

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра механики материалов, конструкций и машин

В.С. Иванова

# **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ К РАЗДЕЛУ «СТАТИКА»**

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Оренбург  
2018

УДК 531.43 (076.5)  
ББК 22.21я7  
И21

Рецензент – доцент, кандидат технических наук Е.В. Дырдина

**Иванова, В.С.**  
И21 Теоретическая механика. Задания для контрольной работы к разделу «Статика»: методические указания / В.С. Иванова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 28 с.

В методических указаниях рассматриваются условия равновесия системы сил. Вопросы для самоконтроля и рассмотренные примеры позволят обучающемуся разобраться с выполнением варианта индивидуального задания контрольной работы.

Предназначены для организации самостоятельной работы обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств для очной и заочной форм обучения.

УДК 531.43 (076.5)  
ББК 22.21я7

© Иванова В.С., 2018  
© ОГУ, 2018

## Содержание

Введение .....	4
1 Рекомендации к решению задач статики .....	5
2 Равновесие системы сил .....	14
2.1 Задание №1. Произвольная плоская система сил .....	14
2.2 Пример выполнения задания №1 .....	17
2.3 Задание №2. Произвольная пространственная система сил .....	20
2.4 Пример выполнения задания №2 .....	23
2.5 Контрольные вопросы .....	27
Список использованных источников .....	28

## Введение

Методические указания предназначены для обучающихся очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, но могут использоваться и обучающимися других направлений подготовки.

Методические указания содержат краткую теоретическую часть, порядок и примеры решения контрольных заданий по теоретической механике (раздела «Статика»). Основная тема, рассматриваемая в данных методических указаниях, – Произвольная система сил.

Цель курса теоретической механики направлена на развитие у обучающихся навыков научного мышления, формирование инженерного подхода к постановке задач, овладение современными методами решения задач механики и анализа их результатов. Основная задача данных методических указаний заключается в:

- усвоении основных понятий, общих законов, принципов, теорем статики теоретической механики;

- формировании навыков их практического применения к решению конкретных инженерных задач по статике.

В результате освоения раздела «Статика» теоретической механики обучающиеся должны уметь составлять уравнения равновесия и определять реакции опор, что в дальнейшем, гарантирует успешное освоение других технических дисциплин, преподаваемых на данном направлении подготовки.

В рамках изучения дисциплины «Теоретическая механика», учебным планом по направлению подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, предусмотрено выполнение контрольной работы, в которой содержатся задачи по основным темам дисциплины.

# 1 Рекомендации к решению задач статики

## Алгоритм решения задач

- 1) Выбрать объект равновесия (тело, к которому приложены все заданные и искомые силы).
- 2) Изобразить на рисунке все заданные (активные силы), действующие на объект равновесия.
- 3) Выявить наложенные на объект равновесия связи, отбросить их (применив принцип освобождаемости от связей), заменив их действие реакциями связей.
- 4) Установить, какая система сил действует на объект равновесия, выяснить число неизвестных величин и убедиться в том, что задача статически определимая.
- 5) Выбрать декартову систему координат.
- 6) Составить уравнения равновесия для полученной системы сил.
- 7) Решить систему полученных уравнений, определить неизвестные величины и провести анализ полученных результатов.

Рассмотрим более подробно каждый из пунктов алгоритма.

В самом начале решения необходимо определить объект равновесия, а это тело, к которому приложены все заданные силы и силы, требуемые к определению в данной задаче.

Начертить выделенное тело, показать на рисунке в виде векторов заданные силы. Если в число активных сил входят распределенные по тому или иному закону нагрузки, то на рисунке нужно заменить их действие равнодействующими.

Если нагрузка распределена равномерно (рисунок 1.1), ее величина рассчитывается по формуле приведенной ниже, а вектор силы приложен в середине нагруженного участка.

$$Q = q \cdot l, \quad (1.1)$$

где  $q$  – интенсивность распределенной нагрузки, Н/м;

$l$  – расстояние, на котором распределена нагрузка, м.

Если у распределённых вдоль прямой линии сил интенсивность изменяется от 0 до  $q_{max}$  по линейному закону (по треугольнику) (рисунок 1.2), то равнодействующая находится как площадь треугольника. Линия действия равнодействующей силы смещается в сторону больших значений интенсивности и проходит через центр тяжести (С) площади треугольника, который находится от его сторон на расстояниях, равных одной трети соответствующих высот. Поэтому линия действия силы делит сторону АВ треугольника на части  $BD = l/3$  и  $AD = 2l/3$ .

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} \cdot l, \quad (1.2)$$

где  $q_{max}$  – максимальная интенсивность линейно распределенной нагрузки, Н/м;

$l$  – расстояние, на котором распределена нагрузка, м.

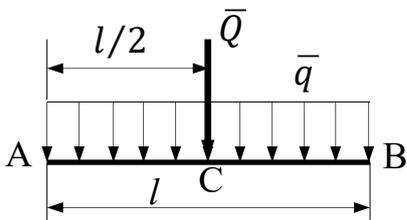


Рисунок 1.1 – Нагрузка, распределённая равномерно

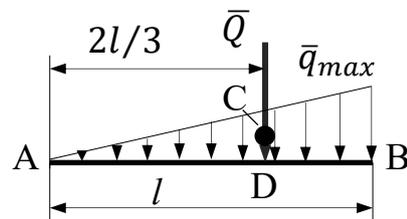
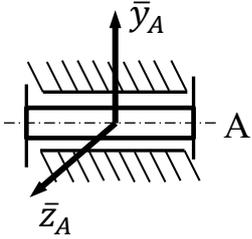
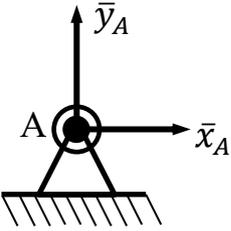
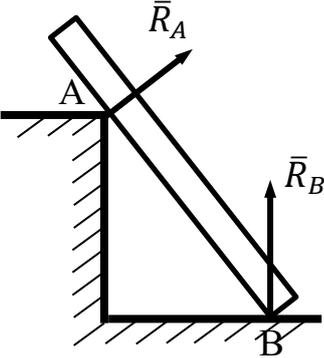
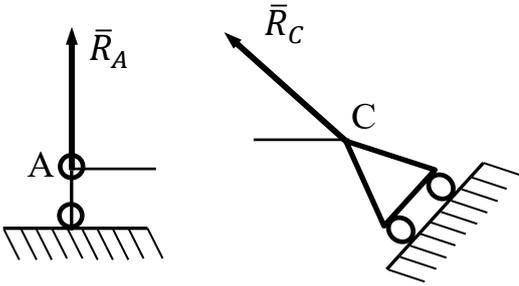


