

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра механики материалов, конструкций и машин

Е.В. Дырдина, В.С. Иванова

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ УЧЕТА ТРЕНИЯ В МАТЕРИАЛОВЕДЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Часть 1

Основы теории трения. Трение скольжения

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.01 Машиностроение, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств

Оренбург
2018

УДК 531.43 (076.5)
ББК 22.21я7
Д90

Рецензент – доцент, кандидат технических наук А.А. Гаврилов

Дырдина, Е.В.
Д90 Приближенные методы учета трения в материаловедческих исследованиях. Часть 1. Основы теории трения. Трение скольжения: методические указания / Е.В. Дырдина, В.С. Иванова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 56 с.

В методических указаниях рассматриваются все типы и формы трения, методы их моделирования и оценки. Задачи с решениями служат углублению и практическому применению полученных знаний по теме «Трение скольжения», а для их закрепления приведены варианты индивидуальных заданий, вопросы и задачи для самоконтроля.

Предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.01 Машиностроение, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

Методические указания подготовлены в рамках проекта по совершенствованию содержания и технологий целевого обучения студентов в интересах организаций оборонно-промышленного комплекса «Новые кадры ОПК-2017».

УДК 531.43 (076.5)
ББК 22.21я7

© Дырдина Е.В.,
Иванова В.С., 2018
© ОГУ, 2018

Содержание

Введение	4
1 Основные понятия и определения	6
2 Общие представления о трении	10
3 Трение скольжения.....	15
4 Особенности решения задач с учетом сил трения скольжения.....	25
4.1 Тело на наклонной плоскости без учета размеров	26
4.2 Тело под действием силы на наклонной плоскости	28
4.3 Тело определенных размеров на наклонной плоскости.....	31
4.4 Лестница.....	36
4.5 Равновесие кривошипно-шатунного механизма (заклинивание)	38
4.6 Консоль.....	42
5 Задачи для самостоятельного решения на равновесие с учетом трения	46
скольжения.....	46
6 Контрольное задание. Равновесие тел при наличии трения	48
Список использованных источников	55

Введение

На рубеже XVI и XVII веков Галилео Галилей (1564-1642) впервые четко разграничил два принципиально различных вида сопротивления тел перемещению: сопротивление, связанное с инерцией тела, и сопротивление, обусловленное **трением**. Главная особенность трения, как физического явления, состоит в том, что оно никогда не проявляется самостоятельно, как, например, силы всемирного тяготения или электромагнитного взаимодействия. Трение проявляется при **контактном взаимодействии** материальных тел и перемещении их относительно друг друга. Причем его влияние на различные процессы может быть как положительным (в этих случаях стремятся его увеличить), так и отрицательным (поэтому разрабатываются способы его уменьшения). Так, передвижение объектов с помощью колес, шагающих устройств, весел, возможно только **благодаря** трению. Снижение трения во время гололедицы или в узлах тормозов весьма нежелательно и может привести к неблагоприятным последствиям. То, что трение сопровождается выделением теплоты, позволило людям на заре цивилизации добывать огонь. К отрицательным моментам, связанным с трением, можно отнести электризацию порошков, волокон, пленок. Нагрев деталей при трении о воздух является весьма неблагоприятным фактором, который необходимо учитывать при проектировании сверхскоростных самолетов и космических кораблей. Одной из главных причин выхода из эксплуатации машин и механизмов, является износ, вызванный наличием трения. Регулирование процессов трения и изнашивания в машинах составляет одну из важнейших научно-технических проблем современности.

Трение в машинах и механизмах играет двоякую роль. С одной стороны, трение является основой работы машин, например, трение колес экипажей (электровозов, автомобилей, тракторов и других машин), механизмов передвижения подъемно-тормозных систем (friction – трение, скольжение), энергия которого используется для снижения скорости движения и остановки. С другой стороны, наличие трения в звеньях механизмов отрицательно сказывается на

эффективности их работы: снижается механический коэффициент полезного действия машин; происходит изнашивание взаимодействующих деталей и изменение конструктивной геометрии элементов, лимитирующей их ресурс; выделяется тепло, отрицательно влияющее на условия работы.

Для создания технически грамотных и экономически обоснованных конструкций необходимо уметь управлять трением и износом и, в первую очередь, рассчитывать детали машин с учетом трения и износа.

Существует много теоретических исследований, посвященных вопросам трения скольжения и трения качения. Они различаются по своей концепции, уровню сложности использования в аналитических или численных расчетах, а также точности и области применения.

Здесь будут представлены самые простые правила учета трения, описаны характерные примеры их использования, а затем даны некоторые рекомендации в отношении решения более сложных задач.

Главной целью данных методических указаний является систематизация информации, полученной в курсах общей физики и теоретической механики, и увязка её с дисциплинами прикладного характера. Знания, полученные при изучении данных методических указаний, позволяет читателю осознанно решать прикладные проблемы, связанные с трением. Задачи с подробными решениями в каждой главе служат углублению и практическому применению полученных знаний, а приведенные условия задач для самостоятельного решения – их закреплению.

Методические указания рассчитаны на студентов инженерных направлений подготовки высших учебных заведений в рамках изучения дисциплин «Теоретическая механика», «Прикладная механика», «Основы трения и износа», может быть полезно инженерам и научным сотрудникам.

1 Основные понятия и определения

В данном параграфе приводятся определения терминов и понятий, которые будут упоминаться в данных методических указаниях.

Под **трением** понимают сопротивление, возникающее при перемещении одного тела относительно другого, прижатого к первому.

Изнашивание – изменение состояния поверхности изделия или инструмента вследствие разрушения поверхностного слоя изделия при трении.

Трение и изнашивание – две стороны одного и того же явления, обусловленного взаимодействием двух тел, сжимаемых нормальной нагрузкой и перемещающихся друг по другу в плоскости их касания. Трение проявляется в виде противодействия относительно перемещению, то есть характеризует силовую сторону явления. Изнашивание проявляется в виде разрушения поверхностных слоев взаимодействующих тел и изменения вследствие этого их размеров и формы.

По признаку состояния трущихся поверхностей в зависимости от наличия на них смазки различают следующие виды трения:

а) **сухое трение**, возникающее при отсутствии смазки и загрязнения между трущимися поверхностями деталей;

б) **граничное трение**, возникающее на трущихся поверхностях деталей, разделенных слоем смазки весьма небольшой толщины (10 – 20 мкм). При таких условиях масляная пленка полностью не разделяет поверхности и обычные уравнения гидродинамики для вязкой жидкости в этом случае неприемлемы. Износ трущихся поверхностей при граничном трении протекает во много раз медленнее, чем при сухом трении;

в) **жидкостное трение**, при котором трущиеся поверхности полностью разделены слоем смазки. Внешнее давление при жидкостном трении воспринимается смазочной жидкостью. Жидкостное трение значительно

уменьшает потери энергии на преодоление вредных сопротивлений и износ деталей машин.

В данных методических указаниях рассматриваются задачи только **сухого трения**.

В зависимости от наличия или отсутствия относительного движения различают трение покоя и трение движения.

Трение покоя – это трение двух тел при микросмещениях до перехода к относительному движению.

Силой трения покоя ($F_{\text{тр.покоя}}$) (рисунок 1.1 а) называют сдвиговое усилие, прикладываемое к контактирующим телам, и не вызывающее их взаимного скольжения. При этом взаимное перемещение ($l_{\text{покоя}}$) достигается за счет деформации материала выступов шероховатости в зоне контакта и называется предварительным смещением. Оно носит в основном упругий характер и исчезает при снятии сдвигающего усилия. Однако по мере роста сдвигающего усилия предварительное смещение приобретает пластический характер и становится частично необратимым.

Трение движения – трение двух тел, находящихся в относительном движении.

Скольжение – *относительное движение*, при котором одни и те же точки одного тела приходят в соприкосновение все с новыми и новыми точками другого тела.

Качение (Rolling contact) – *относительное движение*, при котором следующие одна за другой точки одного тела переходят в соприкосновение со следующими одна за другой точками другого тела, причем мгновенный центр вращения одного тела относительно другого совпадает с одной из точек касания.

По характеру относительного движения различают **трение скольжения** и **трение качения**

Трение скольжения (рисунок 1.1б) – сопротивление взаимному скольжению.

Трение качения (рисунок 1.1в) – сопротивление качению одного тела по поверхности другого.

Сила трения скольжения – сила, возникающая при поступательном перемещении одного из контактирующих тел относительно другого и действующая на это тело в направлении, противоположном направлению скольжения, вдоль касательной к общей границе между телами.

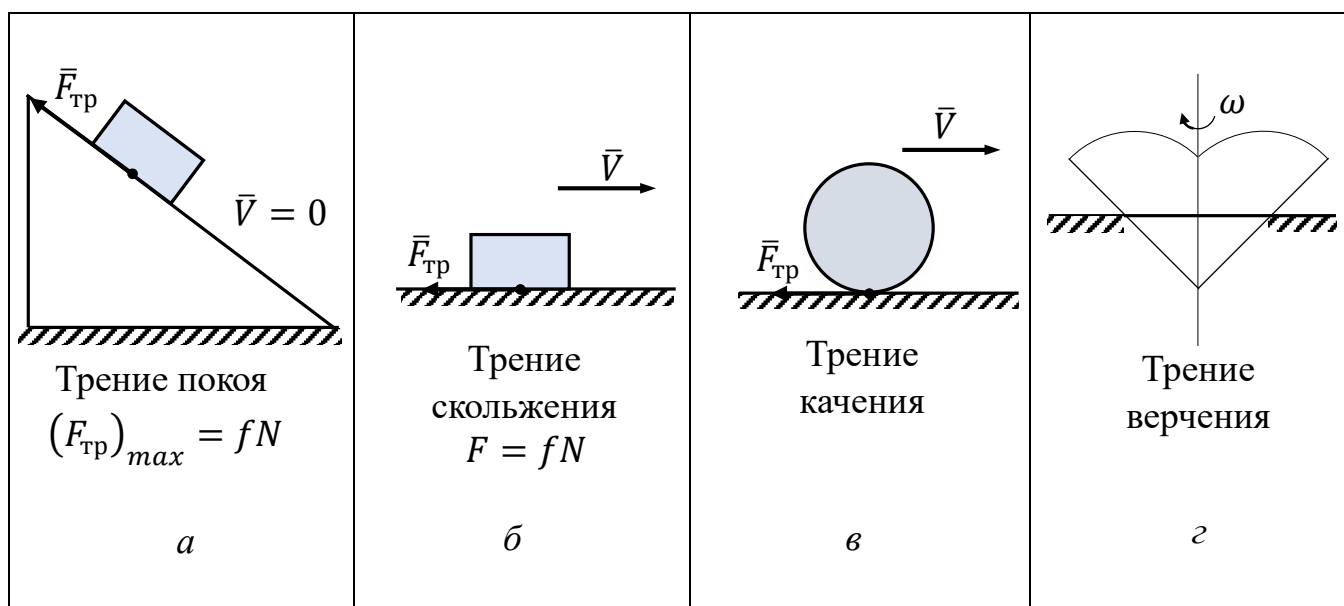


Рисунок 1.1 – Виды трения

Момент сопротивления качению – момент сил, возникающий при качении одного из двух контактирующих тел относительно другого, препятствующий качению.

Коэффициент трения скольжения (f) – безразмерная величина, равная отношению силы трения к нормальной нагрузке (в литературных источниках часто коэффициент трения обозначен μ) (рисунок 1.2).

Коэффициент трения качения (δ) – величина, имеющая размерность длины, представляет собой отношение момента трения качения к нормальной нагрузке (рисунок 1.3).



