

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

А.И. Альбакасов, Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть I

Статически определимые системы

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 08.03.01 Строительство

Оренбург
2018

УДК 624.04(075.8)
ББК 38.112я73
А56

Рецензент – профессор, доктор технических наук В.Н. Куприянов (КГАСУ,
г. Казань)

Альбакасов, А.И.
А56 Строительная механика. Часть I. Статически определимые системы: учебное
пособие/А.И. Альбакасов, Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов; Оренбургский гос.
ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 172 с.
ISBN

Учебное пособие соответствует содержанию первой части вузовского курса строительной механики для строительных направлений бакалавриата. Излагаются основные методы расчета и кинематического анализа статически определимых стержневых систем (балок, арок, ферм). Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров расчета конкретных стержневых конструкций.

Учебное пособие предназначено для студентов направления подготовки 08.03.01 Строительство всех форм обучения при изучении дисциплины «Строительная механика».

УДК 624.04(075.8)
ББК 38.112я73

ISBN

© Альбакасов А.И.
Кудина Л.И.
Гаврилов А.А., 2018
© ОГУ, 2018

Содержание

Введение.....	6
1 Основные понятия и допущения строительной механики	7
1.1 Предмет и задачи строительной механики.....	7
1.2 Краткий исторический обзор развития строительной механики.....	9
1.3 Основные допущения строительной механики	10
1.4 Сооружение и его расчетная схема. Классификация расчетных схем	11
1.5 Нагрузки и воздействия на сооружения	15
2 Кинематический анализ плоских стержневых систем	18
2.1 Основные понятия и определения.....	18
2.2 Число степеней свободы. Формула Чебышёва	22
2.3 Анализ геометрической структуры. Способы образования геометрически неизменяемых систем	26
2.4 Понятие о мгновенно изменяемых системах. Признаки образования мгновенно изменяемых систем	29
2.5 Порядок проведения кинематического анализа	32
3 Расчет многопролетных статически определимых балок.....	35
3.1 Общие сведения	35
3.2 Правила установки промежуточных шарниров в многопролетной статически определимой балке.....	38
3.3 Кинематический анализ многопролетной статически определимой балки.....	40
3.4 Расчет многопролетных статически определимых балок при действии неподвижной нагрузки	45
4 Общая теория линий влияния	52
4.1 Понятие о линиях влияния.....	52
4.2 Построение линий влияния в однопролетных балках.....	54
4.2.1 Построение линий влияния опорных реакций	54
4.2.2 Построение линии влияния изгибающего момента.....	55

4.2.3 Построение линии влияния поперечной силы	58
4.3 Построение линий влияния в консольных балках.....	59
4.3.1 Построение линии влияния изгибающего момента.....	59
4.3.2 Построение линии влияния поперечной силы	60
4.4 Построение линий влияния для однопролетных балок с консолями	62
4.5 Построение линий влияния для многопролетных статически определимых балок	65
4.6 Определение усилий по линиям влияния.....	67
4.6.1 Случай действия одной сосредоточенной силы.....	67
4.6.2 Случай действия системы сосредоточенных сил.....	67
4.6.3 Случай действия равномерно распределенной нагрузки.....	68
4.6.4 Случай действия сосредоточенного момента.....	69
4.7 Особенности построения линий влияния при узловой передаче нагрузки	70
4.8 Невыгоднейшее (опасное) загрузение линии влияния	75
4.9 Кинематический способ построения линий влияния.....	78
5 Расчет трехшарнирных арок и рам.....	82
5.1 Общие сведения о распорных системах. Классификация арок.....	82
5.2 Аналитический метод расчета трехшарнирных арок.....	84
5.3 Рациональное очертание оси трехшарнирной арки	90
5.4 Построение линий влияния усилий в трехшарнирной арке	92
5.4.1 Построение линий влияния опорных реакций	92
5.4.2 Построение линий влияния внутренних усилий.....	93
5.5 Построение линий влияния внутренних усилий в трехшарнирной арке способом нулевых точек.....	98
5.5.1 Линия влияния изгибающего момента.....	99
5.5.2 Линия влияния поперечной силы	101
5.5.3 Линия влияния продольной силы	103
5.6 Особенности расчета рам с замкнутым контуром.....	105
6 Расчет плоских статически определимых ферм.....	108
6.1 Общие сведения о фермах. Классификация ферм.....	108

6.2 Аналитические способы определения усилий в элементах простейших ферм	110
6.2.1 Способ вырезания узлов	111
6.2.2 Способ проекций	113
6.2.3 Способ моментной точки.....	114
6.3 Некоторые частные случаи равновесия узлов простейших ферм (признаки нулевых стержней).....	117
6.4 Графический метод определения усилий в стержнях простейших ферм (диаграмма Максвелла-Кремоны)	119
6.5 Построение линий влияния усилий в стержнях простейших ферм.....	122
6.5.1 Фермы с параллельными поясами	123
6.5.2 Фермы с ломаными поясами	130
6.5.3 Консольные фермы.....	134
6.6 Расчет шпренгельных ферм	146
6.7 Построение линий влияния усилий в стержнях шпренгельных ферм	150
6.8 Расчет сложных ферм	156
6.8.1 Способ замены стержней (способ Геннеберга).....	156
6.8.2 Способ замкнутых сечений	159
6.8.3 Способ двух (или нескольких) сечений	160
6.9 Кинематический анализ сложных ферм	161
6.10 Расчет шпренгельных балок	165
6.11 Общие сведения о висячих системах.....	169
7 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины	172

Введение

Содержание настоящего учебного пособия соответствует содержанию первой части курса лекций по дисциплине «Строительная механика» для студентов, обучающихся по программам высшего образования для направления подготовки 08.03.01 «Строительство».

Строительная механика является логическим продолжением курсов теоретической механики и сопротивления материалов. Изложение материала пособия предполагает знакомство с основами расчетов на прочность, жесткость и устойчивость и основными методами геометрической статики и аналитической механики.

Первая часть учебного пособия посвящена изложению классических методов расчета статически определимых стержневых систем: многопролетных балок, трехшарнирных арок и рам и статически определимых ферм при действии неподвижной и подвижной нагрузки.

Особенностью данного пособия является развернутое изложение ряда вопросов, которым, к сожалению, не уделяется должного внимания в существующих учебниках и учебных пособиях по дисциплине: методы кинематического анализа стержневых систем, расчет шпренгельных балок, построение линий влияния в статически определимых фермах и т.д.

При написании учебного пособия авторы ставили перед собой задачу изложения теоретического материала в сжатой, но доступной для самостоятельного изучения форме. В связи с этим теоретические положения иллюстрируются большим количеством конкретных примеров.

Завершает учебное пособие список литературы, рекомендуемой для более глубокого самостоятельного изучения вопросов, не нашедших детального отражения в настоящем учебном пособии.

1 Основные понятия и допущения строительной механики

1.1 Предмет и задачи строительной механики

Строительная механика – это наука о принципах и методах расчета различных инженерных сооружений на прочность, жесткость, устойчивость и колебания.

Строительная механика представляет собой раздел механики деформируемого твердого тела и является частью общей механики (рисунок 1.1).

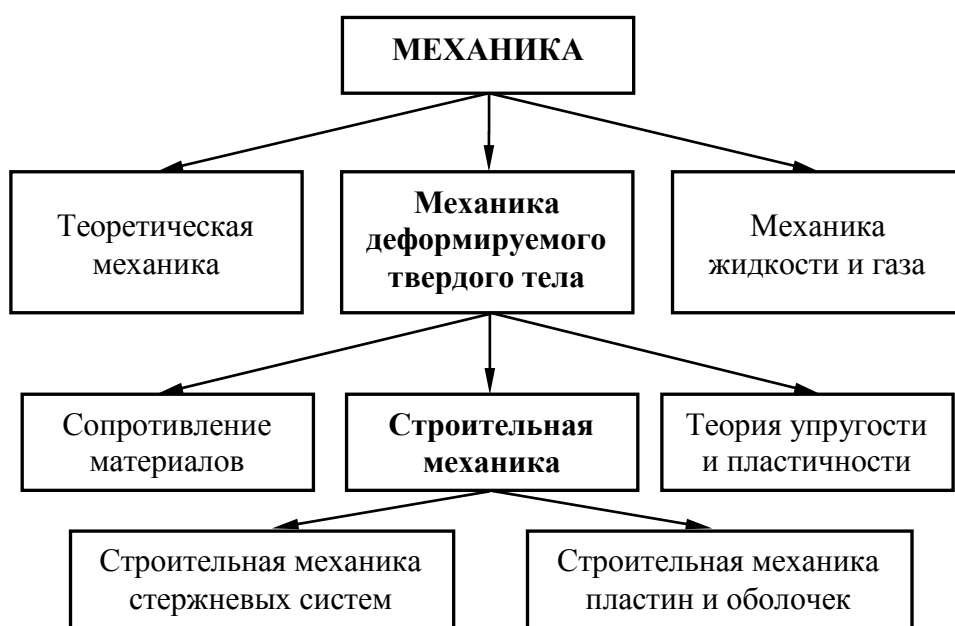


Рисунок 1.1

Основными объектами изучения строительной механики являются различные пространственные и плоские системы (стержневые, пластинчатые, оболочечные), служащие расчетными моделями реальных инженерных сооружений.

Основной целью расчета любого сооружения в конечном итоге является обеспечение его надежности и долговечности при экономически обоснованном расходе материала.

Под *надежностью* понимается практическое исключение возможности разрушения сооружения в процессе его эксплуатации. Надежность и долговечность со-

оружения обеспечены, если оно удовлетворяет требованиям прочности, жесткости и устойчивости.

Как известно из курса сопротивления материалов, под *прочностью* понимают способность сооружения воспринимать внешние нагрузки, не разрушаясь. Под *жесткостью* – способность сооружения воспринимать внешние нагрузки, деформируясь в установленных пределах. *Устойчивость* – это способность сооружения сохранять заданную первоначальную форму равновесия.

Основными задачами строительной механики являются:

- разработка рациональных методов расчета инженерных сооружений с целью обеспечения их надежности и долговечности;
- установление рациональных форм сооружений, удовлетворяющих требованиям экономичности.

Строительная механика базируется, прежде всего, на методах теоретической механики, сопротивления материалов, теории упругости и пластичности. В свою очередь, строительная механика создает базу для изучения специальных курсов, посвященных расчету конкретных строительных конструкций (железобетонных, металлических и т.п.). Особенность строительной механики как науки состоит в том, что целью расчета является определение внутренних усилий и перемещений, возникающих в элементах сооружения, а не напряжений, как в сопротивлении материалов. Подбор и конструирование самих элементов изучаются в специальных курсах конструкций.

Иногда строительную механику называют *теорией сооружений*, объединяя под этим названием весь комплекс перечисленных выше дисциплин, которые в современной науке настолько тесно переплетены, что установление их точных границ становится затруднительным. Традиционный вузовский курс строительной механики посвящен, как правило, изучению методов расчета стержневых систем, широко применяемых в строительстве. Это объясняется, прежде всего, тем, что стержневые системы являются наиболее простым и удобным объектом для освоения основных принципов и методов строительной механики.

1.2 Краткий исторический обзор развития строительной механики

Строительство зданий и сооружений началось задолго до того времени, как появилась наука «строительная механика». Одним из древнейших крупных сооружений, сохранившихся до наших дней, является ступенчатая пирамида Джосера, возведенная гениальным египетским зодчим Имхотепом в середине 3 тысячелетия до н.э. в Саккаре (на территории современного Египта).

Некоторые из древних построек имели огромный запас прочности, что и позволило им сохраниться до наших дней. Вместе с тем каких-либо обоснованных расчетов в те времена не существовало, и здания строились либо на основе собственного опыта архитектора, либо по аналогии с уже существующими. Если же строились здания уникальные, не имеющие аналогов, то порой они оказывались неудачными. Так, например, в 1720 г. архитектор Т. Швертфегер приступил к строительству Троицкого собора Александро-Невской лавры в Санкт-Петербурге. Однако в 1755 г. еще недостроенный собор был разобран, т.к. его стены и своды дали трещины.

Методы строительной механики, как науки о методах расчета сооружений, во многом определялись уровнем развития механики, математики и науки о прочности, т.е. сопротивления материалов. До конца XIX века в строительной механике применялись преимущественно методы графической статики, и лишь в начале XX века графические методы стали уступать место более современным аналитическим. Появление аналитических методов расчета зданий и сооружений связано с работами Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, Я. Бернулли, С. Пуассона и др. Однако, широким инженерным кругам в силу своей сложности эти методы были недоступны и не нашли должного применения.

Период интенсивного развития аналитических методов начался во второй половине XIX века в связи с широкомасштабным строительством железных дорог, мостов и крупных промышленных объектов. Начало формированию строительной механики как науки положили работы Дж. Максвелла, А. Кастильяно, Д.И. Журавского и др. Большую роль в развитии строительной механики сыграли работы К.О. Мора, М.В. Остроградского, Дж. Рэлея, А. Сен-Венана, С.П. Тимошенко, Ф.С. Ясин-

ского и многих других. Крупные успехи в развитии различных разделов строительной механики были достигнуты благодаря трудам отечественных ученых А.Н. Крылова, И.Г. Бубнова, Б.Г. Галеркина, В.З. Власова, Х.С. Головина, Н.В. Корноухова, И.М. Рабиновича, П.Ф. Папковича, Л.Д. Проскуракова, разработавших методы расчета сооружений, нашедших широкое применение на практике.

Качественный скачок в развитии строительной механики связан с появлением ЭВМ и развитием метода конечных элементов (МКЭ), на базе которого были реализованы универсальные программно-вычислительные комплексы, позволившие автоматизировать весь процесс проектирования. На этом этапе большую роль сыграли работы А.Р. Ржаницына, Л.А. Розина, А.П. Филина, А.С. Городецкого, В.А. Постнова и др. Появление автоматизированных систем расчета и проектирования конструкций позволило решать задачи расчета сооружений в постановке, близкой к реальности, что соответственно дает возможность установить напряженно-деформированное состояние конструкции с высокой степенью точности.

На современном этапе развитие строительной механики идет по пути разработки все более совершенных методов, учитывающих реальные условия работы сооружений, а также уточнения исходных гипотез и расчетных схем, положенных в основу расчета.

1.3 Основные допущения строительной механики

При решении задач в строительной механике вводятся те же упрощающие положения и допущения, что и в сопротивлении материалов. Отличие состоит в том, что в сопротивлении материалов эти допущения относятся к отдельному элементу, а в строительной механике – ко всему сооружению.

1 Гипотеза о сплошности, однородности и изотропности материала.

Материал представляет собой сплошную однородную среду, которая непрерывно (без пустот) заполняет весь объем тела. Физико-механические свойства материала во всех точках и по всем направлениям одинаковы.

2 Гипотеза об идеальной упругости материала.

После прекращения действия нагрузки вызванные ею деформации полностью исчезают.

3 Гипотеза о наличии линейной зависимости между деформациями и напряжениями (закон Гука).

4 Допущение о малости деформаций.

Деформации и перемещения точек сооружения пренебрежимо малы по сравнению с его первоначальными размерами. Отсюда следует, что при составлении уравнений равновесия расчет можно вести по недеформированной схеме и не учитывать изменение взаимного расположения внешних сил.

5 Гипотеза плоских сечений Бернулли.

Поперечные сечения, плоские и нормальные к оси элемента до деформации, остаются таковыми и после нее (плоскими и нормальными к деформированной оси).

6 Гипотеза Сен-Венана.

В сечениях, удаленных от мест приложения нагрузки, деформация не зависит от конкретного способа нагружения и определяется только статическим эквивалентом нагрузки.

7 Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции).

Результат воздействия нескольких сил равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности и не зависит от последовательности приложения этих сил.

1.4 Сооружение и его расчетная схема. Классификация расчетных схем

Приступая к расчету реального сооружения, необходимо выявить все факторы, оказывающие существенное влияние на его работу, и выделить среди них главные и второстепенные. Это касается геометрических размеров, формы сооружения, условий эксплуатации, действующих нагрузок, свойств материалов. Учет всех без исключения особенностей сооружения является непосильной задачей, поэтому при расчете реальное сооружение заменяется его упрощенной моделью, называемой *расчетной схемой* сооружения.

Расчетная схема сооружения – это упрощенная идеализированная модель реального сооружения, учитывающая только его основные (существенные) свойства и пренебрегающая второстепенными.

Переход от реального сооружения к расчетной схеме является сложной и ответственной задачей, т.к. расчет по неправильно выбранной расчетной схеме даже самыми точными методами не может привести к достоверным результатам. С другой стороны, излишнее усложнение расчетной схемы, стремление учесть наряду с существенными свойствами и второстепенные, несущественные, приводит к неоправданному усложнению расчетов, а иногда и к неразрешимой задаче. Следует заметить, что для одного и того же сооружения, могут быть выбраны различные расчетные схемы, учитывающие те или иные особенности реального сооружения в зависимости от характера решаемых задач.

Можно сформулировать **основные требования, предъявляемые к расчетной схеме сооружения**:

- должна обеспечивать практически приемлемый по степени сложности расчет;
- должна обеспечивать достаточную достоверность и точность результатов расчета.

При выборе расчетной схемы крайне важно найти оптимальное соотношение между двумя этими требованиями, чтобы, с одной стороны, не получить в результате расчета не вызывающие доверия результаты, а с другой – избежать неоправданного усложнения расчета.

Классификация расчетных схем аналогична классификации заменяемых ими реальных сооружений и выполняется по ряду различных признаков.

1 По взаимному расположению осей элементов и нагрузок:

- *плоские*, у которых оси элементов и линии действия нагрузок располагаются в одной плоскости;
- *пространственные*, для которых названное выше условие не соблюдается и они способны воспринимать пространственные системы сил.

2 По виду составляющих элементов:

- *стержневые*, состоящие из прямолинейных и криволинейных элементов, один из размеров которых (длина) значительно превышает два других;
- *тонкостенные*, состоящие из элементов вида пластин и оболочек, у которых размеры в плане (длина, ширина) значительно превышают третий (толщину);
- *массивные*, состоящие из элементов, у которых все три размера сопоставимы между собой (плотины, каменные своды, подпорные стены, фундаменты и т.п.).

3 По особенностям работы:

- *безраспорные*, у которых при действии вертикальной нагрузки возникают только вертикальные реакции;
- *распорные*, у которых даже при действии вертикальной нагрузки опорные реакции имеют горизонтальную составляющую, называемую *распором*.

4 По методу расчета:

- *статически определимые*, для определения внутренних усилий и опорных реакций которых достаточно только уравнений равновесия;
- *статически неопределимые*, для определения внутренних усилий и опорных реакций которых требуется составлять дополнительные уравнения, учитывающие упругие деформации системы (уравнения неразрывности деформаций).

В дальнейшем будут рассматриваться только плоские стержневые системы, поэтому перечислим также ***основные типы стержневых систем***.

1 *Балки* (рисунок 1.2а) воспринимают поперечные нагрузки и работают на изгиб, являются безраспорной системой.

2 *Рамы* (рисунок 1.2б) – стержневые системы с жестким или шарнирным соединением элементов в узлах. Являются распорной системой. Работают на изгиб с растяжением-сжатием, причем изгибная деформация преобладает.

3 *Арки* (рисунок 1.2в) – распорные системы, имеющие вид криволинейного бруса, выпуклость которого направлена в сторону, противоположную направлению действующей нагрузки. Так же, как и рамы, работают в основном на внецентренный изгиб.

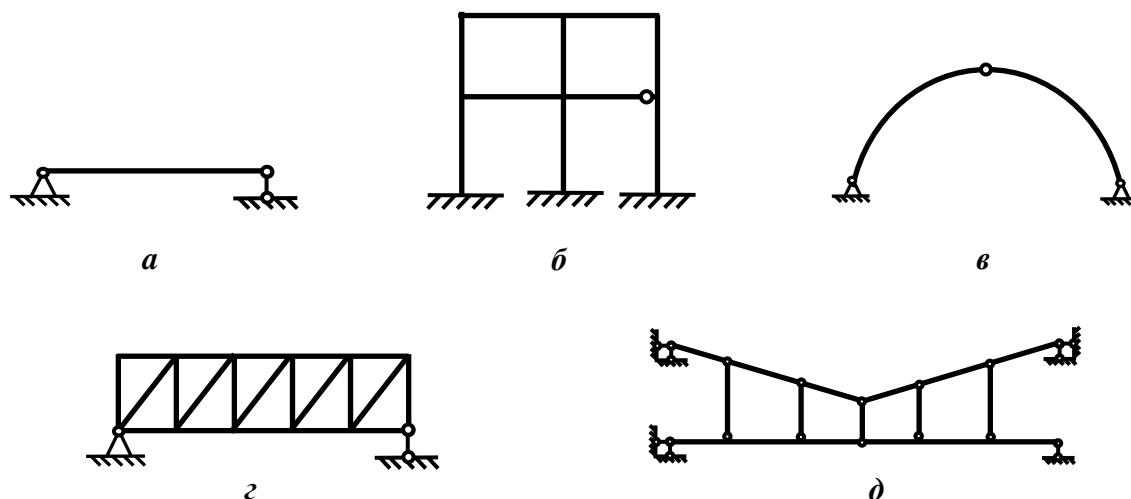


Рисунок 1.2

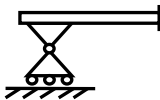
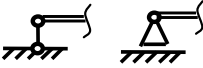
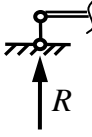
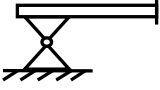

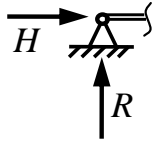
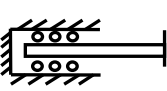
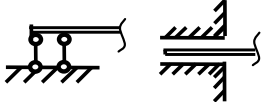
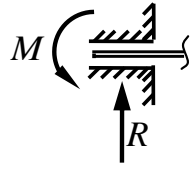
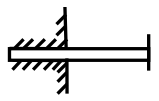
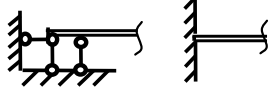
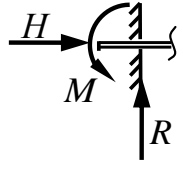
4 Фермы (рисунок 1.2г) – системы, состоящие из прямолинейных стержней, шарнирно соединенных в узлах. Фермы воспринимают только узловую нагрузку, а их стержни работают на растяжение-сжатие.

