ранее результатов вычислений.

### *5 Решение системы дифференциальных уравнений движения системы в обобщенных координатах*

Для нахождения общего решения системы дифференциальных уравнений движения системы в обобщенных координатах воспользуемся возможностями численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), имеющимися в системе Mathcad. Проинтегрируем полученную ранее систему дифференциальных уравнений движения в произвольно выбранных обобщенных координатах (4.46) методом Рунге-Кутты.

Заменим систему трех дифференциальных уравнений второго порядка (4.46) эквивалентной системой шести ОДУ первого порядка путем введения трех новых функций:

$$q_4(t) = \dot{q}_1(t); \quad q_5(t) = \dot{q}_2(t); \quad q_6(t) = \dot{q}_3(t). \quad (4.66)$$

С учетом обозначений (4.66) система уравнений (4.46) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}\dot{q}_4 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = F_{10} \sin(p_1 t); \\ a_{22}\dot{q}_5 + a_{23}\dot{q}_6 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = -F_{20} \sin(p_2 t); \\ a_{23}\dot{q}_5 + a_{33}\dot{q}_6 + c_{33}q_3 = M_{10} \sin(p_3 t). \end{cases} \quad (4.67)$$

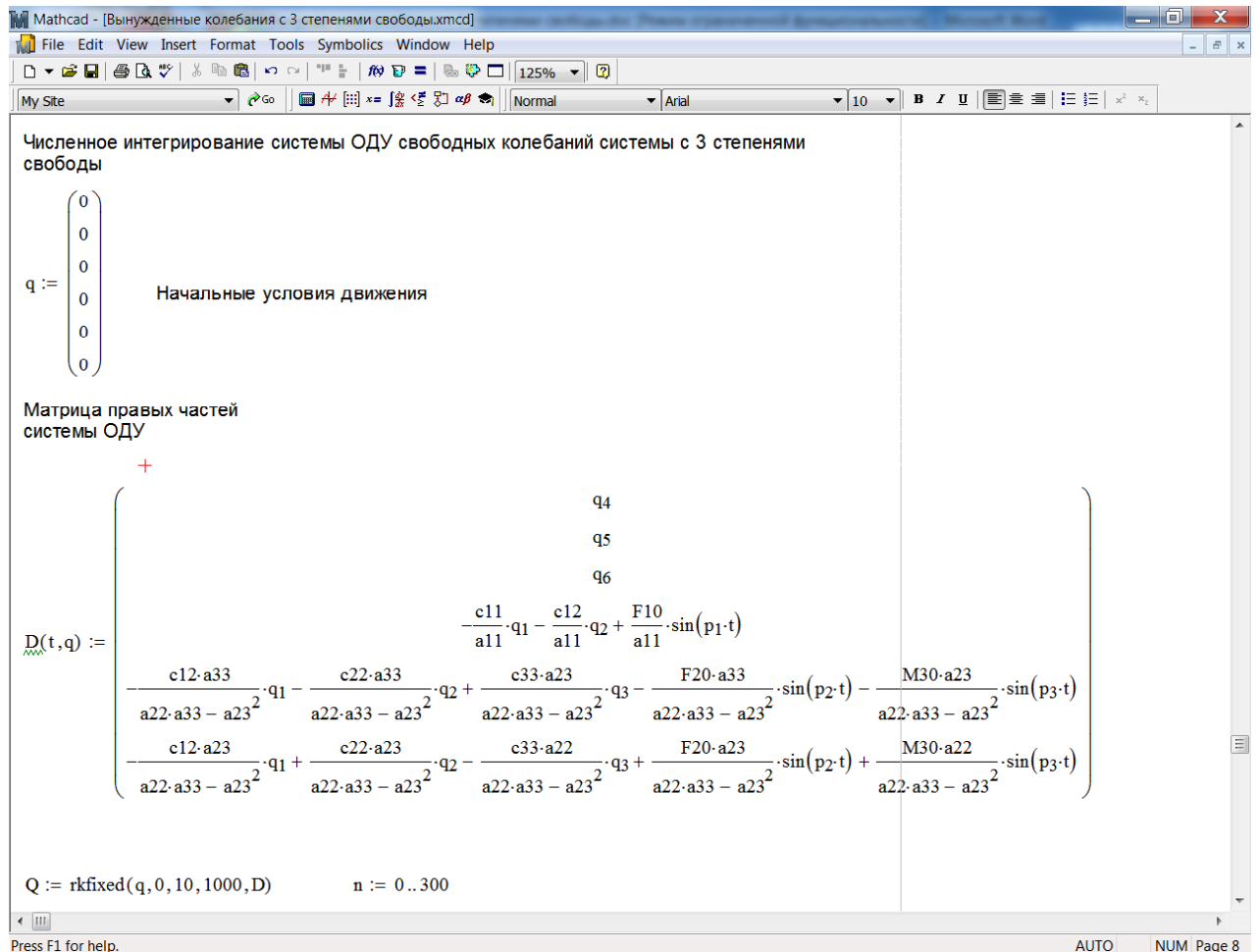


Рисунок 17

Разрешая систему (4.67) относительно производных второго порядка, получим:



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_4 = -\frac{c_{11}}{a_{11}}q_1 - \frac{c_{12}}{a_{11}}q_2 + \frac{F_{10}}{a_{11}}\sin(p_1t); \\ \dot{q}_5 = \frac{c_{12}a_{33}q_1 + c_{22}a_{33}q_2 - a_{23}c_{33}q_3 - a_{33}F_{20}\sin(p_2t) - a_{23}M_{10}\sin(p_3t)}{(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}; \\ \dot{q}_6 = \frac{a_{23}c_{12}q_1 + a_{23}c_{22}q_2 - a_{22}c_{33}q_3 + a_{23}F_{20}\sin(p_2t) + a_{22}M_{10}\sin(p_3t)}{(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}. \end{array} \right. \quad (4.68)$$

