

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра механики материалов, конструкций и машин

*Е.В. Дырдина, В.С. Иванова*

# **ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ УЧЕТА ТРЕНИЯ В МАТЕРИАЛОВЕДЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

## **Часть 2**

**Учет трения при качении.  
Трение гибкой нити о цилиндрическую поверхность**

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.01 Машиностроение, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств

Оренбург  
2018

УДК 531.43 (076.5)  
ББК 22.21я7  
Д90

Рецензент – доцент, кандидат технических наук А.А. Гаврилов

**Дырдина, Е.В.**  
Д90 Приближенные методы учета трения в материаловедческих исследованиях. Часть 2. Учет трения при качении. Трение гибкой нити о цилиндрическую поверхность: методические указания / Е.В. Дырдина, В.С. Иванова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 36 с.

В методических указаниях рассматриваются вопросы, связанные с моделированием и оценкой трения при качении и трения гибкой нити о цилиндрическую поверхность. Задачи с решениями служат углублению и практическому применению полученных знаний, а для их закрепления приведены задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля.

Предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлениям подготовки 15.03.01 Машиностроение, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

Методические указания подготовлены в рамках проекта по совершенствованию содержания и технологий целевого обучения студентов в интересах организаций оборонно-промышленного комплекса «Новые кадры ОПК-2017».

УДК 531.43 (076.5)  
ББК 22.21я7

© Дырдина Е.В.,  
Иванова В.С., 2018  
© ОГУ, 2018

## Содержание

Введение .....	4
1 Трение при качении.....	5
1.1 Силы, возникающие при качении. Чистое качение .....	5
1.2 Сопротивление качению.....	7
2 Порядок решения задач на трение при качении .....	15
2.1 Каток на горизонтальной плоскости .....	16
2.2 Каток на наклонной плоскости .....	18
2.3 Тележка на наклонной плоскости.....	20
3 Задачи для самостоятельного решения на равновесие с учетом трения..... качения.....	22
4 Контрольное задание. Равновесие тележки на наклонной плоскости.....	25
5 Трение в механизмах с гибкими звеньями. Формула Эйлера .....	26
6 Примеры использования формулы Эйлера для расчета гибких нитей .....	29
с учетом сил трения.....	29
6.1 Нить перекинута через неподвижный шкив.....	29
6.2 Механизм ленточного тормоза .....	32
6.3 Контрольное задание. Механизм ленточного тормоза .....	34
Список использованных источников .....	35

## Введение

При проектировании оборудования и его сборке важное значение имеют требования, которые необходимо учесть для его долгосрочной эксплуатационной надежности. Безотказность и безопасность работы машин и механизмов во многом зависит от правильного обслуживания на протяжении всего предусмотренного срока службы. Решение обеих этих задач требует знания и анализа явлений трения, возникающих в узлах механического оборудования.

Изучением взаимодействия поверхностей, движущихся относительно друг друга материальных тел, и связанных с этим проблем с ними, занимается наука трибология. Основным объектом исследования в этой науке является вопрос об использовании трения и его эффектов для решения проблем, связанных с трением и износом. В результате предлагаются технические возможности *снижения трения* в узлах механизмов, где трение является причиной таких негативных явлений как перегрев, преждевременное разрушение трущихся поверхностей. Однако, наличие трения не всегда негативное явление. Наоборот, принцип действия большого количества машин и механизмов основан на использовании сил трения. Например, движение колеса, шагающего механизма, шпоночные, гвоздевые и винтовые соединения, тормозные устройства, ременные передачи и многое другое невозможно в отсутствии трения. Это означает, что трение не должно быть минимизировано во всех случаях, оно должно быть контролируемо в соответствии с требованиями функциональности.

Чтобы достичь этого, нужно систематически изучить все типы трения. Вопросы, связанные с причинами возникновения *трения скольжения*, математическими моделями его описывающими, и примеры решения прикладных задач с учетом трения скольжения приведены в [1].

В данных методических указаниях рассматриваются задачи учета трения при качении, а также при скольжении гибких тел по выпуклым поверхностям.

# 1 Трение при качении

## 1.1 Силы, возникающие при качении. Чистое качение

**Качение** – такое относительное движение контактирующих тел, при котором следующие одна за другой точки одного тела переходят в соприкосновение со следующими одна за другой точками другого тела, причем мгновенный центр вращения одного тела относительно другого совпадает с одной из точек касания. Наиболее распространенный случай, когда одно из контактирующих тел (шар, цилиндрическое тело, колесо) катится по неподвижной поверхности.

Для выявления картины явления необходимо различать три типа сил трения: трение сцепления, трение скольжения и трение качения. Силы трения качения, как и силы трения при поступательном движении, имеют место всегда и всегда тормозят движение. Силы трения скольжения и силы трения сцепления при качении могут либо ускорять, либо тормозить катящееся тело.

При исследовании качения могут быть использованы расчетные схемы (силовые модели), основанные на различных допущениях. Степень приближения используемых моделей зависит от учета (или пренебрежения) перечисленных выше типов сил трения. Поясним на примере.

Пусть однородный цилиндр катится по наклонной плоскости. Находить ключевые характеристики движения цилиндра можно с разной степенью соответствия реальному процессу, принимая следующие варианты допущений.

1) Цилиндр катится со скольжением. Эта модель предполагает учет всех трех типов трения, и более полно описывает реальное качение.

2) Предполагается, что цилиндр катится без скольжения. В случае учитываются силы трения сцепления и сопротивление качению.

3) Предполагается, сила трения качения пренебрежимо мала, и учитывается только сила трения сцепления. Такая идеальная модель, описывающая контакт без скольжения (взаимного проскальзывания) тел типа шаров, катков, колес и т.п. с неподвижной поверхностью, называется **чистым качением**. При таком взаимодействии тел А и В точки касания тел (расположенные на выпуклых

поверхностях) имеют одинаковую скорость; в точке контакта отсутствует взаимное проскальзывание, отрыв или взаимопроникновение поверхностей.

Рассмотрим задачу о цилиндре, скатывающемся по наклонной плоскости, опираясь на модель «чистого качения». Очевидно, что поставленное на шероховатую наклонную плоскость цилиндрическое тело катится в низ. Если бы со стороны наклонной плоскости на тело действовала лишь сила реакции опоры ( $N$ ), то совместно с силой тяжести ( $mg$ ), они сообщили бы телу поступательное движение, так как моменты этих сил относительно оси, проходящей через центр инерции тела, равны нулю. Следовательно, со стороны наклонной плоскости на тело действует и другая сила, момент которой отличен от нуля и может сообщить телу вращение (рисунок 1.1). Это – сила трения сцепления  $F_{сц}$ , обеспечивающая качение тела без скольжения и изменение скорости его центра масс.

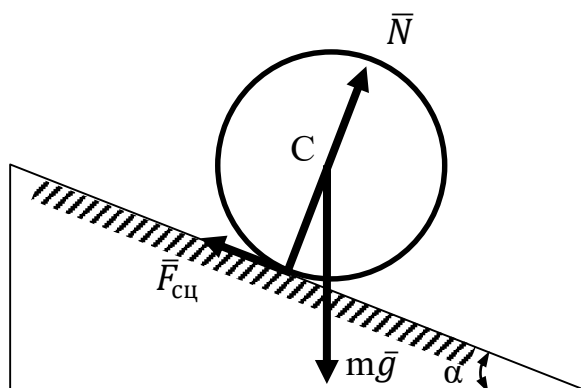


Рисунок 1.1 – Силы, действующие на цилиндр «чистое качение»

**Сила трения сцепления** представляет собой проявление силы трения покоя при качении тел. Как и сила трения покоя, сила трения сцепления имеет предельное значение, определяемое законом –  $F_{сц}^{max} = fN$ , и направлена противоположно скатывающей силе.