Рисунок 1.2 – Сила трения, коэффициент трения скольжения

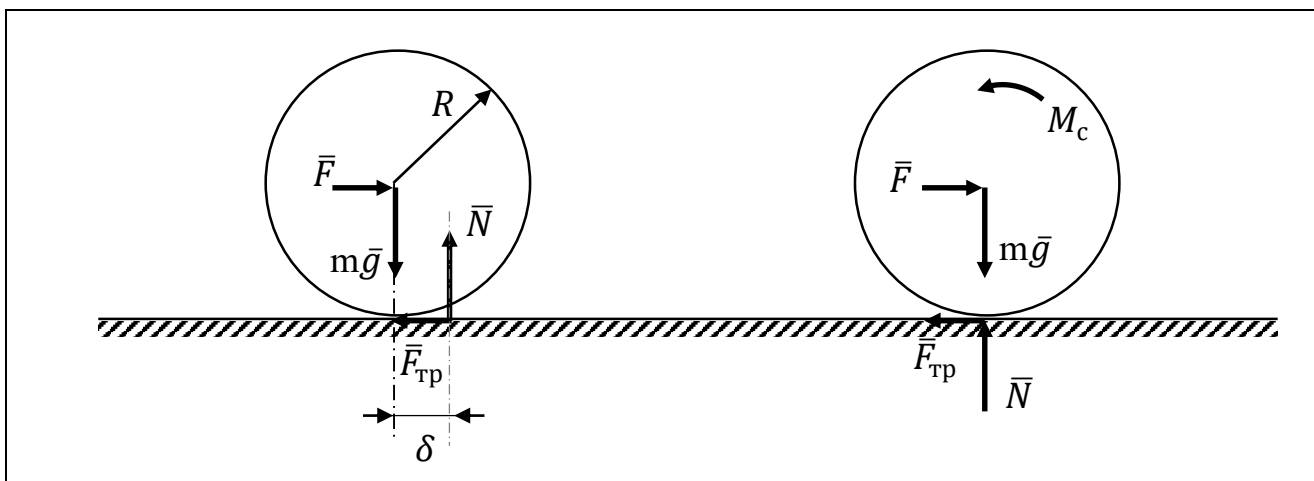


Рисунок 1.3 – Трение качения, коэффициент трения качения

Трибология (от греч. tribos – трение и ...логия) – научная дисциплина, занимающаяся изучением трения и износа узлов машин и механизмов в присутствии смазочных материалов.

Триботехника – прикладной раздел трибологии, который охватывает конечную стадию создания узлов трения. Принципы триботехники находят отражение в методах расчета, конструирования, изготовления, смазки и эксплуатации узлов трения.

Ряд понятий, относящихся к трению, стандартизирован ГОСТ 27674-88, который включает около 100 терминов.

2 Общие представления о трении

Первые объяснения природы сил трения и связанного с ними износа относятся к XVIII веку (Паран, 1704 г.; Эйлер, 1778 г.); первые четыре закона трения сформулированы Кулоном. Все эти теории основывались на геометрических гипотезах об абсолютно жестких телах, где коэффициент трения рассматривался как тангенс угла наклона единичной неровности. Дальнейшее развитие науки о трении привело к созданию молекулярной, дислокационной, энергетической и других теорий. Основоположником всемирно признанной современной науки о трении является И. В. Крагельский – автор молекулярно-механической теории трения и усталостной теории изнашивания. По этой теории трение обуславливается деформированием материала внедрившимися неровностями (деформационная или механическая составляющая) и преодолением молекулярных (адгезионных) связей в зоне контакта (молекулярная составляющая), то есть образованием и разрушением фрикционных связей. При этом происходит упругое и пластическое деформирование, хрупкое разрушение выступов неровностей, диффузия молекул материалов взаимодействующих деталей, нагрев поверхностей при их относительном перемещении, окислительные процессы – трение является результатом целого ряда процессов в зоне фрикционного контакта тел.

Для вычисления коэффициента трения между жесткой шероховатой поверхностью, неровности которой моделируются сегментами одинакового радиуса, и упругим полупространством предложена формула:

$$f = \frac{\tau_0}{p_\tau + \beta + a_\eta k \sqrt{h/R}}, \quad (2.1)$$

где τ_0 – сдвиговое сопротивление;

β – безразмерный коэффициент упрочнения молекулярной связи;

p_τ – фактическое давление на поверхности контакта;

a_η – коэффициент гистерезисных потерь;

k – коэффициент формы неровностей и их распределения по высоте, ($k \approx 0,4$);

h – глубина внедрения;

R – радиус единичной микронеровности.

Соотношение h/R – носит название критерия И. В. Крагельского и является характеристикой фрикционного контакта трущихся пар. Наиболее распространенным видом нарушения фрикционных связей является упругое деформирование (оттеснение материала выступами контртела). При этом действующая нагрузка и адгезия не приводят к возникновению в зоне контакта напряжений, превышающих предел текучести:

$$\frac{h}{R} \leq 200 \left(\frac{\sigma_\tau}{E} \right)^2, \quad (2.2)$$

где σ_τ – предел текучести;

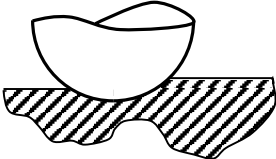

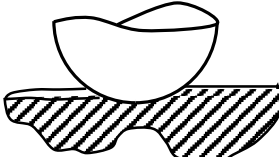


E – модуль упругости материала.

Отдельные контактирующие выступы имеют значительно большую жесткость в тангенциальном направлении, чем в нормальном. Под влиянием контрвыступа выступ вминается, увлекая за собой прилежащие области материала, а затем выпрямляется под влиянием сил упругости и сталкивается с другими выступами. Разрушение материала или отделение частиц износа происходит в результате фрикционной контактной усталости при числе взаимодействий (циклов) $n \rightarrow \infty$.

Сведения о различных видах фрикционного контакта приведены в таблице 2.1.

При пластическом оттеснении контактные напряжения достигают предела текучести и материал обтекает выступы контртела, изнашивание осуществляется в результате малоциклового усталости.

Таблица 2.1 – Основные характеристики фрикционных связей

Характер деформирования	Число (циклов), приводящих к разрушению основы	Условие осуществления	Схема взаимодействия
Упругое отеснение	$n \rightarrow \infty$	$(h/R) < 0,01$ черные металлы; $(h/R) < 0,0001$ цветные металлы	
Пластическое отеснение (передеформирование)	$1 < n < \infty$	$(h/R) > 0,01$ $((h/R) < 0,1$ при трении без смазки, $< 0,3$ со смазкой) $(h/R) > 0,0001$ для цветных металлов	
Микрорезание	$n \rightarrow 1$	$(h/R) \geq (1 - (2\tau / \sigma_t))$	
Адгезионное нарушение фрикционной связи	$n \rightarrow \infty$	$((d\tau) / (dh)) > 0$	
Когезионный отрыв	$n \rightarrow 1$	$((d\tau) / (dh)) < 0$	

Адгезионное взаимодействие (адгезия – прилипание) – возникновение фрикционной связи между пленками на контактирующих поверхностях трения при четко выраженной границе раздела соприкасающихся тел; предельный случай – химическое взаимодействие на поверхности раздела (хемсорбция).

Когезия (сцепления) – молекулярное взаимодействие, при котором происходит соединение частиц взаимодействующих тел с наибольшей прочностью.

Характер фрикционного контакта и значение h/R зависят от давления на площадях контакта, которое по способу определения подразделяется на следующие виды.

Номинальное давление p_a – действующее на номинальной площади контакта A_a , по которой соприкасались бы тела с идеально гладкой поверхностью, определяется как частное от деления действующей силы на площадь поперечного сечения меньшего из контактирующих тел.

Контурное давление p_t – нагрузка, приходящаяся на единичную контурную площадь касания A_t . Последняя обуславливается волнистостью контактирующих тел – регулярно чередующимися и близкими по размерам возвышениями и впадинам, образующимися при механической обработке материалов из-за неравномерности усилий резания и колебаний в системе станок – инструмент – изделие. В зависимости от направления движения инструмента различают продольную и поперечную волнистости. Различие между волнистостью и шероховатостью определяется отношением шага волны микронеровности к её высоте, обычно для волнистости это соотношение не менее 25 – 40, при чистовой обработке высота волны достигает 15 мкм. Каждая область, ограниченная этим контуром, включает фактические пятна контакта.

Фактическая площадь контакта A_t представляет сумму элементарных площадок контакта, возникающих в результате деформаций отдельных неровностей. Эта площадь определяет область силового взаимодействия двух шероховатых тел, обусловленного межмолекулярным воздействием.

Частное от деления действующего усилия на эти площади контакта являются соответственно фактическим p_t , контурным p_c и номинальным p_a давлениями; необходимо учесть, что A_c и A_a – фиктивные величины.

При упругом фрикционном контакте отношение p_c / E в пределах от 10^{-3} до 10^{-4} , хотя возможны случаи, когда это значение достигает от 10^{-2} до 10^{-1} .

Пластический контакт чаще всего реализуется в неподвижных соединениях, например, в неподвижных посадках; при повторных нагружениях этот контакт вырождается в упругий, поэтому в соединениях он имеет меньшее практическое значение; при этом $p_{\eta} = C$, $\sigma_t = \text{const}$; для сферы $C = 3$. Однако очень широкое распространение этот вид контакта имеет при абразивном изнашивании и при обработке деталей абразивным инструментом.

Для практических целей часто используется биномиальный закон трения, учитывающий только два первых слагаемых уравнения (2.1).

Значение коэффициента трения f для различных сочетаний материалов и условий взаимодействия пар трения приводятся в литературе [2 – 5]. Эти данные рекомендуются для расчетов при проектировании, конструировании и создании узлов оборудования различного назначения.

Некоторые данные приведены также в следующем разделе, излагается инженерная методика решения задач с учетом трения при взаимодействии недеформируемых твердых тел.

3 Трение скольжения

Рассмотрим два тела А и В, взаимодействующих друг с другом в точке (рисунок 3.1). Сила $F_{\text{тр}}$, приложенная к телу А, направлена в сторону, противоположную направлению скорости скольжения тела А относительно тела В. По принципу действия и противодействия, сила, приложенная к телу В, направлена в противоположную сторону. Эта сила также противоположна относительной скорости скольжения тела В относительно тела А. То есть сила $F_{\text{тр}}$ характеризует сопротивление относительному движению тел А и В.

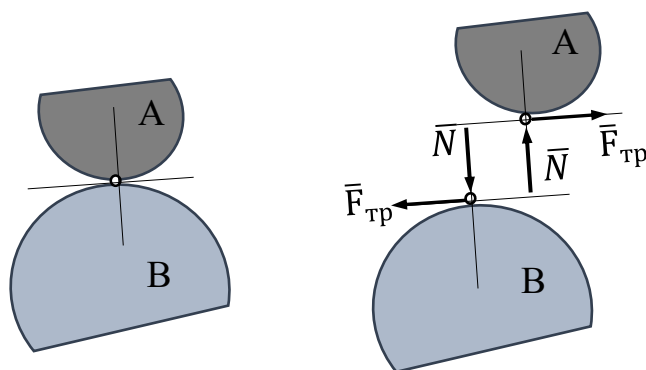


Рисунок 3.1 – Контакт двух тел между собой

Примечание – Силы, действующие между телами, удовлетворяют закону действия и противодействия (третьему закону Ньютона). Обычно силу взаимодействия раскладывают на две составляющие: силу $F_{\text{тр}}$, касательную к поверхности контакта, и силу N , перпендикулярную поверхности контакта.

Сила трения F пропорциональна нормальной силе N , при этом коэффициент пропорциональности – величина постоянная, и считается независимой от площади контакта между телами А и В.

Кроме того, в соответствии с законом Кулона, коэффициент трения скольжения считается не зависящим от расстояния скольжения, скорости скольжения, времени контакта и так далее.

Поскольку сопротивление взаимному скольжению присутствует, существует сила, препятствующая взаимному движению. Эту силу, которая предотвращает

скольжение, принято называть трением покоя. Значение этой силы – величина переменная, и может изменяться от нуля до некоторого максимального значения.

Все сказанное выше можно обобщить со следующими уравнениями для силы трения:

$$F_{AB} = -fV_{AB}V_{AB}, \quad (3.1)$$

$$F_{AB} \leq fN,$$

где \vec{F}_{AB} – сила трения скольжения, приложенная к телу, препятствующая скольжению тела А относительно тела В;

$\vec{V}_{A/B}$ – вектор скорости относительного скольжения тела А относительно тела В;

$|\vec{F}_{AB}|$ – абсолютное значение (модуль) силы трения;

fN – верхняя граница силы трения (трение покоя).