5 Комбинированные системы (рисунок 1.2д), представляющие собой совокупность перечисленных ранее типов.

К комбинированным системам относятся, например, висячие системы, в которых гибкие элементы (тросы, цепи), работающие на растяжение, соединяются с жесткими (балки, фермы), способными воспринимать изгибные и сжимающие деформации.

Связь между сооружением и его основанием осуществляется с помощью специальных опорных устройств (опор). Основные типы опорных устройств, применяемых для плоских систем, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные типы опорных устройств

Наименование	Конструктив- ная схема	Условное обозначение	Реакции	Количество реакций
1 Цилиндрическая подвижная опора (шарнирно-подвижная)				1
2 Цилиндрическая неподвижная опора (шарнирно- неподвижная)				2
3 Защемляющая подвижная опора				2
4 Защемляющая неподвижная опора (заделка)				3

1.5 Нагрузки и воздействия на сооружения

Расчет любого реального сооружения начинается с установления величины, направления и расположения действующих внешних сил, называемых *нагрузками*.

Определение действующих нагрузок является сложным вопросом анализа взаимодействия сооружения и внешней среды. Правильное решение этой задачи позволяет создавать надежные и экономичные сооружения.

Нагрузки, действующие на сооружение (и на его расчетную схему), можно классифицировать по нескольким признакам:

1 По способу приложения различают *объемные* (собственный вес) и *поверхностные* нагрузки (давление ветра, вес снежного покрова и т.д.). Последние, в свою очередь, подразделяются на *сосредоточенные* и *распределенные* нагрузки.

2 По сроку действия различают нагрузки *постоянные* и *временные*. Постоянные нагрузки действуют непрерывно в течение всего срока службы сооружения, не изменяя своей величины и направления. К постоянным нагрузкам относятся собственный вес элементов сооружения, давление грунта на фундаменты и т.д. Временные нагрузки действуют только в некоторый определенный период времени. В свою очередь, временные нагрузки подразделяются на *длительные*, *кратковременные* и *особые*. К длительным относят нагрузки, действующие на сооружение продолжительный период времени (собственный вес временных перегородок, стационарного оборудования, находящегося в здании, и т.п.). Кратковременные нагрузки действуют на сооружение сравнительно непродолжительное время, например, ветровая нагрузка на стены зданий, нагрузка от мостовых и подвесных кранов и т.п. К разряду особых нагрузок относятся сейсмические, взрывные нагрузки и т.п.

3 По способу действия различают *однократные*, *повторно-переменные*, *подвижные*, меняющие свое положение на сооружении, и *неподвижные* нагрузки, сохраняющие свое положение на сооружении в течение всего периода своего действия.

4 По характеру действия различают *статические* и *динамические* нагрузки. Приложение статических нагрузок на сооружение происходит во времени так медленно и плавно, что возникающими при этом ускорениями точек сооружения можно пренебречь. Динамические нагрузки вызывают при приложении колебания, в результате которых точки сооружения приобретают значительные ускорения. Источниками динамических нагрузок являются порывы ветра, работающее оборудование, землетрясения и т.п.

Кроме внешних сил на работу и поведение сооружения существенное влияние могут оказывать различные *воздействия*, например, осадка фундаментов, неравномерный нагрев, коррозия и т.п. В строительной механике при расчете сооружений

принято различать воздействия *статические* (нагрузки), *кинематические* (осадка опор) и *температурные* (неравномерный нагрев).

Нагрузки и воздействия вызывают появление в элементах сооружения внутренних усилий, значение которых определяется расчетом.

В курсе строительной механики расчетные схемы, нагрузки и воздействия, как правило, являются заданными.

2 Кинематический анализ плоских стержневых систем

2.1 Основные понятия и определения

Любое инженерное сооружение под действием приложенных к нему внешних сил деформируется: изменяет свою форму или размеры. Если получаемые при этом перемещения точек элементов сооружения достигают значительных величин, то сооружение может перестать отвечать предъявляемым к нему условиям жесткости, прочности или устойчивости. Поэтому одно из основных требований к сооружению – требование малости перемещений: сооружение должно сохранять приданную ему первоначальную геометрическую форму в течение всего срока службы.

Для того чтобы своевременно обнаружить системы, не удовлетворяющие этому требованию, проводится кинематический анализ расчетной схемы сооружения.

Кинематический анализ – это исследование геометрической структуры расчетной схемы сооружения с целью выявления возможности больших перемещений и, как следствие, изменения формы сооружения.

Основная цель кинематического анализа – установить является ли система неподвижной и неизменяемой. Проведение кинематического анализа расчетной схемы сооружения позволяет обнаружить системы, расчет которых методами строительной механики недопустим и должен выполняться с привлечением особых методов, например, методов теории механизмов и машин. Кроме того, кинематический анализ дает ответ и на вопрос: достаточно ли для определения усилий в системе только уравнений статики (статически определимые системы) или необходимо составлять дополнительные уравнения совместности деформаций в случае статически неопределимых систем.

В строительной механике различают три основных типа расчетных схем с точки зрения их неизменяемости:

- 1) геометрически неизменяемые системы;
- 2) геометрически изменяемые системы;
- 3) мгновенно изменяемые системы.

В строительной практике применяют только геометрически неизменяемые системы.

Геометрически неизменяемой называется система, изменение формы которой возможно только вследствие деформации составляющих ее элементов.

Шарнирно-стержневой треугольник ABC (рисунок 2.1) является геометрически неизменяемой системой, т.к. изменение его формы возможно только в результате изменения длин составляющих стержней или их искривления.

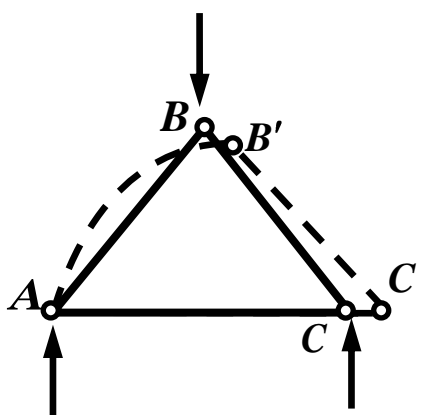


Рисунок 2.1

Геометрически изменяемой называется система, изменение формы которой возможно без деформации ее элементов.

Шарнирно-стержневой четырехугольник $ABCD$ (рисунок 2.2) геометрически изменяем, т.к. взаимные перемещения его точек возможны и без деформации стержней.

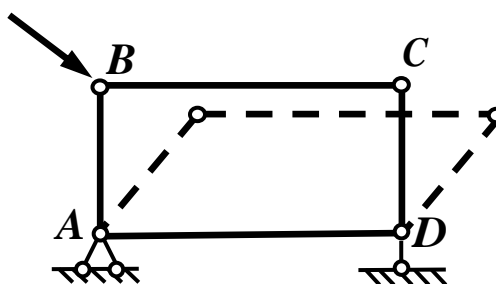


Рисунок 2.2

Промежуточное положение между геометрически неизменяемыми и геометрически изменяемыми системами занимают **мгновенно изменяемые системы**, которые являются изменяемыми только в первый момент приложения нагрузки, а затем становятся неизменяемыми. Более подробно такие системы будут рассмотрены в п. 2.4.

Отдельные геометрически неизменяемые элементы, составляющие систему, в строительной механике принято называть **дисками**.

Диском называется система или ее часть, неизменяемость которой очевидна или доказана.

Для плоских стержневых систем дисками являются отдельные стержни, шарнирные треугольники (рисунок 2.1), Г-, Т-, П-образные элементы рам и т.д. Основание («земля») также может рассматриваться как неподвижный диск.

Для обеспечения неизменяемости структуры и неподвижности сооружения относительно основания отдельные плоские диски соединяются между собой различными связями, в качестве которых могут выступать стержни и шарниры.

Цилиндрический шарнир – связь, дающая возможность взаимного поворота двух соседних дисков (рисунок 2.3).

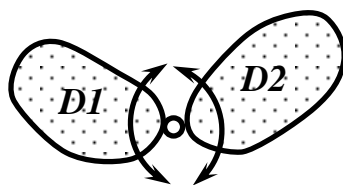


Рисунок 2.3

Различают **простые** и **сложные (кратные)** шарниры.

Шарнир, соединяющий два диска, называется **простым** (рисунок 2.3). Если же шарнир соединяет несколько дисков, то он называется **сложным (кратным)** (рисунок 2.4). Один сложный шарнир эквивалентен количеству простых шарниров $Ш_n$, определяемому соотношением

$$Ш_n = D - 1,$$

где D – число соединяемых в сложном шарнире дисков.

$$Ш_n = D - 1 = 4 - 1 = 3.$$

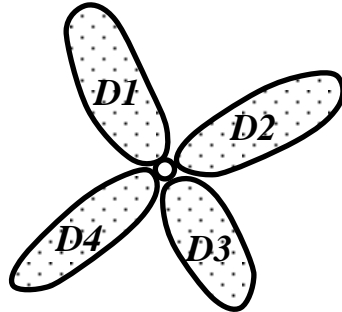


Рисунок 2.4

На рисунке 2.5 показаны некоторые частные случаи соединения отдельных стержней шарнирами в плоских системах и приведено соответствующее число эквивалентных простых шарниров $Ш_n$.

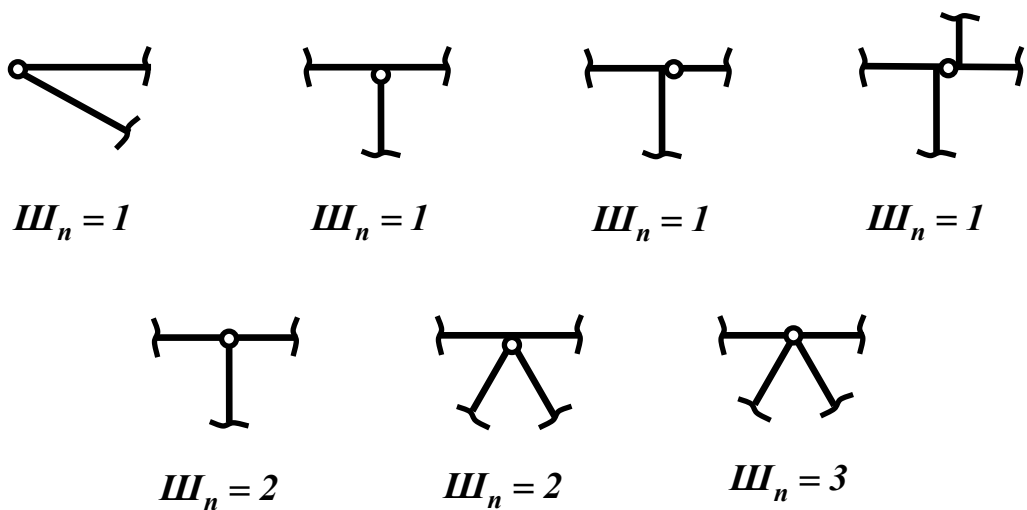


Рисунок 2.5

2.2 Число степеней свободы. Формула Чебышёва

Как известно из курса теоретической механики, *числом степеней свободы W* называется число независимых возможных перемещений системы, допускаемых наложенными на систему связями.

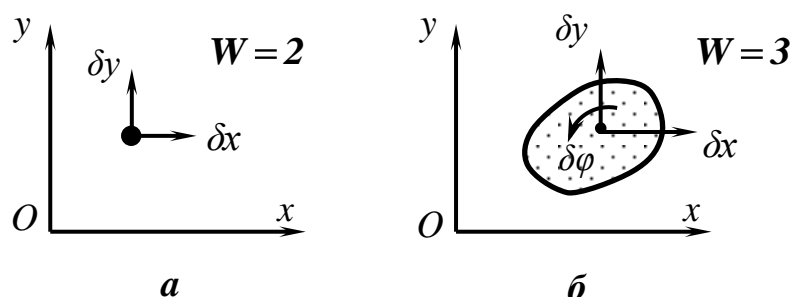


Рисунок 2.6

Для точки на плоскости (рисунок 2.6а) возможны два независимых перемещения вдоль осей x и y , следовательно, точка на плоскости имеет две степени свободы.

Для диска на плоскости (рисунок 2.6б) кроме двух поступательных перемещений вдоль осей x и y , возможен еще и поворот в плоскости xOy , следовательно, диск на плоскости имеет три степени свободы.

Можно сказать, что число степеней свободы системы равно числу независимых геометрических параметров (линейных координат и углов), однозначно определяющих положение системы относительно выбранной системы координат.

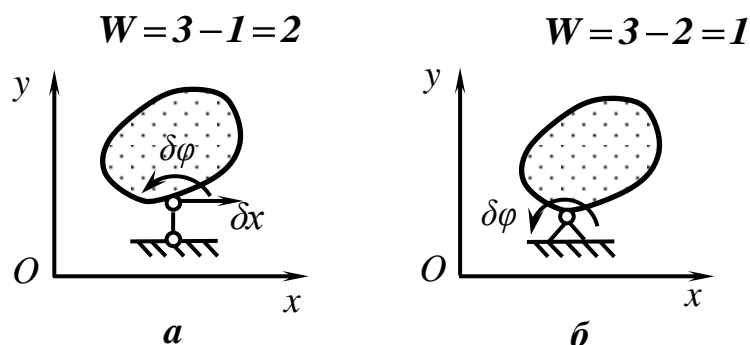


Рисунок 2.7

Наложение на систему связей уменьшает число ее степеней свободы. Стержень отнимает у диска одну степень свободы, т.к. лишает диск возможности перемещения в направлении своей оси, оставляя возможным перемещение в перпендикулярном направлении и поворот вокруг шарнира на конце стержня (рисунок 2.7а).

Неподвижный цилиндрический шарнир отнимает у диска на плоскости две степени свободы, т.к. лишает диск возможности поступательных перемещений в направлении координатных осей, оставляя возможным лишь поворот вокруг оси шарнира (рисунок 2.7б).

В общем случае для плоской системы дисков число степеней свободы может быть определено по формуле П.Л. Чебышёва:

$$W = 3D - 2Ш_n - C_{on}, \quad (2.1)$$

где D – число дисков;

$Ш_n$ – число простых шарниров между дисками (с учетом кратности сложных шарниров);

C_{on} – число опорных стержней, соединяющих систему дисков с основанием («землей»).

Формула (2.1) была предложена выдающимся русским ученым П.Л. Чебышёвым (1821-1894) для плоских механизмов и пригодна для определения числа степеней свободы любой плоской системы. Следует иметь в виду, что число W по формуле (2.1) характеризует степень подвижности системы относительно основания, поэтому при использовании формулы для кинематического анализа плоских систем необходимо учитывать следующее:

- 1) основание («земля») в число D не включается;
- 2) опорные устройства системы в виде заделок и шарниров учитываются через эквивалентное число опорных стержней, равное числу реакций соответствующей связи (таблица 1).

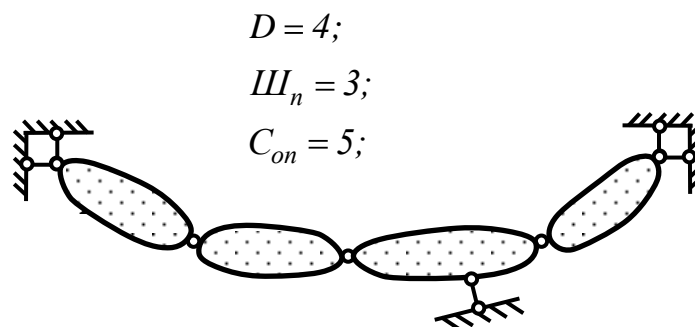
Если система не имеет связей с основанием, то число степеней свободы будет равно сумме числа параметров, определяющих степень взаимной подвижности дис-

ков относительно друг друга, и трех степеней свободы всей фигуры в плоскости как единого целого. Тогда для системы, не имеющей связей с основанием, число степеней свободы будет равно:

$$W = 3D - 2Ш_n - 3. \quad (2.2)$$

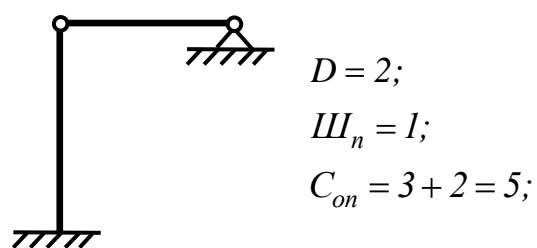
Заметим, что в этом случае число W характеризует степень изменяемости самой плоской системы дисков.

Пример 2.1



$$W = 3D - 2Ш_n - C_{on} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 5 = 1.$$

Пример 2.2



$$W = 3D - 2Ш_n - C_{on} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 5 = -1.$$

Использование формул (2.1) и (2.2) для плоских ферм, из-за наличия большого количества сложных (кратных) шарниров, вызывает определенные затруднения. Получим более удобную для практического применения формулу.

Если считать каждый узел фермы отдельной точкой, имеющей две степени свободы (рисунок 2.6а), а каждый стержень фермы связью, отнимающей одну степень свободы (рисунок 2.7а), то число степеней свободы плоской фермы можно определить по формуле:

$$W = 2Y - C - C_{on}, \quad (2.3)$$

где Y – число узлов фермы;

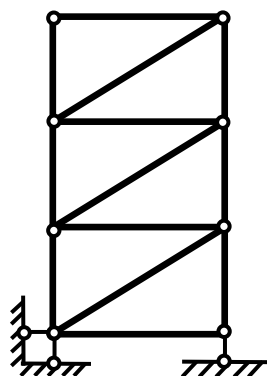
C – число стержней фермы;

C_{on} – число опорных стержней фермы.

В случае фермы, не имеющей связей с основанием («землей»), число степеней свободы следует вычислять по формуле:

$$W = 2Y - C - 3. \quad (2.4)$$

Пример 2.3



$$Y = 8;$$

$$C = 13;$$

$$C_{on} = 3;$$

$$W = 2Y - C - C_{on} = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0.$$

Как следует из приведенных примеров, число степеней свободы W может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Анализ формул (2.1) – (2.4) показывает, что возможны три варианта:

1 Если $W > 0$, то система имеет недостаточное количество связей для обеспечения неподвижности, геометрически изменяема и не может служить расчетной схем сооружения.

2 Если $W = 0$, то система имеет достаточное количество связей для обеспечения неподвижности и при правильной расстановке связей *может быть* геометрически неизменяемой и статически определимой.

3 Если $W < 0$, то система имеет избыточное количество связей, при правильной расстановке которых *может быть* геометрически неизменяемой и статически неопределимой.

Таким образом, **необходимое условие геометрической неизменяемости** системы имеет вид:

$$W \leq 0. \quad (2.5)$$

Соблюдение условия (2.5) *необходимо, но не достаточно* для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Для окончательного ответа на вопрос о том, является ли система геометрически неизменяемой, необходимо дополнительно провести анализ геометрической структуры системы (структурный анализ).

2.3 Анализ геометрической структуры. Способы образования геометрически неизменяемых систем

Для анализа геометрической структуры расчетной схемы сооружения используют два способа:

1 Аналитический (способ нулевых нагрузок).

2. Геометрический (способ разбиения на простейшие геометрически неизменяемые элементы).

Аналитический способ проведения структурного анализа (*способ нулевых нагрузок*) заключается в следующем. Определяют внутренние усилия во всех элементах системы при отсутствии внешней нагрузки (внешняя нагрузка считается равной нулю). Если все усилия, включая опорные реакции, оказываются равными нулю, то система геометрически неизменяема. Если же усилия равны бесконечности или неопределенности вида $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то система геометрически изменяема.