Если же величина скатывающей силы превосходит этот предел, то качение тела происходит со скольжением, при котором на тело действует уже **сила трения скольжения**, определяемая законом Кулона –  $F_{ск}^{max} = fN$ , и направлена противоположно скорости скольжения, определяемая формулой

$$v_{\text{ск}} = v_c - \omega R.$$

Очевидно, на тело, равномерно катящееся по горизонтальной плоскости без скольжения, сила трения сцепления не действует. Сила трения сцепления не совершает механическую работу, так как всегда приложена в мгновенном центре скоростей.

## 1.2 Сопротивление качению

Как отмечалось выше в случае использования модели «чистого качения», при качении тела цилиндрической формы по горизонтальной поверхности по инерции отсутствуют как силы трения сцепления, так и силы трения скольжения. Казалось, тело должен продолжить движение по инерции бесконечно долго. Однако опыт показывает, что тело рано или поздно останавливается, причем, нагреваются как само тело, так и поверхность. Следовательно, имеет место некий диссипативный процесс. Таковым могут быть пластические деформации тела и поверхности. То есть, объяснить природу сопротивления качению, исходя из моделей абсолютно твердого или даже упруго деформируемого тела, невозможно. Приведем простейшие качественные соображения, с целью трактовки рассматриваемого явления. Причем, будем учитывать лишь неупругие деформации поверхности, считая катящееся тело абсолютно твердым.

Предположим, что цилиндр опирается на негладкую горизонтальную плоскость. Если этот цилиндр находится только под действием своего веса  $\bar{P}$ , то деформации опорной плоскости, которая служит связью, будут симметричными относительно линии действия силы  $\bar{P}$  (рисунок 1.2).

В этом случае реакции связи, распределенные по площадке контакта цилиндра с этой связью, приводятся к одной равнодействующей силе  $\bar{N}$ , равной по модулю и противоположной по направлению силе  $\bar{P}$ . При этом цилиндр будет находиться в состоянии относительного покоя, так как сила тяжести  $\bar{P}$  уравновешивается нормальной реакцией  $\bar{N}$ .

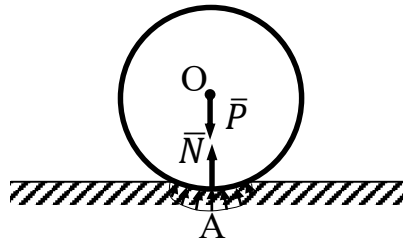


Рисунок 1.2 – Распределение по площадке контакта реакций связи

Приложим теперь к цилиндру в точке O и горизонтальную силу  $\bar{Q}$  (рисунок 1.3) и будем постепенно увеличивать ее модуль, начиная с  $Q = 0$ . Опыт показывает, что цилиндр сохраняет состояние относительного покоя до тех пор, пока модуль силы  $\bar{Q}$  не достигнет некоторого максимального значения  $Q_{\max}$ , зависящего от природы и свойств данной пары соприкасающихся поверхностей. При дальнейшем увеличении модуля силы  $\bar{Q}$  начнется качение цилиндра по связи.

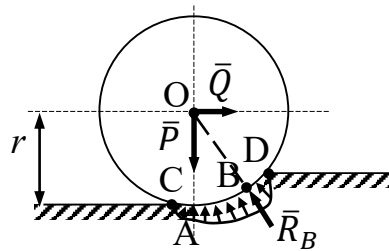


Рисунок 1.3 – Реакция связи при качении

При действии на цилиндр силы  $\bar{Q}$  деформации опорной поверхности, являющейся связью, не будут уже симметричны относительно линии действия силы  $\bar{P}$ .

Иначе говоря, сила  $\bar{Q}$  обуславливает несимметричное распределение сил реакций связи на площадке контакта ее с цилиндром. (При действии силы  $\bar{Q}$  интенсивность давлений в окрестности точки A убывает, а в окрестности точки D возрастает.) Поэтому равнодействующая  $\bar{R}_B$  всех этих сил реакций сместится в сторону возможного движения цилиндра (рисунок 1.3) и будет приложена в точке B. Реакция связи  $\bar{R}_B$  при этом уравнивает две активные силы  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$ , и линия ее действия проходит через точку O. (Последнее вытекает из теоремы об уравнивании двух сходящихся сил третьей силой).



Разложим реакцию  $\bar{R}_B$  на горизонтальную  $\bar{F}$  и вертикальную  $\bar{N}$  составляющие (рисунок 1.4) и составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{N}$  и  $\bar{F}$ , действующих на цилиндр, в форме

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= Q - F = 0 \\ \sum F_{ky} &= -P + N = 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= -Qr + Nd = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.1)$$

где  $r$  – радиус цилиндра, а  $d$  – расстояние, на которое смещается в сторону возможного движения цилиндра нормальная составляющая  $\bar{N}$  реакции связи.

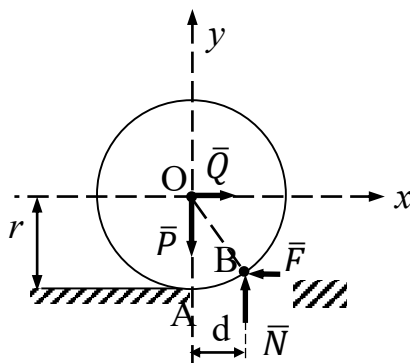


Рисунок 1.4 – Две составляющие реакции связи при качении

Из условия равновесия цилиндра получим:

$$\left. \begin{aligned} Q &= F \\ P &= N \\ Qr &= Nd \end{aligned} \right\}. \quad (1.2)$$

Из первых двух уравнений равенства следует, что силы  $(\bar{Q}, \bar{F})$  образуют движущую пару качения, момент которой  $M_F$  ( $M_F = Fr = Qr$ ), а силы  $(\bar{N}, \bar{P})$  – пару сопротивления качению с моментом  $M_c = Pd = Nd$ . На основании вышеизложенного, третье уравнение выражает собой равенство между так называемым **моментом сопротивления качению**, или **моментом трения качения**  $M_c$ , препятствующим качению цилиндра по связи, и движущим моментом, вызывающим качение цилиндра  $M_F$ .

Как показывает опыт, с увеличением модуля силы  $\bar{Q}$  смещение  $d$  также растёт, но оно не может превзойти некоторого максимального значения  $\delta$ , вполне определенного для данной пары соприкасающихся поверхностей и данной величины нормального давления цилиндра на связь  $d \leq \delta$ .

При этом, очевидно, будет иметь место неравенство

$$M_c = dN \leq M_{c \max} = \delta N,$$

где  $\delta$  называется коэффициентом трения качения.

Коэффициент трения качения  $\delta$  определяется опытным путем и зависит от природы и свойств данной пары соприкасающихся поверхностей (цилиндра и опорной плоскости, которая служит связью). Величина коэффициента трения качения  $\delta$  будет тем меньше, чем тверже цилиндр и связь, т.е. чем меньше их деформация. Коэффициент трения качения  $\delta$  измеряется в единицах длины – в сантиметрах (см) или миллиметрах (мм).

С учётом представленных выше уравнений можно сформулировать условия, при которых каток останется в покое, и когда выйдет из положения равновесия.

Условие отсутствия качения цилиндра по связи выполнится движущий момент будет меньше момента сопротивления ( $M_F \leq M_c$ ) и будет иметь вид:

$$Qr \leq \delta N \quad \text{и} \quad Q \leq \frac{\delta}{r} N.$$

Причём в момент предельного равновесия цилиндра (момент начала движения) горизонтальная сила  $Q$  примет максимальное значение:

$$Q_{\max} = \frac{\delta}{r} N.$$

Этой формулой можно пользоваться и для определения модуля горизонтальной силы  $\bar{Q}$ , при которой начнется качение цилиндра по связи.

Нужно иметь в виду, что, вообще говоря, цилиндр может не только совершать качение по связи, но и скользить по ней.