Тогда систему трех дифференциальных уравнений второго порядка (4.46) с учетом (4.66) и (4.68) можно заменить эквивалентной системой шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести неизвестных функций  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1(t) = q_4(t); \\ \dot{q}_2(t) = q_5(t); \\ \dot{q}_3(t) = q_6(t); \\ \dot{q}_4 = -\frac{c_{11}}{a_{11}}q_1 - \frac{c_{12}}{a_{11}}q_2 + \frac{F_{10}}{a_{11}}\sin(p_1t); \\ \dot{q}_5 = \frac{c_{12}a_{33}q_1 + c_{22}a_{33}q_2 - a_{23}c_{33}q_3 - a_{33}F_{20}\sin(p_2t) - a_{23}M_{10}\sin(p_3t)}{(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}; \\ \dot{q}_6 = \frac{a_{23}c_{12}q_1 + a_{23}c_{22}q_2 - a_{22}c_{33}q_3 + a_{23}F_{20}\sin(p_2t) + a_{22}M_{10}\sin(p_3t)}{(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}. \end{array} \right.$$

В результате получаем задачу Коши при заданных начальных условиях:

$$q_1(t_0) = q_{10}; q_2(t_0) = q_{20}; q_3(t_0) = q_{30}; q_4(t_0) = \dot{q}_{10}; q_5(t_0) = \dot{q}_{20}; q_6(t_0) = \dot{q}_{30}.$$

Поставленная задача может быть решена в Mathcad с помощью встроенной функции  $rkfixed(V, x1, x2, n, D)$ , возвращающей матрицу решения системы ОДУ численным методом Рунге-Кутты на заданном интервале  $[x1, x2]$  при фиксированном числе шагов  $n$ . Начальные условия содержатся в векторе  $V$ , а правые части уравнений записаны в символьном векторе  $D$ . Соответствующий фрагмент программы Mathcad показан на рисунке 17.