Второй способ (геометрический) является наиболее общим и рациональным. В структуре системы выделяют отдельные геометрически неизменяемые элементы (диски), а затем анализируют связи между ними.

Перечислим основные ***способы образования геометрически неизменяемых систем***:

1 Способ шарнирного треугольника: три диска соединяются тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рисунок 2.8а).

2 Способ диады: узел присоединяется к диску двумя стержнями, оси которых не лежат на одной прямой (рисунок 2.8б).

3 Способ триады: два диска соединяются тремя непараллельными стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке (рисунок 2.8в).

4 Два диска соединяются шарниром и стержнем, ось которого не проходит через центр шарнира (рисунок 2.8г). Если рассматривать стержень как третий диск, то этот способ вытекает из способа шарнирного треугольника.

Проиллюстрируем геометрический способ проведения структурного анализа на примере системы, изображенной на рисунке 2.8д. Три диска соединены тремя парами непараллельных стержней. Каждая пара стержней может быть условно заменена *фиктивным шарниром*, расположенным в точке пересечения стержней (или их осей). Таким образом, исходная система приводится к трем дискам, соединенным тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, т.е. к шарнирному треугольнику (рисунок 2.8а). Следовательно, исходная система геометрически неизменяема.

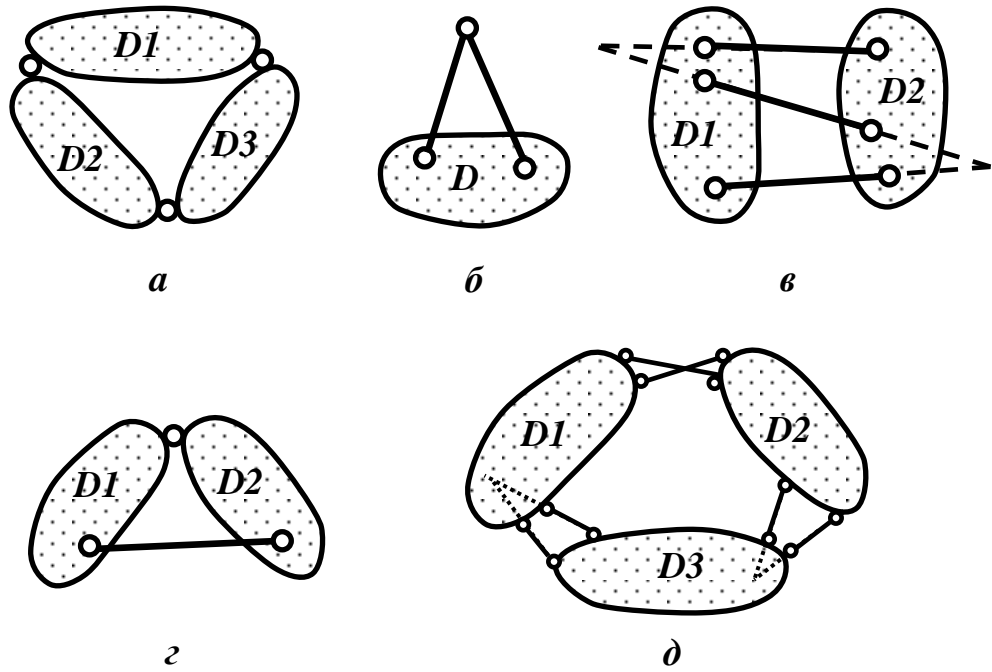


Рисунок 2.8

Рассмотрим систему, изображенную на рисунке 2.9. Опорный диск, стержни AB и BC представляют собой шарнирный треугольник (рисунок 2.8а), т.е. являются геометрически неизменяемой системой, к которой способом диады (рисунок 2.8б) последовательно присоединяются узлы 1, 2, 3, 4 и 5, образуя каждый раз геометрически неизменяемую систему. Следовательно, вся исходная система также геометрически неизменяема.

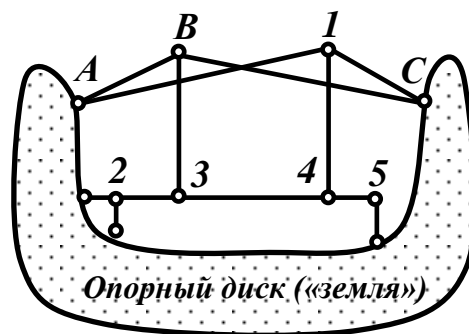


Рисунок 2.9

Заметим, что геометрически неизменяемые системы, образованные путем последовательного прикрепления узлов диадами, называются *простейшими*.

2.4 Понятие о мгновенно изменяемых системах. Признаки образования мгновенно изменяемых систем

Мгновенно изменяемыми называют системы, допускающие бесконечно малые перемещения без деформации составляющих их элементов только в первый момент нагружения, после чего становятся неизменяемыми.

Следует отметить, что если геометрическая изменяемость системы обусловлена обычно недостаточным количеством связей, то мгновенная изменяемость возникает, как правило, при неправильной установке связей.

В качестве примера рассмотрим систему, изображенную на рисунке 2.10а. Если ось опорного стержня BC не проходит через центр шарнира A , то система будет геометрически неизменяема, т.к. балка AB соединена с основанием способом триады (рисунок 2.8в).

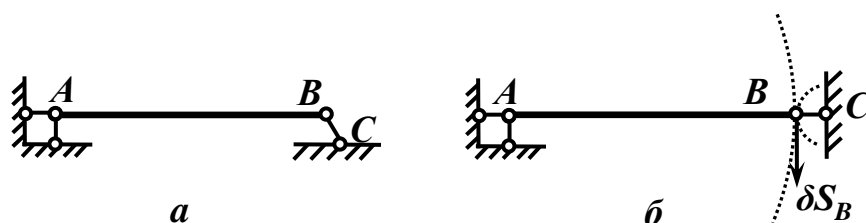


Рисунок 2.10

Если же расположить опорный стержень BC так, чтобы его ось проходила через центр шарнира A (рисунок 2.10б), то для точки B возможно бесконечно малое перемещение, направленное вдоль общей касательной к окружностям с радиусами AB и CB . Но как только точка B совершит это малое перемещение, ось опорного стержня уже не будет проходить через центр шарнира A , и система станет неизменя-

емой. Следовательно, мы имеем дело с *мгновенно изменяемой системой*. Таким образом, если линии действия всех опорных связей пересекаются в одной точке, то она является мгновенным центром вращения, вокруг которого возможен бесконечно малый поворот системы относительно основания.

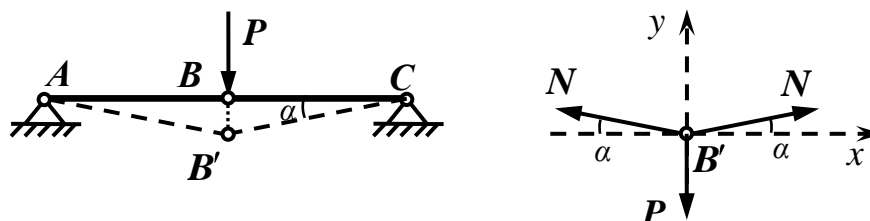


Рисунок 2.11

Рассмотрим теперь случай прикрепления узла к диску двумя стержнями AB и BC , оси которых лежат на одной прямой (рисунок 2.11). Как и в случае системы на рисунке 2.10б, для узла B возможно бесконечно малое перемещение в направлении общей касательной к окружностям с радиусами AB и CB . Воспользуемся *способом нулевых нагрузок*, изложенным в п.2.3. Рассмотрим равновесие узла B после бесконечно малого поворота стержней относительно шарниров A и C . Для простоты рассуждений будем считать, что стержни имеют равную длину и вследствие симметрии системы в них возникают равные усилия.

$$\sum Y = 0; \quad 2N \sin \alpha - P = 0;$$

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha}. \quad (2.6)$$

Анализируя полученный результат, приходим к выводу, что при внешней нагрузке $P = 0$ для исследуемой системы возможны два варианта:

1) если $\alpha = 0$, то выражение (2.6) для определения усилий в стержнях дает неопределенность вида $N = \frac{0}{0}$, т.е. система геометрически изменяема;

2) если $\alpha \neq 0$, то усилия в стержнях $N = 0$, т.е. система становится геометрически неизменяемой.

Следовательно, исследуемая система мгновенно изменяема.

Из полученного выражения (2.6) также следует, что при $\alpha \approx 0$ и $P \neq 0$ усилия в стержнях становятся бесконечно большими. Поэтому применение не только мгновенно изменяемых систем, но и близких к ним, в строительстве недопустимо.

Перечислим внешние **признаки образования мгновенно изменяемых систем**:

1 Два диска соединяются тремя и более стержнями, пересекающимися в одной точке (рисунок 2.12а). Точка пересечения осей стержней является мгновенным центром вращения (фиктивным шарниром).

2 Два диска соединяются тремя параллельными стержнями разной длины (рисунок 2.12б). В этом случае возможно бесконечно малое поступательное перемещение одного диска относительно другого.

3 Три диска соединяются тремя шарнирами, лежащими на одной прямой (рисунок 2.12в).

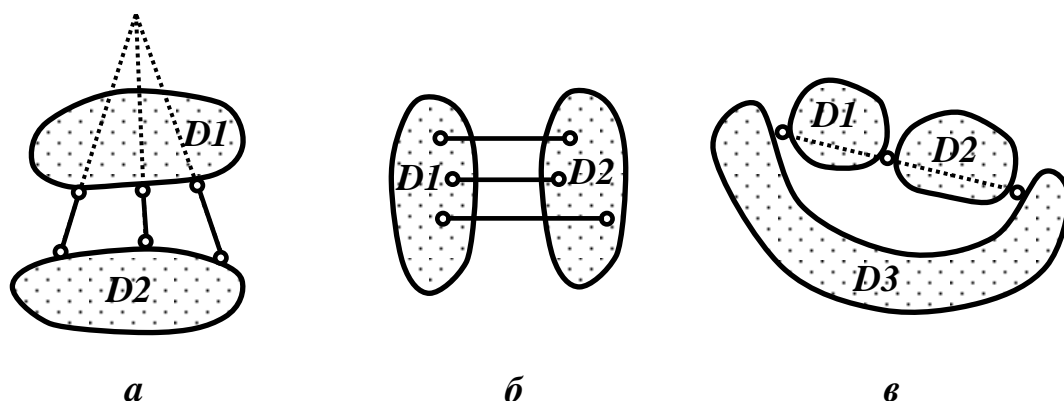


Рисунок 2.12

2.5 Порядок проведения кинематического анализа

Различают два способа проведения кинематического анализа расчетной схемы сооружения:

1 *Аналитический способ* – проверка необходимого и достаточного условия геометрической неизменяемости системы.

2 *Геометрический способ* – способ разрушения на простейшие геометрически неизменяемые элементы (п.2.3).

Аналитический способ является наиболее универсальным, но и более трудоемким с вычислительной точки зрения.

Необходимое условие геометрической неизменяемости (2.5) было сформулировано в п. 2.2. Достаточное условие геометрической неизменяемости вытекает из способа нулевых нагрузок, рассмотренного в п. 2.3 и 2.4. Так как при нулевой внешней нагрузке все внутренние усилия и опорные реакции в геометрически неизменяемых системах должны равняться нулю, то это возможно только при выполнении следующего условия:

Определитель системы уравнений для определения всех усилий в элементах расчетной схемы конструкции, составленный из коэффициентов при неизвестных усилиях, должен быть отличен от нуля.

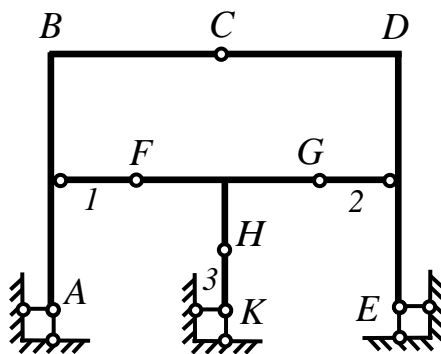
На практике кинематический анализ, как правило, проводят в два этапа, сочетая аналитический и геометрический способы:

1 Проверяют выполнение необходимого условия $W \leq 0$ (количественный анализ).

2 Если необходимое условие (2.5) выполняется, анализируют геометрическую структуру системы способом разрушения на простейшие геометрически неизменяемые элементы (качественный анализ).

Проиллюстрируем данный подход на конкретных примерах.

Пример 2.4



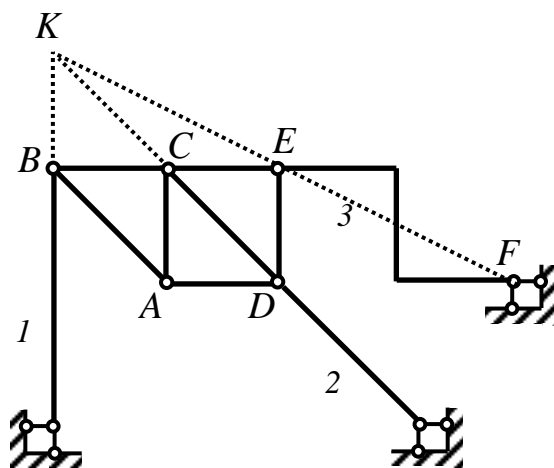
$$D = 6; \text{Ш}_n = 6; C_{on} = 6.$$

1) Число степеней свободы $W = 3D - 2\text{Ш}_n - C_{on} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 6 = 0$. Необходимое условие (2.5) выполняется.

2) Три диска ($ABC - CDE$ – диск «земля») связаны между собой тремя шарнирами A, C, E , не лежащими на одной прямой, т.е. образуют шарнирный треугольник (рисунок 2.8a). Диск FGH присоединен к этой геометрически неизменяемой системе тремя стержнями $1, 2, 3$, оси которых пересекаются в одной точке, являющейся мгновенным центром вращения (рисунок 2.12a).

Следовательно, исходная система мгновенно изменяема.

Пример 2.5



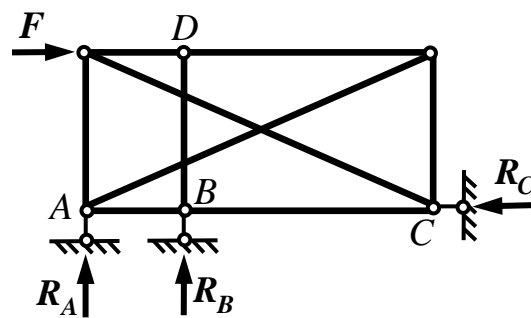
$$D = 10; \text{Ш}_n = 12; C_{on} = 6.$$

1) Число степеней свободы $W = 3D - 2Ш_n - C_{on} = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 12 - 6 = 0$. Необходимое условие (2.5) выполняется.

2) К шарнирному треугольнику ABC способом диады (рисунок 2.8б) последовательно присоединяются узлы D и E , образуя геометрически неизменяемую систему $ABCED$, которая также может считать диском. Заменяя диск EF фиктивным стержнем, проходящим через центры шарниров E и F , получим, что диск $ABCED$ присоединен к основанию тремя стержнями 1, 2, 3, оси которых пересекаются в одной точке, являющейся мгновенным центром вращения (рисунок 2.12а).

Следовательно, исходная система мгновенно изменяема.

Пример 2.6



$$Y = 6; C = 9; C_{on} = 3.$$

1) Число степеней свободы $W = 2Y - C - C_{on} = 2 \cdot 6 - 9 - 3 = 0$. Необходимое условие (2.5) выполняется.

2) Определим усилие в стержне DB . С одной стороны, из равновесия узла D усилие в стержне равно нулю. С другой стороны, из равновесия узла B усилие в стержне равно по величине и противоположно по направлению реакции R_B . Неопределенность значения усилия в стержне DB указывает на мгновенную изменяемость системы.

3 Расчет многопролетных статически определимых балок

3.1 Общие сведения

Многопролетной статически определимой балкой называется статически определимая геометрически неизменяемая система, состоящая из ряда однопролетных балок (с консолями и без консолей), соединенных между собой шарнирами (рисунок 3.1).

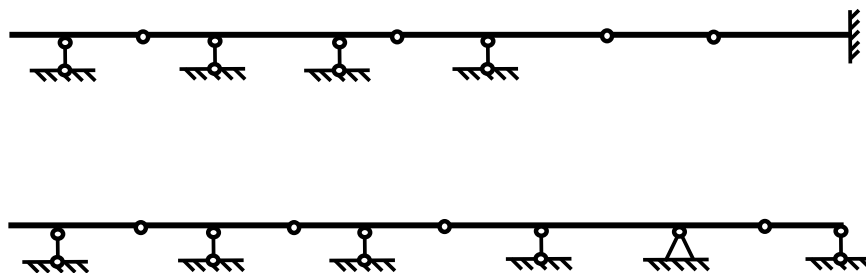


Рисунок 3.1

В литературе также используются названия многопролетные шарнирные балки, шарнирно-консольные балки и балки Г. Семиколенова, впервые предложившего методику расчета таких балок в 1871 г.

Применение многопролетных шарнирно-консольных балок наиболее целесообразно в конструкциях, работающих на равномерно распределенную нагрузку.

Сравним три варианта перекрытия двух пролетов различными типами балок.

1 вариант – пролеты перекрываются двумя разрезными балками со свободным опиранием концов (рисунок 3.2а).

2 вариант – пролеты перекрываются неразрезной балкой (рисунок 3.2б).

3 вариант – пролеты перекрываются шарнирно-консольной балкой (рисунок 3.2в).

Как видно из представленных эпюр изгибающих моментов, наиболее экономичным с точки зрения расхода материала является третий вариант – шарнирно-консольная балка.

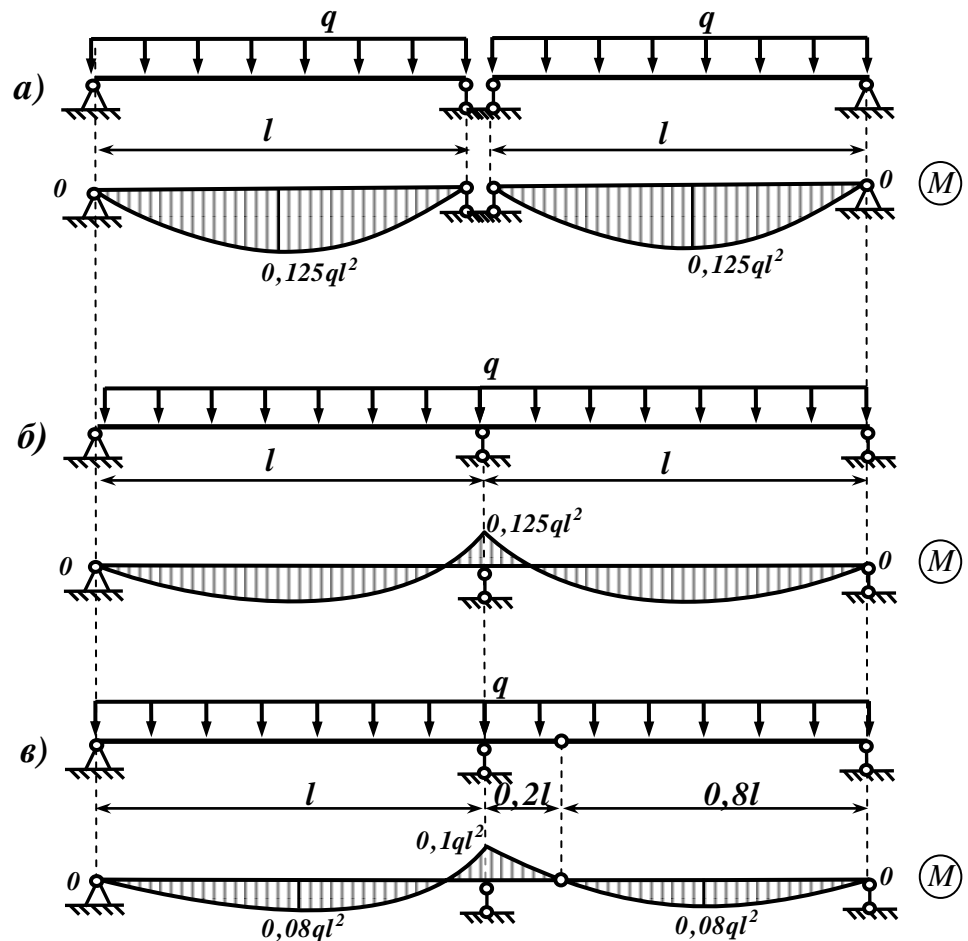


Рисунок 3.2

Наличие промежуточных шарниров оказывает разгружающее действие: максимальные расчетные моменты становятся примерно на 20 % ниже, что приводит к уменьшению размеров поперечного сечения.

С точки зрения экономии материала целесообразно располагать шарниры в пролетах так, чтобы наибольшие изгибающие моменты в пролетах и на опорах балки были равны по абсолютной величине. Такие балки называют *равномоментными*. На рисунке 3.3 показан пример равномоментного состояния шарнирно-консольной балки при действии равномерно распределенной нагрузки.