Условие отсутствия скольжения цилиндра по связи имеет вид

$$Q \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}} = f_0 N,$$

где  $f_0$  - коэффициент трения скольжения в покое.

Таким образом, если одновременно выполнены условия

$$Q \leq f_0 N \quad \text{и} \quad Q < \frac{\delta}{r} N,$$

то не произойдет ни скольжения, ни качения цилиндра по связи.

Если

$$Q \geq \frac{\delta}{r} N, \quad \text{но} \quad Q < f_0 N,$$

то цилиндр будет совершать только качение по связи.

Если

$$Q \geq f_0 N, \quad \text{но} \quad Q < \frac{\delta}{r} N,$$

то цилиндр будет только скользить по связи.

Если

$$Q \geq \frac{\delta}{r} N \quad \text{и} \quad Q \geq f_0 N,$$

то возможно, как качение, так и скольжение цилиндра по связи.

Сила, требуемая для преодоления трения качения, обычно меньше, чем для преодоления трения скольжения, что видно из сравнения равенств:

$$Q_{\max} = f_0 N \quad \text{и} \quad Q_{\max} = \frac{\delta}{r} N,$$

так как отношение  $\frac{\delta}{r}$  для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения  $f_0$  ( $\frac{\delta}{r} \ll f_0$ ). Поэтому в технике, везде, где возможно, скольжение стремятся заменить качением.

Из уравнения

$$Q_{\max} = \frac{\delta}{r} N,$$

также следует, что сопротивление качению зависит не только от свойств материалов цилиндра и поверхности, но и от радиуса цилиндрического тела (колеса) (чем больше радиус колеса  $r$ , тем меньше сопротивление качению).

Колёса транспортных машин, требующих хорошей проходимости в любую погоду, имеют большой диаметр, так как с уменьшением радиуса сопротивление качению возрастает и, с большей вероятностью, под действием движущей силы колесо будет скользить.

Обычно в таблицах дают значения величины  $\delta$  и говорят не о силе трения качения

$$F_{\text{тр кач}} \approx Q_{\max} = \frac{\delta}{r} N,$$

а о моменте сопротивления качению

$$M_{\max} = \delta N r.$$

Или: момент силы трения качения равен произведению силы нормального давления  $N$ , на коэффициент трения качения  $\delta$ . Величину  $\delta$  также называют **коэффициентом момента сопротивления качению**.

Опыты показывают, что для стали, других металлов и твердого дерева величина  $\delta$  в известных пределах практически не зависит от скорости качения и радиуса цилиндра, хотя на основании общих соображений, очевидно, что такая зависимость принципиально должна была бы иметь место. Величина  $\delta$  зависит только от материалов цилиндра и плоскости. При качении колеса телеги по обычному грунту сила трения, очевидно, будет зависеть от скорости, но опытные данные о характере и величине этой зависимости еще недостаточны. Вопрос об определении силы трения качения колеса автомобиля значительно сложнее, но в первом приближении момент сопротивления качению колеса автомобиля также считают постоянным и в соответствующих таблицах дают значения  $\delta$  в зависимости от параметров, характеризующих свойства дороги и шины колеса.

Сила трения качения значительно меньше силы трения скольжения, поэтому в современных машинах подшипники скольжения заменяются шариковыми или роликовыми. Легко видеть, что в случае плоской поверхности соприкосновения (рисунок 1.5, б) осуществляется чистое качение роликов-цилиндров, в случае обычного шарикового или роликового подшипника (рисунок 1.5, а) не может быть осуществлено чистое качение роликов; однако скольжение тем меньше, чем меньше отношение радиуса шарика (ролика) к радиусу цилиндра  $R$ . Но очень маленький радиус шарика (ролика) делать нельзя вследствие большого вдавливания его в прилегающую поверхность.

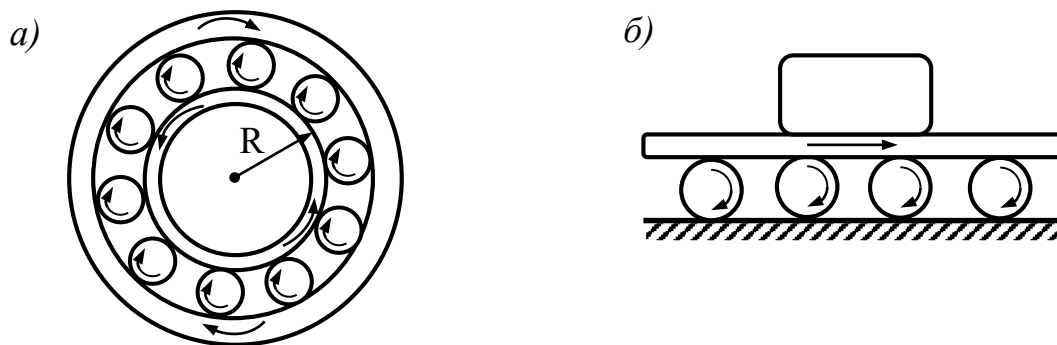


Рисунок 1.5 – Шариковые (или роликовые) подшипники скольжения

### Резюмируя выше сказанное:

При наличии сопротивления качению в число действующих на тело сил включается неизвестный момент трения качения, который не может превышать предельного значения:

$$M_{c_{max}} = \delta N, \quad (1.3)$$

где  $\delta$  – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины.

На расчетной схеме наличие сопротивления качению представляется либо смещением точки приложения контактной силы в сторону возможного перемещения, либо обозначается момент пары сопротивления качению.

Пользуясь теоремой о параллельном переносе силы, можно силу  $\bar{N}$  перенести параллельно самой себе в точку А (рисунок 1.6), приложив при этом к цилиндру пару с моментом, равным моменту трения качения ( $m = Nd$ ). Тогда результат, полученный на рисунке 1.4, можно условно изобразить в виде рисунка 1.6.

Такое изображение удобно применять при решении задач, так как при этом нет никакой необходимости изображать на чертеже деформацию тел в месте их соприкосновения.

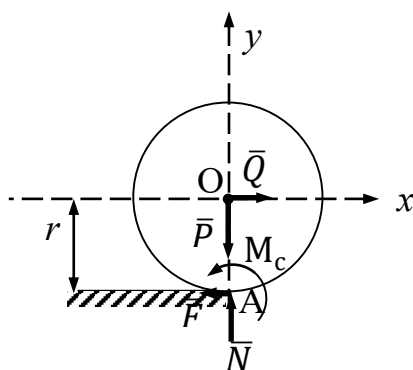


Рисунок 1.6 – Реакция связи при качении (момент сопротивления)

## 2 Порядок решения задач на трение при качении

При изучении движения и равновесия тел, имеющих форму катка, с учетом сил трения рекомендуется придерживаться следующего алгоритма:

1) выделить объект равновесие или движение, которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить выбранный объект и обозначить, приложенные к нему, активные силы;

3) если твёрдое тело не свободно, то, применив принцип освобожденности от связей, отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями связей; при этом реакцию неидеальной поверхности следует представить:

- двумя составляющими: силой  $\vec{N}$ , направленной по нормали к поверхности контакта и силой трения  $F_{тр}$ , направленной по касательной к ней, которые приложены в точке контакта (без учета ее смещения в результате деформаций контактирующих поверхностей);

- наличие сопротивления качению представляется как момент сопротивления качению  $M_c$ , направленный противоположно угловой скорости (либо возможной угловой скорости) тела. Если направление движения неизвестно, задать направление возможного движения. К катящемуся телу (цилиндру, колесу) приложить момент трения качения, направляя его в сторону, противоположную возможному движению;

4) составить условия равновесия (уравнения движения) рассматриваемого объекта под действием активных сил и реакций связей (Ось ординат для уравнения проекций для цилиндрических тел выбираем вдоль нормальной реакции, а уравнение моментов составляем относительно точки касания);

5) дополнить полученную систему уравнений, выражениями зависимости сил трения и момента сопротивления качению от соответствующих сил нормального давления

$$M_{cmax} = \delta N; \quad (2.1)$$

б) сопоставить число неизвестных величин и число составленных независимых уравнений равновесия (движения), которые должны быть равны для статически определимых задач;

7) решив полученную систему уравнений (неравенств), определить искомые неизвестные (случай предельного равновесия для выбранного направления движения);

8) Меняем направление возможного движения системы и направление момента трения качения. Решаем задачу заново, определяем второе условие предельного равновесия.