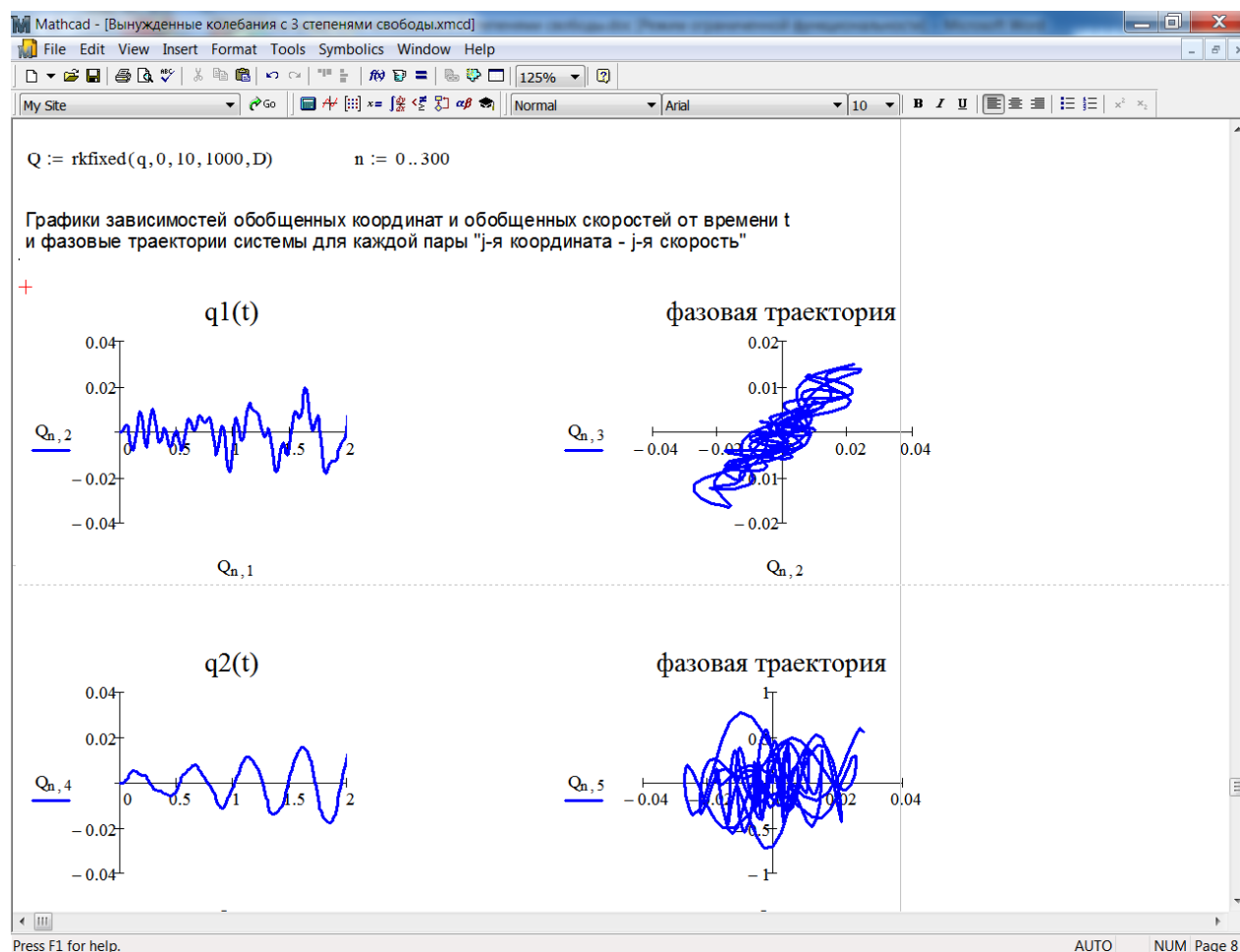


Рисунок 18

На рисунках 18-19 представлены результаты численного интегрирования системы уравнений (4.67) на отрезке времени  $[0, 5c]$ . Полученные результаты численного интегрирования показаны в виде графиков зависимостей обобщенных координат  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $q_3(t)$  от времени и соответствующих фазовых диаграмм.