Многопролетные шарнирно-консольные балки по сравнению с простыми и неразрезными, перекрывающими те же пролеты, имеют ряд преимуществ:

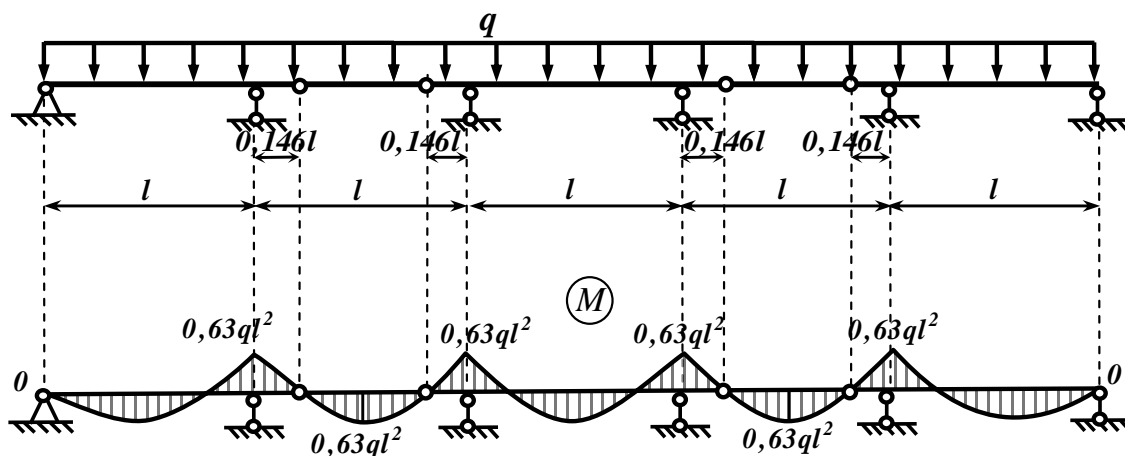


Рисунок 3.3

1 Отдельные сравнительно короткие элементы, составляющие шарнирно-консольную балку, более удобны для транспортировки, монтажа и массового заводского изготовления.

2 Шарнирно-консольные балки более экономичны и более жестки, чем простые, вследствие того что максимальные изгибающие моменты в пролетах таких балок, как правило, имеют меньшее значение.

3 Неравномерный нагрев и осадки опор не вызывают появления в шарнирных балках дополнительных напряжений по сравнению с неразрезными, в которых такие напряжения могут достигать значительной величины.

Вместе с тем, многопролетные шарнирно-консольные балки имеют и ряд недостатков, ограничивающих их применение:

1 Низкая «жизнеспособность» многопролетных шарнирных балок, присущая всем статически определимым системам (выход из строя одного из пролетов шарнирно-консольной балки приводит, как правило, к обрушению всей конструкции).

2 Большое количество промежуточных шарниров усложняет изготовление, монтаж и увеличивает стоимость таких балок по сравнению с неразрезными.

3 По сравнению с неразрезными шарнирные балки менее жестки и менее экономичны.

3.2 Правила установки промежуточных шарниров в многопролетной статически определимой балке

Многопролетная статически определимая балка может быть получена из многопролетной неразрезной путем установки в пролетах шарниров по количеству «лишних» опорных реакций, для определения которых уравнений равновесия недостаточно.

Для определения пяти опорных реакций неразрезной балки на рисунке 3.4 можно составить всего три независимых уравнения равновесия. Так как все усилия в такой балке не могут быть определены только из уравнений статики, то она статически неопределима.

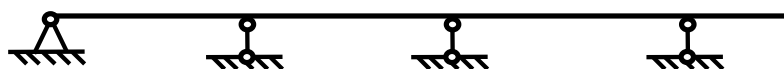


Рисунок 3.4

Степень статической неопределимости балки равна количеству «лишних» неизвестных

$$n = 5 - 3 = 2.$$

Иначе говоря, балка имеет две избыточные опорных связи, «лишних» с точки зрения обеспечения ее геометрической неизменяемости.

Установка в пролете или на опоре неразрезной балки шарнира позволяет дополнительно составить уравнение равенства нулю суммы моментов относительно этого шарнира всех сил, приложенных слева или справа от него. Размещение в пролетах неразрезной балки дополнительных шарниров по числу «лишних» связей (неизвестных) превращает исходную многопролетную статически неопределимую балку в многопролетную статически определимую.

Дополнительные шарниры должны быть расположены таким образом, чтобы полученная многопролетная шарнирная балка во всех ее частях была геометрически неизменяема и статически определима.

Можно сформулировать некоторые общие *правила установки шарниров* в многопролетной шарнирно-консольной балке:

1 Число шарниров, установленных в каждом пролете балки, должно быть не более двух.

2 Пролеты с двумя установленными шарнирами должны чередоваться с пролетами без шарниров.

3 Если многопролетная шарнирно-консольная балка не имеет жесткой заделки, то пролеты с одним шарниром могут следовать друг за другом, начиная со второго.

4 Для многопролетной статически определимой балки с жесткой заделкой пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим.

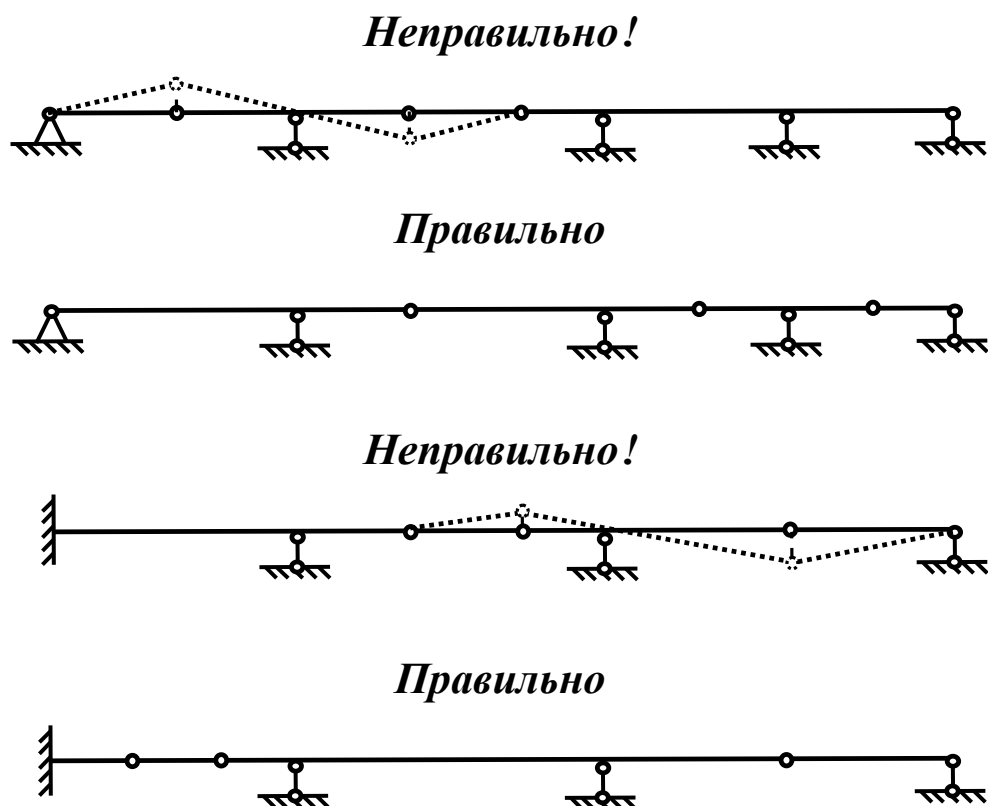


Рисунок 3.5

На рисунке 3.5 приведены примеры *неправильной* расстановки шарниров в пролетах и варианты их исправления.

В зависимости от расстановки шарниров в пролетах различают три типа многопролетных шарнирно-консольных балок.

К первому типу относятся многопролетные шарнирные балки, в каждом пролете которых установлено не более одного шарнира (одноконсольные балки). Ко второму типу относятся многопролетные балки, в которых пролеты с двумя шарнирами чередуются с пролетами без шарниров (двухконсольные балки). Третий тип составляют балки, являющиеся комбинацией первых двух типов.

3.3 Кинематический анализ многопролетной статически определимой балки

Кинематический анализ многопролетной статически определимой балки начинают с проверки выполнения необходимого условия геометрической неизменяемости (2.5).

Если необходимое условие $W \leq 0$ выполняется, то для окончательного решения вопроса о геометрической неизменяемости необходимо выполнить анализ геометрической структуры балки (структурный или качественный анализ).

Структурный анализ шарнирно-консольной балки наиболее удобно проводить с помощью построения так называемой *«поэтажной»* схемы, дающей наглядное представление о характере взаимодействия между собой отдельных элементов (однопролетных балок), составляющих многопролетную статически определимую балку.

«Поэтажной» схемой называется условное графическое изображение исходной многопролетной шарнирно-консольной балки в виде отдельных пролетов, расположенных один за другим на разных уровнях («этажах»).

При составлении «поэтажных схем» следует различать *главные* и *вспомогательные* балки.

Главной (основной) балкой называется простая однопролетная балка, способная самостоятельно нести внешнюю нагрузку после разрушения исходной многопролетной балки по промежуточным шарнирам.

Вспомогательной (второстепенной) называется простая однопролетная балка, не способная самостоятельно нести внешнюю нагрузку после разрушения исходной по промежуточным шарнирам.

Для построения «поэтажной» схемы следует мысленно удалить все промежуточные шарниры исходной многопролетной балки. При этом исходная балка распадается на отдельные диски-пролеты, среди которых нужно выделить главные и вспомогательные балки.

Построение «поэтажной» схемы начинают с нижних «этажей», т.е. «поэтажная» схема строится *снизу вверх*:

- на первом (нижнем) «этаже» располагают главные балки;
- затем на главные балки последовательно пролет за пролетом опирают вспомогательные балки, каждый раз поднимаясь на «этаж» выше.

Для обеспечения геометрической неизменяемости одна из опор полученных простых балок делается шарнирно-неподвижной (за исключением главных балок, имеющих жесткую заделку).

Если построенная «поэтажная» схема представляет собой неизменяемую систему, то и исходная многопролетная балка является геометрически неизменяемой.

Рассмотрим построение «поэтажной» схемы на примере балки первого типа (рисунок 3.6а). Удалим из исходной балки промежуточные шарниры, после чего она распадается на отдельные пролеты-диски, и выделим среди них главные и вспомогательные балки (рисунок 3.6б).

Балка ABC является главной балкой (ГБ), т.к. очевидно, что из всех трех получившихся простых балок только она одна способна самостоятельно воспринимать внешнюю нагрузку. Балки CDE и EF – вспомогательные балки (ВБ).

Построение «поэтажной» схемы (рисунок 3.6в) начинаем с первого (нижнего) «этажа», на котором размещаем главную балку ABC , имеющую две опоры, связанные с основанием («землей»). Балка ABC является геометрически неизменяемой и неподвижной, т.к. связана с опорным диском шарниром и стержнем, не проходящим через центр шарнира.

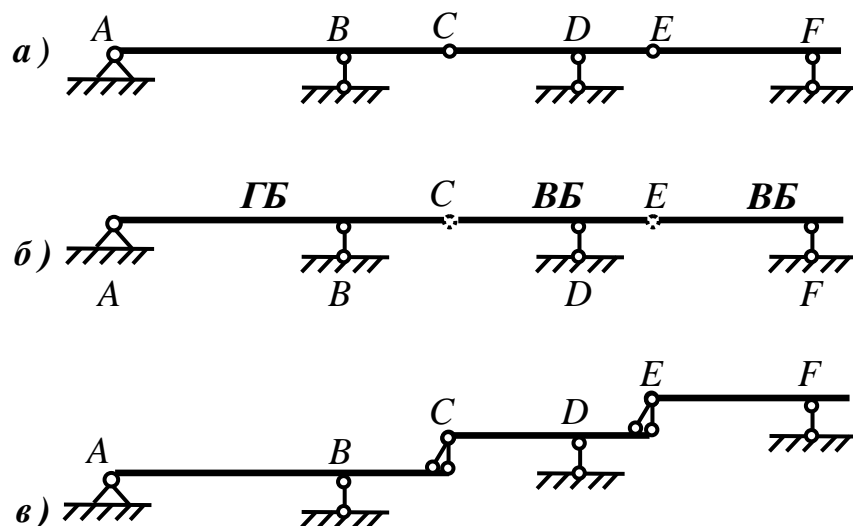


Рисунок 3.6

Следующий пролет (вспомогательную балку CDE) размещаем на один «этаж» выше. Балка CDE имеет в точке D опорный стержень, связанный с основанием. В точке C вспомогательная балка CDE была шарнирно связана с предыдущим пролетом ABC , поэтому заменяя шарнир C двумя стержнями, опираем их на нижележащий «этаж». В результате балка CDE оказывается связанной тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке стержнями с неподвижной главной балкой ABC . Следовательно, второй «этаж» также геометрически неизменяем и неподвижен.

Следующую вспомогательную балку EF размещаем, поднимаясь еще на один «этаж» выше, опирая ее в точке F на основание, а в точке E на вспомогательную балку нижележащего второго «этажа». Повторяя приведенные выше рассуждения, приходим к выводу, что третий «этаж» также геометрически неизменяем и неподвижен.

Еще один вариант построения «поэтажной» схемы для балки первого типа приведен на рисунке 3.7.

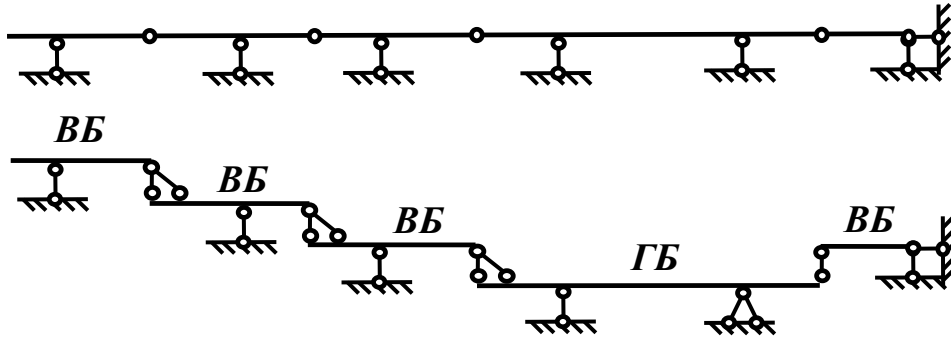


Рисунок 3.7

Рассмотрим пример построения «поэтажной» схемы для балки второго типа (рисунок 3.8а).

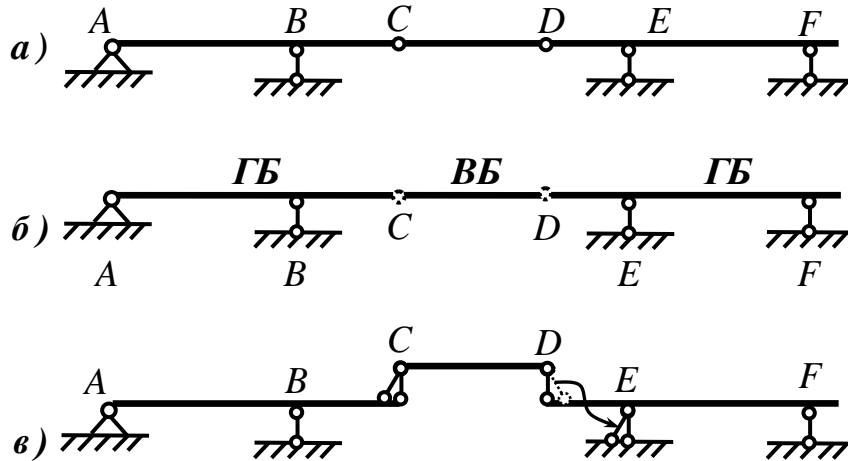


Рисунок 3.8

Удалим из исходной балки промежуточные шарниры, после чего она распадется на отдельные пролеты-диски, и выделим среди них главные и вспомогательные балки (рисунок 3.8б).

Балки ABC и DEF являются главными балками (ГБ), балка CD – вспомогательной (ВБ).

Построение «поэтажной» схемы (рисунок 3.8в) начинаем с первого (нижнего) «этажа», на котором размещаем главные балки ABC и DEF , имеющие две опоры, связанные с основанием («землей»).

Вспомогательную балку CD размещаем на один «этаж» выше, заменяя шарниры C и D двумя стержнями, которые опираем на нижележащие этажи. Один опорный стержень оказывается для балки CD избыточным, поэтому переносим его ниже лежащий «этаж» DEF , обеспечивая ему неподвижность в горизонтальном направлении, т.к. и в исходной многопролетной статически определимой балке пролет DEF был лишен возможности горизонтального перемещения.

Проанализируем структуру полученной «поэтажной» схемы (рисунок 3.8в). Балки ABC и DEF являются геометрически неизменяемыми и неподвижными, т.к. связаны с опорным диском тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке стержнями. Вспомогательная балка второго «этажа» CD связана с геометрически неизменяемыми балками первого «этажа» тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке стержнями. Следовательно, второй «этаж» также геометрически неизменяем и неподвижен.

Вариант построения «поэтажной» схемы для многопролетной статически определимой балки третьего типа показан на рисунке 3.9.

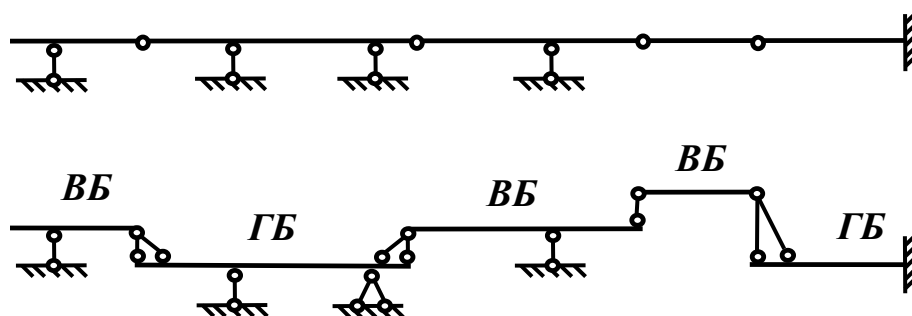


Рисунок 3.9

3.4 Расчет многопролетных статически определимых балок при действии неподвижной нагрузки

Различают два способа определения внутренних усилий в многопролетных шарнирных балках от неподвижной нагрузки: общий способ и способ расчленения на отдельные балки.

Рассмотрим порядок расчета многопролетной шарнирно-консольной балки общим способом на примере балки, изображенной на рисунке 3.10.

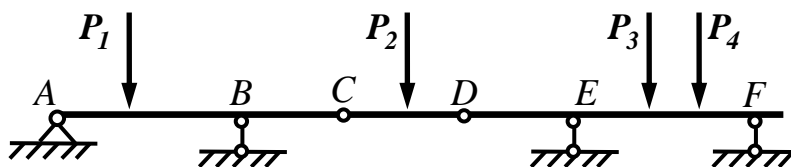


Рисунок 3.10

Для определения пяти неизвестных опорных реакций требуется составить пять независимых уравнений равновесия: три уравнения равновесия произвольной плоской системы сил для всей балки в целом и два дополнительных уравнения равновесия, например, условия равенства нулю суммы моментов сил, приложенных по одну сторону от промежуточных шарниров.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_C^{лев} = 0; \\ \sum M_D^{прав} = 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Решая систему пяти уравнений с пятью неизвестными (3.1), найдем все опорные реакции балки. Этот способ достаточно быстро приводит к цели, если рассмат-

риваемая многопролетная балка насчитывает не более трех пролетов. При наличии в многопролетной шарнирной балке более трех пролетов решение задачи вручную осложняется, однако, для современных программных средств типа MathCAD трудности не представляет.