На практике часто возникает путаница в отношении направления и величины силы  $F$ , показанной на расчетной схеме. В этом случае целесообразно поступить следующим образом:

1) нарисуйте силу  $F$ , в любом направлении, которое является касательным к поверхности контакта;

2) решите задачу статики или динамики и найдите скаляр  $F$ ;

3) убедитесь, что качение действительно возможно; то есть не произойдет скольжения. Если сила больше силы трения,  $F > F_{\max}$ , предположение о скользящем контакте не подходит.

Для иллюстрации такого случая ниже рассмотрим примеры.

## 2.1 Каток на горизонтальной плоскости

Каток  $A$  весом  $P$  и радиусом  $r$  лежит на горизонтальной поверхности (рисунок 2.1). Коэффициент трения качения равен  $\delta$ . К катку приложена сила  $\vec{F}$  под углом  $\alpha$ . Определить значение силы  $F$ , обеспечивающей равномерное движение катка (считать, что коэффициент трения скольжения достаточно велик, чтобы обеспечить движение катка без проскальзывания).

Приложим к катку активные силы  $\vec{F}$ ,  $\vec{P}$ , нормальную реакцию  $\vec{N}$ , силу трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и пару сил с моментом  $M_c$ , который достиг своего предельного значения  $M_{c_{\max}}$ , определяемого формулой (2.1).



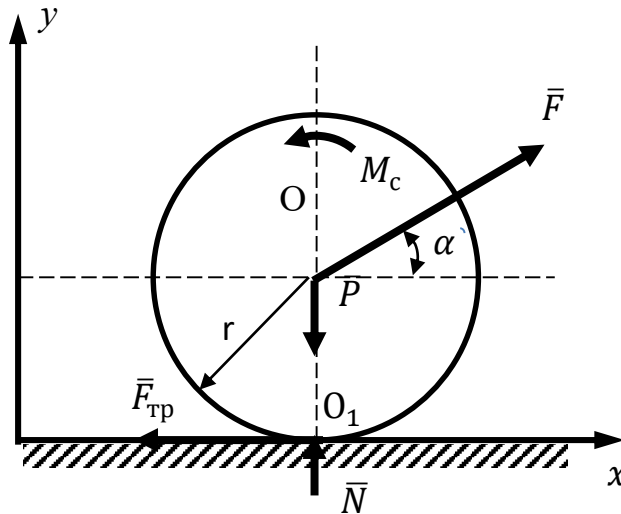


Рисунок 2.1 – Каток на горизонтальной плоскости

Неизвестными являются сила  $\bar{F}$ , нормальная реакция связи  $\bar{N}$  и сила трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$ . Запишем уравнение равновесия катка:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = N + F \sin \alpha - P = 0, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Oz}(\bar{F}_k) = -F \cos \alpha r + \delta N = 0. \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.3) находим:

$$N = P - F \sin \alpha.$$

Подставив  $N$  в уравнение (2.4) получим:

$$-F \cos \alpha r + (P - F \sin \alpha) \delta = 0,$$

откуда следует:

$$F = \frac{P}{\frac{r}{\delta} \cos \alpha + \sin \alpha}.$$

Уравнение (2.2) служит для определения силы трения  $F_{\text{тр}}$ .

## 2.2 Каток на наклонной плоскости

Определить наименьший угол  $\alpha$  наклона плоскости к горизонту, при котором ролик радиуса  $r = 5$  см начнет скатываться по плоскости, если коэффициент трения качения  $\delta = 0,05$  см. Проверить, возникает ли при этом сила трения скольжения, достаточная для осуществления качения ролика без скольжения, если коэффициент трения скольжения  $f_0 = 0,08$  (рисунок 2.2).

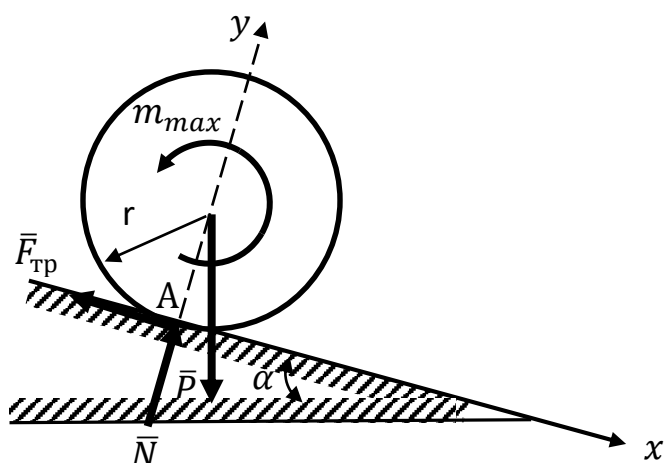


Рисунок 2.2 – Каток на наклонной плоскости

Решение. По условию задачи необходимо рассмотреть критический (пусковой) момент равновесия ролика, когда момент трения качения  $m$  принимает максимальное значение, т.е.  $m_{\max} = \delta N$ .

Отбрасывая связь, заменим ее действие на ролик силами реакции. При этом на ролик, как на свободное твердое тело, будут действовать вес ролика  $\bar{P}$ , нормальная реакция  $\bar{N}$  наклонной плоскости, которая служит связью, сила трения скольжения  $\bar{F}$ , а также момент трения качения  $m$ . Рассматривая критическое состояние равновесия ролика под действием этих нагрузок, составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил в форме:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = 0.$$

В данном случае эти уравнения равновесия будут иметь вид

$$\sum F_{kx} = -F + P \sin \alpha = 0, \quad (2.5)$$

$$\sum F_{ky} = N - P \cos \alpha = 0, \quad (2.6)$$

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = -Pr \sin \alpha + m_{\max} = 0. \quad (2.7)$$

Учитывая, что  $m_{\max} = \delta N$ , уравнения (2.6) получим

$$m_{\max} = \delta N = \delta P \cos \alpha.$$

Тогда уравнение (2.7) примет вид

$$-Pr \sin \alpha + \delta P \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{r} = \frac{0,05}{5} = 0,01,$$

следовательно,

$$\alpha = \operatorname{arctg} 0,01 = 0^\circ 35'.$$

Из уравнения (2.5) имеем

$$F = P \sin \alpha = P \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = 0,01P \cos \alpha,$$

в то время как максимальная сила трения скольжения

$$F_{\max} = f_0 N = f_0 P \cos \alpha = 0,08P \cos \alpha.$$

Отсюда видим, что условие  $F \leq F_{\max}$  соблюдается, а поэтому ролик начнет катиться по наклонной плоскости без скольжения.

### 2.3 Тележка на наклонной плоскости

Исходные данные:  $Q = 20000 \text{ Н}$  – вес груза с платформой.  $D = 0,4 \text{ м}$  – диаметр колес;  $d = 0,05 \text{ м}$  – диаметр буксы;  $l = 1000 \text{ мм}$  – плечи рукоятки;  $\alpha = 25^\circ$  – угол наклона плоскости;  $k = 0,0003 \text{ м}$  – коэффициент трения качения;  $f = 0,1$  – коэффициент трения скольжения в ступице колеса (рисунок 2.3).

Определить:

1. Силу  $P$  для равномерного подъема грузовой вагонетки по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\gamma$ . Сила тяги  $P$  направлена параллельно наклонной плоскости.
2. Коэффициент тяги.