3

н

а

В случае покоя, когда контактирующие тела под действием внешних сил не скользят друг относительно друга, значение силы трения нельзя определить, используя уравнение (3.1). В случае покоя (отсутствия взаимного проскальзывания контактирующих тел) уравнение (3.1) описывает скорее верхний предел возможного размера модуля силы трения. То есть сила трения покоя должна быть меньше или равна $f \cdot N$ при отсутствии скольжения.

у

Соотношение между силой трения F и скоростью относительного скольжения описывается темной линией (рисунок 3.2). Когда скорость скольжения изменяется от отрицательной к положительной, на графике виден скачок от $-fN$ до fN в силе трения, который невозможно описать математической зависимостью между силой трения и скоростью относительного скольжения.

Вместо этого отношения – кривая (зигзаг) в плоскости F, V .

р

а

в

н

е



Для двумерных (плоских) задач, когда скольжение возможно только в одном направлении (или противоположном), зависимость силы трения от скорости относительного скольжения описывает график, показанный на рисунке 3.3, где V – скорость относительного скольжения.

В рамках данных методических указаний, не будем различать статический коэффициент трения от динамического или кинетического. Для этих целей будем считать обозначенные величины идентичными.



Рисунок 3.3 – Зависимость силы трения от скорости

Резюмируя выше сказанное, сделаем несколько заключений.

1) При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого, в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая силой трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$.

Эта сила направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело (противоположно скорости движения). При малых скоростях скольжения максимальная величина трения практически не зависит от скорости.

2) Сила трения покоя изменяется от нуля до предельного максимального значения:

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}. \quad (3.2)$$

3) Максимальное значение силы трения покоя прямо пропорционально силе нормальной реакции и определяется по формуле (3.3):

$$F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN, \quad (3.3)$$

где N – модуль силы нормального давления (нормальной реакции),

f – коэффициент трения скольжения.

Для начала скольжения необходима сила, большая предельного значения силы трения.

4) Величина $F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ в широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

Простейший закон трения, речь о котором в данных методических указаниях, использует один постоянный коэффициент скольжения трения f . Это безразмерная величина, которая определяется опытным путем и зависит от материала и состояния соприкасающихся поверхностей ($f = \text{const}$) (в данных методических указаниях рассматривается только «сухое» трение).

Способы определения коэффициента трения

1. *Тело на горизонтальной плоскости.* К телу прикреплена нить, перекинутая через блок, на противоположном конце к которой подвешивают грузы до тех пор, пока тело не сдвинется с места. Сдвигающая сила изменяется от нуля до своего максимального значения – $0 \leq T \leq T^{max}$, ($0 \leq P \leq P^{max}$) (рисунок 3.4).

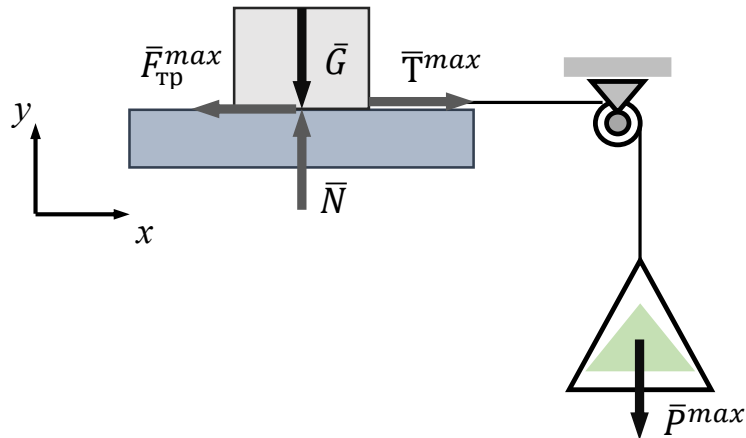


Рисунок 3.4 – Определение коэффициента трения тела на горизонтальной плоскости

Выберем оси (x по движению тела, y – перпендикулярно), составим уравнения равновесия в проекциях на оси координат.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad T^{max} - F_{тр}^{max} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad N - G = 0, \quad N = G,$$

$$T^{max} = F_{тр}^{max} = fN = fG.$$

Так как максимальная сила натяжения нити равна суммарному весу грузов, при котором произошёл сдвиг тела, то коэффициент трения определяется как:

$$f = \frac{T^{max}}{G} = \frac{P^{max}}{G}. \quad (2.4)$$

2. Тело на наклонной плоскости. Путём изменения угла наклона к горизонтальной плоскости находят угол, при котором тело сдвигается с места. Сдвигающая сила и сила нормального давления изменяются при изменении угла наклона плоскости скольжения от нуля до максимального значения – $0 \leq \varphi \leq \varphi_{max}$ (рисунок 3.5).

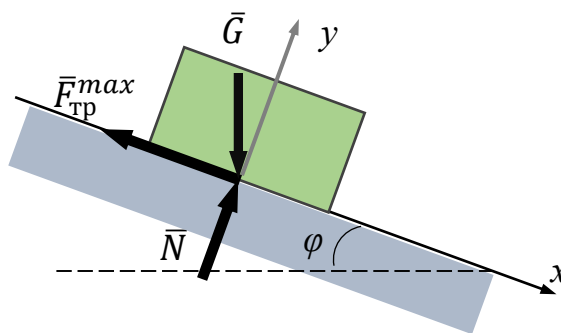


Рисунок 3.5 – Определение коэффициента трения тела на наклонной плоскости

Уравнения равновесия в проекциях на оси координат:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad G \sin \varphi^{max} - F_{тр}^{max} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad N - G \cos \varphi^{max} = 0, \quad N = G \cos \varphi^{max},$$

$$F_{тр}^{max} = fN = G \sin \varphi^{max}.$$

Коэффициент трения тела на наклонной плоскости определяется как:

$$f = \frac{G \sin \varphi^{max}}{N} = \frac{G \sin \varphi^{max}}{G \cos \varphi^{max}} = \operatorname{tg} \varphi^{max}. \quad (3.5)$$

Чаще всего коэффициент трения скольжения изменяется в пределах $0,05 \leq f \leq 1,2$, определяется эмпирическим путем, его можно найти в

справочнике. Пример значения коэффициента трения в зависимости от вида трущихся поверхностей представлен в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Значения коэффициента трения

Трущиеся поверхности	Коэффициент трения скольжения
Сталь по льду	0,014
Сталь по стали	0,15 – 0,18
Дерево по чугуну	0,25 – 0,5
Дерево по дереву:	
поперек волокон	0,34
вдоль волокон	0,48
Резина по чугуну	0,5 – 0,8
Целлофан по резине	0,95

Угол трения

При наличии трения между телом (ползуном) и опорной поверхностью полная реакция \bar{R} поверхности отклонена от нормали к поверхности контакта на некоторый угол φ в сторону, противоположную возможному движению.

При решении задач полную реакцию \bar{R} поверхности в большинстве случаев удобно представить двумя составляющими \bar{N} и $\bar{F}_{\text{тр}}^{\text{max}}$.

Угол φ между нормальной реакцией \bar{N} и полной реакцией \bar{R} , соответствующей максимальному значению силы трения, называется углом трения (рисунок 3.6).

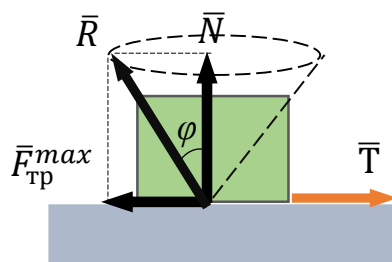


Рисунок 3.6 – Расстановка сил с учётом угла трения

С учетом вышеизложенного:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\text{тр}}^{\max}}{N} = \frac{fN}{N} = f, \quad (3.6)$$

где $F_{\text{тр}}^{\max}$ – максимальное значение силы трения, равное произведению коэффициента трения и нормальной реакции, Н;

N – нормальная реакция, Н;

φ – угол между нормальной и полной реакцией, соответствующей максимальному значению силы трения.

Таким образом, тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения,

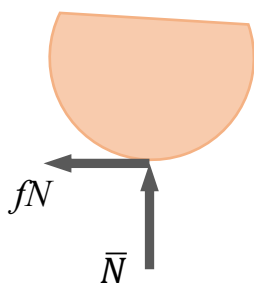
$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{F_{\text{тр}}^{\max}}{N} \right) = \operatorname{arctg} f. \quad (3.7)$$

Использование угла трения или коэффициента трения для описания трения эквивалентно. Это вопрос рациональности решения конкретной задачи. Иногда графический способ решения задачи более прост и нагляден, чем аналитический (наглядно представлено в пункте 4.4).

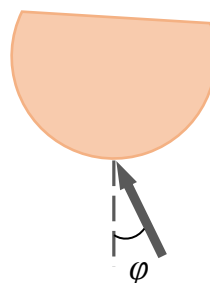
Два способа представления трения скольжения показаны на рисунке 3.7:

а) с помощью коэффициента трения при аналитическом способе решения задачи;

б) с помощью угла трения – при графическом способе решения задачи.



а) аналитический способ



б) графический способ

Рисунок 3.7 – Способы представления трения скольжения

Конус трения

При изменении направления сдвигающей силы T на опорной поверхности ее поворотом относительно нормали к плоскости полная максимальная реакция шероховатой поверхности описывает конус трения.

Конусом трения называют конус, описанный линией действия полной реакции \bar{R} , при максимальной силе трения, вокруг направления нормальной реакции. Конус трения (рисунок 3.8) строится в точке соприкосновения контактирующих поверхностей, его ось совпадает с нормальной реакцией, а угол полураствора $\varphi = \text{arctg } f$.

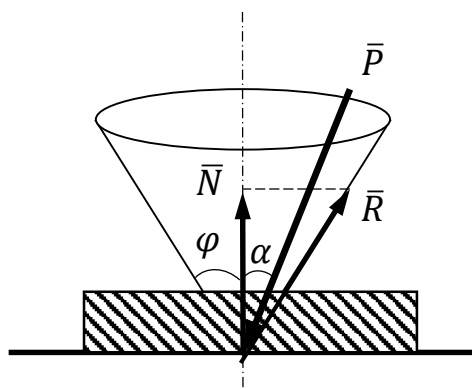


Рисунок 3.8 – Конус трения

Пусть на тело действуют активные силы G , T и другие силы. Их можно заменить равнодействующей силой P , имеющей угол отклонения от вертикали α . Можно показать, что равновесие возможно лишь в том случае, когда эта сила остается внутри пространства конуса трения:

Пусть \bar{P} – равнодействующая приложенных к телу сил (рисунок 3.8).

Условие равновесия по оси x :

$$P \sin \alpha \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}.$$

Из уравнения равновесия по оси y :

$$N = P \cos \alpha.$$

Максимальная сила трения:

$$F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN = \text{tg } \varphi \cdot N = \text{tg } \varphi \cdot P \cos \alpha.$$

Тогда

$$P \sin \alpha \leq \text{tg } \varphi \cdot P \cos \alpha,$$

откуда

$$\text{tg } \alpha \leq \text{tg } \varphi \text{ и } \alpha \leq \varphi.$$

Следовательно, при $\alpha < \varphi$ будет $P < F_{\text{тр}}$ и движение окажется невозможным при любом значении модуля P (возникает явление заклинивания).