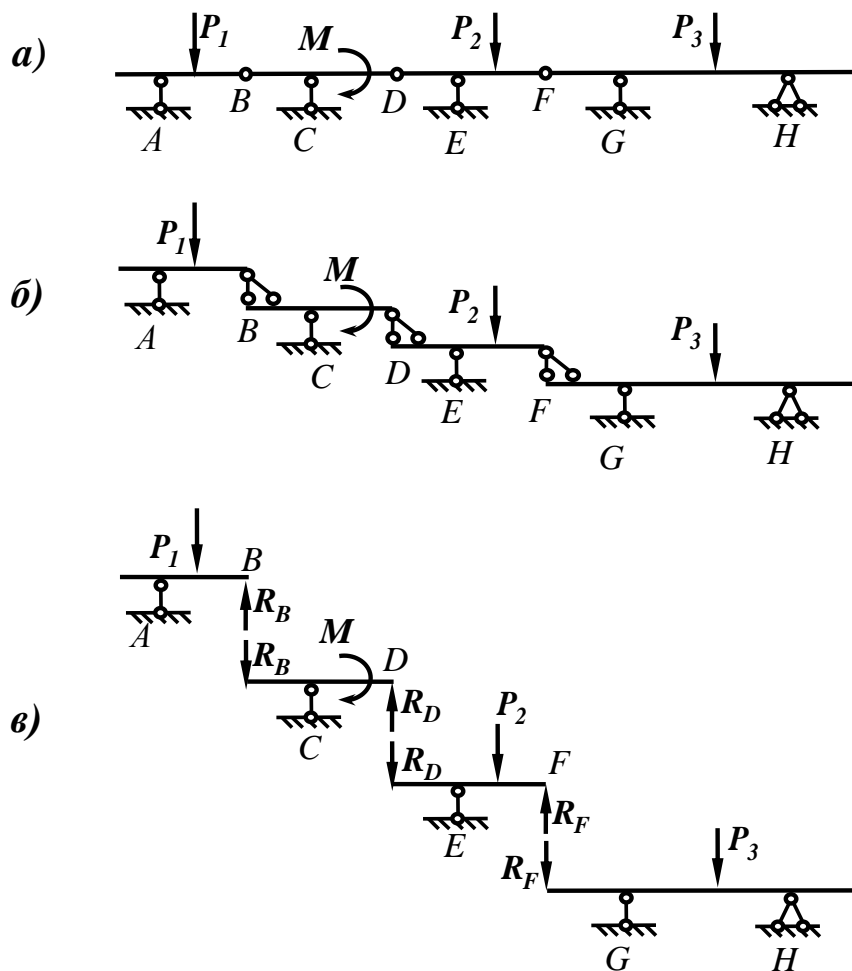


Рисунок 3.11

Второй способ связан с расчленением исходной балки на отдельные пролеты-диски и построением «поэтажной» схемы. Этот способ является менее трудоемким, особенно при ручном счете.

Рассмотрим последовательность расчета на примере балки, изображенной на рисунке 3.11а. «Поэтажная» схема балка показана на рисунке 3.11б.

«Поэтажная» схема дает также наглядное представление о характере силового взаимодействия между собой отдельных элементов и определяет последовательность их расчета. Второстепенные балки передают нагрузку, приложенную к ним, через другие второстепенные балки на главные. Главные балки *не передают* нагрузку на второстепенные.

Поэтому *расчет следует начинать с самого верхнего «этажа»* (второстепенной балки AB) и далее последовательно переходить к нижележащим. Каждый «этаж» рассчитывается как отдельная однопролетная балка. Однако при расчете нижележащих «этажей» надо учитывать не только ту нагрузку, которая непосредственно к ним приложена, но и давления, передаваемые на них опорами вышестоящих балок. Эти давления равны по величине опорным реакциям соответствующей вышестоящей балки, но имеют противоположное направление. Схема силового взаимодействия отдельных «этажей» показана на рисунке 3.11в. Главная балка FGH рассчитывается в последнюю очередь.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для каждого отдельного «этажа» строят методами, изученными в курсе сопротивления материалов. Эпюры для всей многопролетной статически определимой балки получают, располагая на одной оси в соответствующем масштабе эпюры, построенные для каждого отдельного элемента («этажа»).

Таким образом, *порядок расчета многопролетных статически определимых балок на неподвижную нагрузку:*

- проверить необходимое условие геометрической неизменяемости (2.5);
- построить «поэтажную» схему балки и провести качественный анализ геометрической структуры исходной балки;
- рассчитать балку самого верхнего «этажа»;
- затем последовательно переходить к расчету нижележащих «этажей», учитывая влияние всех вышележащих через опорные реакции;

– построить окончательные эпюры для исходной многопролетной шарнирно-консольной балки, объединив эпюры, построенные для каждого «этажа» по отдельности.

Пример 3.1

Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для многопролетной статически определимой балки, изображенной на рисунке 3.12а.

1 Проверка геометрической неизменяемости системы

Определяем число степеней свободы системы по формуле Чебышёва (2.1):

$$W = 3D - 2Ш_n - C_{on} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Необходимое условие геометрической неизменяемости (2.5) выполняется, следовательно, рассматриваемая многопролетная балка статически определима и имеет необходимое количество связей для обеспечения геометрической неизменяемости.

Для окончательного ответа на вопрос о геометрической неизменяемости заданной системы необходимо проведение структурного анализа. С этой целью по правилам, указанным в п. 3.3, строим «поэтажную» схему балки (рисунок 3.12б). Так как «поэтажная» схема балки геометрически неизменяема, то и исходная многопролетная статически определимая балка является геометрически неизменяемой.

2 Построение эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M от заданной нагрузки

Расчет начинаем с самого верхнего (третьего) этажа, второстепенной балки CD (рисунок 3.12в). Определяем опорные реакции от внешней нагрузки:

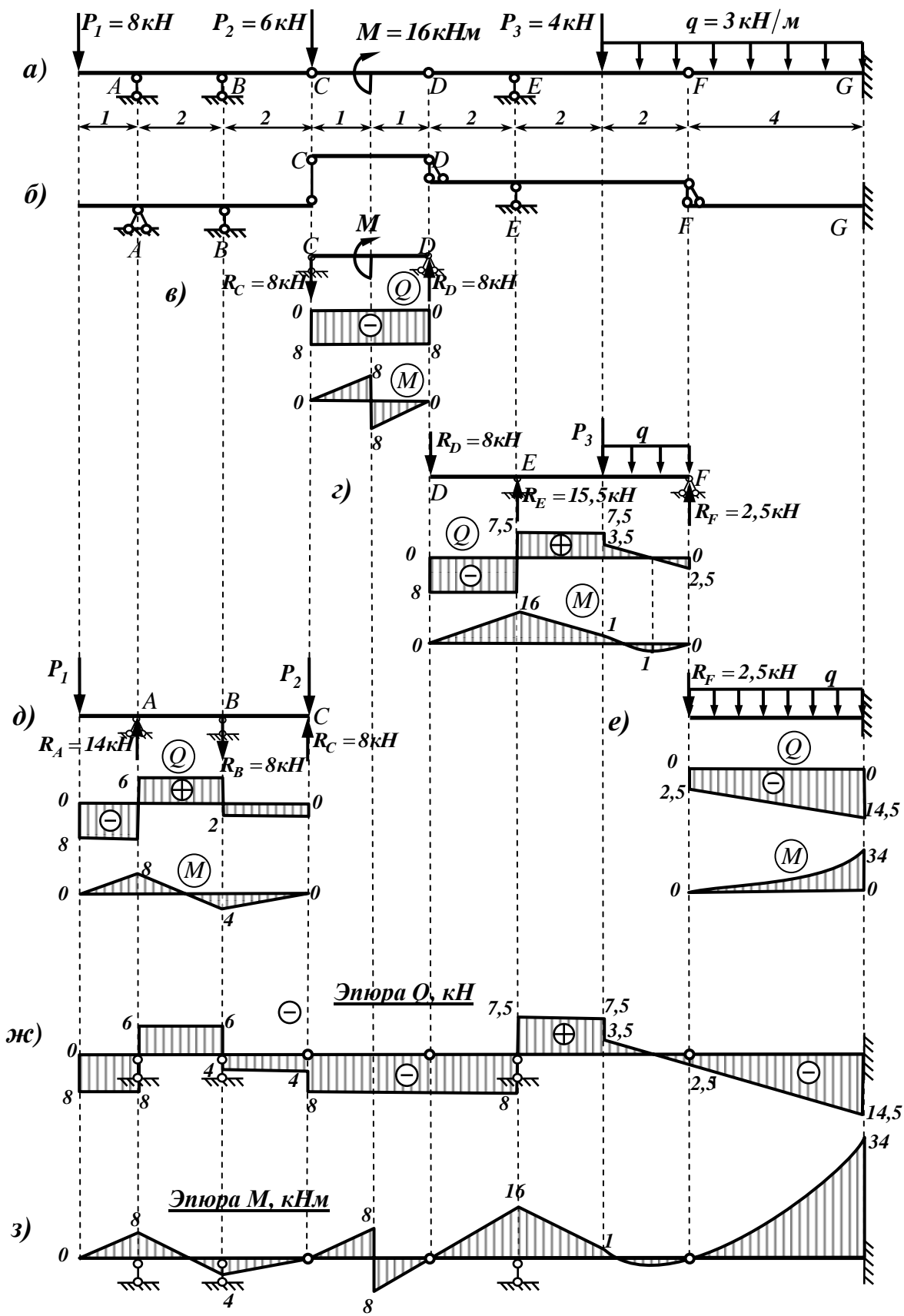


Рисунок 3.12

$$R_C = R_D = \frac{M}{CD} = 8 \text{ кН}.$$

После определения опорных реакций строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов методами, изученными в курсе сопротивления материалов.

Затем рассчитываем второстепенную балку DEF , расположенную на один «этаж» ниже (рисунок 3.12г). Влияние вышележащего этажа учитываем, прикладывая в точке D силу, равную по величине и противоположно направленную реакции R_D . Определяем опорные реакции из уравнений равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\begin{cases} \sum M_E = 0; & 4R_F - 2P_3 - q \cdot 2 \cdot 3 + 2R_D = 0; & R_F = 2,5 \text{ кН}; \\ \sum M_F = 0; & 6R_D + 2P_3 + q \cdot 2 \cdot 1 - 4R_E = 0; & R_E = 15,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций, составляя уравнение проекций всех сил на ось y :

$$\sum Y = R_E + R_F - P_3 - 2q - R_D = 15,5 + 2,5 - 4 - 2 \cdot 3 - 8 = 0.$$

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки DEF .

После расчета всех второстепенных балок можно переходить к расчету главных балок ABC и FG (последовательность расчета главных балок значения не имеет).

Определяем опорные реакции главной балки ABC (рисунок 3.12д), учитывая влияние всех вышележащих «этажей» приложенной в точке C силой, равной по величине и противоположной по направлению реакции R_C :

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; & P_1 - 2R_B - 4P_2 + 4R_C = 0; & R_B = 8 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0; & 2R_C - 2P_2 + 3P_1 - 2R_A = 0; & R_A = 14 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций, составляя уравнение проекций всех сил на ось y :

$$\sum Y = R_A - R_B - P_1 - P_2 + R_C = 14 - 8 - 8 - 6 + 8 = 0.$$

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки ABC .

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки FG строим от свободного конца балки, не определяя опорных реакций (рисунок 3.12е).

Строим окончательные эпюры поперечных сил Q (рисунок 3.12ж) и изгибающих моментов M (рисунок 3.12з), располагая на одной оси полученные ранее для каждого отдельного элемента соответствующие эпюры.

4 Общая теория линий влияния

4.1 Понятие о линиях влияния

В процессе эксплуатации сооружения часто подвергаются действию подвижных нагрузок (давление от автомобилей, поездов, мостовых кранов и т.д.). В большинстве случаев подвижная нагрузка состоит из системы вертикальных параллельных сил, расстояние между которыми при движении нагрузки остается постоянным. Считается, что нагрузка движется плавно, без толчков, что позволяет пренебречь динамическим эффектом, т.е. ускорениями точек конструкции, получаемыми в результате движения нагрузки.

Особенность расчета на действие подвижной нагрузки заключается в том, что усилия, возникающие в элементах сооружения, являются переменными: они зависят от положения нагрузки на сооружении. Следовательно, для того чтобы подобрать размеры поперечного сечения элементов конструкции, необходимо выявить самое невыгодное положение подвижной нагрузки на сооружении, т.е. такое, при котором возникающие внутренние усилия будут максимальными. Подобные задачи решаются с помощью *линий влияния*.

Линией влияния называется график, изображающий закон изменения какого-либо статического фактора (опорной реакции, изгибающего момента, поперечной силы, прогиба и т.п.), возникающего в определенном сечении сооружения при перемещении по этому сооружению единичного груза (единичной безразмерной силы $\bar{P} = 1$).

Здесь и далее черта над обозначением силы P указывает, что величина силы равна единице.

Следует четко представлять различие между линией влияния какого-либо фактора и эпюрой этого же фактора. Проиллюстрируем это различие на примере изгибающего момента (рисунок 4.1).

Эпюра изгибающего момента M_x (рисунок 4.1а) строится от неподвижной нагрузки (силы P) и дает представление о распределении изгибающего момента по

длине балки. Каждая ордината эпюры показывает значение изгибающего момента в том сечении балки, под которым эта ордината расположена.

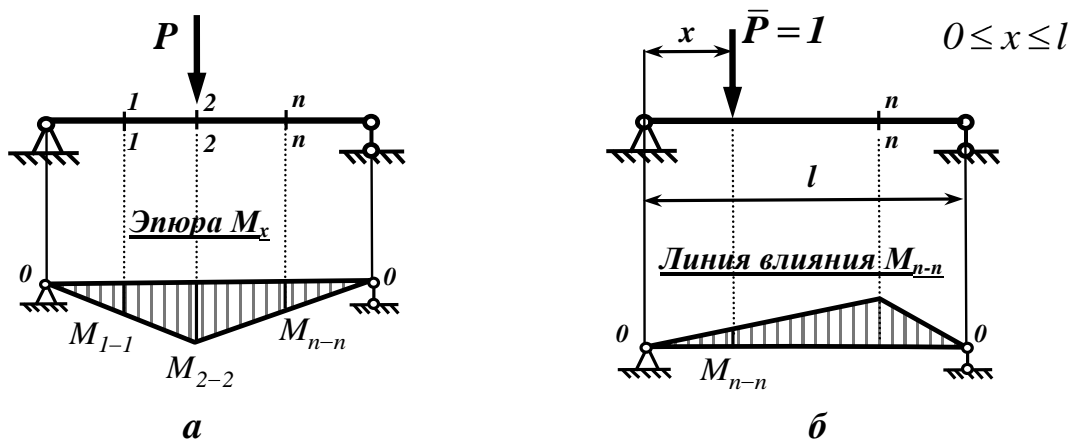


Рисунок 4.1

Линия влияния изгибающего момента в сечении $n-n$ (рисунок 4.1б) строится для одного единственного сечения балки и дает представление о законе изменения изгибающего момента в этом сечении при движении по длине балки единичной безразмерной силы $\bar{P} = 1$. Каждая ордината линии влияния показывает значение изгибающего момента в сечении $n-n$ при расположении единичной силы над этой ординатой.

При построении линий влияния будем пользоваться *статическим способом*, при котором рекомендуется следующая последовательность действий:

- провести разрез по тому сечению балки, для которого строится линия влияния;
- рассмотреть равновесие одной из отсеченных частей балки, для которой уравнение равновесия составляется наиболее просто;
- из составленного уравнения равновесия выразить интересующий силовой фактор;
- проанализировав полученное выражение, построить линию влияния.

4.2 Построение линий влияния в однопролетных балках

4.2.1 Построение линий влияния опорных реакций

Рассмотрим построение линий влияния опорных реакций балки, изображенной на рисунке 4.2. Изобразим действующие на балку внешние силы: единичную безразмерную силу $\bar{P} = 1$ (единичный груз) и опорные реакции R_A и R_B . Условимся считать положительными опорные реакции, направленные вверх. Это позволит по знаку, указанному на линии влияния, выяснить истинное направление реакций.

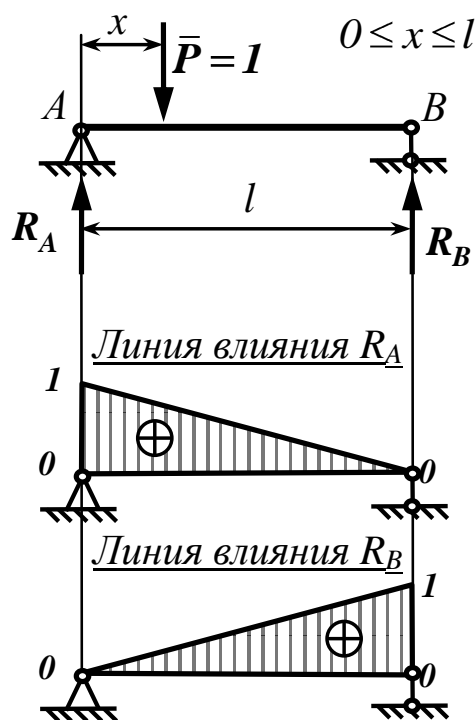


Рисунок 4.2

Для определения опорных реакций составим уравнения моментов всех сил, приложенных к балке, относительно опорных шарниров:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} R_B l - \bar{P}x = 0; \\ \bar{P} l - x - R_A l = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_B = \bar{P} \frac{x}{l} = \frac{x}{l} \Big|_{x=0}; & R_B = 0; \\ & \Big|_{x=l}; & R_B = 1; \\ R_A = \bar{P} \frac{l-x}{l} = \frac{l-x}{l} \Big|_{x=0}; & R_A = 1; \\ & \Big|_{x=l}; & R_A = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Построенные по полученным точкам линии влияния опорных реакций показаны на рисунке 4.2.

Выполненные аналитические преобразования позволяют сформулировать простое **правило построения линий влияния опорных реакций**:

– над опорой, линия влияния которой строится, отложить отрезок, равный единице;

– соединить полученную точку с нулевым значением на другой опоре.

В дальнейшем, говоря «над опорой (шарниром, сечением и т.д.)» будем подразумевать, что ордината откладывается от нулевой линии вверх (в сторону положительных значений линии влияния), если же ордината откладывается от нулевой линии вниз (в сторону отрицательных значений), будем соответственно говорить «под опорой (шарниром, сечением и т.д.)».

4.2.2 Построение линии влияния изгибающего момента

Для построения линии влияния изгибающего момента в сечении K (рисунок 4.3а) проведем сквозной разрез балки в этом сечении и рассмотрим два положения единичной безразмерной силы $\bar{P} = 1$ (единичный груз слева и справа от проведенного сечения).

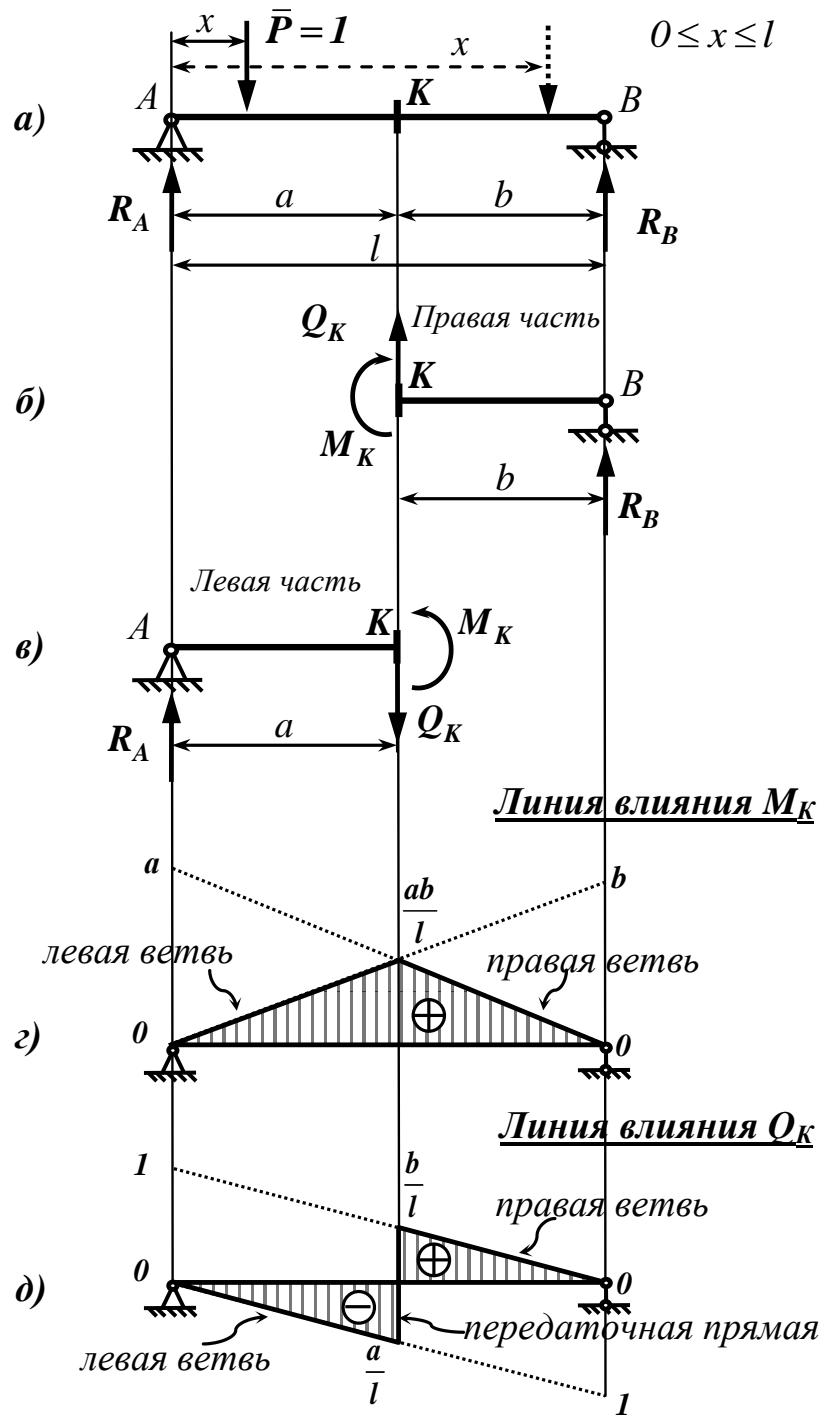


Рисунок 4.3

Пусть единичный груз находится слева от сечения K ($0 \leq x \leq a$). В этом случае удобнее рассматривать равновесие правой отсеченной части балки (рисунок 4.3б). Составляя уравнение моментов всех действующих сил относительно проведенного сечения и используя выражения для опорных реакций (4.1), получим:

$$M_K = R_B b = \frac{b}{l} x \left| \begin{array}{l} x=0; \quad M_K = 0; \\ x=l; \quad M_K = b. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Пусть теперь единичный груз находится справа от сечения K ($a \leq x \leq l$). В этом случае удобнее рассматривать левую отсеченную часть балки (рисунок 4.3в). Составляя уравнение моментов всех действующих сил относительно проведенного сечения и используя выражения для опорных реакций (4.1), получим:

$$M_K = R_A a = \frac{l-x}{l} a \left| \begin{array}{l} x=0; \quad M_K = a; \\ x=l; \quad M_K = 0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Выражение (4.2) для изгибающего момента M_K справедливо только при положении единичной силы **слева** от сечения (т.е. при $0 \leq x \leq a$), поэтому выделим на построенной прямой (рисунок 4.3г) только участок от нуля на левой опоре до сечения K (*левую ветвь*).