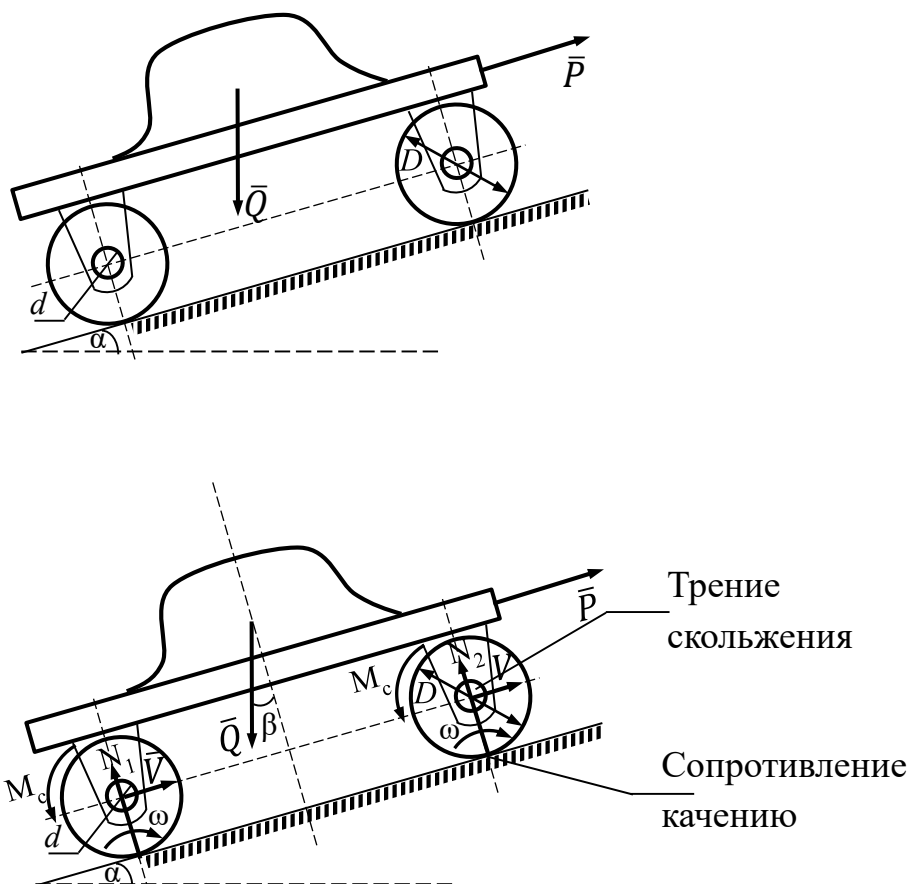


Рисунок 2.3 – Тележка на наклонной плоскости

Решение:

Применим к решению задания принцип возможных перемещений. Сообщим тележке возможное перемещение в направлении ее действительного движения. На основании принципа возможных перемещений, сумма работ всех сил на возможных перемещениях равна нулю, выводим условие равенства нулю суммы мощностей всех сил. Запишем это условие:

$$N_{ДС} = N_{ПС} + N_k + N_f ,$$

где  $N_{ДС} = PV$  – мощность движущих сил;

$N_{ПС} = QV \cos(\bar{Q}, \bar{V})$  – мощность сил полезного сопротивления (сил тяжести);

$N_k = 2M_C \omega = kQ \cos \alpha \cdot \omega$  – мощность сил сопротивления качению;

$N_f = Qf \frac{d}{2} \cdot \omega$  – мощность сил трения скольжения в буксе колеса;

$\omega = \frac{2V}{D}$  – угловая скорость колеса тележки.

Составим уравнение возможных мощностей:

$$PV = QV \sin \alpha + Qk \cos \alpha \cdot \frac{2V}{D} + Qf \frac{d}{2} \cdot \frac{2V}{D}$$

$$P = Q \sin \alpha + Qk \cos \alpha \cdot \frac{2}{D} + Qf \frac{d}{D} = Q \left( \sin \alpha + \frac{2k \cos \alpha}{D} + f \frac{d}{D} \right) =$$

$$= 20000 \left( \sin 25 + \frac{2 \cdot 0,0003 \cos 25}{0,4} + 0,1 \frac{0,05}{0,4} \right) = 8729,55 \text{ Н}$$

$$\text{Коэффициент тяги } k_{\text{тяги}} = \frac{P}{Q} = \sin \alpha + \frac{2k \cos \alpha}{D} + f \frac{d}{D} = 0,44$$

### 3 Задачи для самостоятельного решения на равновесие с учетом трения качения

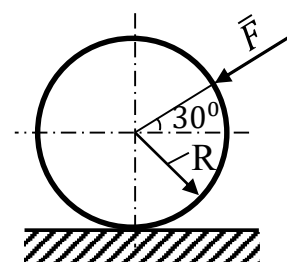
Для приобретения навыков в решении задач на равновесие тел при наличии трения качения рекомендуется решить задачи, приведённые ниже, а также задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И.В. Мещерского: 5.38 – 5.40.

3.1 Цилиндр весом 520 Н лежит на горизонтальной плоскости. Определить наименьший модуль момента пары сил, необходимый для качения цилиндра. Коэффициент трения качения  $\delta = 0,007$  м [15].

Ответ: 3,64 Н · м.

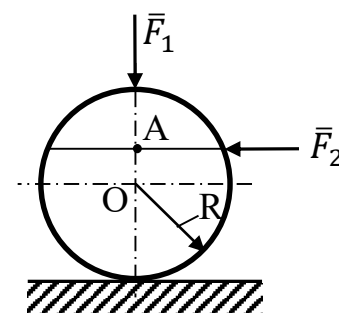
3.2 К однородному катку весом 700 Н приложена сила  $F$ . Определить наименьший модуль этой силы, для того, чтобы каток начал катиться со скольжением, если радиус  $R = 1$  м, коэффициенты трения скольжения и качения соответственно равны:  $f = 0,2$ ,  $\delta = 0,008$  м [15].

Ответ: 183 Н.

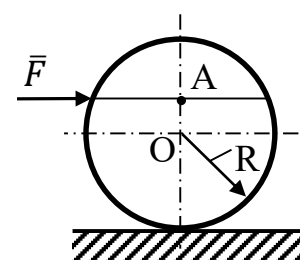


3.3 На однородный каток весом 2 кН действуют горизонтальная сила  $F_2 = 10$  Н и вертикальная сила  $F_1$ . Каким должен быть наибольший модуль силы  $F_1$ , для того, чтобы началось качение катка, если коэффициент трения качения  $\delta = 0,005$  м, радиус  $R = 0,8$  м, размер  $OA = 0,4$  м [15]?

Ответ: 400 Н.



3.4 К однородному катку весом 2 кН приложена горизонтальная сила  $F$ . Определить наибольший модуль силы  $F$ , при котором каток не скользит и

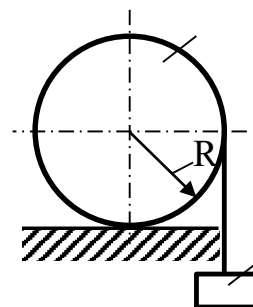


не катится, если коэффициент трения качения  $\delta = 0,006$  м, коэффициент трения скольжения  $f = 0,2$ , радиус  $R = 0,6$  м, размер  $OA = 0,4$  м [15].

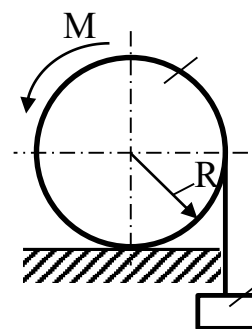
Ответ: 12,0 кН.

3.5 К катку 1 с помощью нерастяжимой нити подвешен груз 2. Определить наибольший вес этого груза, при котором каток 1 весом 3,2 кН останется в покое, если коэффициент трения качения  $\delta = 0,004$  м, радиус  $R = 32,4$  см [15].

Ответ: 40,0 Н.