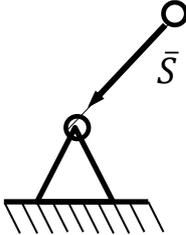
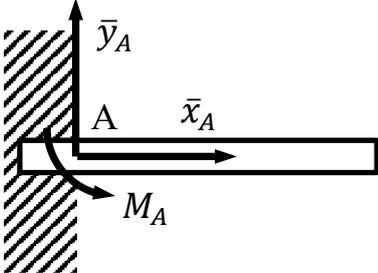
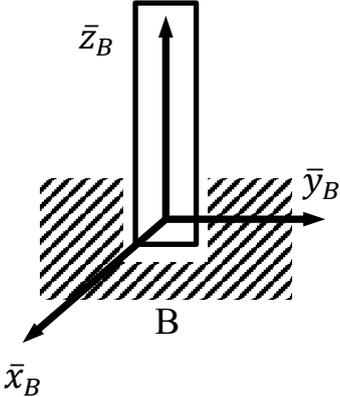
Рисунок 1.2 – Нагрузка, распределённая неравномерно

В соответствии с принципом освобождаемости, отбросить связи, заменить их действие соответствующими реакциями, приложенными к объекту равновесия. При замене руководствоваться принципом согласно которому, линия действия реакции совпадает с тем направлением, в котором данная связь не допускает перемещения тела. Некоторые типы связей и их реакции приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Типы связей и их реакции

Тип связи	Направление реакций
Цилиндрический шарнир	
Шарнирно-неподвижная опора	
Свободное опирание	
Шарнирно-подвижная опора	

Продолжение таблицы 1.1

<p>Невесомый стержень</p>	
<p>Жесткая заделка</p>	
<p>Подпятник</p>	

При анализе системы сил, действующих на объект равновесия, необходимо определить её характер (особенности расположения сил):

- плоская система параллельных сил, произвольная плоская система сил, произвольная пространственная система сил;
- определить число неизвестных величин;
- указать число располагаемых уравнений равновесия и сделать вывод, является ли задача статически определимой (имеет ли решение).
- выбрать систему координат (если она не задана). Располагать её можно произвольно, но лучше выбирать начало координат и направлять оси таким образом, чтобы при написании уравнений равновесия в каждое из них входило, по

возможности, меньше неизвестных величин. Для этого необходимо, чтобы оси были перпендикулярны к возможно большему числу неизвестных величин.

Для равновесия произвольной плоской системы сил составляем три уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

где  $\sum_{k=1}^n F_{kx}$  – сумма проекций всех сил на ось  $x$ , Н;

$\sum_{k=1}^n F_{ky}$  – сумма проекций всех сил на ось  $y$ , Н;

$\sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k)$  – сумма моментов всех сил относительно центра, Н·м.

При равновесии произвольной пространственной системы сил составляем шесть уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}, \quad (1.4)$$

где  $\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} \end{cases}$  – суммы проекций всех сил относительно координатных осей,

Н;

$\begin{cases} \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) \\ \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) \\ \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) \end{cases}$  – суммы моментов всех сил относительно координатных

осей, Н·м.

**Проекцией силы на ось** называется направленный отрезок оси, заключённый между двумя перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора (рисунок 1.3).

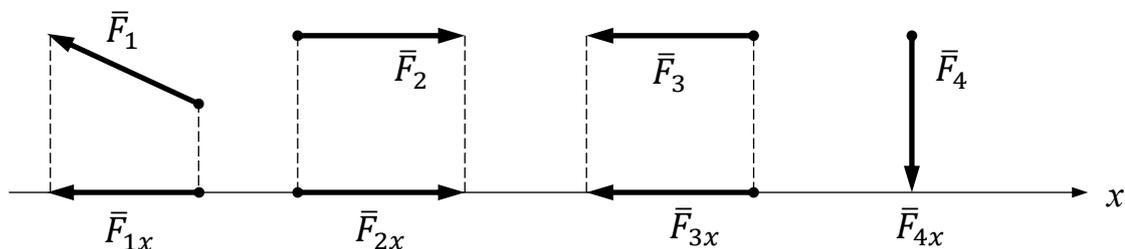


Рисунок 1.3 – Проекция силы на ось

Проекция силы на ось равна произведению модуля этой силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси:  $F_x = F \cos \alpha$ ,  $F_y = F \cos (90^\circ - \alpha) = F \sin \alpha$  (рисунок 1.4).

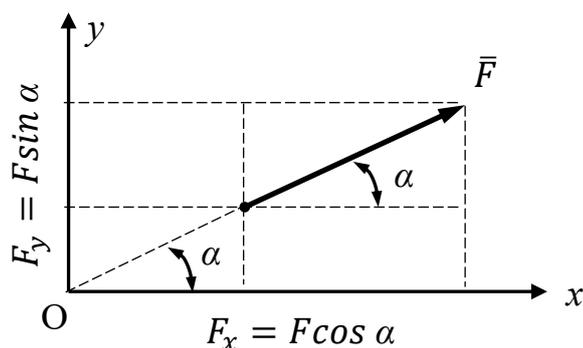


Рисунок 1.4 – Модуль проекции силы на ось

Составляя уравнения равновесия, центр моментов, то есть точку, относительно которой находятся моменты сил, следует выбирать в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил. Это даст возможность определить третью, неизвестную силу непосредственно из этого уравнения. Но, если этот центр моментов расположен так, что вычисление плеч при определении моментов сил вызовет затруднение, то лучше составить уравнение относительно

другого центра, несмотря на то, что в него войдут значения двух неизвестных сил, которые найдём, решая полученную систему уравнений.