Выражение (4.3) для изгибающего момента M_K справедливо только при положении единичной силы **справа** от сечения (т.е. при $a \leq x \leq l$), поэтому выделим на построенной прямой (рисунок 4.3г) только участок от нуля на правой опоре до сечения K (*правую ветвь*).

Окончательный вид линии влияния изгибающего момента M_K показан на рисунке 4.3г. Обратим особое внимание, что если все построения выполнены в масштабе, то **обе ветви** обязательно **должны пересекаться строго под сечением K** .

В заключение сформулируем **правило построения линии влияния изгибающего момента**:

– над левой опорой отложить отрезок, равный расстоянию от левой опоры до сечения K ;

– соединить полученную точку с нулевым значением на правой опоре и выделить **правую ветвь** (от нуля на правой опоре до сечения K);

– над правой опорой отложить отрезок, равный расстоянию от правой опоры до сечения K ;

– соединить полученную точку с нулевым значением на левой опоре и выделить **левую ветвь** (от нуля на левой опоре до сечения K).

4.2.3 Построение линии влияния поперечной силы

Аналогичным образом построим линию влияния поперечной силы в сечении K . Рассмотрим два положения единичной безразмерной силы $\bar{P} = 1$ (единичный груз слева и справа от проведенного сечения).

Пусть единичный груз находится слева от сечения K ($0 \leq x \leq a$). В этом случае удобнее рассматривать равновесие правой отсеченной части балки (рисунок 4.3б). Составляя уравнение проекций всех действующих сил на вертикальную ось и используя выражения для опорных реакций (4.1), получим:

$$\sum Y = 0; \quad R_B + Q_K = 0; \quad Q_K = -R_B = -\frac{x}{l} \left| \begin{array}{l} x=0; \quad Q_K = 0; \\ x=l; \quad Q_K = -1. \end{array} \right.$$

Полученное выражение для поперечной силы Q_K справедливо только при положении единичной силы **слева** от сечения (т.е. при $0 \leq x \leq a$), поэтому выделим на построенной прямой (рисунок 4.3д) только участок от нуля на левой опоре до сечения K (**левую ветвь**).

Пусть теперь единичный груз находится справа от сечения K ($a \leq x \leq l$). В этом случае удобнее рассматривать левую отсеченную часть балки (рисунок 4.3в).

Составляя уравнение проекций всех действующих сил на вертикальную ось и используя выражения для опорных реакций (4.1), получим:

$$\sum Y = 0; R_A - Q_K = 0; Q_K = R_A = \frac{l-x}{l} \begin{cases} x=0; Q_K = 1; \\ x=l; Q_K = 0. \end{cases}$$

Полученное выражение для поперечной силы Q_K справедливо только при положении единичной силы **справа** от сечения (т.е. при $a \leq x \leq l$), поэтому выделим на построенной прямой (рисунок 4.3д) только участок от нуля на правой опоре до сечения K (*правую ветвь*). Обе построенные ветви соединим *передаточной прямой*. Окончательный вид линии влияния поперечной силы Q_K показан на рисунке 4.3д.

В заключение сформулируем **правило построения линии влияния поперечной силы**:

- над левой опорой отложить отрезок, равный единице;
- соединить полученную точку с нулевым значением на правой опоре и выделить **правую ветвь** (от нуля на правой опоре до сечения K);
- под правой опорой отложить отрезок, равный единице;
- соединить полученную точку с нулевым значением на левой опоре и выделить **левую ветвь** (от нуля на левой опоре до сечения K);
- соединить обе ветви *передаточной прямой*.

4.3 Построение линий влияния в консольных балках

4.3.1 Построение линии влияния изгибающего момента

Рассмотрим консольную балку, изображенную на рисунке 4.4а. Проведем разрез в сечении K и рассмотрим равновесие правой отсеченной части балки, для того чтобы избежать определения опорных реакций балки. Пусть единичная сила $\bar{P} = 1$

находится справа от сечения K (рисунок 4.4б). Составляя уравнение моментов всех действующих сил относительно сечения K , получим:

$$M_K = -\bar{P} \cdot a - x = x - a \quad \left| \begin{array}{l} x=0; \quad M_K = -a; \\ x=a; \quad M_K = 0. \end{array} \right.$$

Если же единичная сила $\bar{P} = 1$ находится слева от сечения K (рисунок 4.4в), то из уравнения моментов всех действующих сил относительно сечения K имеем:

$$M_K = 0.$$

Окончательный вид линии влияния для изгибающего момента показан на рисунке 4.4г.

4.3.2 Построение линии влияния поперечной силы

Рассмотрим консольную балку, изображенную на рисунке 4.4а.

Пусть единичная сила $\bar{P} = 1$ находится справа от сечения K (рисунок 4.4б). Составляя уравнение проекций всех действующих сил на вертикальную ось, получим:

$$\sum Y = 0; \quad Q_K - \bar{P} = 0; \quad Q_K = \bar{P} = 1.$$

Если же единичная сила $\bar{P} = 1$ находится слева от сечения K (рисунок 4.4в), то из уравнения проекций всех действующих сил на вертикальную ось, имеем:

$$\sum Y = 0; \quad Q_K = 0.$$

Окончательный вид линии влияния для изгибающего момента показан на рисунке 4.4д.

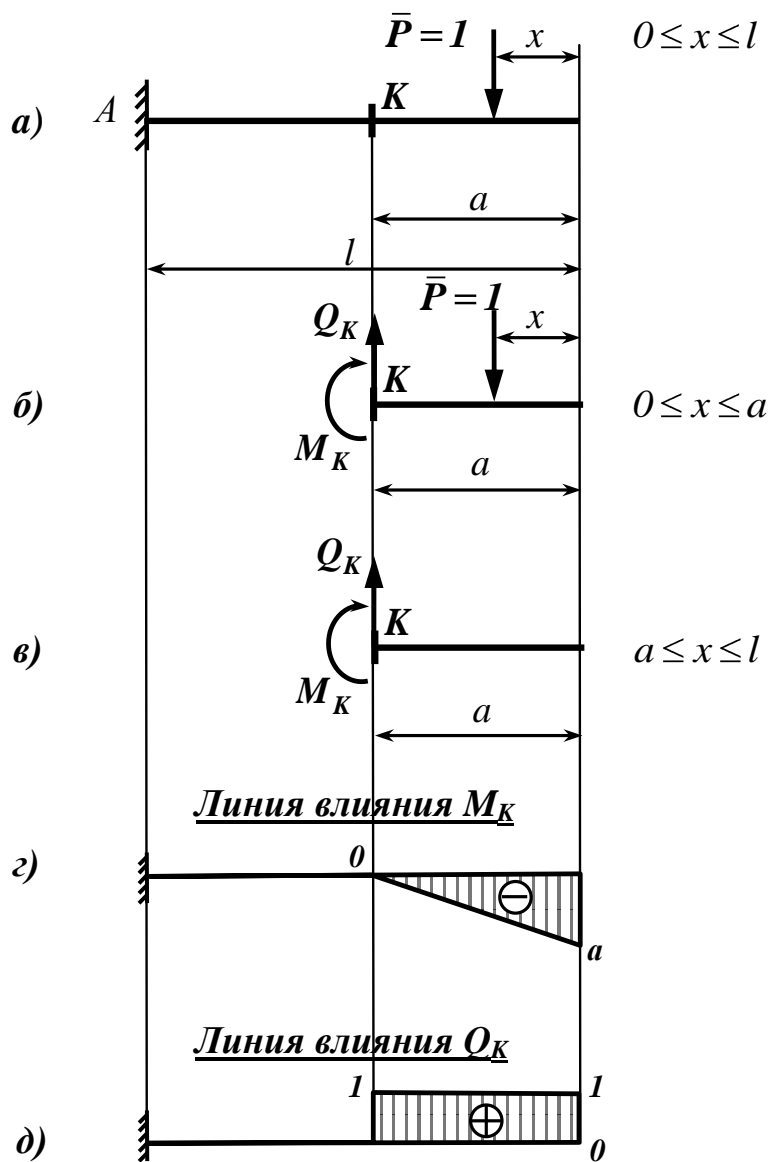


Рисунок 4.4

Заметим, что если консольная балка будет иметь жесткое защемление справа, то линия влияния поперечной силы будет иметь отрицательный знак. Знак линии влияния изгибающего момента останется прежним (рисунок 4.5).

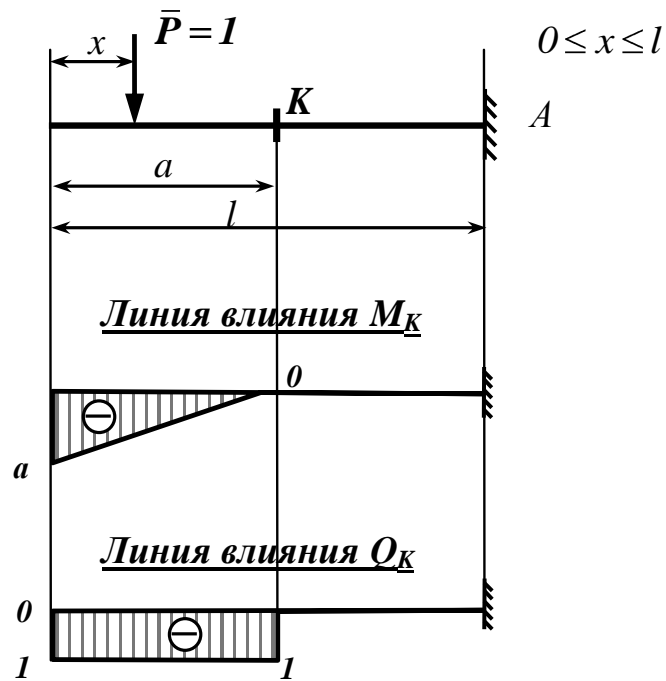


Рисунок 4.5

4.4 Построение линий влияния для однопролетных балок с консолями

Рассмотрим двухопорную балку с консолями, изображенную на рисунке 4.6а. Для построения линии влияния опорной реакции R_B составим уравнение моментов действующих сил относительно шарнира A :

$$\sum M_A = 0; R_B l - \bar{P}x = 0; R_B = \bar{P} \frac{x}{l} = \frac{x}{l}.$$

Полученное для R_B выражение полностью совпадает с выражением (4.1) для соответствующей опорной реакции однопролетной балки без консолей. Аналогичный вывод получается и для опорной реакции R_A . Следовательно, построение линий влияния опорных реакций для балок с консолями следует проводить по правилу, из-

ложенному в п. 4.2.1, а затем лишь продолжить на правую и левую консоли (рисунок 4.6б, в).

Учитывая, что выражения для опорных реакций использовались при построении линий влияния изгибающего момента и поперечной силы, можно сделать вывод, что для сечений, расположенных между опорами, будут справедливы результаты, полученные в п. 4.2 для балки без консолей. Для сечений же, расположенных на консолях, будут справедливы все результаты, полученные в п. 4.3 для защемленной балки.

Таким образом, можно сформулировать следующие **особенности построения линий влияния усилий для однопролетных балок с консолями**:

– для опорных реакций и сечений, расположенных между опорами, линии влияния усилий строятся по тем же правилам, что и для однопролетной балки без консолей (п.4.2), а затем **продолжаются соответственно на левую и правую консоли**;

– для сечений, лежащих на консолях, линии влияния усилий строятся по тем же правилам, что и для консольных балок (п.4.3).

На рисунке 4.6 изображен общий вид линий влияния усилий для некоторых сечений балки с консолями: изгибающего момента и поперечной силы для сечения, расположенного между опорами (рисунок 4.6г, д), изгибающего момента и поперечной силы для сечений, расположенных на консолях (рисунок 4.6е, ж, з, и). Характерные ординаты линий влияния можно получить из простых геометрических соображений, например, подобия треугольников.

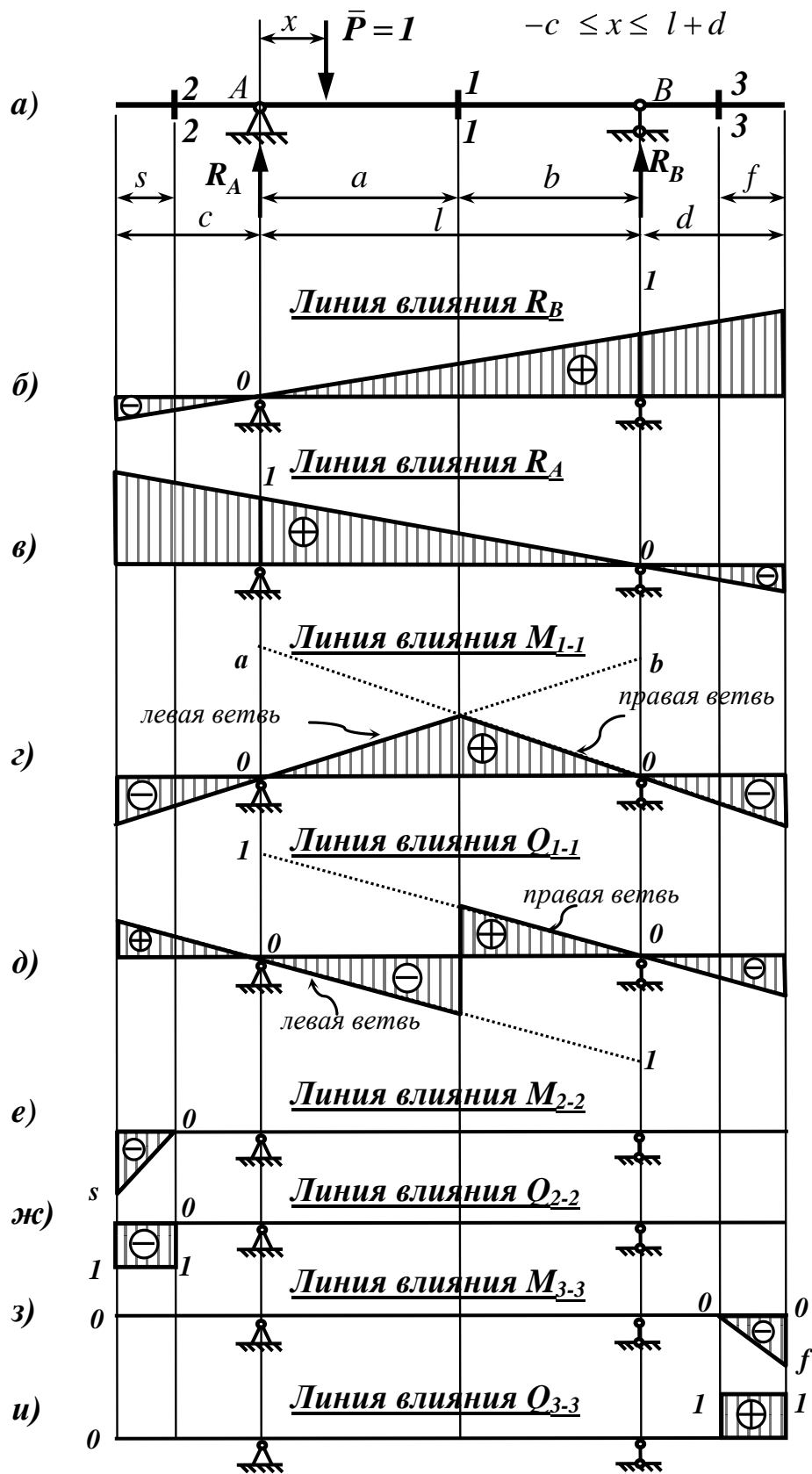


Рисунок 4.6

4.5 Построение линий влияния для многопролетных статически определимых балок

Как было показано ранее, расчет многопролетных статически определимых балок сводится к расчету отдельных однопролетных балок с учетом их взаимодействия в «поэтажной» схеме. Следовательно, правила построения линий влияния для однопролетных балок будут справедливы и в случае шарнирно-консольной балки. Обобщая закономерности, полученные для однопролетных балок, можно сформулировать **правило построения линий влияния усилий для многопролетных статически определимых балок:**

– построить «поэтажную» схему и перенести на нее заданное сечение или опору;

– для этажа, на котором расположено заданное сечение или опора, построить линию влияния по обычным правилам (как для однопролетных балок);

– построенную линию влияния продолжить на все **вышележащие** этажи через нулевые значения на опорах, связанных с основанием («землей»), и изломы над (под) промежуточными шарнирами.

На рисунке 4.7 показаны примеры построения линий влияния опорных реакций и усилий для некоторых сечений многопролетной статически определимой балки.

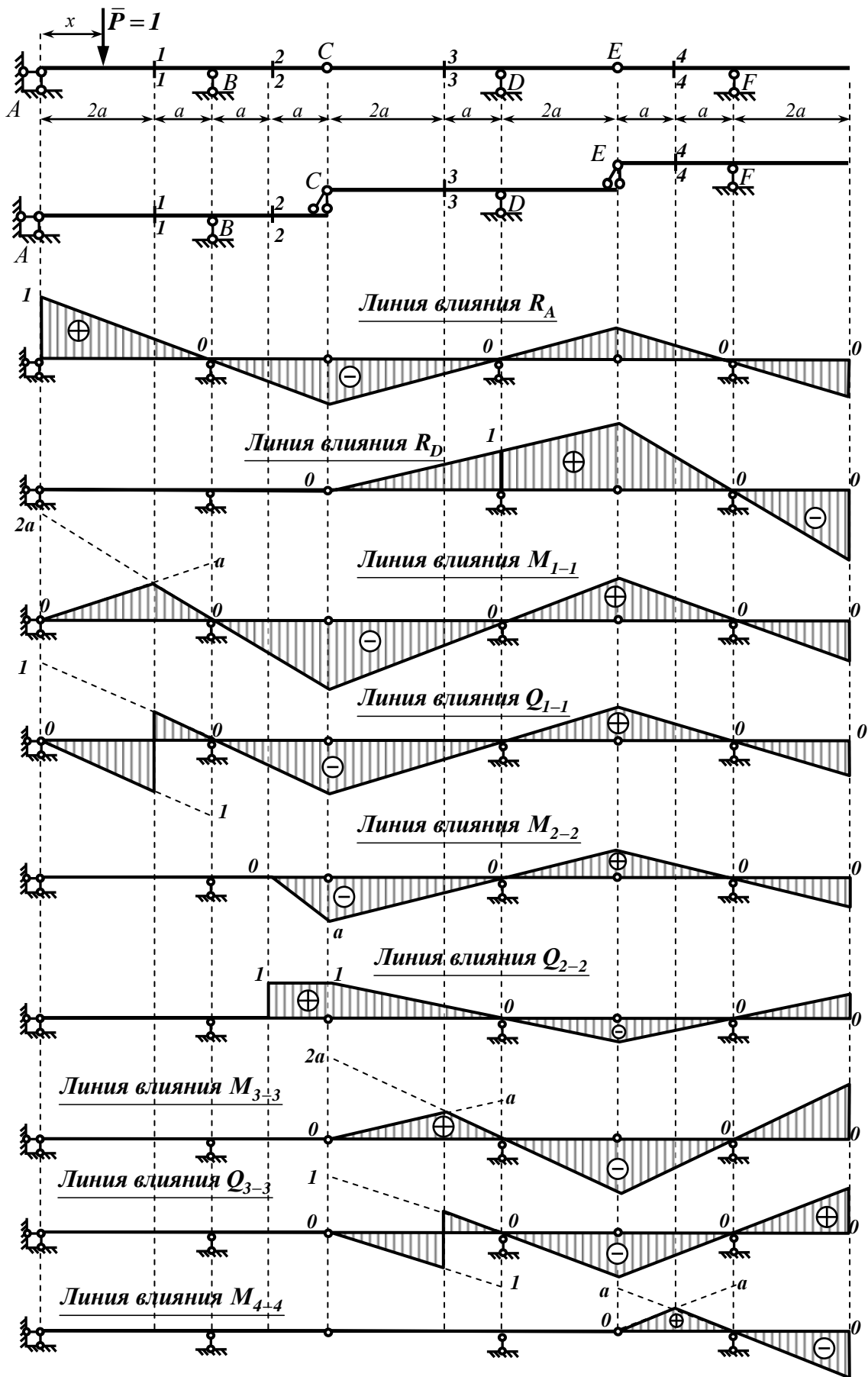
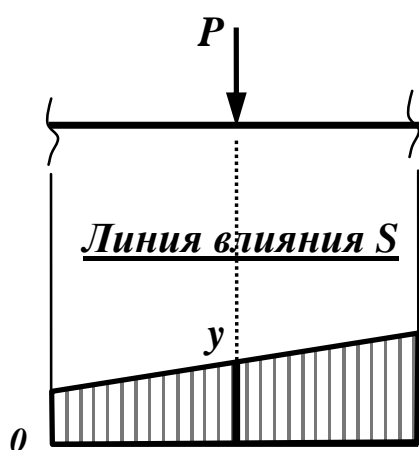


Рисунок 4.7

4.6 Определение усилий по линиям влияния

Пусть для некоторого элемента сооружения (балки) построена линия влияния усилия S (поперечной силы, изгибающего момента и т.д.) в каком-либо сечении. Получим формулу для вычисления искомого усилия S по линии влияния от различных видов загрузки данного элемента (иначе говоря, загрузки линии влияния).