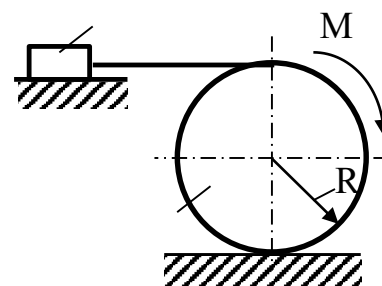


3.6 К однородному катку 1 весом 5 кН приложена пара сил с моментом  $M = 210$  Н · м. Определить, каким должен быть наибольший вес груза 2, для того, чтобы каток катился влево, если коэффициент трения качения  $\delta = 0,003$  м, радиус  $R = 0,453$  м [15]. Ответ: 428 Н.



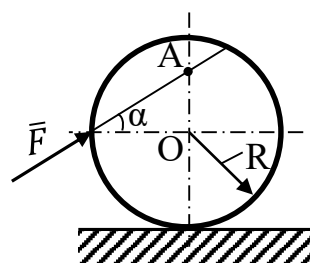
3.7 Однородный каток 2 весом 4 кН связан с телом 1 нерастяжимой нитью. Радиус  $R = 0,5$  м, коэффициент трения качения  $\delta = 0,005$  м, момент пары сил  $M = 50$  Н · м. Определить наибольший вес тела 1, при котором оно начнет скользить, если коэффициент трения скольжения для катка и тела  $f = 0,2$  [15].

Ответ: 150 Н.



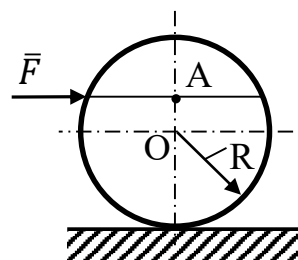
3.8 Определить наименьшую силу  $F$ , необходимую для качения катка радиуса  $R = 0,3$  м, если предельный момент трения качения равен  $3,46 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , угол  $\alpha = 30^\circ$ , расстояние  $OA = 0,2$  м [15].

Ответ: 7,99 Н.



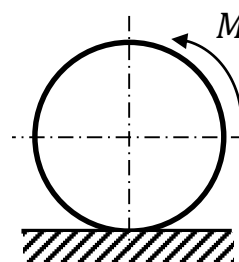
3.9 К однородному катку радиуса  $R = 0,4$  м приложена горизонтальная сила  $F = 12$  Н. Каким должен быть наименьший вес катка в кН, для того чтобы он находился в покое, если коэффициент трения качения  $\delta = 0,008$  м, размер  $OA = 0,2$  м [15]?

Ответ: 0,9 кН.



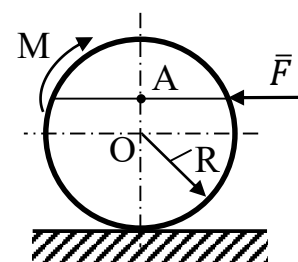
3.10 К однородному катку весом 4 кН приложена пара сил с моментом  $M = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Определить наименьший коэффициент трения качения, при котором каток находится в покое [15].

Ответ: 0,005 м.



3.11 К однородному катку весом 4 кН приложена горизонтальная сила  $F = 50$  Н и пара сил с моментом  $M = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Определить наименьший радиус  $R$  катка, при котором он будет катиться влево, если коэффициент трения качения  $\delta = 0,005$  м и  $OA = 0,6R$  [15].

Ответ: 0,50 м.





## 4 Контрольное задание. Равновесие тележки на наклонной плоскости

На двух катках перемещают груз, расположенный на платформе (рисунок 4.1). Задаваясь для всех пар одинаковым коэффициентом трения качения, определить силу тяги  $P$ , если груз перемещают равномерно вверх по уклону под углом  $\gamma$ . Исходные данные представлены в таблице 4.1.

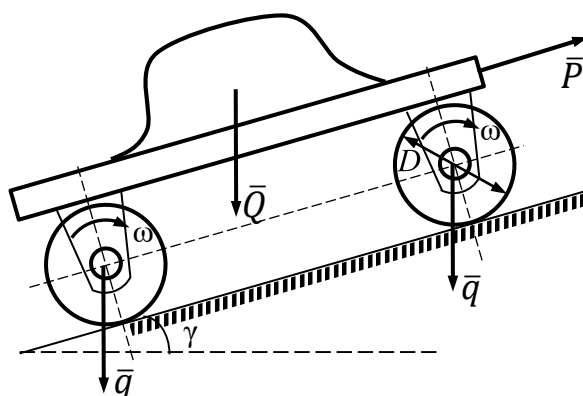


Рисунок 4.1 – К контрольному заданию

Таблица 4.1 – Исходные данные к задаче

Варианты	1	2	3	4	5
Вес $Q$ груза с платформой, Н	1200	1500	1700	1800	2000
Вес $q$ одного катка, Н	100	150	150	200	150
Диаметр $D$ катка, м	0,1	0,12	0,05	0,06	0,07
Коэффициент трения качения $k$ , м	0,0005	0,0005	0,0006	0,0005	0,0003
Угол $\gamma$ , град	5	7	8	9	10

Задание выполнять следуя рекомендациям, указанным в пункте 2.3.

## 5 Трение в механизмах с гибкими звеньями. Формула Эйлера

В технике широкое применение находят механизмы с гибкими звеньями (ременные и канатные передачи, ленточные конвейеры, ленточные тормоза и др.). Трение между гибким и твердым телами обладает некоторыми особенностями; оно зависит не только от коэффициента трения между этими телами, но и от упругих свойств гибкого тела, его деформаций, а также от формы поверхности, по которой происходит скольжение [18].

Леонард Эйлер в 1765 г. создал теорию расчёта трения гибкого тела по твердому.

Трение гибкой связи (ленты, ремня, каната, нити и т.п.) по цилиндрическому барабану в машиностроении встречается в виде двух типовых случаев. Это имеет место, например, в ленточных тормозных устройствах и в ременных, канатных и других передачах. В первом случае окружная скорость шкива является скоростью относительного скольжения в паре гибкая связь – шкив. Во втором случае скорость проскальзывания элементов гибкой связи определяется её динамикой.

Рассмотрим задачу о трении между гибким и твердым телами в самой простой постановке.

Пусть имеется нить, перекинутая через неподвижную цилиндрическую поверхность (рисунок 5.1). За счёт сил трения натяжение левого и правого концов этой нити будут различными.

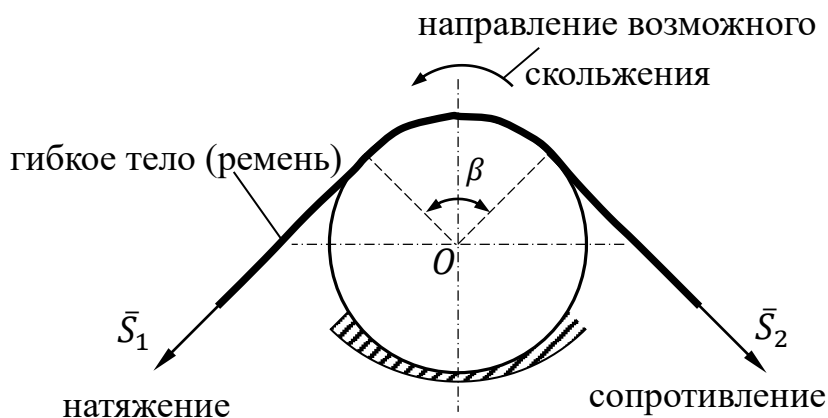


Рисунок 5.1 – Плоские гибкие ремни: нить, перекинутая через неподвижную цилиндрическую поверхность

Предположим, что нормальная реакция и сила трения распределяются равномерно по дуге контакта нити на цилиндре. Рассмотрим равновесие участка нити длиной  $dl = r \cdot d\varphi$ . (рисунок 5.2).