4 Особенности решения задач с учетом сил трения скольжения

При изучении движения и равновесия тел с учетом сил трения рекомендуется придерживаться следующего алгоритма:

1) выделить объект, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин (это может быть точка, тело либо система тел, к которым приложены все заданные и искомые силы);

2) изобразить выбранный объект и обозначить приложенные к нему активные силы (в случае распределенной нагрузки ее следует заменить сосредоточенной эквивалентной силой);

3) если твёрдое тело не свободно, то, применив принцип освобожденности от связей, отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями связей; при этом реакцию неидеальной поверхности следует представить:

– либо двумя составляющими: силой \vec{N} , направленной по нормали к поверхности контакта, и силой трения $F_{\text{тр}}$, направленной по касательной к ней;

– либо одним вектором \mathbf{R} , направленным под углом трения φ к нормали к поверхности;

4) составить условия равновесия рассматриваемого объекта под действием активных сил и реакций связей;

5) дополнить полученную систему уравнений выражениями зависимости сил трения от соответствующих сил нормального давления (на основании закона Кулона);

6) сопоставить число неизвестных величин и число независимых уравнений равновесия, которые должны быть равны для статически определимых задач;

7) решив полученную систему уравнений (неравенств), определить искомые неизвестные.

В случае, если рассматриваемое тело (или система тел) находятся в покое, сила трения может принимать различные значения от нуля до максимального. Поэтому условия равновесия тел, которые ранее выражались равенствами,

приобретают вид неравенств. В связи с этим при решении задач с учетом трения, как правило, рассматривают предельные положения равновесия, когда сила трения достигает максимального значения, определяемого в соответствии с выражением $F_{\text{тр}} = f \cdot N$. При этом необходимо помнить, что в результате решения задачи получают не единственные значения искомых величин, а область их значений.

Так, например, рассматривая равновесие лестницы АВ (рисунок 4.1), опирающееся на гладкую стену и шероховатый пол, найдем наименьшее значение угла α , при котором лестница будет в покое, если возьмем максимальное значение силы трения. Положений равновесия лестницы при этом бесчисленное множество, так как при любом значении угла α , большем найденного, но меньшим 90 градусов, для равновесия необходима сила трения меньшая, чем ее максимальное значение.

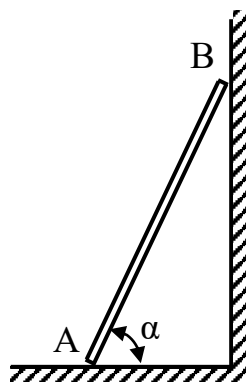


Рисунок 4.1 – Равновесие лестницы

В зависимости от поставленной задачи результат решения может быть выражен в виде равенства или в виде неравенства. Приведем несколько примеров.

4.1 Тело на наклонной плоскости без учета размеров

Рассмотрим равновесие плоского ползуна (без учета размеров) с действующей на него силой тяжести mg на наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту (рисунок 4.1). Со стороны плоскости на ползун будет действовать сила нормального давления N и сила трения $F_{\text{тр}}$, препятствующая перемещению

ползуна вниз по наклонной плоскости. Определим условия, при которых ползун останется в покое, и когда начнет скользить по наклонной плоскости.

Рассмотрим вначале предельный случай равновесия, когда $\bar{F}_{\text{тр}} = \bar{F}_{\text{max}}$.

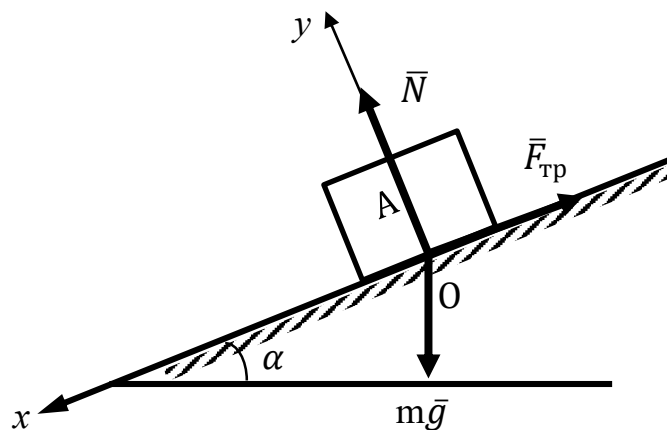


Рисунок 4.1 – Равновесие плоского ползуна на наклонной плоскости

Проецируя все силы, которые действуют на ползун, на оси, получим

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad -mg \cos \alpha + N = 0.$$

Находим:

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha, \quad (4.1)$$

$$N = mg \cos \alpha.$$

Особенность решения задач с учетом сил трения заключается в необходимости использовать дополнительные условия. Так как рассматривается предельный случай, то сила трения принимает свое максимальное значение.

Поэтому, чтобы груз оставался в покое, найденное таким образом значение силы $F_{\text{тр}}$ (формула 4.1) не должно превышать значения F_{max} , определяемого формулой:

$$F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN = fmg \cos \alpha$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = f.$$

Но тело может находиться в покое на наклонной плоскости и при меньших углах ее наклона (это ясно из определения коэффициента трения). Поэтому условием равновесия тела на наклонной плоскости будет $\operatorname{tg} \alpha \leq f$.

4.2 Тело под действием силы на наклонной плоскости

Рассмотрим равновесие тела (ползуна) на наклонной шероховатой плоскости, когда кроме силы тяжести на тело действует внешняя сила P . Пусть на плоскости, наклонённой под углом 30° к горизонту, лежит тело весом $90,5 \text{ Н}$ ($mg = 90,5 \text{ Н}$) (рисунок 4.2). Коэффициент трения покоя f между телом и наклонной плоскостью равен $0,4$ ($f = 0,4$). Какое минимальное значение должна иметь сила \bar{P} , чтобы тело не скользило по плоскости?

Здесь возможны две ситуации:

1) тело может начать скользить вниз, а сила трения будет препятствовать этому скольжению;

2) тело будет перемещаться по наклонной плоскости вверх, в этом случае сила трения будет направлена в противоположную сторону и будет это движение тормозить.

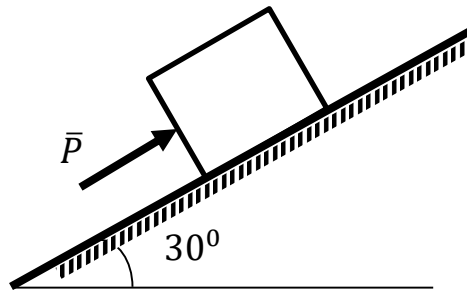


Рисунок 4.2 – Тело определенного веса на наклонной плоскости под действием силы

Проверим, будет ли ползун скользить вниз по наклонной плоскости, если силу P не прикладывать к ползуну ($P=0$). Как следует из предыдущего примера, чтобы ползун не скользил по наклонной плоскости, необходимо, чтобы коэффициент трения скольжения (покоя) превышал значение тангенса угла наклона плоскости:

$$f \geq \operatorname{tg} 30^\circ.$$

По условию коэффициент трения f равен 0,4, тангенс угла в 30 градусов равен 0,577, получилось $f < \operatorname{tg} 30^\circ$ условие не выполняется, следовательно, при отсутствии силы P ползун будет скользить вниз по наклонной плоскости.

1) Выясним, какую минимальную силу P нужно приложить, чтобы предотвратить скольжение ползуна вниз по наклонной плоскости (рисунок 4.3).

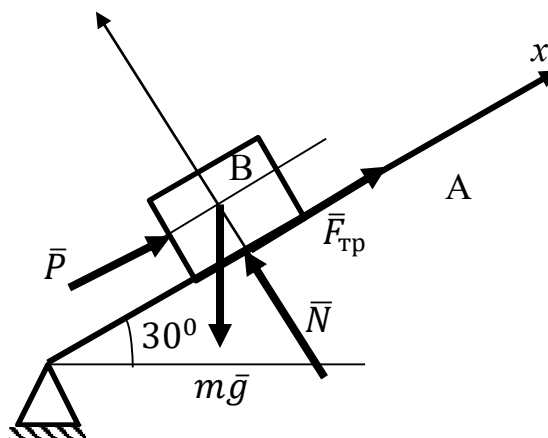


Рисунок 4.3 – Тело под действием силы скользит вниз

Сумма проекций всех сил на ось y :

$$N - mg \cos 30^\circ = 0,$$

откуда

$$N = mg \cos 30^\circ = 90,5 \cdot 0,866 = 78,4 \text{ Н.}$$

Сумма проекций всех сил на ось x :

$$P + F_{\text{тр}} - mg \sin 30^\circ = 0. \quad (4.2)$$

Предельное значение силы трения:

$$F_{\text{тр}} = fN = 0,4 \cdot 78,4 = 31,36 \text{ Н.}$$

Выразим из уравнения (4.2) силу P :

$$P = mg \sin 30^\circ - F_{\text{тр}} = 90,5 \cdot 0,5 - 31,36 = 13,89 \text{ Н.}$$

Таким образом, минимальная сила P , которую нужно приложить, чтобы предотвратить скольжение ползуна вниз по наклонной плоскости, равна 13,89 Н.

2) Какую силу P нужно приложить, чтобы ползун начал скользить вверх по наклонной плоскости (рисунок 4.4)? В этом случае рисунок остаётся прежним, только сила трения меняет своё направление на противоположное.

В этом случае сумма проекций всех сил на ось x :

$$P - F_{\text{тр}} - mg \sin 30^\circ = 0. \quad (4.3)$$

Аналогично, выразим из уравнения (4.3) силу P :

$$P = mg \sin 30^\circ + F_{\text{тр}} = 90,5 \cdot 0,5 + 31,36 = 59,14 \text{ Н.}$$

При силе P , имеющей значение $59,14 \text{ Н}$, ползун будет скользить вверх по наклонной плоскости.

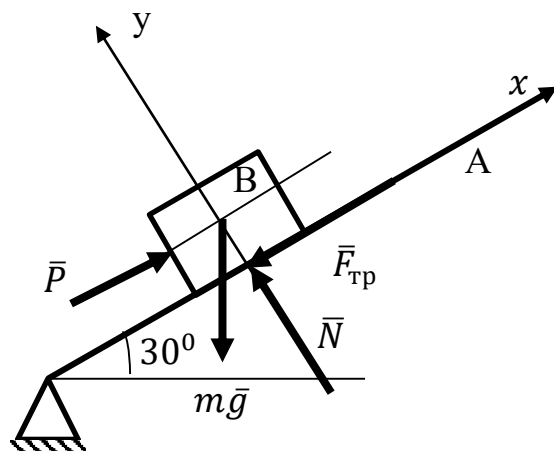


Рисунок 4.4 – Тело под действием силы скользит вверх

4.3 Тело определенных размеров на наклонной плоскости

Рассматривая равновесие тела выше, пренебрегали его размерами, а что изменится, если тело будет иметь определенные размеры? В этом случае возможны следующие варианты выхода системы из состояния покоя: блок может скользить по наклонной плоскости вверх (вниз), а может опрокинуться вниз (вверх). Рассмотрим все варианты. Однородный блок B , показанный на рисунке 4.5, весит $222,4 \text{ Н}$. Массой шкива и трением в шкиве можно пренебречь. Определить диапазон значений веса тела A , при которых блок B (и система в целом) будут находиться в равновесии.

Рассмотрим равновесие блока B . Обозначим силы, действующие на блок в произвольный момент времени. Так как шкив считается невесомым, и трением троса можно пренебречь, натяжение нити будет равно весу груза A и приложено в точке K (точка приложения нити). Поскольку блок B однородный, центр тяжести его будет совпадать с центром симметрии. Вес блока B прикладываем в центре тяжести блока B . Оси координат выберем следующим образом: ось x вдоль плоскости, y – перпендикулярно ей.