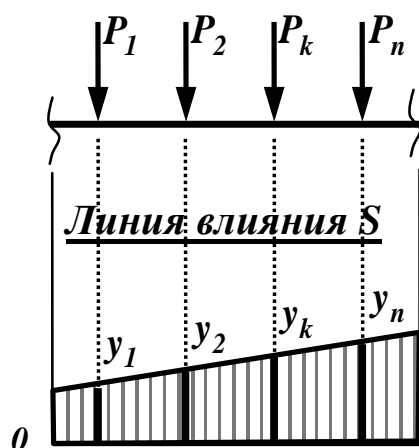
4.6.1 Случай действия одной сосредоточенной силы



В случае действия одной сосредоточенной силы для определения усилия S следует *умножить величину* этой силы на ординату линии влияния, расположенную прямо *под* этой силой:

$$S = Py.$$

4.6.2 Случай действия системы сосредоточенных сил



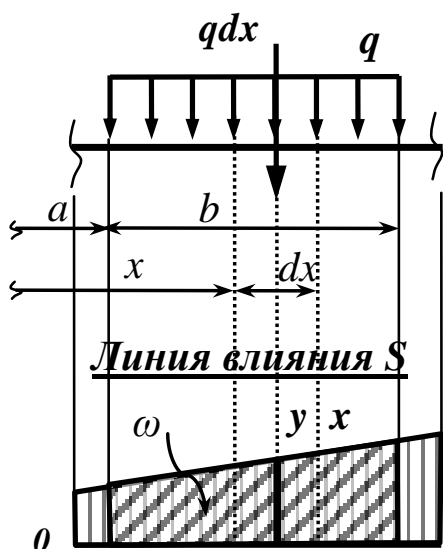
На основании принципа независимости действия сил при загрузении линии влияния системой сосредоточенной сил P_1, P_2, \dots, P_n полное усилие S будет равно

$$S = \sum_{k=1}^n P_k y_k.$$

4.6.3 Случай действия равномерно распределенной нагрузки

Пусть на некотором участке балки действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q . Выделим на участке действия распределенной нагрузки бесконечно малый участок длиной dx и заменим распределенную нагрузку ее

равнодействующей qdx . Обозначим ординату линии влияния, расположенную под равнодействующей, y_x . Тогда на основании полученного в п. 4.6.1 результата элементарное усилие $dS = qdx \cdot y_x$.



Полное усилие S получим, проинтегрировав выражение для элементарного усилия по длине загруженного участка:

$$S = \int_a^{a+b} q y_x dx = q \int_a^{a+b} y_x dx,$$

или

$$S = q\omega,$$

где $\omega = \int_a^{a+b} y_x dx$ – площадь заштрихованного на рисунке участка линии влияния, расположенного непосредственно под равномерно распределенной нагрузкой.

Следовательно, для определения величины усилия S от равномерно распределенной нагрузки надо **умножить величину интенсивности нагрузки на площадь соответствующего участка линии влияния**, расположенного в пределах действия нагрузки. Знак площади берется в соответствии со знаком ординат линии влияния на том участке, где эта площадь вычисляется.

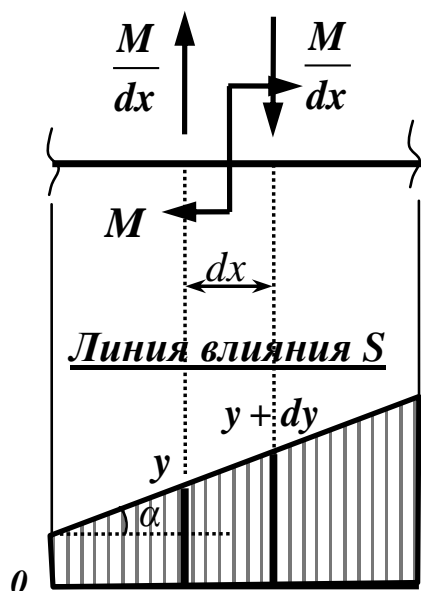
4.6.4 Случай действия сосредоточенного момента

Представим сосредоточенный момент M парой сил с плечом dx . Найдем величину усилия S , используя результат, полученный в п. 4.6.2:

$$S = \frac{M}{dx} y + dy - \frac{M}{dx} y = M \frac{dy}{dx},$$

или

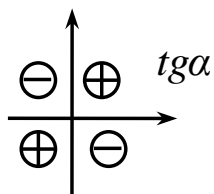
$$S = Mtg\alpha,$$



где α – угол наклона прямолинейной линии влияния на участке действия момента M .

Следовательно, для определения величины усилия S от действия сосредоточенного момента надо *умножить величину момента на тангенс угла наклона соответствующего участка линии влияния*.

Момент считается положительным, если действует по часовой стрелке, и отрицательным – если против часовой стрелки. В этом случае правило знаков для тангенса угла наклона линии влияния будет обычным: тангенс считается положительным в 1 и 3 четвертях («восходящая» линия влияния), и отрицательным – во 2 и 4 четвертях («нисходящая» линия влияния).



Объединяя все полученные ранее результаты, на основании принципа независимости действия сил запишем окончательную формулу для вычисления усилия S при одновременном действии всех рассмотренных видов нагружения:

$$S = \sum_{k=1}^n P_k y_k + \sum_{k=1}^n q_k \omega_k + \sum_{k=1}^n M_k \cdot \operatorname{tg} \alpha_k, \quad (4.4)$$

где y_k – ордината линии влияния, расположенная под силой P_k ;

ω_k – площадь участка линии влияния, расположенного под равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q_k ;

α_k – угол наклона прямолинейной линии влияния на участке действия момента M_k .

4.7 Особенности построения линий влияния при узловой передаче нагрузки

На практике подвижная нагрузка нередко перемещается не по самой несущей конструкции, а по некоторой вспомогательной, представляющей собой систему продольных и поперечных балок (рисунок 4.8), передающей нагрузку на основную несущую конструкцию лишь в определенных точках (*узлах*). Такой способ передачи нагрузки называется *узловым*. Узловая передача нагрузки характерна для большинства мостовых конструкций (мостовых ферм, арок и т.д.).

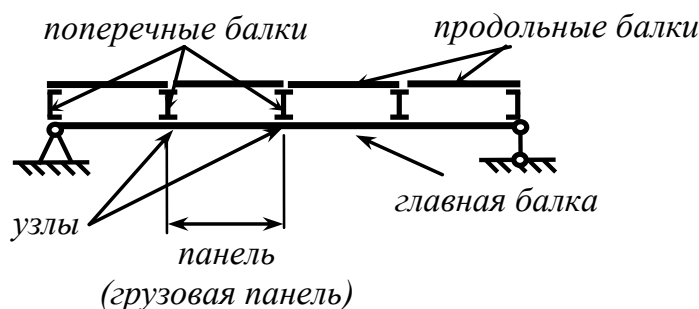


Рисунок 4.8

Для определения опорных реакций балки, изображенной на рисунке 4.9а, составим уравнения моментов действующих внешних сил относительно опорных шарниров:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \end{cases} \begin{cases} R_B l - \bar{P}x = 0; \\ \bar{P} l - x - R_A l = 0; \end{cases} \begin{cases} R_B = \frac{x}{l}; \\ R_A = \frac{l-x}{l}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Полученные выражения полностью совпадают с выражениями (4.1) для опорных реакций балки без узловой передачи нагрузки, т.е. узловая передача нагрузки не оказывает влияния на величину опорных реакций. Следовательно, **линии влияния опорных реакций для балок с узловой передачей нагрузки строятся так же, как и для обычных балок без узловой передачи нагрузки** (рисунок 4.9б, в).

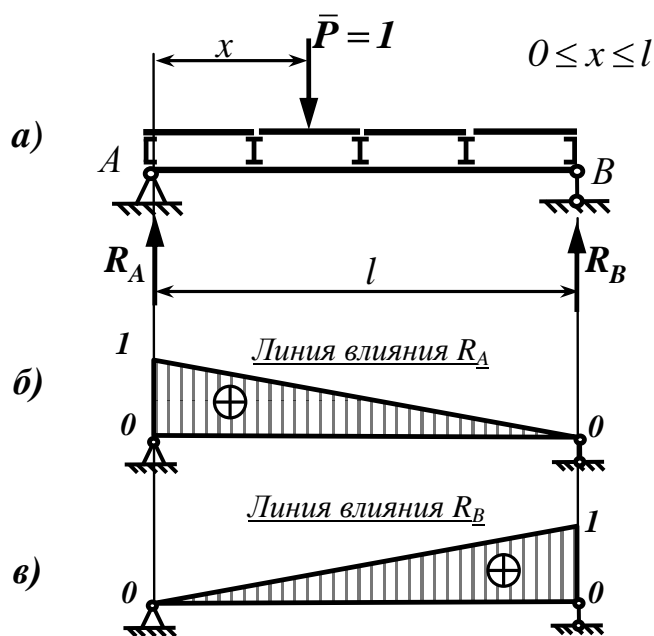


Рисунок 4.9

Выясним теперь влияние узловой передачи нагрузки на величину внутренних усилий, возникающих в некотором сечении K главной балки (рисунок 4.10а), например, изгибающего момента M_K . Рассмотрим, как и прежде, два положения единичной силы: левее и правее сечения K .

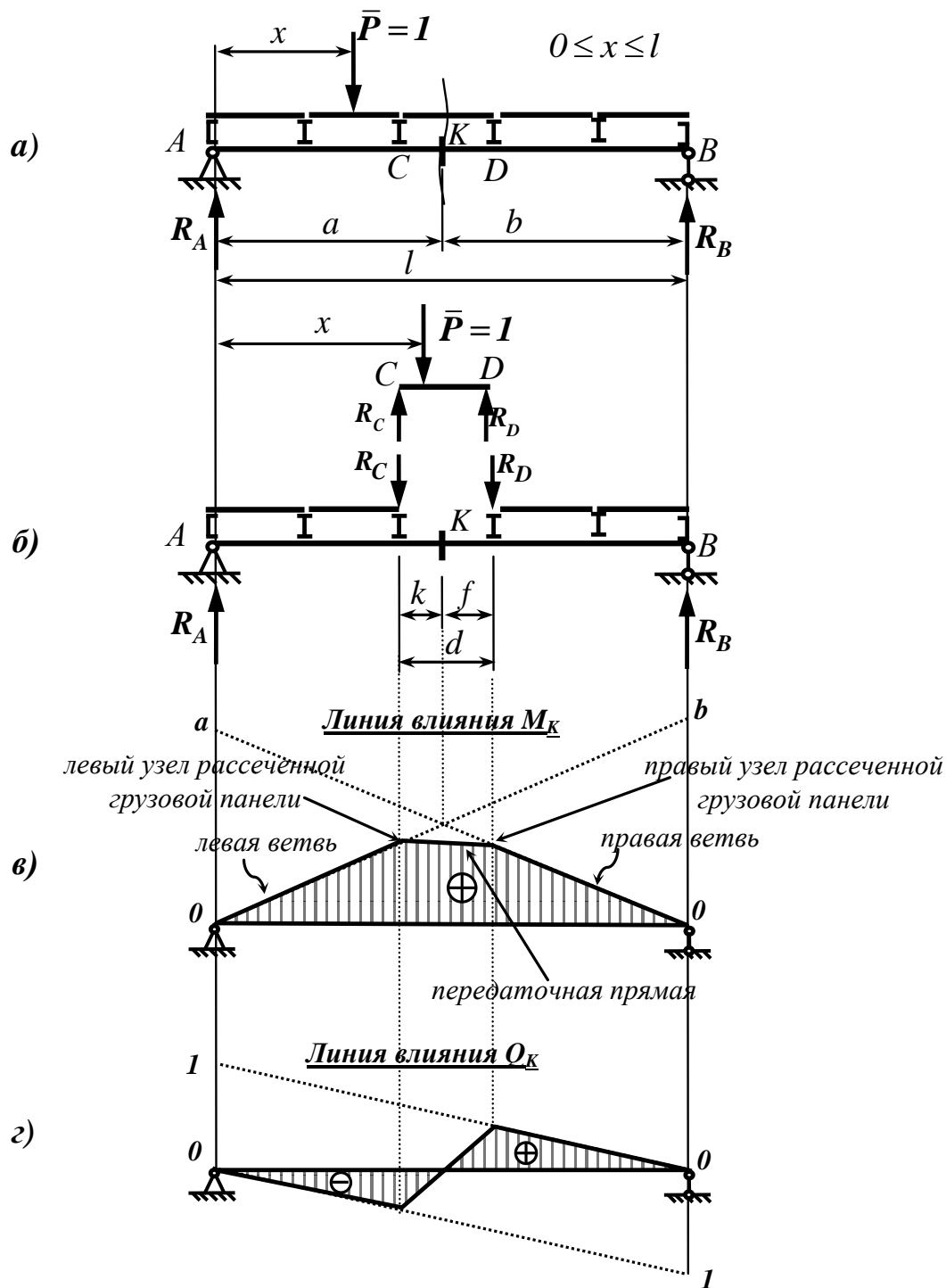


Рисунок 4.10

Пусть единичный груз находится слева от сечения K ($0 \leq x \leq a$). Составляя уравнение моментов всех действующих сил относительно сечения K для правой отсеченной части балки, получим:

$$M_K = R_B b = \frac{b}{l} x. \quad (4.6)$$

Полученное выражение совпадает с выражением (4.2) для изгибающего момента M_K в балке без узловой передачи нагрузки.

Пусть теперь единичный груз находится справа от сечения K ($a \leq x \leq l$). Из уравнения моментов всех действующих сил относительно сечения K для левой отсеченной части балки получим:

$$M_K = R_A a = \frac{l-x}{l} a. \quad (4.7)$$

Полученное выражение совпадает с выражением (4.3) для изгибающего момента M_K в балке без узловой передачи нагрузки.

Зависимости (4.6) и (4.7) справедливы до тех пор, пока не нагружается вспомогательная балка CD , находящаяся непосредственно над сечением K , т.е. пока единичная сила \bar{P} находится левее узла C или правее узла D . Если же единичная сила \bar{P} располагается в пределах вспомогательной балки CD (рисунок 4.10б), то ее действие передается на главную балку через опорные реакции R_C и R_D . Тогда из условия равновесия правой отсеченной части следует:

$$M_K = R_B b - R_D f. \quad (4.8)$$

Величину опорной реакции R_D вспомогательной балки можно найти, составив уравнение суммы моментов действующих сил относительно точки C :

$$\sum M_C = 0; \quad R_D d - \bar{P} x - a - k = 0;$$

$$R_D = \bar{P} \frac{x - a + k}{d} = \frac{x - a + k}{d}. \quad (4.9)$$

С учетом выражений (4.5) и (4.9) изгибающий момент (4.8) примет вид:

$$M_K = \frac{b}{l} x - \frac{x - a + k}{d} f. \quad (4.10)$$

Так как полученное выражение (4.10) линейно относительно расстояния x , то при нахождении единичной силы на вспомогательной балке CD (или грузовой панели CD) изгибающий момент M_K изменяется по линейному закону. Выражение (4.10) называется также *уравнением передаточной прямой*.

Установленные на примере изгибающего момента зависимости позволяют сформулировать общее **правило построения линий влияния усилий при узловой передаче нагрузки**:

- построить линию влияния усилия по обычным правилам без учета узловой передачи нагрузки;
- на левую ветвь построенной линии влияния снести левый узел рассеченной грузовой панели;
- на правую ветвь построенной линии влияния снести соответственно правый узел рассеченной грузовой панели;
- соединить полученные точки передаточной прямой и выделить на ветвях участки от нулевых значений до полученных точек.

Примеры построения линии влияния усилий для балки с узловой передачей нагрузки показаны на рисунке 4.10в, г.

4.8 Невыгоднейшее (опасное) нагружение линии влияния

Невыгоднейшим (опасным) называется такое расположение нагрузки на сооружении, при котором некоторое усилие в рассматриваемом сечении достигает своего максимального (экстремального) значения. Задачи определения невыгоднейшего положения нагрузки возникают, например, при анализе работы подкрановых балок или мостовых конструкций.

Пусть балка нагружена подвижной системой жестко связанных между собой сосредоточенных сил P_1, P_2, \dots, P_n (рисунок 4.11). Подобная система сил моделирует, например, нагрузку от движущегося мостового крана или поезда. Для простоты рассуждений предположим, что линия влияния некоторого исследуемого усилия S имеет треугольное очертание и постоянный знак.

Величина усилия S по формуле (4.4) равна

$$S = \sum_{i=1}^n P_k y_k.$$

Так как усилие S принимает экстремальное значение, то

$$\frac{dS}{dx} = \sum_{k=1}^n P_k \frac{dy_k}{dx} = 0. \quad (4.11)$$

Можно доказать, что если усилие S принимает экстремальное значение, то один из грузов располагается непосредственно над вершиной треугольной линии влияния. Такой груз называется *критическим*. Таким образом, задача определения невыгоднейшего (опасного) положения нагрузки на сооружении сводится к нахождению критического груза.

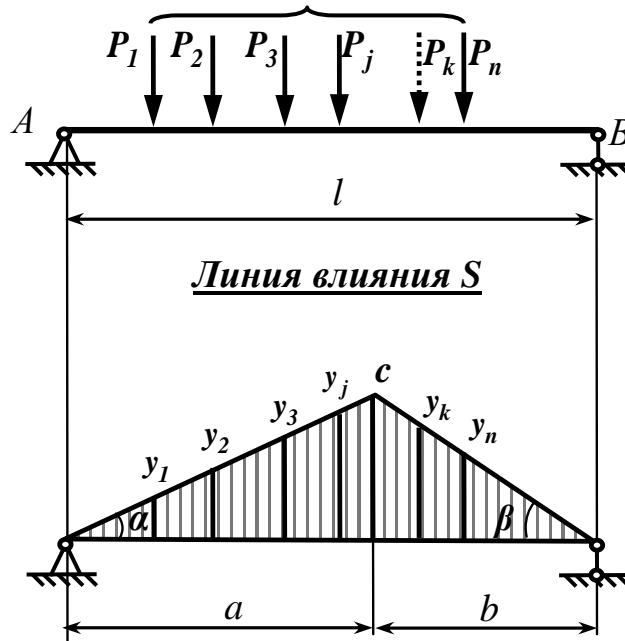


Рисунок 4.11

Пусть критическим является груз $P_j = P_{кр}$. Обозначим

$$R_{лев} = \sum_{k=1}^{j-1} P_k y_k; \quad R_{прав} = \sum_{k=j+1}^n P_k y_k. \quad (4.12)$$

В соответствии с рисунком 4.11

$$\frac{dy_k}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a} \quad k = 1, 2, \dots, j; \quad \frac{dy_k}{dx} = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{c}{b} \quad k = j+1, j+2, \dots, n. \quad (4.13)$$

Выражение (4.11) с учетом введенных обозначений (4.12) примет вид:

$$R_{лев} + P_{кр} \operatorname{tg}\alpha - R_{прав} \operatorname{tg}\beta = 0.$$

Как известно, при переходе через экстремум первая производная функции меняет знак. Следовательно, должны одновременно выполняться два условия:

– при нахождении критического груза слева от вершины линии влияния

$$R_{лев} + P_{кр} \operatorname{tg}\alpha - R_{прав} \operatorname{tg}\beta \geq 0;$$

– при нахождении критического груза справа от вершины линии влияния

$$R_{лев} \operatorname{tg}\alpha - P_{кр} + R_{прав} \operatorname{tg}\beta \leq 0.$$

С учетом выражения (4.13) условия достижения усилием S максимальной величины примут вид:

$$\begin{cases} R_{лев} + P_{кр} \frac{c}{a} - R_{прав} \frac{c}{b} \geq 0; \\ R_{лев} \frac{c}{a} - P_{кр} + R_{прав} \frac{c}{b} \leq 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{R_{лев} + P_{кр}}{a} \geq \frac{R_{прав}}{b}; \\ \frac{R_{лев}}{a} \leq \frac{P_{кр} + R_{прав}}{b}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Система (4.14) решается способом последовательных попыток (непосредственной поочередной подстановкой сил P_1, P_2, \dots, P_n в качестве $P_{кр}$). Следует заметить, что условиям (4.14) может удовлетворять не один груз, а два соседних, т.е. критический груз может быть не один.