Момент силы относительно центра равен взятому со знаком « + » или « - » произведению модуля силы и кратчайшего расстояния от точки до линии действия силы (формула 1.5):

$$M_A(\vec{F}) = \pm Fh, \quad (1.5)$$

где  $F$  – модуль силы, Н;

$h$  – кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы (плечо), м.

Знак « + » ставят, если сила стремится вращать тело относительно точки  $A$  против часовой стрелки, « - » – по часовой стрелке (рисунок 1.5).

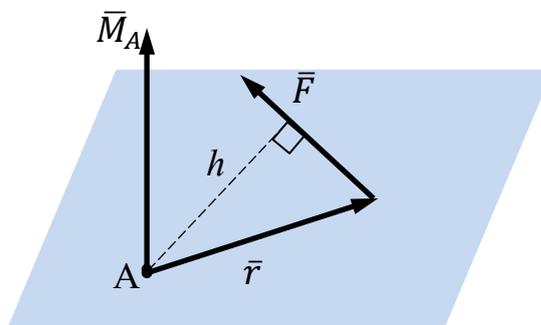


Рисунок 1.5 – Момент силы относительно центра

**Моментом силы относительно оси** называется алгебраическая величина, равная взятому со знаком « + » или « - » произведению модуля этой силы на перпендикулярную к оси плоскость и кратчайшего расстояния от линии действия проекции до оси. Знак « + » ставится, когда сила стремится повернуть тело относительно оси против часовой стрелки, « - » – по часовой стрелке (смотреть на силу с положительного направления соответствующей оси).

Таким образом, чтобы найти момент силы относительно оси  $z$  (рисунок 1.6), необходимо:

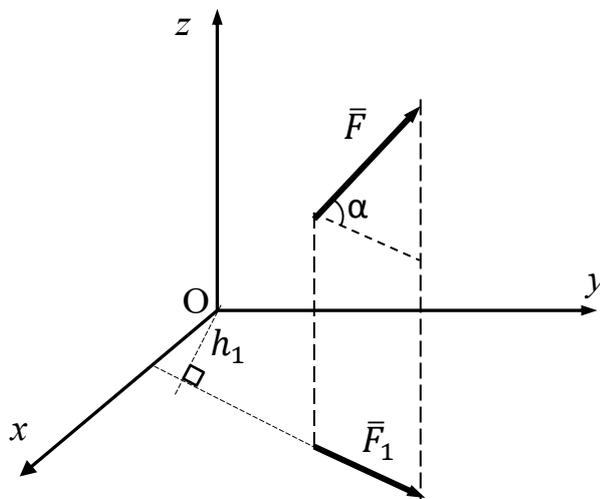


Рисунок 1.6 – Момент силы относительно оси

1. Спроецировать силу  $\vec{F}$  на плоскость  $xOy$  (перпендикулярную оси  $z$ ) – найти  $\vec{F}_1$ .
2. Определить кратчайшее расстояние от линии действия проекции силы до оси, то есть  $h_1$ .
3. Составить алгебраическое произведение  $F_1 h_1$ .
4. Определить знак – для примера, изображённого на рисунке, это знак « + »:

$$M_z = \pm F_1 h_1, \quad (1.6)$$

где  $F_1$  – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, Н;

$h_1$  – кратчайшее расстояние от линии действия проекции до точки пересечения плоскости и оси, перпендикулярной плоскости, м.

Из определения следует, что, если сила параллельна оси или её линия действия пересекает ось, то момент такой силы относительно оси равен нулю.

**Теорема Вариньона** о моменте равнодействующей силы, формулируется следующим образом: момент равнодействующей относительно любой точки равен

геометрической сумме моментов составляющих сил относительно этой точки, а момент равнодействующей силы относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно оси.

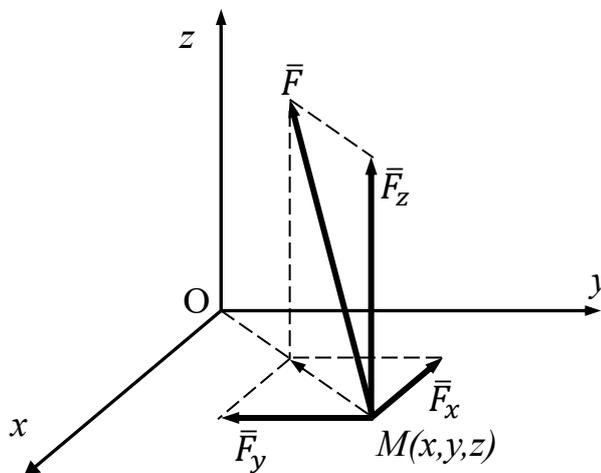


Рисунок 1.7 – Теорема Вариньона о моменте равнодействующей силы

В случаях, когда по условию задачи требуется определить давления тела на опоры, нужно найти равные по модулю этим давлениям соответствующие реакции связей, а затем направить искомые давления противоположно реакциям.