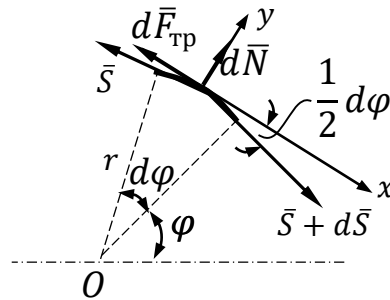


Рисунок 5.2 – Плоские гибкие ремни: нить, перекинутая через неподвижную цилиндрическую поверхность (расчетная схема)

На левом конце этого участка натяжение  $\bar{S}$ , на правом  $\bar{S} + d\bar{S}$ . Составляем уравнения равновесия, проектируя силы на оси:

$$\sum X_i = 0; \quad -S \cos \frac{1}{2} d\varphi - dF_{\text{тр}} + (S + dS) \cos \frac{1}{2} d\varphi = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S \sin \frac{1}{2} d\varphi + dN - (S + dS) \sin \frac{1}{2} d\varphi = 0.$$

Так как угол  $d\varphi$  – малая величина, то полагаем  $\sin \frac{1}{2} d\varphi = \frac{1}{2} d\varphi$ ,  $\cos \frac{1}{2} d\varphi = 1$ . С учётом этого из уравнений находим  $dF_{\text{тр}} = dS$ ,  $dN = S d\varphi$  и, так как  $dF_{\text{тр}} = f dN$ , имеем  $dS = f S d\varphi$  или  $\frac{dS}{S} = f d\varphi$ .

Интегрируя в пределах угла обхвата  $\beta$  и считая  $f = \text{const}$ , находим

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{f\beta} \quad \text{или} \quad S_1 = S_2 e^{f\beta}. \quad (5.1)$$

где  $e = 2,718$  – основание натуральных логарифмов;

$\beta$  – угол обхвата в (радиан);

$f$  – коэффициент трения между ремнем и поверхностью шкива;

$S_1, S_2$  – натяжение ремня, ( $S_1 > S_2$ ).

Этот результат (5.1) принято называть формулой Эйлера.

Полная величина силы трения, возникающей на всей поверхности соприкосновения гибкой связи с барабаном, равна

$$T = S_1 - S_2 = S_2(e^{f\beta} - 1) = S_1 \left(1 - \frac{1}{e^{f\beta}}\right),$$

а момент от сил трения, действующий на барабан,

$$M_T = S_2 r(e^{f\beta} - 1) = S_1 r \left(1 - \frac{1}{e^{f\beta}}\right).$$

Предположение, что  $f = \text{const}$  является не вполне точным, поэтому приведенное решение считается приближенным.

Краткие сведения о коэффициентах трения в тормозных устройствах и передачах приводятся в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Коэффициент трения

Физическая пара материалов	Коэффициент трения $f$
Кожаный ремень по чугунному диску	0,30-0,40
Кожаный ремень по деревянному диску	0,40-0,50
Стальная лента по чугунному диску	0,18

Приведем примеры использования формулы Эйлера для расчета гибких нитей с учетом сил трения. К примеру, в случае если нить перекинута через неподвижный шкив и  $\varphi = \pi$ , а коэффициент трения  $f = 0,2$ , то отношение натяжений

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{-0,2\pi} = 0,533.$$

А, обернув цилиндр один раз ( $\varphi = 2\pi$ ),  $\frac{S_2}{S_1} = e^{-0,22\pi} = 0,285$ , то есть **можно удержать груз на другом конце нити силой почти в три раза меньшей веса тела.**

## 6 Примеры использования формулы Эйлера для расчета гибких нитей с учетом сил трения

Приведем примеры использования формулы Эйлера на практике.

### 6.1 Нить перекинута через неподвижный шкив

Кожаный ремень перекинут через неподвижный чугунный диск. Оба конца свешиваются с диска вертикально. Коэффициент трения между ремнем и диском составляет 0,3. Найти соотношение усилий в ветвях ремня. Рассмотрим два варианта значения угла обхвата ( $\beta$ ):  $\beta = \pi$  (рисунок 6.1) и  $\beta = 3\pi$  (рисунок 6.2).

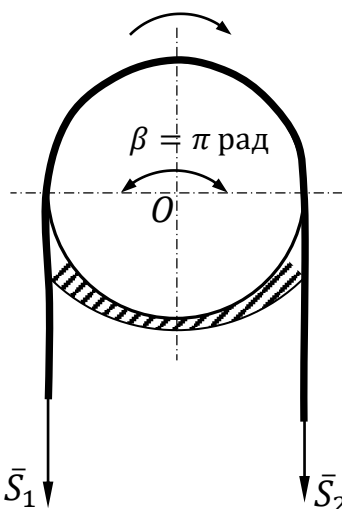


Рисунок 6.1 – Угол обхвата  $\beta = \pi$

1 вариант. Пусть  $\beta = \pi$ :

В соответствии с формулой Эйлера:

$$S_1 = S_2 e^{f\beta}, f = 0,3,$$

получим

$$S_1 = S_2 e^{0,3\pi} = 2,57S_2.$$

Натяжение:

Усилие в левой ветви нити (набегающий конец) в 2,57 раз больше, чем в правой ветви (сбегающий конец).

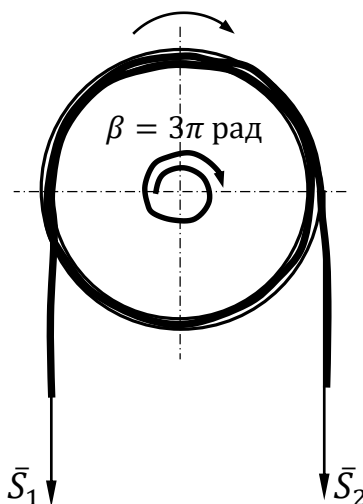


Рисунок 6.2 – Угол обхвата  $\beta = 3\pi$

2 вариант. Что произойдет, если диск один раз обвить ремнем (сделать один виток вокруг диска), тогда угол обхвата составит  $3\pi$ .

В соответствии с формулой Эйлера:

$$S_1 = S_2 e^{0,3(3\pi)} = 16,9S_2.$$

Таким образом, при изменении угла обхвата с  $\pi$  до  $3\pi$  отношение напряжений, возникающих в ветвях нити (ремня) увеличилось в 5,6 раз.

Другими словами, приложив усилие  $S_2$  к правому концу нити, можно уравновесить силу почти в 2,6 раз превышающую  $S_2$ , если угол обхвата составляет  $\pi$  радиан, и уже почти в 17 раз превышающую  $S_2$ , если ремень (канат) хотя бы один раз обернуть вокруг неподвижного цилиндра.

Эта закономерность используется при швартовке кораблей (рисунок 6.3).



Рисунок 6.3 – Процесс подтягивания судна к причалу или к другому судну с последующим креплением его в неподвижном состоянии называется швартовкой судна

## 6.2 Механизм ленточного тормоза

Исходные данные:  $P = 140 \text{ Н}$  – сила, приложенная к рукоятке ленточного тормоза;  $\alpha = 230^\circ$  – угол обхвата лентой тормозного шкива;  $f = 0,2$  – коэффициент трения ленты о тормозной шкив;  $a = 45 \text{ мм}$ ;  $b = 100 \text{ мм}$ ;  $l = 700 \text{ мм}$  – плечи рукоятки;  $r = 200 \text{ мм}$ ;  $R = 400 \text{ мм}$  – радиусы тормозного барабана и шкива.

Определить: вес груза  $Q$ , который может быть удержан на весу ленточным тормозом (рисунок 6.4). Трением в шарнирах пренебречь.