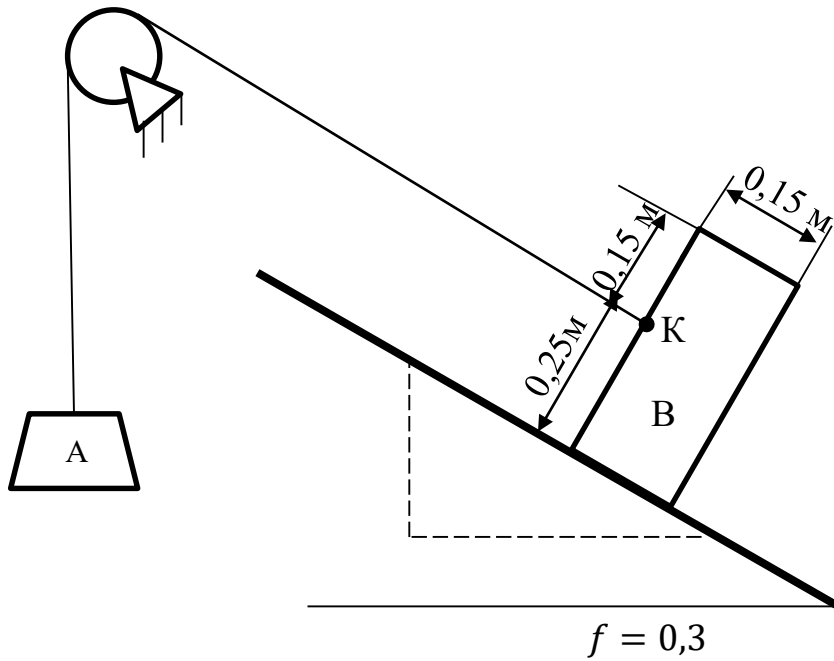


Рисунок 4.5 – Тело определенных размеров на наклонной плоскости

Тело B скользит вниз (рисунок 4.6 а) (вверх) (рисунок 4.6 б) по наклонной плоскости. В этом случае сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена вдоль плоскости, в сторону, противоположную возможному движению. Сила нормального давления \vec{N} – перпендикулярно плоскости.

Посчитаем значения синуса и косинуса угла α :

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0,6,$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Для того, чтобы тело B находилось в покое, должны выполняться следующие условия:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad N - P_B \cos \alpha = 0. \quad (4.4)$$

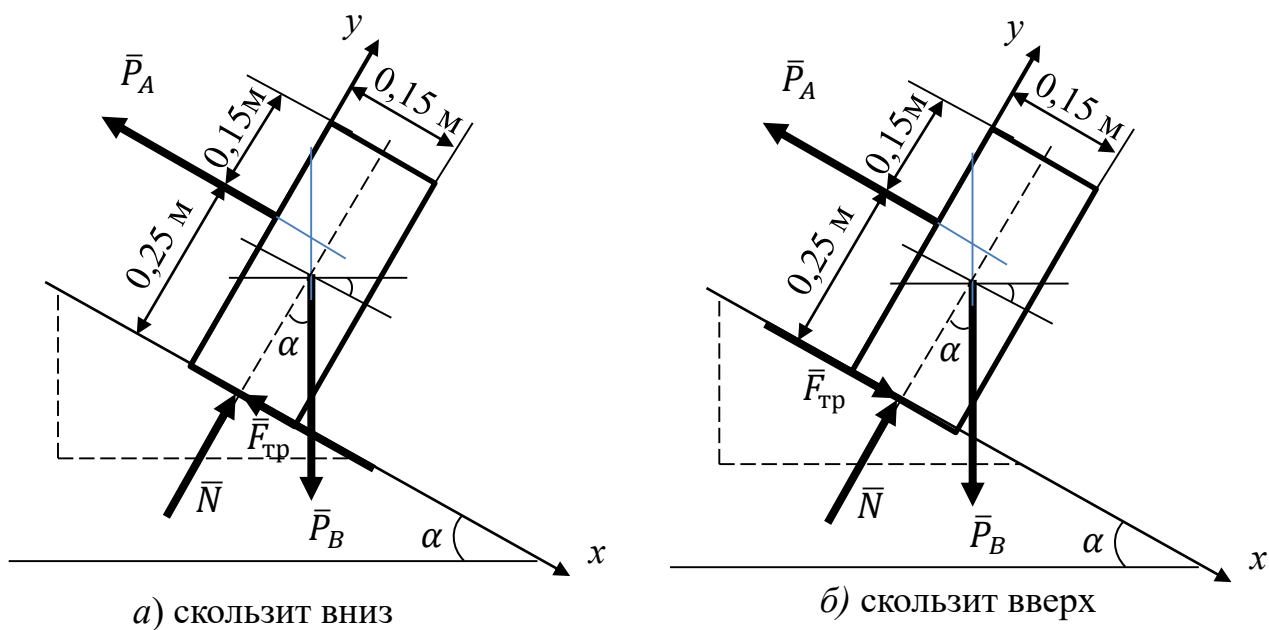


Рисунок 4.6 – Тело определенных размеров на наклонной плоскости

Из уравнения (4.4) следует:

$$N = P_B \cos \alpha = 222,4 \cdot 0,8 = 177,9 \text{ Н.}$$

Чтобы предотвратить скольжение тела в любом направлении, сила трения скольжения должна принять максимальное значение.

$$F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN = 0,3 \cdot 177,9 = 53,38 \text{ Н.} \quad (4.5)$$

Сумма проекций всех сил на ось x в случае скольжения вниз:

$$-P_A - F_{\text{тр}} + P_B \sin \alpha = 0,$$

откуда:

$$P_A = -F_{\text{тр}} + P_B \sin \alpha = -53,38 + 222,4 \cdot 0,6 = 80,1 \text{ Н.}$$

Сумма проекций всех сил на ось x в случае скольжения вверх:

$$-P_A + F_{\text{тр}} + P_B \sin \alpha = 0.$$

Откуда:

$$P_A = F_{\text{тр}} + P_B \sin \alpha = 53,38 + 222,4 \cdot 0,6 = 186,8 \text{ Н.}$$

Таким образом, чтобы блок В не скользил вниз по наклонной плоскости, минимальный вес груза А должен быть 80,1 Н, а чтобы груз не начал скользить вверх, вес груза А не должен превышать 186,8 Н.

Проверка на опрокидывание. В этом случае так же возможны 2 варианта: тело опрокинется вниз через правое нижнее ребро блока (рисунок 4.7 а), либо перевернется через левое нижнее ребро блока (рисунок 4.7 б).

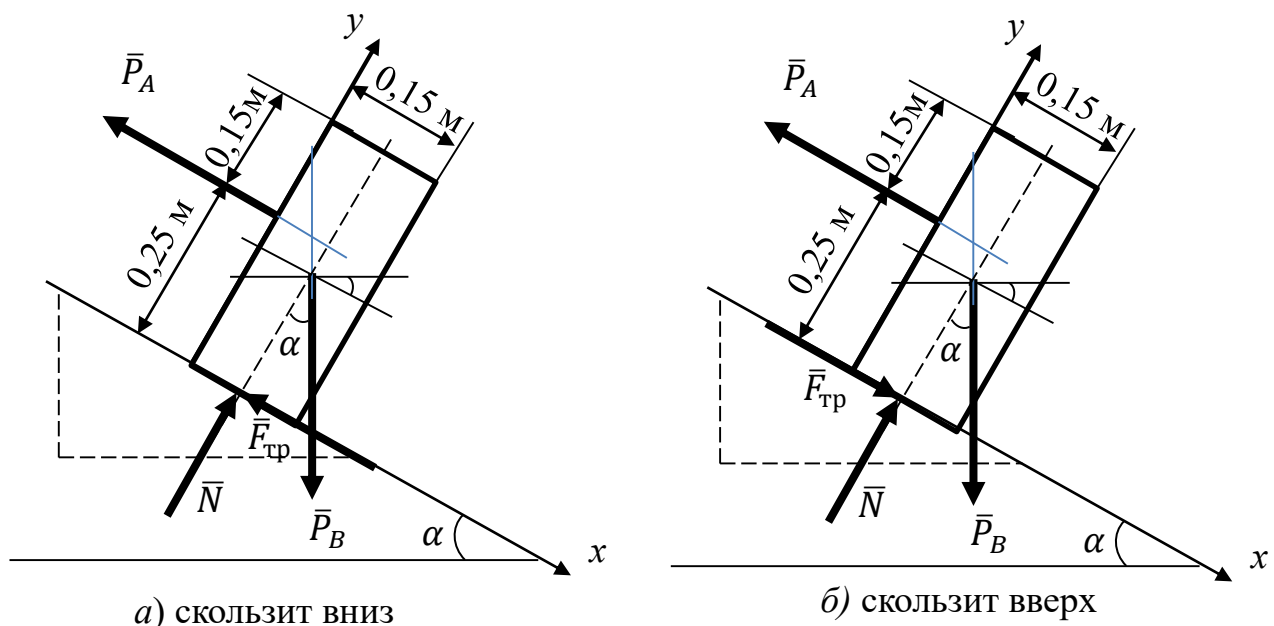


Рисунок 4.7 – Тело определенных размеров на наклонной плоскости

Рассмотрим случай, когда блок выйдет из состояния покоя путём опрокидывания вниз. В момент опрокидывания силы нормальной реакции \bar{N} и силы трения $\bar{F}_{\text{тр}}$ будут приложены в точке А (правое нижнее ребро блока).

Условием равновесия блока в этот момент является равенство нулю суммы моментов всех сил, приложенных к блоку, относительно точки А:

$$P_A \cdot 0,25 + P_B \cos \alpha \cdot 0,075 - P_B \sin \alpha \cdot 0,2 = 0,$$

откуда

$$P_A = \frac{P_B(0,2 \sin \alpha - 0,075 \cos \alpha)}{0,25} = \frac{222,4(0,2 \cdot 0,6 - 0,075 \cdot 0,8)}{0,25} = 53,38 \text{ Н.}$$

Аналогично рассмотрим опрокидывание блока вверх вокруг точки В.

В момент опрокидывания силы нормальной реакции \bar{N} и силы трения $\bar{F}_{\text{тр}}$ будут приложены в точке В (левое нижнее ребро блока).

Блок будет находиться в покое, если сумма моментов всех сил относительно точки В будет равна нулю:

$$P_A \cdot 0,25 - P_B \cos \alpha \cdot 0,075 - P_B \sin \alpha \cdot 0,2 = 0,$$

откуда

$$P_A = \frac{P_B(0,2 \sin \alpha - 0,075 \cos \alpha)}{0,25} = \frac{222,4(0,2 \cdot 0,6 + 0,075 \cdot 0,8)}{0,25} = 160,13 \text{ Н.}$$

Таким образом, если вес груза А будет меньше 53,38 Н, блок В опрокинется вниз, если же вес груза А превысит 160,13 Н, блок В опрокинется вокруг левого опорного ребра.

Рассмотрев все четыре случая, делаем следующие выводы: чтобы избежать опрокидывания груза вверх, вес груза А не должен превышать 160,13 Н ($P_A \leq 160,13 \text{ Н}$); чтобы избежать опрокидывания груза вниз, вес груза А должен быть не менее 53,38 Н ($P_A \geq 53,38 \text{ Н}$); также, чтобы избежать сползания блока В вниз по наклонной плоскости, минимальный вес груза должен быть 80,1 Н

($P_A \geq 80,1 \text{ Н}$), а, чтобы груз не скользил вверх, вес груза А не должен превышать 186,8 Н ($P_A \leq 186,8 \text{ Н}$).

Итак, блок В будет находиться в покое, если вес груза А будет принимать значение в диапазоне от 80,1 Н до 160,13 Н ($80,1 \leq P_A \leq 160,13$).

4.4 Лестница

К гладкой вертикальной стене приставлена лестница под углом α к полу (рисунок 4.8). Пол шероховатый с коэффициентом трения скольжения f . Центр тяжести лестницы находится в ее середине. Определить, будет ли находиться лестница в состоянии равновесия?