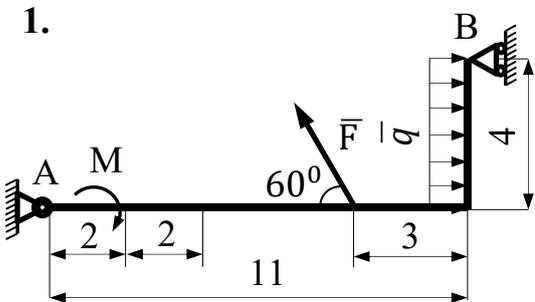
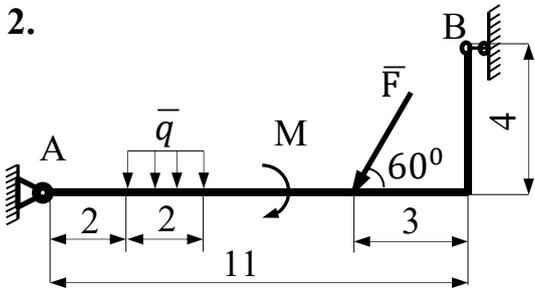
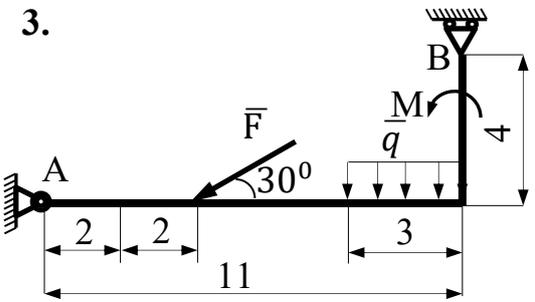
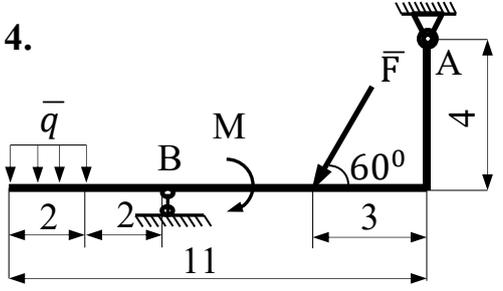
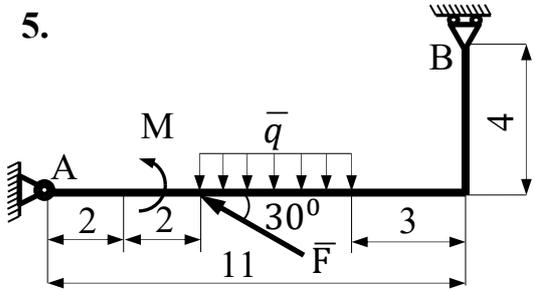
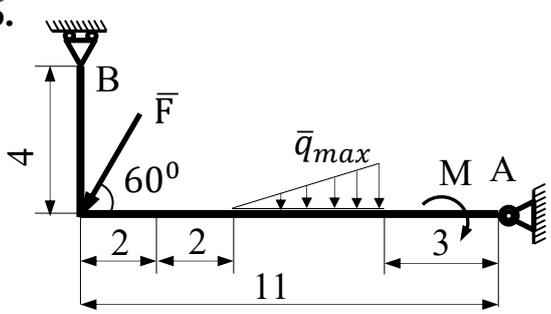
Иногда для определения линии действия реакции можно воспользоваться **теоремой о трех непараллельных силах**. Формулируется теорема следующим образом: если на тело, находящееся в равновесии, действуют три непараллельные силы (включая реакции опор), то они лежат в одной плоскости, и линии их действия пересекаются в одной точке. Таким образом, если тело находится под действием трех непараллельных сил, находят точку пересечения линий действия двух сил, направления которых известны и через эту точку проводят линию действия третьей силы.

## 2 Равновесие системы сил

### 2.1 Задание №1. Произвольная плоская система сил

Для представленных в таблице 2.1 схемах 1–30 тел определить реакции опор. Приведённые на схемах нагрузки имеют следующие величины: сила  $F = 15$  кН, момент пары сил  $M = 25$  кН·м, интенсивность распределённой нагрузки  $q = 5$  кН/м, а также  $q_{max} = 5$  кН/м. Размеры указаны в метрах. Весом тела следует пренебречь.

Таблица 2.1 – Схемы к заданию №1

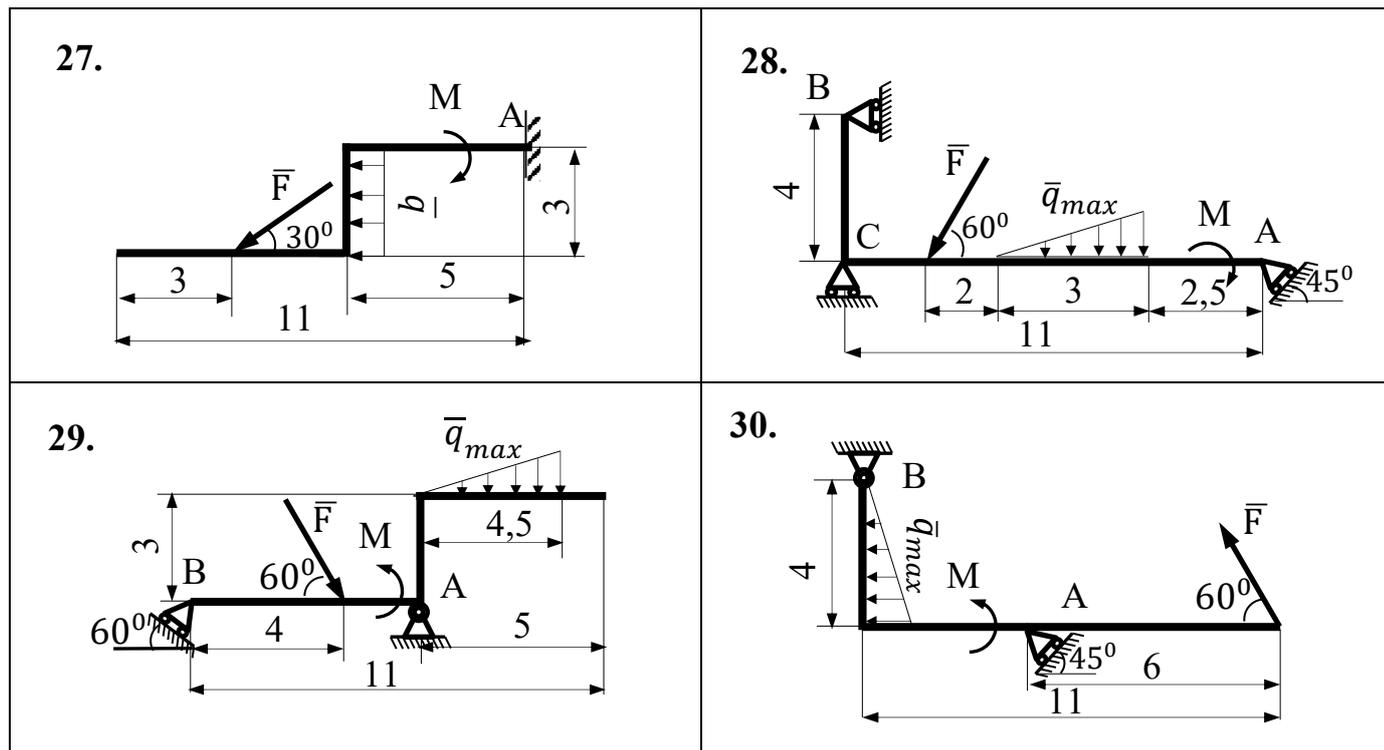
<p>1.</p> 	<p>2.</p> 
<p>3.</p> 	<p>4.</p> 
<p>5.</p> 	<p>6.</p> 