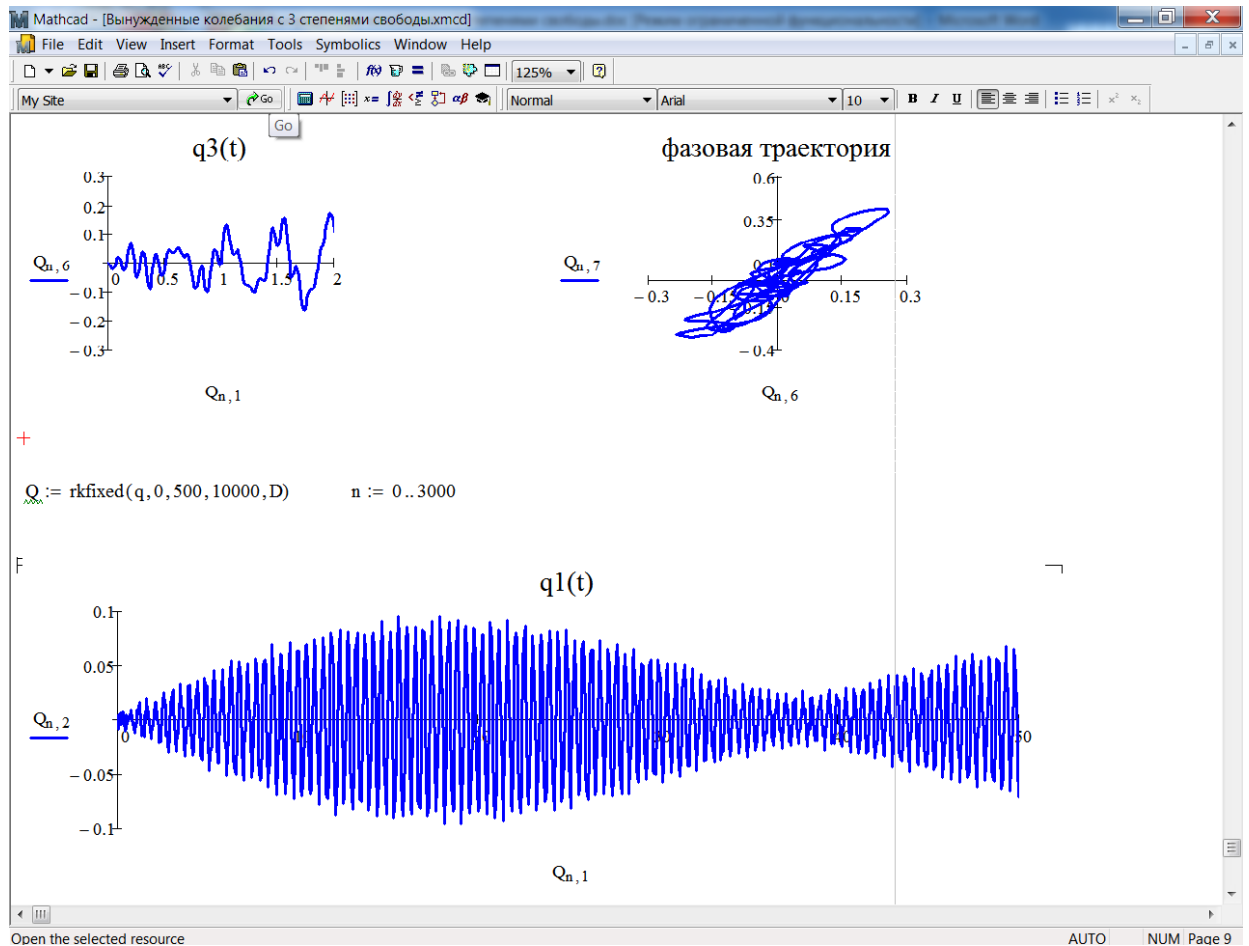


Рисунок 19

Очевидно, что построенные графики изменения обобщенных координат отличаются от результатов, показанных на рисунке 12. Это объясняется тем, на рисунках 18 и 19 представлено общее решение системы дифференциальных уравнений движения в виде (1.12), которое является суммой свободных и вынужденных колебаний рассматриваемой механической системы. Результаты же, приведенные на рисунке 12, – это частное решение той же системы уравнений движения, иллюстрирующее

только вынужденные колебания системы.

Представленные на рисунках 18 и 19 графики изменения обобщенных координат подтверждают, что при действии периодических внешних возмущений без учета сопротивления механическая система совершает сложное движение, являющееся результатом наложения друг на друга незатухающих свободных и вынужденных колебаний. Замкнутый характер фазовых диаграмм свидетельствует о периодичности движения, что позволяет называть его колебаниями (или вибрациями).