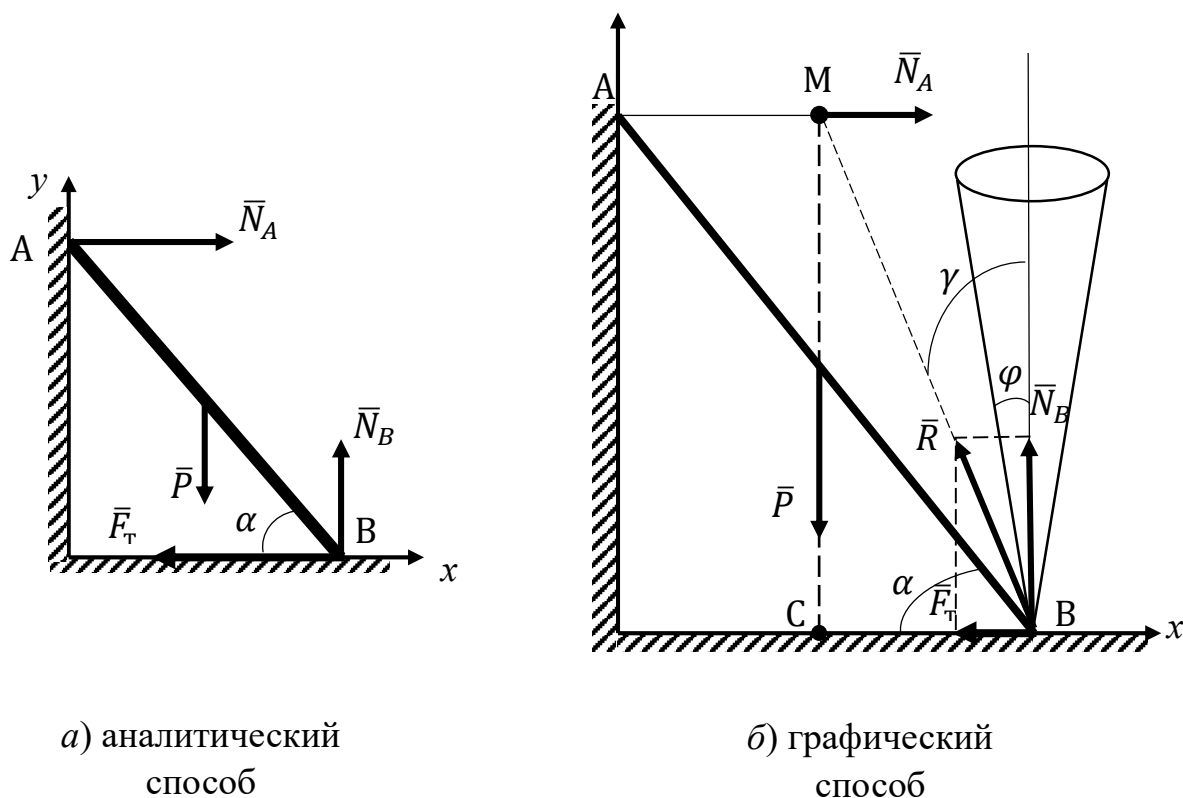


Рисунок 4.8 – Равновесие лестницы

Сначала самостоятельно решите задачу аналитически, учитывая, что лестница находится в равновесии под действием активной силы \bar{P} , реакции \bar{N}_A , составляющей реакции \bar{N}_B и силы трения $\bar{F}_{\text{тр}}$, образующих плоскую систему сил (рисунок 4.8 а), придерживаясь приведенных ниже рекомендаций.

1. Составьте уравнения равновесия лестницы. Уравнение моментов целесообразно составить относительно точки В.
2. Перечислите, какие силы являются неизвестными.
3. Напишите условия равновесия и предельного равновесия лестницы.
4. Определите неизвестные.

Теперь решим задачу графически (рисунок 4.8 б), путем построения в точке В конуса трения с углом при вершине $\varphi = \text{arctg } f$. Лестница находится в равновесии под действием трех сил: $\bar{R} = \bar{N}_B + \bar{F}_{\text{тр}}$, \bar{P} и \bar{N}_A . Следовательно, линия действия силы \bar{R} должна пройти через точку М (пересечения линий действия сил \bar{P} и \bar{N}_A). Из рисунка видно, что если $\gamma > \varphi$, то равновесия нет, если $\gamma = \varphi$, то имеет место предельное равновесие, если же $\gamma < \varphi$, то полная реакция \bar{R} находится внутри конуса трения, и равновесие обеспечено.

При предельном равновесии имеем $\gamma = \varphi$, и так как:

$$\text{tg } \varphi = f,$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{\frac{l}{2} \cos \alpha}{l \sin \alpha} = \frac{1}{2 \text{tg } \alpha},$$

тогда

$$f = \frac{1}{2 \text{tg } \alpha}.$$

Отсюда получаем условие равновесия лестницы:

$$\alpha \geq \arctg \frac{1}{2f}.$$

4.5 Равновесие кривошипно-шатунного механизма (заклинивание)

Найти область значений момента M пары сил, приложенной к кривошипу OA кривошипно-шатунного механизма при равновесном его положении. На ползун действует горизонтальная сила Q . Весами звеньев пренебречь. Коэффициент трения скольжения между ползуном и направляющей f . Длина кривошипа OA равна r , шатун образует угол α с основанием (рисунок 4.9).

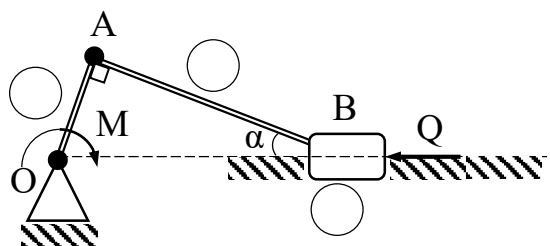


Рисунок 4.9 – Равновесие кривошипно-шатунного механизма

Механизм состоит из нескольких тел (1 – кривошип OA ; 2 – шатун AB ; 3 – ползун B), поэтому к решению задач применим метод РОЗ (расчленить, отбросить, заменить), рассматривая порознь равновесие кривошипа (1) и ползуна (3). Равновесие шатуна (2), невесомого, ненагруженного стержня, шарнирно-закрепленного по концам, отдельно рассматривать не будем, так как направление его реакций на кривошип и ползун известно (вдоль шатуна).

Границы области значений модуля момента пары сил, приложенной к кривошипу, найдём, рассматривая критическое равновесие механизма на сдвиг ползуна вправо или влево.

Рассмотрим критическое равновесие кривошипа при его повороте по часовой стрелке (рисунок 4.10).

На кривошип действует пара сил с моментом M_1 . Отбросим внешние и внутренние связи, заменим их действие реакциями. Внешнюю реакцию подшипника O заменим двумя составляющими x_0 и y_0 . Внутренняя связь невесомого шатуна AB заменим реакцией R_{21} , направленной вдоль шатуна AB . На кривошип действует произвольная плоская система сил $(M_1; x_0; y_0; R_{21})$, эквивалентная нулю. Так как реакцию подшипника находить не нужно, составим одно уравнение моментов сил относительно точки O :

$$\sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0, \quad -M_1 + R_{21} \cdot r = 0.$$

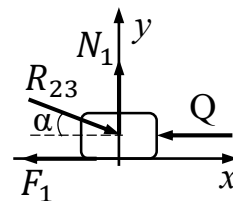
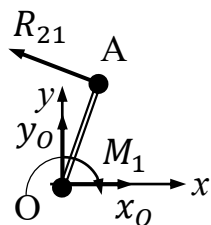


Рисунок 4.10 – Равновесие кривошипа

Рисунок 4.11 – Равновесие ползуна

Рассмотрим критическое равновесие ползуна, предшествующее его сдвигу вправо (рисунок 4.11).

Покажем заданную силу Q . Отбросим внешние и внутренние связи, заменим их действие реакциями. Реакцию внешней связи (шероховатой поверхности направляющей) покажем двумя составляющими: силой нормального давления N_1 и силой трения скольжения F_1 , приложенных в точке, положение которой неизвестно. Реакция внутренней связи невесомого шатуна направлена вдоль прямой AB . Эта сила равна и противоположна реакции шатуна на кривошип: $(R_{23} = R_{21})$. На ползун действует плоская сходящаяся система сил $(Q; N_1; F_1; R_{23})$, эквивалентная нулю. Составим два уравнения равновесия.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad -Q - F_1 + R_{23} \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad N_1 - R_{23} \sin \alpha = 0.$$

К этим уравнениям добавим уравнение трения скольжения:

$$F_1 = f N_1.$$

Решив полученные уравнения, найдем:

$$M_1 = \frac{Qr}{\cos \alpha - f \sin \alpha}.$$

Второе граничное значение момента пары можно получить из первого, изменив знак перед членом, содержащим коэффициент трения. Получим:

$$M_2 = \frac{Qr}{\cos \alpha + f \sin \alpha}.$$

Справедливость этого решения проверим, рассмотрев критическое равновесие механизма на сдвиг кривошипа против хода часовой стрелки. При этом расчётная схема кривошипа не изменится (рисунок 4.12). Сравнить с рисунком 4.10.

Рассуждая аналогично, получим условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0, \quad -M_2 + R_{21} \cdot r = 0.$$

Рассмотрим критическое равновесие ползуна на сдвиг его влево (рисунок 4.13). Порядок решения остаётся прежним. Направление силы F_2 противоположно направлению F_1 . Система уравнений примет вид:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -Q + F_2 + R_{23} \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_2 - R_{23} \sin \alpha = 0.$$

К этим уравнениям добавим уравнение трения скольжения:

$$F_2 = f N_2.$$

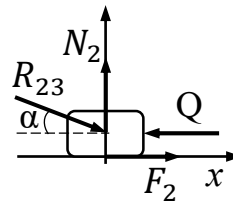
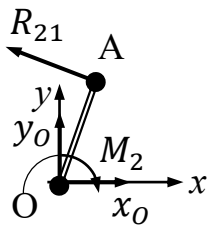


Рисунок 4.12 – Равновесие кривошипа

Рисунок 4.13 – Равновесие ползуна

Решив полученные уравнения, найдем:

$$M_2 = \frac{Qr}{\cos \alpha + f \sin \alpha}.$$

Областью значений модуля момента пары М, приложенной к кривошипу, при равновесных положениях механизма будет:

$$\frac{Qr}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \leq M \leq \frac{Qr}{\cos \alpha - f \sin \alpha}.$$

Замечание. Анализируя решение, видим, что М становится неограниченно большим при $\cos \alpha = f \sin \alpha$, или $\operatorname{ctg} \alpha = f$.

Этому соответствует заклинивание ползуна по направляющей.

4.6 Консоль

Горизонтальный стержень AB имеет на конце A отверстие, которым он надет на вертикальную круглую стойку CD ; длина втулки $b = 2\text{ см}$; на расстоянии a от оси стойки к стержню подвешен груз P . Определить, пренебрегая весом стержня AB , расстояние a , при котором стержень остается в равновесии, если коэффициент трения $f = 0,1$.

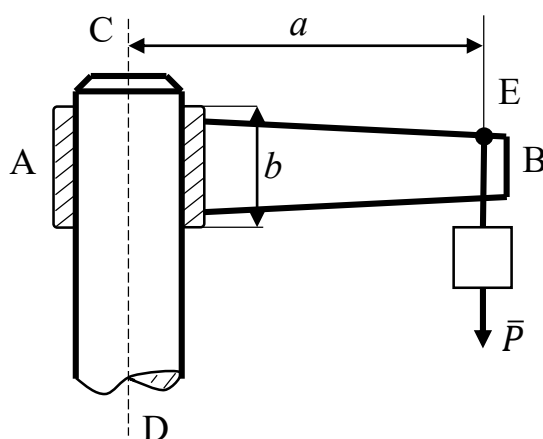


Рисунок 4.14 – Условие к задаче

Дано: $b = 2\text{ см}$, $f = 0,1$.

Найти: расстояние a .

Решение.

1. Выбираем в качестве объекта равновесия стержень AB с грузом P :

Объект равновесия – механическая система (твердое тело или совокупность твердых тел), находящаяся в равновесии под действием приложенных к ней сил. Если свобода перемещения этой системы ограничена другими телами, то такая система называется несвободной. Минимальное расстояние a , на котором следует подвесить груз, определяется из условия нахождения стержня в предельном состоянии равновесия.

2. Отбрасываем связи (вертикальную круглую стойку CD). Связь – тело, ограничивающее свободу движения объекта.

3. Заменяем отброшенные связи реакциями \bar{N}_E , \bar{N}_G , $\bar{F}_{трE}$, $\bar{F}_{трG}$ (рисунок 4.15).