<p>7.</p>	<p>8.</p>
<p>9.</p>	<p>10.</p>
<p>11.</p>	<p>12.</p>
<p>13.</p>	<p>14.</p>
<p>15.</p>	<p>16.</p>

Продолжение таблицы 2.1

<p>17.</p>	<p>18.</p>
<p>19.</p>	<p>20.</p>
<p>21.</p>	<p>22.</p>
<p>23.</p>	<p>24.</p>
<p>25.</p>	<p>26.</p>

Продолжение таблицы 2.1



## 2.2 Пример выполнения задания №1

Для представленной на рисунке 2.1 схемы определить опорные реакции, если сила  $F = 10$  кН, момент пары сил  $M = 15$  кН·м, интенсивность распределённой нагрузки  $q = 5$  кН/м, весом тела пренебречь.

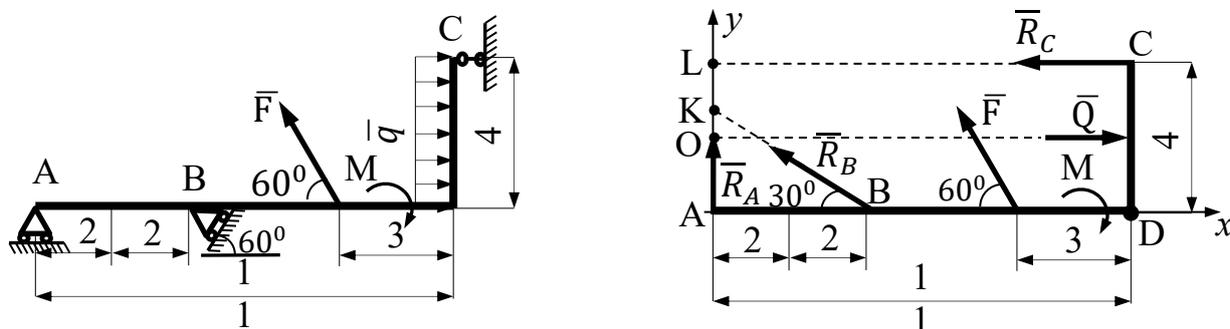


Рисунок 2.1 – Условие и расчётная схема к заданию №1

Решая задачу, будем придерживаться изложенного ранее алгоритма. Заменим равномерно распределенную нагрузку равнодействующей силой  $Q$ , приложенной в середине нагруженного участка (2.1).

$$Q = q \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ кН.} \quad (2.1)$$

Отбросим связи в точках А, В (шарнирно-подвижные опоры), С (стержень) и заменим их действие реакциями  $\bar{R}_A, \bar{R}_B$  и  $\bar{R}_C$  (реакции шарниров направим перпендикулярно опорной поверхности, реакцию стержня – вдоль стержня).

Конструкция находится под действием произвольной плоской системы сил. Выбираем оси и составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad Q - R_C - R_B \cos 30^\circ - F \cos 60^\circ = 0, \quad (2.2)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad R_A + R_B \sin 30^\circ + F \sin 60^\circ = 0. \quad (2.3)$$

Центр, относительно которого будем составлять моменты всех сил, выберем в точке пересечения двух любых неизвестных реакций. Из треугольника АВК найдем расстояние АК из соотношения:  $\frac{AK}{AB} = \operatorname{tg} 30^\circ = 0,577$ , откуда  $AK = 0,577AB = 0,577 \cdot 4 = 2,31$  м. Для удобства вычисления момента силы  $F$  относительно центра К, разложим силу  $F$  на составляющие по осям  $x$ ,  $y$ , соответственно  $F \cos 60^\circ$ ,  $F \sin 60^\circ$  и воспользуемся теоремой Вариньона. Также необходимо рассчитать расстояния ОК и КL («плечи») для сил  $Q$  и  $\bar{R}_C$ , соответственно.

$$OK = AK - AO = 2,31 - 2 = 0,31 \text{ м;}$$

$$KL = AL - AK = 4 - 2,31 = 1,69 \text{ м.}$$

Рассчитав все необходимые расстояния, составим уравнение равновесия моментов всех сил относительно центра К:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0$$

$$Q \cdot 0,31 - F \cos 60^\circ \cdot 2,31 + F \sin 60^\circ \cdot 8 + R_C \cdot 1,69 - M = 0. \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.4) найдем  $R_C$ :

$$R_C = \frac{M - Q \cdot 0,31 + F \cos 60^\circ \cdot 2,31 - F \sin 60^\circ \cdot 8}{1,69} =$$

$$= \frac{15 - 20 \cdot 0,31 + 10 \cdot 0,5 \cdot 2,31 - 10 \cdot 0,866 \cdot 8}{1,69} = -28,953 \text{ кН.}$$

С учетом найденного  $R_C$  из уравнения (2.2) найдем  $R_B$ :

$$R_B = \frac{Q - R_C - F \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{20 - (-28,953) - 10 \cdot 0,5}{0,866} = 50,754 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2.3) найдем  $R_A$ :

$$R_A = -R_B \sin 30^\circ - F \sin 60^\circ = -50,754 \cdot 0,5 - 10 \cdot 0,866 = -34,04 \text{ кН.}$$

Проверим найденные значения реакций опор. Для этого составим уравнение, которое ранее не использовали в решении. Это будет уравнение моментов относительно центра D, причем точку выбирали таким образом, чтобы по возможности, все ранее неизвестные попали в уравнение:

$$\sum m_D(\bar{F}_k) = R_C \cdot 4 - Q \cdot 2 - M - F \sin 60^\circ \cdot 3 - R_B \sin 30^\circ \cdot 7 - R_A \cdot 11 =$$

$$= -28,953 \cdot 4 - 20 \cdot 2 - 15 - 10 \cdot 0,866 \cdot 3 - 50,754 \cdot 0,5 \cdot 7 - (-34,04) \cdot 11 = 0.$$

Сумма моментов всех сил и найденных реакций опор относительно центра D равна нулю, значит, реакции найдены верно.