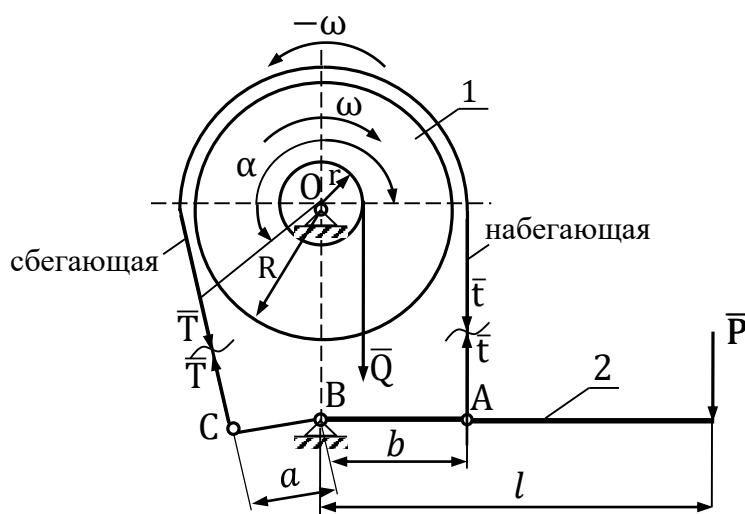


Рисунок 6.4 – Механизм ленточного тормоза

Решение.

Подсчитаем количество подвижных звеньев  $n = 2$  (барабан со шкивом 1 и рукоятка 2). Кроме силы  $P$  и веса груза  $Q$  в ленте при рассмотрении условий равновесия каждого звена действуют усилия натяжения ленты  $t$  и  $T$ , которые связаны между собой по теореме Эйлера формулой

$$T = te^{f\alpha},$$

где  $T$  – усилие в сбегающей ветви ленты;

$t$  – усилие в набегающей ветви ленты;

$e = 2,72$  – показатель натурального логарифма.



Чтобы определить набегающую и сбегающую ветви ленты, применим метод обращения движения, то есть задаем всему механизму вращение в противоположном направлении с угловой скоростью, равной  $-\omega$ , тогда шкив остановится, а ветвь ленты по направлению  $-\omega$  будет набегающей, а вторая ветвь – сбегающей. Допустим, что лента невесома, идеально гибкая и работает на растяжение. Условно рассекаем левую и правую ветвь ленты и показываем усилия  $t$  и  $T$ .

Из равновесия сил звена 2 в виде  $\sum M_B(\bar{F}_i) = 0$  определим усилие  $T$ :

$$-Pl + tb - Ta = 0,$$

Учитывая, что  $t = \frac{T}{ef\alpha}$ , имеем:

$$-Pl + \frac{T}{ef\alpha}b - Ta = 0,$$

$$T\left(\frac{b}{ef\alpha} - a\right) = Pl.$$

Откуда:

$$T = \frac{Pl}{\frac{b}{ef\alpha} - a} = \frac{140 \cdot 700}{\frac{100}{(2,72^{0,2 \cdot 4,01})} - 45} = \frac{140 \cdot 700}{\frac{100}{2,21} - 45} = 393783 \text{ Н.}$$

Рассмотрим равновесие сил звена 1 (совершает вращательные движения) в виде  $\sum M_O(\bar{F}_i) = 0$ :

$$-Qr - tR + TR = 0.$$

Откуда:

$$Q = \frac{(T - t)R}{r} = \frac{(393783 - 178182) \cdot 400}{200} = 431202 \text{ Н.}$$

Ответ:  $Q = 431202 \text{ Н.}$

### 6.3 Контрольное задание. Механизм ленточного тормоза

По заданным в таблице величинам ( $Q, a, l, r, \alpha, f$ ), найти силу  $P$  на рукоятке ленточного тормоза: трением в шарнирах пренебречь (рисунок 6.5); найти во сколько раз сила  $P$  на рукоятке ленточного тормоза уменьшится, если коэффициент трения увеличится в два раза.

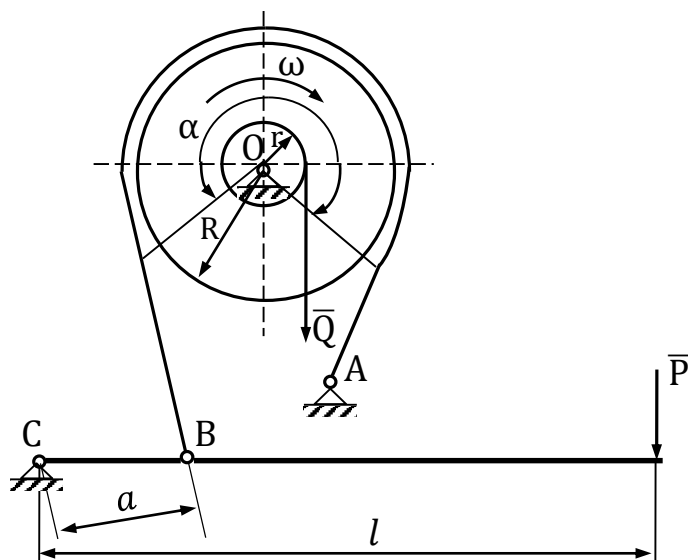


Рисунок 6.5 – К контрольному заданию

Таблица 6.1 – Исходные данные

Варианты	1	2	3	4	5
Вес $Q$ , Н	4000	5000	6000	7000	6500
$a$ , мм	100	120	100	100	100
$l$ , мм	800	1000	1200	1200	1300
$r$ , мм	180	200	250	300	320
$R$ , мм	400	450	600	600	600
Угол обхвата $\alpha$ , град	300	310	315	320	330
Коэффициент трения $f$	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4

## Список использованных источников

1 Дырдина Е. В. Приближенные методы учета трения в материаловедческих исследованиях. Часть 1. Основы теории трения. Трение скольжения: методические указания / Е. В. Дырдина, В. С. Иванова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 56 с.

2 Гурин В. В. Механика: учеб. для вузов / В. В. Гурин, В. М. Замятин, А. М. Попов. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 581 с., [http://portal.tpu.ru/SHARED/g/GURINVV/uml/Tab/Mechanics.\\_Chapter\\_1.pdf](http://portal.tpu.ru/SHARED/g/GURINVV/uml/Tab/Mechanics._Chapter_1.pdf)

3 Каржавин, В. В. Трение, износ, смазочные материалы: учеб. пособие / В. В. Каржавин, А. И. Зимин. – Екатеринбург, 2003. – 83 с.

4 Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М.: Наука, 1988. – 498 с.

5 Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2-х кн. / под ред. И. В. Крагельского, В. В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1978, кн. 1, 2. – 400 с., 358 с.

6 Словарь – справочник по трению, износу и смазке деталей машин / В. Д. Зозуля, Е. Л. Шведков, Э. Д. Браун [и др.] – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.

7 Крагельский, И. В. Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.

8 Курс теоретической механики: учебник для вузов / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин [и др.]; Под общ. ред. К. С. Колесникова. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 736 с.

9 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.

10 Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.

11 Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.

12 Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. Том 1: Статика и кинематика. – 12-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2013. – 672 с.

13 Кирсанов, М. Н. Решебник. Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов. Под ред. А. И. Кириллова. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

14 Теоретическая механика: Руководство к решению задач / О. Н. Арсеньев, О. С. Степаненков, А.В. Шаповалов [и др.]; под общ. ред. С.К. Слезкинского. – СПб.: Политехника, 2007. – 487 с.

15 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие. – 3-е изд., стер. / Под ред. О.Э. Кепе. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 368 с.

16 Статика твердого тела и кинематика материальной точки: учебное пособие / С. М. Бердышева [и др.]. – Оренбург: ОГУ, 2000. – 77 с.

17 Ткачук, Н. А. Теория механизмов и машин. Методические указания к обязательному домашнему заданию по разделу «Трение в машинах» для студентов машиностроительных специальностей / Сост. Н. А. Ткачук, А. А. Зарубина, З. С. Сафонова, И. Я. Храмцова. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2004. – 48 с.

18 Энциклопедия по машиностроению XXL [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://mash-xxl.info/>.