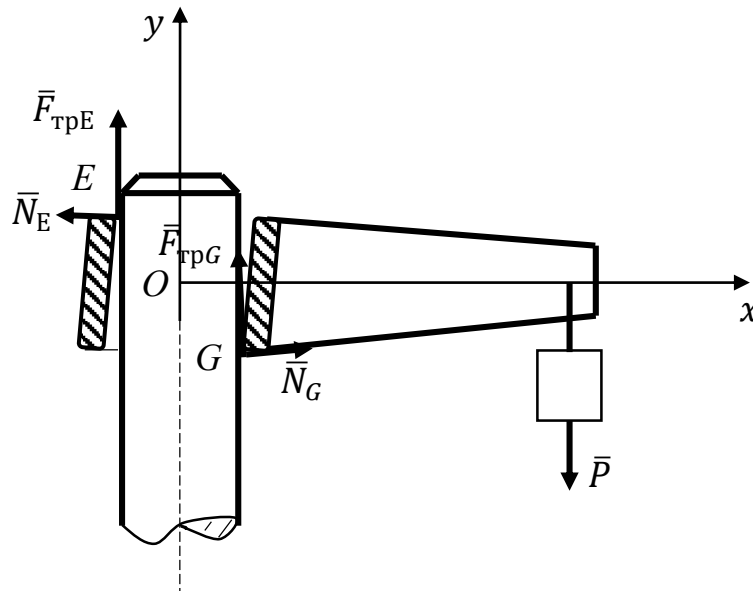


Рисунок 4.15 – Расстановка сил (аналитический способ)

Реакция связи – сила, заменяющая механическое действие отброшенной части на объект. Реакция гладкой поверхности направлена перпендикулярно касательной плоскости, проведенной к этой поверхности. Реакция шероховатой поверхности отклоняется от нормали на угол трения в сторону, противоположную возможному перемещению объекта равновесия под действием активных сил. Ее удобно разложить на две составляющие – нормальную реакцию гладкой поверхности и силу трения. В соответствии с принципом освобождения тела от связей рассматриваемая система становится свободной. Здесь $\bar{F}_{трE}$, $\bar{F}_{трG}$ – силы трения скольжения, препятствующие соскальзыванию стержня AB под воздействием груза \bar{P} (на рисунке стержень AB показан в слегка перекошенном положении, при котором он касается стойки в точках E и G).

При свободной посадке втулки на стойку имеется зазор. Под действием пары сил стержень AB получает перекося и контакт касающихся поверхностей происходит в левой верхней точке E и в нижней правой точке G .

4. Добавляем активные силы. Силы, вызывающие или способные вызвать изменение кинематического состояния объекта.

5. Составляем уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_{iA} (\bar{F}_k) = 0, \end{array} \right.$$

где $\sum_{k=1}^n F_{kx}$ – сумма проекций всех сил относительно оси x ;

$\sum_{k=1}^n F_{ky}$ – сумма проекций всех сил относительно оси y ;

$\sum_{k=1}^n m_{iA} (\bar{F}_k)$ – сумма моментов всех сил относительно центра.

Введем систему координат xy с началом O посередине высоты втулки.

Запишем уравнения равновесия системы сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -N_E + N_G = 0, \quad (4.6)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = F_{\text{тр}E} + F_{\text{тр}G} - P = f(N_E + N_G) - P = 0, \quad (4.7)$$

$$\sum_{k=1}^n m_{iO} (\bar{F}_k) = -Pa + (N_E \frac{b}{2} + N_G \frac{b}{2}) = 0. \quad (4.8)$$

В уравнении (4.7) учтены соотношения для предельного равновесия:

Сила трения в точке E :

$$F_{\text{тр}E} = f \cdot N_E.$$

Сила трения в точке G :

$$F_{\text{тр}G} = f \cdot N_G.$$

Из уравнения (4.6) следует, что $N_E = N_G$ (4.9) (эти два вектора параллельны, равны по модулю и направлены в противоположные стороны), поэтому реакции представляют собой пару сил с моментом $m_N = N_E b$, с учетом этого уравнения примут вид:

$$2fN_E - P = 0, \text{ откуда } N_E = \frac{P}{2f}.$$

$$-Pa + N_E b = -Pa + \frac{Pb}{2f} = 0,$$

$$\text{откуда } a = \frac{b}{2f} = \frac{2}{2 \cdot 0,1} = 10 \text{ см.}$$

В случае замены равенств сил трения $F_{\text{тр}E} = f \cdot N_E$; $F_{\text{тр}G} = f \cdot N_G$ неравенствами: $F_{\text{тр}E} \leq f \cdot N_E$; $F_{\text{тр}G} \leq f \cdot N_G$, соответственно получим условие равновесия стержня $a \geq 10$ см.

5 Задачи для самостоятельного решения на равновесие с учетом трения скольжения

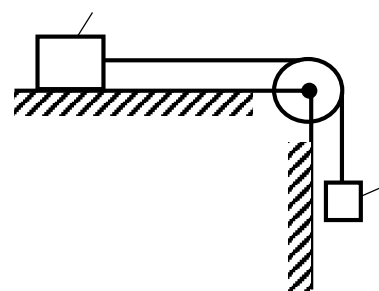
Для приобретения навыков в решении задач на равновесие тел при наличии трения скольжения рекомендуется решить задачи, приведённые ниже, а также задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И.В. Мещерского: 5.1, 5.5 – 5.9, 5.11 – 5.13, 5.15, 5.16, 5.25 – 5.28, 5.30, 5.31, 5.33, 5.35 – 5.37, 5.41, 5.42.

5.1 На наклонной плоскости лежит груз. Определить в градусах максимальный угол наклона плоскости к горизонту, при котором груз останется в покое, если коэффициент трения скольжения равен 0,6.

Ответ: 31° .

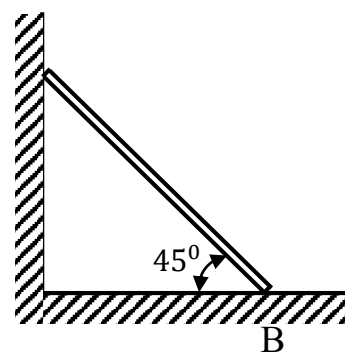
5.2 Каким должен быть наименьший вес тела 2, для того чтобы тело 1 весом 200 Н начало скользить по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения скольжения $f = 0,2$.

Ответ: 40,0 Н.

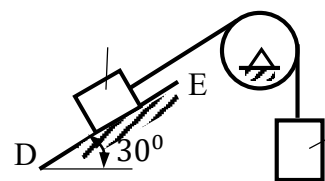


5.3 Однородный брус АВ опирается в точке А на гладкую стену, а в точке В на негладкий пол. Определить наименьший коэффициент трения скольжения между брусом и полом, при котором брус останется в указанном положении в покое.

Ответ: 0,5.

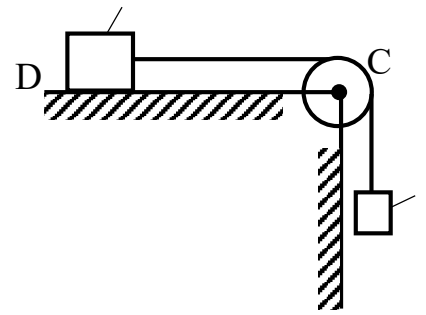


5.4. Определить наименьший вес тела 1, при котором оно скользит вниз по плоскости DE, если вес груза 2 равен 320 Н, коэффициент трения скольжения между телом 1 и плоскостью DE равен 0,2. Ответ: 979 Н.



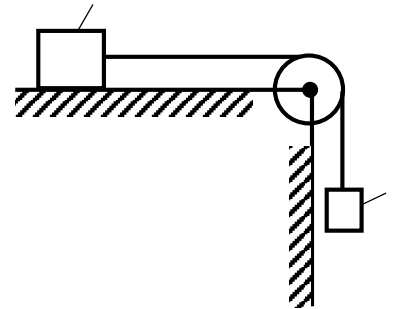
5.5 Определить наименьший коэффициент трения скольжения между грузом 1 весом 400 Н и плоскостью DC, при котором груз 1 останется в покое, если вес груза 2 равен 96 Н.

Ответ: 0,24.



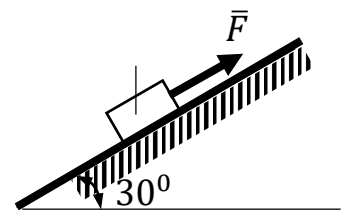
5.6 Определить наименьший вес груза 1, при котором он останется в покое, если вес груза 2 равен 140 Н, а коэффициент трения скольжения между грузом 1 и плоскостью равен 0,2.

Ответ: 700 Н.



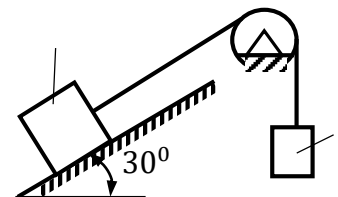
5.7 Каким должен быть вес тела 1, для того чтобы началось скольжение вверх по наклонной плоскости, если сила $F = 90$ Н, а коэффициент трения скольжения $f = 0,3$?

Ответ: 118 Н.



5.8 Каким должен быть наибольший вес груза 2 для того, чтобы груз 1 весом 100 Н, оставался в покое на наклонной плоскости, если коэффициент трения скольжения $f = 0,3$?

Ответ: 76,0 Н.



6 Контрольное задание. Равновесие тел при наличии трения

Содержание задания.

Прямолинейный невесомый стержень mn в точке m опирается на шероховатую поверхность, а в точке n – на гладкую. Коэффициент трения между стержнем и шероховатой поверхностью равен f . К стержню mn приложены силы \bar{Q} и \bar{G} .

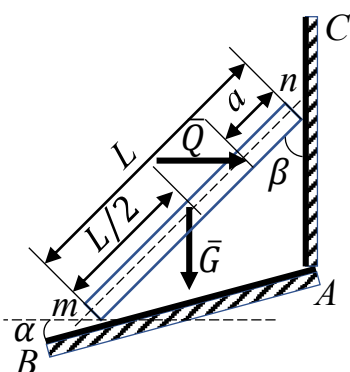
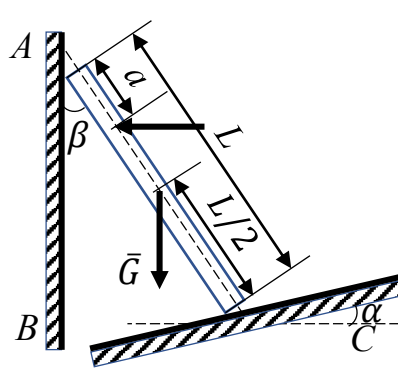
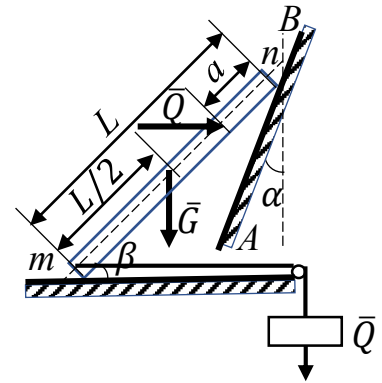
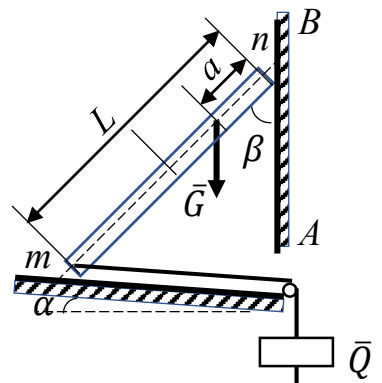
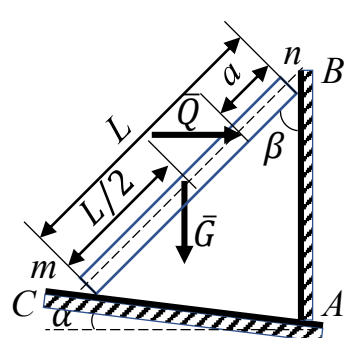
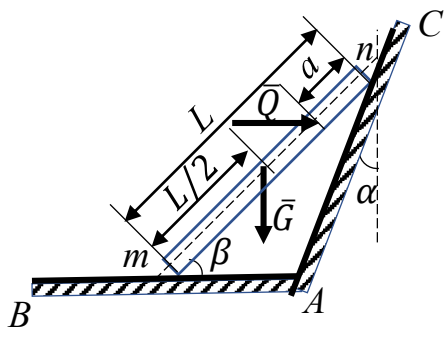
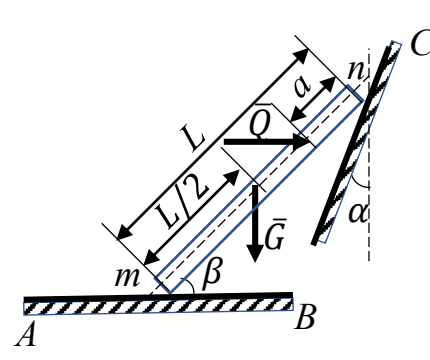
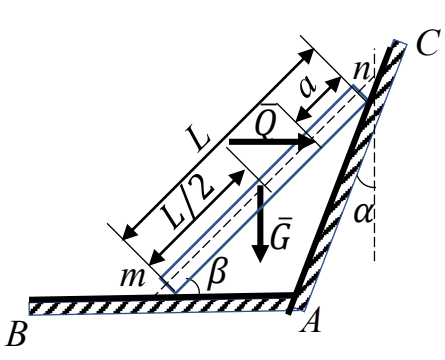
Определить пределы, в которых может изменяться значение угла β , соответствующее состоянию равновесия бруса mn .