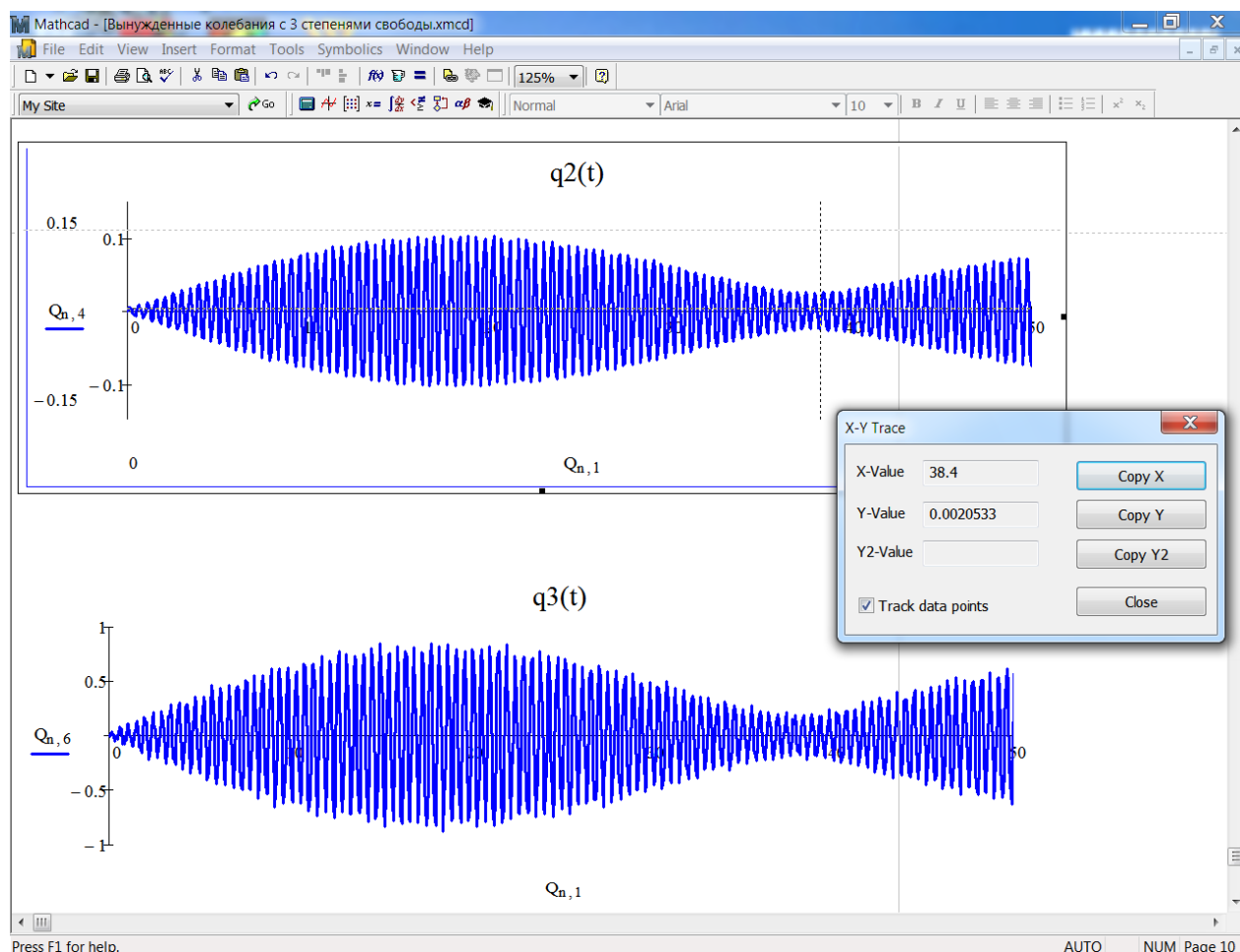


Рисунок 20

На рисунках 19 – 20 показаны также графики изменения обобщенных координат  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $q_3(t)$  на отрезке времени  $[0, 50c]$ . Приведенные результаты свидетельствуют, что при отсутствии затухания свободных колебаний, система совершала

бы движение, имеющее характер биений, период которых примерно на два порядка выше, чем период самих вынужденных колебаний. В действительности же из-за наличия в любой реальной системе сопротивления движению в течение указанного промежутка времени произойдет затухание свободных колебаний, и движение системы будет характеризоваться зависимостями, представленными на рисунке 12.

## **5 Литература, рекомендуемая для изучения темы**

1 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.

2 Яблонский, А.А. Курс теории колебаний : учеб. пособие для вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 336 с.

3 Стрелков, С.П. Введение в теорию колебаний: учебник / С.П. Стрелков. – СПб.: Лань, 2005. – 440с.

4 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов. В 3 т. Т.3. Специальные главы механики / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1973. – 488 с.

5 Бертяев, В.Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В.Д. Бертяев. – СПб.: БХВ, 2005. – 752 с.

6 Доев, В.С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad: учебное пособие / В.С. Доев, Ф.А. Доронин. – СПб.: Лань, 2010. – 592 с.