## 2.3 Задание №2. Произвольная пространственная система сил

Для представленных в таблице 2.2 схемах 1–30 тел определить реакции опор. Тело представляет собой однородную прямоугольную плиту весом  $P = 12$  кН, имеющую размеры  $BC = 6$  м и  $AB = 8$  м. Плита закреплена с помощью трех опор: шарнирно-неподвижной опоры (сферический шарнир), подшипниковой опоры и опорного стержня. На плиту действует: горизонтальная сила  $F_1 = 7$  кН, вертикальная сила  $F_2 = 9$  кН. Дополнительные размеры стены  $BE = 2$  м,  $BK = 7$  м.

Таблица 2.2 – Схемы к заданию №2

<p>1.</p> <p><math>CN = \frac{1}{2}BC</math></p>	<p>2.</p> <p><math>DN = \frac{1}{4}DC</math></p>
<p>3.</p> <p><math>AM = \frac{1}{2}AB</math>   <math>BN = \frac{1}{2}BC</math></p>	<p>4.</p> <p><math>DN = \frac{1}{3}AD</math></p>
<p>5.</p> <p><math>CN = \frac{1}{2}BC</math>   <math>AM = \frac{1}{2}AB</math></p>	<p>6.</p> <p><math>AM = \frac{3}{4}AB</math>   <math>BN = \frac{1}{3}BC</math></p>

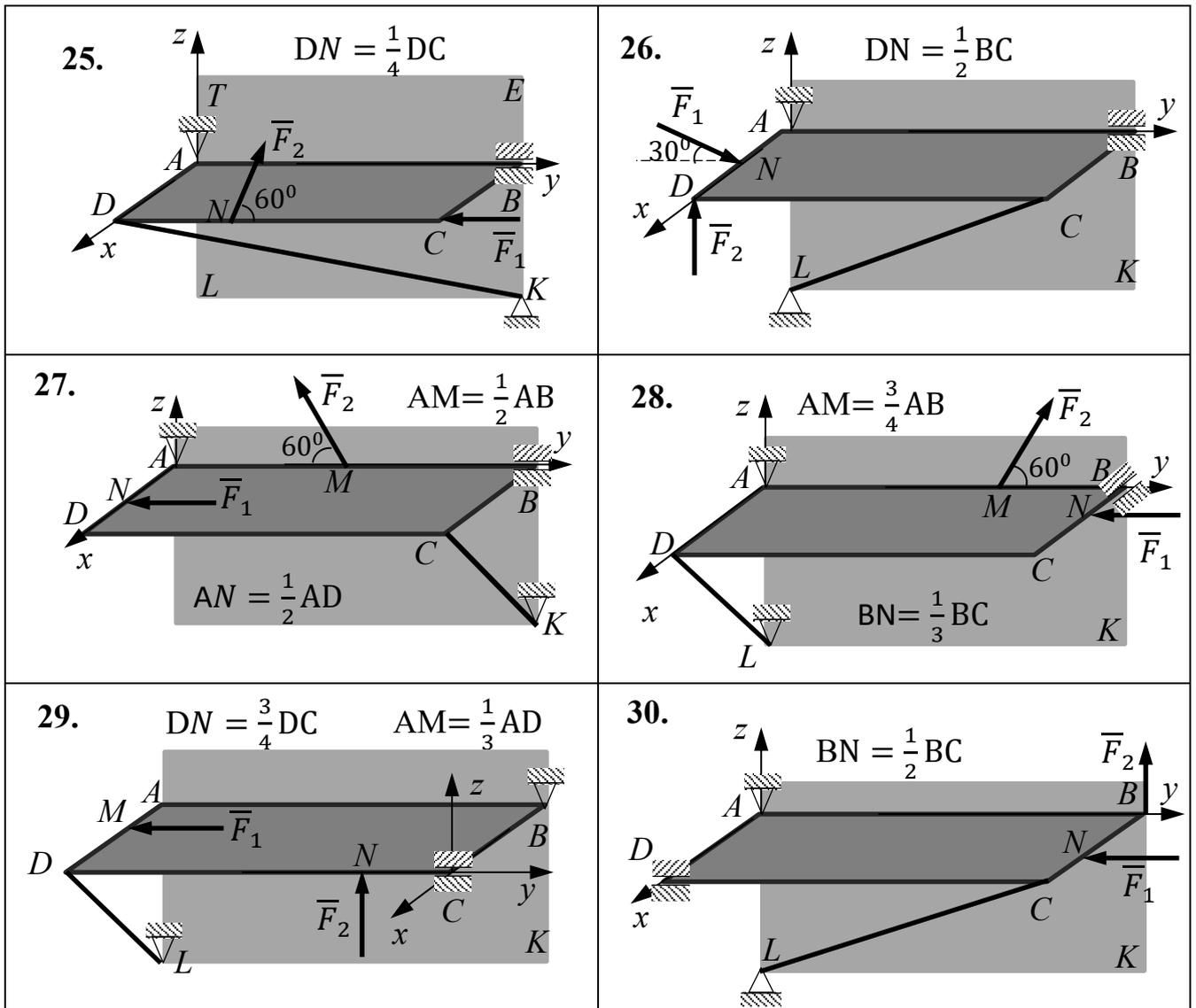
Продолжение таблицы 2.2

<p>7.</p> <p><math>DN = \frac{3}{4}DC</math>   <math>AM = \frac{1}{3}AD</math></p>	<p>8.</p> <p><math>DN = \frac{1}{3}AD</math>   <math>AM = \frac{1}{2}AB</math></p>
<p>9.</p> <p><math>AN = \frac{1}{3}AD</math></p>	<p>10.</p> <p><math>CN = \frac{1}{4}DC</math>   <math>DK = \frac{1}{3}AD</math></p>
<p>11.</p> <p><math>CN = \frac{1}{2}DC</math>   <math>DK = \frac{1}{2}AD</math></p>	<p>12.</p> <p><math>BN = \frac{1}{2}AB</math>   <math>CK = \frac{1}{3}BC</math></p>
<p>13.</p> <p><math>CK = \frac{1}{3}BC</math>   <math>BN = \frac{1}{2}AB</math></p>	<p>14.</p> <p><math>AN = \frac{1}{2}AB</math></p>
<p>15.</p> <p><math>BN = \frac{1}{4}AB</math>   <math>AK = \frac{1}{2}AD</math></p>	<p>16.</p> <p><math>AN = \frac{1}{2}AB</math></p> <p><math>45^\circ</math></p>