Исходные данные приведены в таблице 6.1, расчетные схемы – в таблице 6.2.

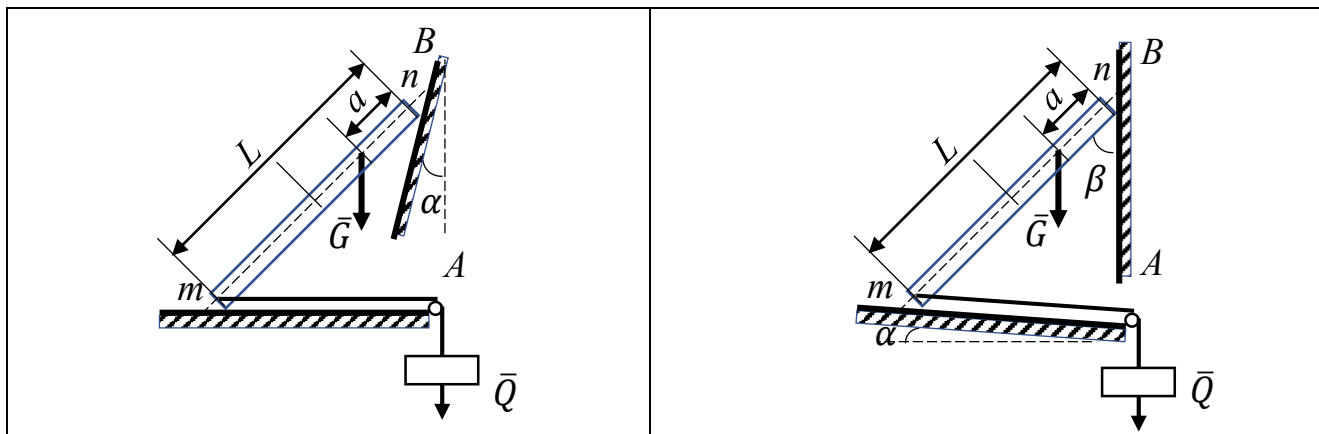
Таблица 6.1 – Исходные данные

№ варианта	$\frac{a}{L}$	α^0	f	Нагрузка Н	
				G	Q
0	0,5	15	0,3	300	200
1	0,3	15	0,4	400	300
2	0,6	10	0,5	500	400
3	0,25	5	0,2	250	150
4	0,3	10	0,25	300	250
5	0,4	10	0,3	350	350
6	0,6	75	0,35	400	150
7	0,2	15	0,4	450	250
8	0,25	20	0,45	500	350
9	0,3	20	0,5	250	150

Таблица 6.2 – Схемы к контрольному заданию

<p>0</p> 	
<p>2</p> 	
<p>4</p> 	
	

Продолжение таблицы 6.2



Алгоритм решения задач

1. Выделить твёрдое тело, равновесие которого надо рассмотреть для нахождения неизвестных величин.
2. Изобразить активные силы, приложенные к выбранному телу.
3. Отбросить связи и заменить их действие реакциями связей для предельных состояний равновесия.
4. Показать на рисунке координатные оси.
5. Составить уравнения равновесия для полученной системы сил.
6. Добавить к уравнениям равновесия зависимость силы трения от нормального давления ($F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN$).

Решив полученную систему уравнений, определить искомые величины.

Пример выполнения задания

Однородный прямолинейный стержень AB весом \bar{G} опирается в точке B на шероховатый горизонтальный пол (рисунок 6.1). Коэффициент трения между стержнем и полом равен f . В точке A стержень опирается на вертикальную гладкую стену. Стержень удерживается в равновесии нитью BD , перекинутой через блок D . К концу нити подвешен груз Q .

Определить пределы, в которых может изменяться значение угла β , чтобы стержень оставался в равновесии.

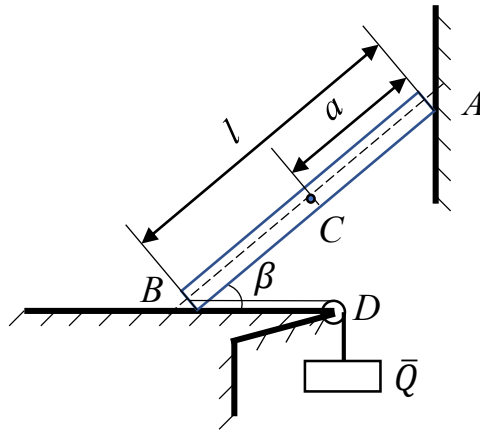


Рисунок 6.1 – Пример контрольного задания

Дано: $G = 300 \text{ Н}$, $Q = 200 \text{ Н}$, $a/l = 1/2$, $f = 0,3$.

Найти: $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$.

Решение.

1) Рассмотрим равновесие стержня AB .

2) К стержню приложена одна активная сила (вес стержня) \vec{G} , посередине стержня в точке C и направленная вертикально вниз.

3) На стержень наложены три связи: горизонтальный пол, вертикальная стена и нить AD . На основании принципа освобожденности от связей отбросим мысленно связи и заменим их действие реакциями: реакция гладкой стены N_A направлена перпендикулярно стене, реакция нити \vec{Q} направлена по горизонтали вправо (вдоль нити), реакция горизонтального шероховатого пола может быть представлена двумя составляющими: нормальной реакцией \vec{N}_B (перпендикулярно полу, вертикально вверх) и силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Возможны два предельных состояния равновесия в зависимости от значения угла β :

1) Когда угол $\beta = \beta_{\min}$ наименьший, $\vec{F}_{\text{тр}}^{\max}$ направлена по горизонтали вправо (возможное направление движения точки B влево) (рисунок 6.2).

2) Значение угла $\beta = \beta_{\min}$ наибольшее, $\vec{F}_{\text{тр}}^{\max}$ направлена по горизонтали влево (возможное направление движения точки B вправо) (рисунок 6.3).

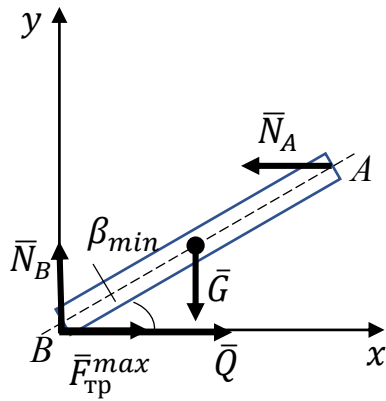


Рисунок 6.2 – Первое предельное состояние равновесия

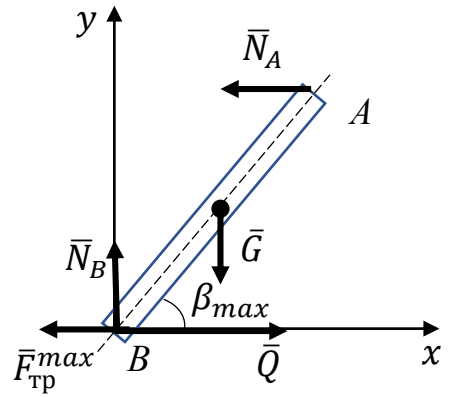


Рисунок 6.3 – Второе предельное состояние равновесия

Рассмотрим первое предельное состояние равновесия. Стержень AB находится под действием пяти сил: \bar{Q} , \bar{N}_A , \bar{N}_B , \bar{G} , $\bar{F}_{тр}$, лежащих в одной плоскости.

Сумма проекций всех сил на ось x :

$$F_{тр}^{max} + Q - N_A = 0, \quad (6.1)$$

сумма проекций всех сил на ось y :

$$N_B - G = 0, \quad (6.2)$$

сумма моментов всех сил относительно точки B :

$$G(l - a) \cos \beta - N_A l \sin \beta = 0. \quad (6.3)$$

Добавим уравнения для $F_{тр}^{max}$:

$$F_{тр}^{max} = f N_B. \quad (6.4)$$

Задача является статически определенной, так как система из четырех уравнений содержит четыре неизвестных: N_A , N_B , $F_{тр}$ и угол β .

Решая совместно систему уравнений (6.1) – (6.4), находим:

$$N_A = fG + Q,$$

$$N_B = G,$$

$$F_{\text{тр}} = fN_B = fG.$$

Разделив правую и левую часть выражения (6.3) на $l \cos \beta$, учитывая, что $a/l = 1/2$, получаем искомое значение угла β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{G}{2(Q + fG)},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{300}{2(200 + 0,3 \cdot 300)} = 0,517,$$

$$\beta_{\min} \approx 27^\circ.$$

Рассмотрим второе предельное состояние равновесия стержня AB согласно расчетной схеме, приведенной на рисунке 6.3.

В этом случае уравнения проекций всех сил на ось y (6.2) и сумма моментов всех сил относительно центра B (6.3) останутся без изменений, а сумма проекций всех сил на ось x примет вид:

$$-F_{\text{тр}} + Q - N_A = 0, \quad (6.5)$$

Решая совместно уравнения (6.2) – (6.5), находим:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{G}{2(Q - fG)}.$$

Подставляя заданные значения G , Q , f , получаем:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{300}{2(200 - 0.3 \cdot 300)} = 1,36,$$

$$\beta_{\max} \approx 54^\circ.$$

Ответ: равновесие стержня AB возможно при значениях угла β в интервале $27^\circ \leq \beta \leq 54^\circ$.

Список использованных источников

- 1 Каржавин, В. В. Трение, износ, смазочные материалы: учеб. пособие / В. В. Каржавин, А. И. Зимин. – Екатеринбург, 2003. – 83 с.
- 2 Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М.: Наука, 1988. – 498 с.
- 3 Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2-х кн. / под ред. И. В. Крагельского, В. В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1978, кн. 1, 2. – 400 с., 358 с.
- 4 Словарь – справочник по трению, износу и смазке деталей машин / В. Д. Зозуля, Е. Л. Шведков, Э. Д. Браун [и др.] – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
- 5 Крагельский, И. В. Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
- 6 Курс теоретической механики: учебник для вузов / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин [и др.]; Под общ. ред. К.С. Колесникова. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 736 с.
- 7 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.
- 8 Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.
- 9 Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
- 10 Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. Том 1: Статика и кинематика. – 12-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2013. – 672 с.
- 11 Кирсанов, М. Н. Решебник. Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов, под ред. А. И. Кириллова. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
- 12 Теоретическая механика: Руководство к решению задач / О. Н. Арсеньев, О. С. Степаненков, А.В. Шаповалов [и др.]; под общ. ред. С.К. Слезкинского. – СПб.: Политехника, 2007. – 487 с.

13 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие. – 3-е изд., стер. / Под ред. О.Э. Кепе. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 368 с.

14 Статика твердого тела и кинематика материальной точки: учебное пособие / С. М. Бердышева [и др.]. – Оренбург: ОГУ, 2000. – 77 с.