Продолжение таблицы 2.2

<p>17.</p> <p><math>DN = \frac{1}{2} CD</math></p>	<p>18.</p> <p><math>AN = \frac{1}{3} AD</math></p> <p><math>45^\circ</math></p>
<p>19.</p> <p><math>AN = \frac{1}{2} AD</math></p> <p><math>45^\circ</math></p>	<p>20.</p> <p><math>BN = \frac{1}{2} AB</math></p>
<p>21.</p> <p><math>DK = \frac{1}{2} DC</math></p> <p><math>BN = \frac{1}{3} BC</math></p> <p><math>45^\circ</math></p>	<p>22.</p> <p><math>BN = \frac{1}{2} AB</math></p> <p><math>DM = \frac{1}{4} DC</math></p>
<p>23.</p> <p><math>DM = \frac{1}{2} DC</math></p> <p><math>45^\circ</math></p>	<p>24.</p> <p><math>AM = \frac{1}{2} AB</math></p> <p><math>BN = \frac{2}{3} BC</math></p> <p><math>60^\circ</math></p>

Продолжение таблицы 2.2



### 2.4 Пример выполнения задания №2

Для представленной на рисунке 2.2 схемы определить реакции опор. Тело представляет собой однородную прямоугольную плиту весом  $P = 16$  кН, имеющую размеры  $BC = 6$  м и  $AB = 8$  м. Плита закреплена с помощью трех опор: шарнирно-неподвижной опоры (сферический шарнир) в точке С, подшипниковой опоры в точке В и опорного стержня в точке D. На плиту действует: горизонтальная сила  $F_1 = 7$  кН, под углом к оси  $y$  сила  $F_2 = 10$  кН, размеры стены  $OL = 2$  м.

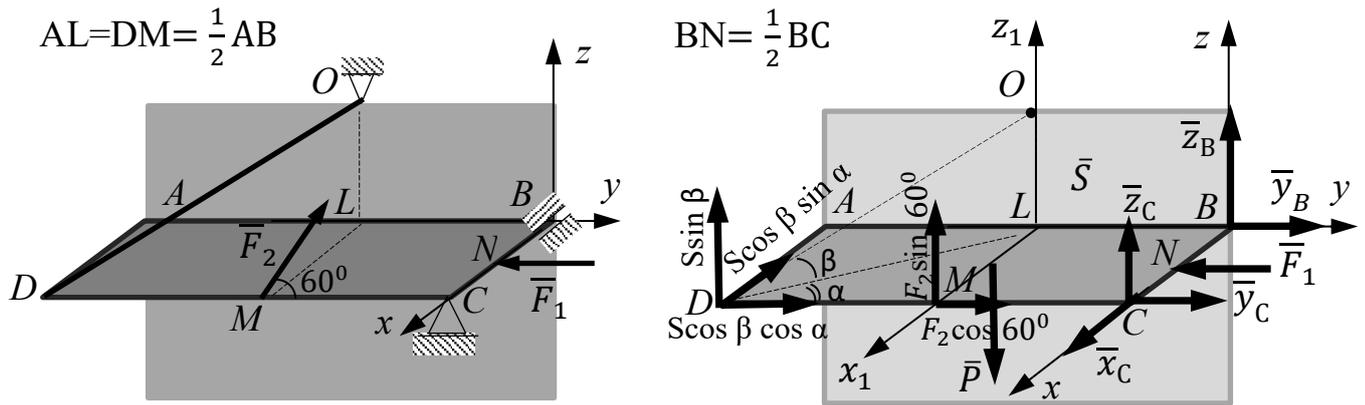


Рисунок 2.2 – Условие и расчётная схема к заданию №2

При выполнении задания воспользуемся изложенным ранее алгоритмом. Рассмотрим равновесие плиты, её вес  $\bar{P}$  приложен в середине, в точке пересечения диагоналей. Для удобства при составлении уравнений представим силу  $F_2$  двумя составляющими по осям  $y$  и  $z$ ,  $F_2 \cos 60^\circ$  и  $F_2 \sin 60^\circ$  соответственно. Отбросим связи в точках  $B$ ,  $C$  и  $D$ , заменим их действие реакциями:  $\bar{y}_B$ ,  $\bar{z}_B$ ,  $\bar{x}_C$ ,  $\bar{y}_C$ ,  $\bar{z}_C$  и  $\bar{S}$  соответственно. Чтобы в дальнейшем воспользоваться теоремой Вариньона, разложим реакцию стержня  $S$  на составляющие по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Для того, чтобы найти проекцию  $S$  на оси  $x$  и  $y$ , нужно сначала силу спроецировать на плоскость  $xoy$  ( $S \cos \beta$  – проекция силы  $S$  на плоскость  $xoy$ ), а затем спроецировать полученную проекцию на плоскость на оси  $x$  и  $y$ , получим соответственно:  $S \cos \beta \sin \alpha$  и  $S \cos \beta \cos \alpha$ . Проекция силы  $S$  на ось  $z$  будет равна  $S \sin \beta$ .

Найдем значения синусов и косинусов угла  $\beta$ . Рассмотрим треугольник  $ODL$ :

$$\cos \beta = \frac{DL}{OD};$$

$$DL = \sqrt{DM^2 + LM^2} = \sqrt{(1/2AB)^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \text{ м};$$

$$OD = \sqrt{DL^2 + OL^2} = \sqrt{52 + 2^2} = \sqrt{56} \text{ м}.$$

$$\text{Тогда } \cos \beta = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{56}} = 0,964;$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - 0,964^2} = 0,267.$$

Найдем значения синусов и косинусов угла  $\alpha$ . Рассмотрим треугольник  $MDL$ :

$$\cos \alpha = \frac{MD}{DL} = \frac{4}{\sqrt{52}} = 0,555;$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,555^2} = 0,832.$$

На плиту действует произвольная пространственная система сил, составляем шесть уравнений равновесия (2.5 – 2.10):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad x_C - S \cos \beta \sin \alpha = 0 . \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad y_B - F_1 + y_C + F_2 \cos 60^\circ + S \cos \beta \cos \alpha = 0 . \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \quad z_B + z_C - P + F_2 \sin 60^\circ + S \sin \beta = 0 . \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0 \quad P \cdot 4 - F_2 \sin 60^\circ \cdot 4 - S \sin \beta \cdot 8 = 0 . \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0 \quad -z_C \cdot 6 + P \cdot 3 - S \sin \beta \cdot 6 = 0 . \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) &= 0 \\ -F_1 \cdot 3 + y_C \cdot 6 + F_2 \cos 60^\circ \cdot 6 + S \cos \beta \cos \alpha \cdot 6 - S \cos \beta \sin \alpha \cdot 8 &= 0 . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из уравнения 2.8 найдем реакцию стержня S:

$$S = \frac{P \cdot 4 - F_2 \sin 60^\circ \cdot 4}{8 \sin \beta} = \frac{P - F_2 \sin 60^\circ}{2 \sin \beta} = \frac{16 - 10 \cdot 0,866}{2 \cdot 0,267} = 13,745 \text{ кН.}$$

Из уравнения 2.9 найдем составляющую реакции шарнира  $z_C$ :

$$z_C = \frac{P \cdot 3 - S \sin \beta \cdot 6}{6} = \frac{P - S \sin \beta \cdot 2}{2} = \frac{16 - 13,745 \cdot 0,267 \cdot 2}{2} = 4,33 \text{ кН.}$$

Из уравнения 2.10 найдем составляющую реакции шарнира  $y_C$ :

$$y_C = \frac{F_1 \cdot 3 - F_2 \cos 60^\circ \cdot 6 - S \cos \beta \cos \alpha \cdot 6 + S \cos \beta \sin \alpha \cdot 8}{6} =$$

$$= \frac{7 \cdot 3 - 10 \cdot 0,5 \cdot 6 - 13,745 \cdot 0,964 \cdot 0,555 \cdot 6 + 13,745 \cdot 0,964 \cdot 0,832 \cdot 8}{6} =$$

$$= 5,845 \text{ кН.}$$

Из уравнения 2.5 найдем составляющую реакции шарнира  $x_C$ :

$$x_C = S \cos \beta \sin \alpha = 13,745 \cdot 0,964 \cdot 0,832 = 11,024 \text{ кН.}$$

Из уравнения 2.6 найдем составляющую реакцию опоры  $y_B$ :

$$y_B = F_1 - y_C - F_2 \cos 60^\circ - S \cos \beta \cos \alpha =$$

$$= 7 - 5,845 - 10 \cdot 0,5 - 13,745 \cdot 0,964 \cdot 0,555 = -11,2 \text{ кН.}$$

Из уравнения 2.7 найдем составляющую реакцию опоры  $z_B$ :

$$z_B = -z_C + P - F_2 \sin 60^\circ - S \sin \beta =$$

$$= -4,33 + 16 - 10 \cdot 0,866 - 13,745 \cdot 0,267 = -0,66 \text{ кН.}$$

Чтобы проверить, верно ли найдены значения реакций опор, нужно составить дополнительно уравнения равновесия, которые не использовались в решении. Для этого проведем через точку L дополнительно оси  $x_1$  и  $z_1$ . Точка выбрана таким образом, чтобы как можно больше ранее неизвестных реакций оказались в новых уравнениях равновесия.

$$\sum_{k=1}^n M_{x_1}(\bar{F}_k) = z_B \cdot 4 + z_C \cdot 4 - S \sin \beta \cdot 4 = 4(-0,66 + 4,33 - 13,745 \cdot 0,267) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{z_1}(\bar{F}_k) = S \cos \beta \cos \alpha \cdot 6 - S \cos \beta \sin \alpha \cdot 4 + F_2 \cos 60^\circ \cdot 6 - F_1 \cdot 3 -$$

$$- x_C \cdot 4 + y_C \cdot 6 = 13,745 \cdot 0,964 \cdot 0,555 \cdot 6 - 13,745 \cdot 0,964 \cdot 0,832 \cdot 4 +$$

$$+ 10 \cdot 0,5 \cdot 6 - 7 \cdot 3 - 11,024 \cdot 4 + 5,845 \cdot 6 = 0.$$

Сумма моментов всех сил и найденных реакций опор относительно координатных осей равна нулю, значит реакции найдены верно.

## 2.5 Контрольные вопросы

1. Какая система сил называется сходящейся?
2. Сформулируйте теорему о равновесии трех непараллельных сил.
3. Дайте определение момента силы относительно центра.
4. Когда момент силы относительно центра равен нулю?
5. Напишите уравнения равновесия плоской системы сил.
6. Напишите уравнения равновесия пространственной системы сил.
7. Дайте определение момента силы относительно оси и укажите способы его нахождения.
8. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей силы.
9. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
10. Перечислите основные виды связей и их реакции.
11. Что называется проекцией вектора на ось?

## Список использованных источников

1 Теоретическая механика. Статика. Практикум: учеб. пособие / В. А. Акимов [и др.]; под общ. ред. проф. А. В. Чигарева. – Минск: Новое знание; М.: ЦУПЛ, 2010. – 452 с.

2 Теоретическая механика: Руководство к решению задач / О. Н. Арсеньев, О. С. Степаненков, А. В. Шаповалов и др.; под общ. ред. С. К. Слезкинского. – СПб.: Политехника, 2007. – 487 с.

3 Диевский, В. А., Теоретическая механика. Сборник заданий: учебное пособие / В. А. Диевский, И. А. Малышева. – СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 192 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

4 Гарипов, В. С. Сопротивление материалов в примерах и задачах. Расчетно-графические работы: учебное пособие : в 2 ч / В. С. Гарипов, С. Н. Горелов, А. В. Колотвин; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2016. – Ч. 1. – 195 с.

5 Горелова С. С. Градостроительное проектирование жилого района города [Текст]: методическое пособие по выполнению курсовой работы по дисциплине «Основы градостроительства и планировки населенных мест» для студентов всех форм обучения направления подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры / С. С. Горелова, А. П. Несват. – Оренбург: Издательский центр ОГАУ, 2018. – 100 с.