4.9 Кинематический способ построения линий влияния

Как указывалось ранее, при построении линий влияния использовался статический способ. Рассмотрим еще один способ построения линий – *кинематический*, основанный на известном из курса теоретической механики принципе возможных перемещений (принципе Лагранжа). В ряде случаев, использование этого способа оказывается более удобным. Например, с помощью кинематического способа можно легко проверить очертание уже построенной статическим способом линии влияния.

Рассмотрим кинематический способ на примере построения линии влияния опорной реакции однопролетной балки (рисунок 4.12а).

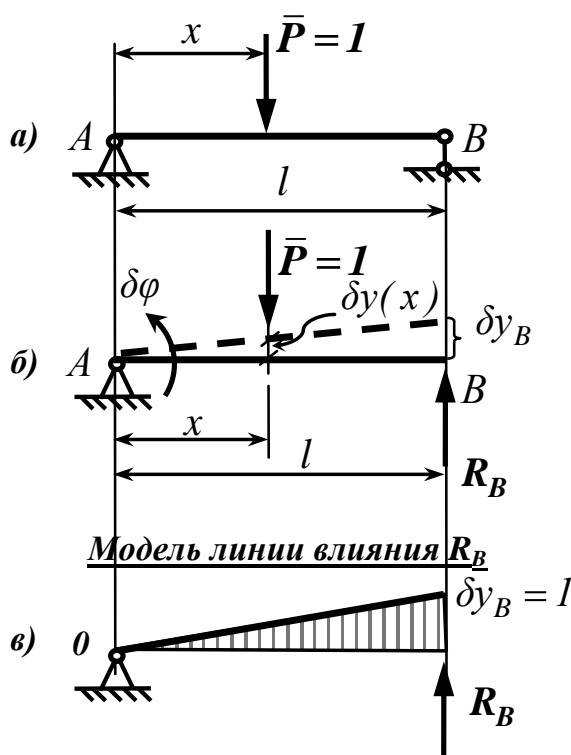


Рисунок 4.12

Согласно принципу возможных перемещений при равновесии системы с идеальными связями сумма возможных работ всех активных сил системы должна равняться нулю. Отбросив связь в точке B , заменим ее действие опорной реакцией R_B . Для полученного механизма с одной степенью свободы (рисунок 4.12б) возможным

является бесконечно малый поворот на угол $\delta\varphi$ относительно неподвижного шарнира A . Составим уравнением возможных работ:

$$R_B \delta y_B - \bar{P} \delta y_x = 0.$$

Отсюда,

$$R_B = \bar{P} \frac{\delta y_x}{\delta y_B} = \frac{\delta y_x}{\delta y_B}. \quad (4.15)$$

Выразив возможные перемещения точек приложения сил через возможный угол поворота $\delta\varphi$:

$$\delta y_x = x \delta\varphi; \quad \delta y_B = l \delta\varphi;$$

и подставив в выражение (4.15), получим:

$$R_B = \frac{\delta y_x}{\delta y_B} = \frac{x \delta\varphi}{l \delta\varphi} = \frac{x}{l}.$$

Результат совпадает с выражением (4.1), полученным ранее статическим способом.

Заметим также, что в выражении (4.15) возможное перемещение точки приложения единичной силы δy_x – функция координаты x , а возможное перемещение точки приложения опорной реакции δy_B – величина, не зависящая от этой координаты. Следовательно, величина опорной реакции R_B прямо пропорциональна возможному перемещению δy_x с постоянным множителем $\left(\frac{1}{\delta y_B} \right)$. Иначе говоря,

эпюра возможных перемещений механизма, полученного отбрасыванием связи в точке B , с точностью до постоянного множителя совпадает с линией влияния опорной реакции R_B (является ее *моделью*). Если принять величину $\delta y_B = 1$, то эпюра возможных перемещений будет полностью совпадать с линией влияния R_B (рисунок 4.12в).

Таким образом, для построения *модели* линии влияния какого-либо силового фактора кинематическим способом, необходимо:

- отбросить связь, усилие в которой требуется определить;
- заменить действие отброшенной связи ее положительно направленной реакцией (искомым усилием);
- задать полученному механизму с одной степенью свободы такое возможное перемещение, чтобы искомое усилие совершало положительную работу;
- эпюра возможных перемещений точек полученного механизма будет являться моделью линии влияния соответствующего силового фактора.

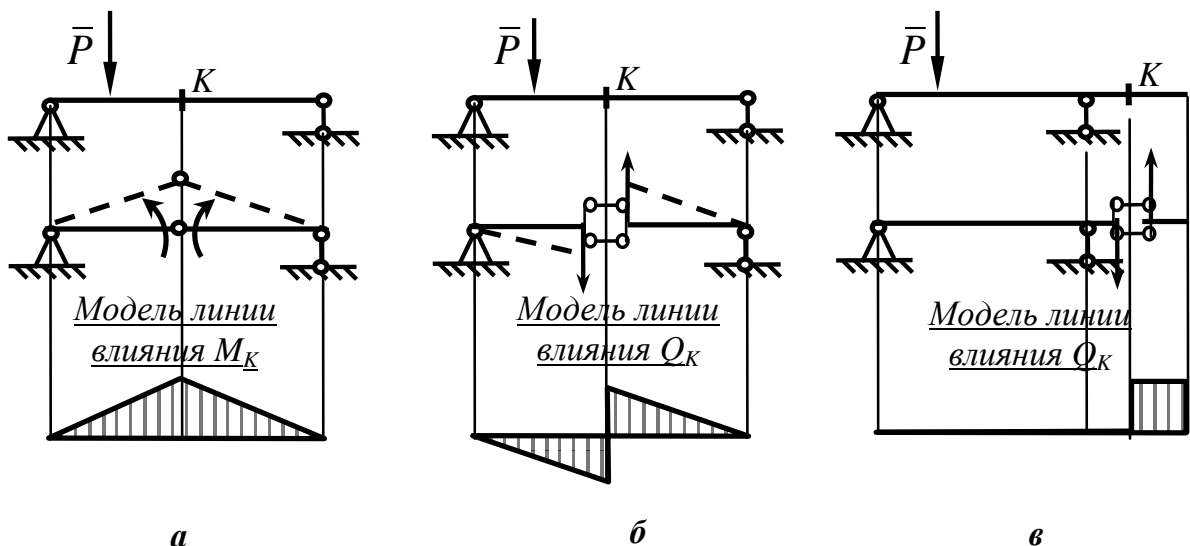


Рисунок 4.13

Например, для построения модели линии влияния изгибающего момента в каком-либо сечении балки нужно отбросить связь, препятствующую взаимному повороту сечений, т.е. ввести шарнир (рисунок 4.13а). Модели линий влияния поперечной силы для двух сечений балки изображены на рисунке 4.13б, в.

Примеры построения моделей линий влияния кинематическим способом для многопролетных статически определимых балок показаны на рисунке 4.14а, б.

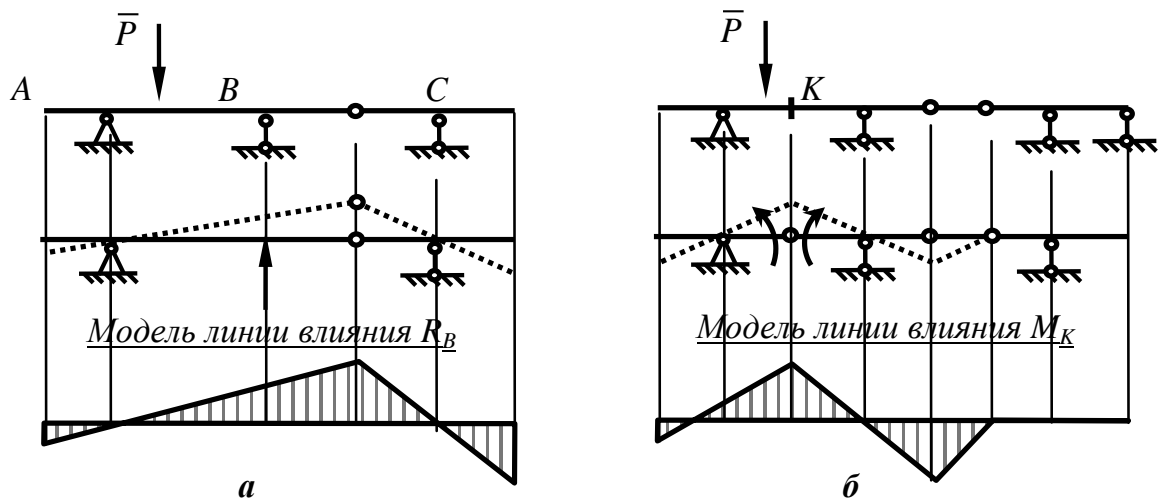


Рисунок 4.14

5 Расчет трехшарнирных арок и рам

5.1 Общие сведения о распорных системах. Классификация арок

Использование балок для перекрытия больших пролетов становится нецелесообразным в связи с тем, что их поперечное сечение в таких случаях достигает значительных размеров, а значит, балки имеют большой собственный вес. С этой точки зрения более выгодными оказываются арочные конструкции.

Аркой называется система криволинейного или ломаного очертания, в опорных устройствах которой от вертикальной внешней нагрузки возникают как вертикальные, так и горизонтальные реакции (рисунок 5.1).

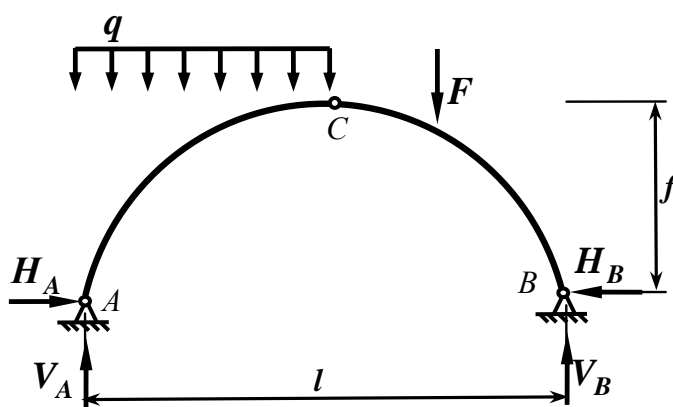


Рисунок 5.1

Горизонтальные составляющие опорных реакций называются *распором*, таким образом, арки относятся к *распорным системам*.

Используется несколько характерных наименований частей арки. Опорные устройства арки называются *пятами*, а опорные шарниры A и B – соответственно *пятовыми*. Шарнир C, соединяющий две части трехшарнирной арки, называется *ключевым шарниром*, или *замком*. Расстояние l между центрами пятовых шарниров называют *пролетом* арки, а расстояние f от замка до прямой, соединяющей центры пятовых шарниров, – *стрелой подъема*.

Опоры арки обычно располагаются на одной высоте. Если же опоры арки располагаются на разных уровнях, арка называется *ползучей*.

Наличие распора требует устройства массивных опор. Если по каким-либо причинам это невозможно (или опоры оказываются слишком массивными), в арке устраивается *затяжка*. Затяжка может располагаться на уровне опор (рисунок 5.2а), выше (рисунок 5.2б, в), или ниже (рисунок 5.2в) опор. В некоторых случаях, например для устройства подвесных потолков, затяжка имеет ломаное очертание и дополняется подвесками (рисунок 5.2в, г).

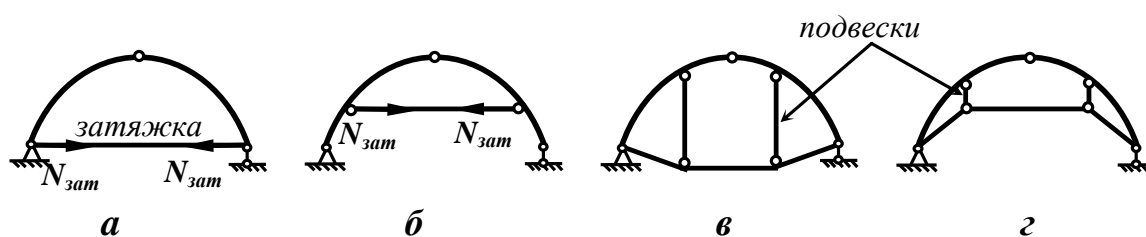


Рисунок 5.2

При наличии затяжки, воспринимающей распор, одна из опор арки выполняется шарнирно-подвижной.

Арки классифицируются по следующим признакам:

1 По очертанию оси различают круговые, параболические, синусоидальные, эллипсоидальные, стрельчатые и т.п.

2 По виду материала – металлические, деревянные, железобетонные и т.п.

3 По конструктивной форме – сплошные массивные, сплошные тонкостенные, решетчатые.

4 По относительной стреле подъема (отношению стрелы подъема f к пролету арки l) – пологие ($f/l = 0,1 \dots 0,2$), нормальные ($f/l = 0,2 \dots 0,3$), подъемистые ($f/l > 0,3$).

5 По числу шарниров в расчетной схеме – трехшарнирные, двухшарнирные, бесшарнирные.

Трехшарнирная арка (рисунок 5.3а) статически определима, удобна при монтаже и перевозке (в виде полуарок), однако, наиболее материалоемка. Двухшарнирная арка (рисунок 5.3б) один раз статически неопределима, отличается более равномерным распределением изгибающих моментов по своей длине. Однако, такая арка менее удобна при транспортировке и сложна при монтаже. Бесшарнирная арка (рисунок 5.3в) трижды статически неопределима. Такие арки, как правило, получаются более легкими, чем трехшарнирные. Вместе с тем бесшарнирные арки, как любые статически неопределимые системы, чувствительны к осадкам опор, колебаниям температуры и сложны в изготовлении, перевозке и монтаже.

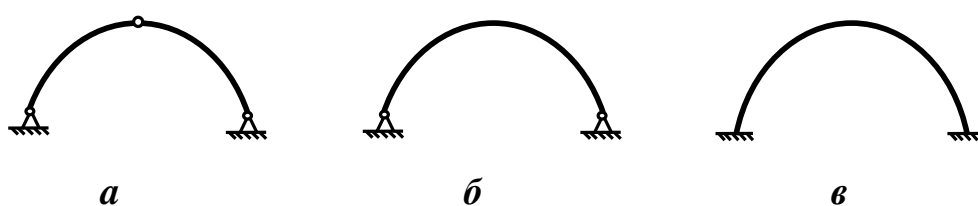


Рисунок 5.3

Арки имеют в строительстве весьма обширную область применения: они используются для перекрытия больших пролетов гражданских, промышленных, сельскохозяйственных, спортивных, мостовых и других сооружений, а также в составе пространственных перекрытий в качестве диафрагм оболочек.

5.2 Аналитический метод расчета трехшарнирных арок

Рассмотрим трехшарнирную арку с опорами на одном уровне при действии вертикальной внешней нагрузки (рисунок 5.4а).

1 Определение опорных реакций арки

а) Для определения *вертикальных составляющих опорных реакций арки* составим уравнения моментов действующих сил относительно опорных шарниров:

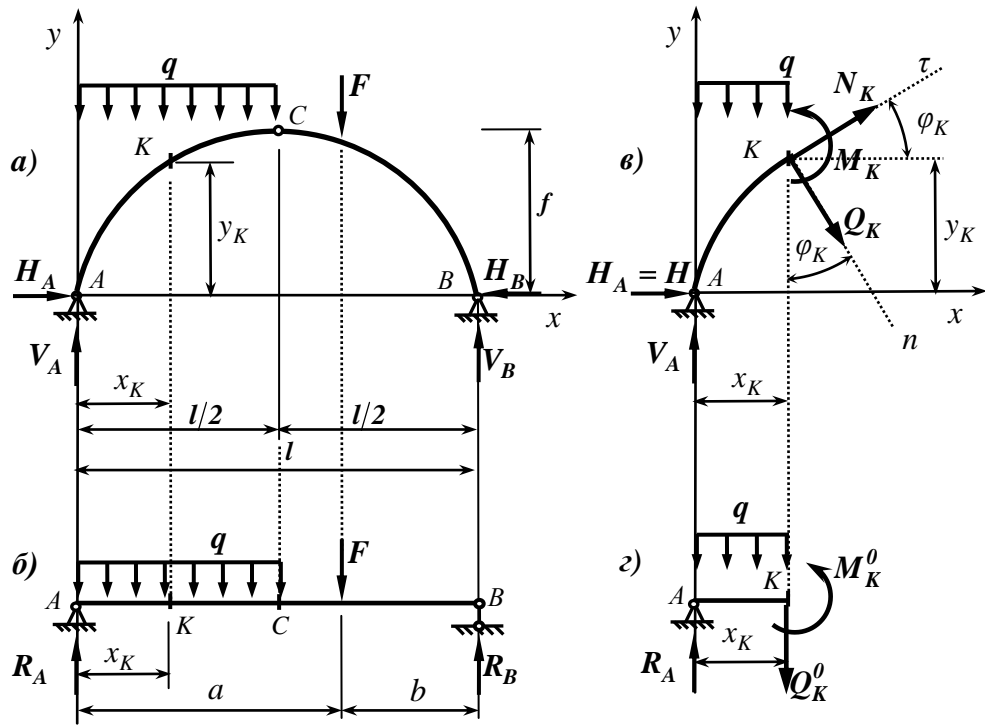


Рисунок 5.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} V_B l - q \frac{l^2}{8} - Fa = 0; \\ q \frac{3l^2}{8} + Fb - V_A l = 0. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Заметим, что уравнения (5.1) совпадают с уравнениями, которые можно составить для определения реакций эквивалентной балки с такой же нагрузкой и таким же пролетом (рисунок 5.4б):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} R_B l - q \frac{l^2}{8} - Fa = 0; \\ q \frac{3l^2}{8} + Fb - R_A l = 0. \end{array} \right.$$

Таким образом, *для арки с опорами на одном уровне при действии только вертикальной нагрузки вертикальные составляющие опорных реакций равны соответствующим реакциям эквивалентной балки:*

$$V_A = R_A, \quad V_B = R_B. \quad (5.2)$$

б) Из уравнения проекций действующих сил на горизонтальную ось имеем:

$$\sum X = 0; \quad H_A - H_B = 0; \quad H_A = H_B = H.$$

Таким образом, *при действии только вертикальной нагрузки горизонтальные составляющие опорных реакций арки (распоры) равны между собой.*

Для определения распора рассмотрим равновесие одной из частей арки (левой или правой). Составляя уравнение моментов, например, для левой части арки относительно ключевого шарнира C , получим:

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad Hf + q \frac{l^2}{8} - V_A \frac{l}{2} = 0;$$

$$H = \frac{V_A \frac{l}{2} - q \frac{l^2}{8}}{f}. \quad (5.3)$$

Заметим, что выражение, стоящее в числителе (5.3), представляет собой изгибающий момент в сечении C эквивалентной балки (рисунок 5.4б), так называемый *балочный момент*. Обозначив

$$M_C^0 = V_A \frac{l}{2} - q \frac{l^2}{8},$$

представим выражение (5.3) в виде:

$$H = H_A = H_B = \frac{M_C^0}{f}, \quad (5.4)$$

где M_C^0 – балочный изгибающий момент в сечении C эквивалентной балки, соответствующем центру ключевого шарнира арки.

Отметим, что при наличии в арке затяжки, расположенной на уровне пятовых шарниров (рисунок 5.2а), усилие в затяжке определяется так же, как и распор в арке без затяжки:

$$N_{зат} = \frac{M_C^0}{f}. \quad (5.5)$$

Если трехшарнирная арка имеет повышенную затяжку (рисунок 5.2б), то усилие в затяжке определяется выражением

$$N_{зат} = \frac{M_C^0}{f - t}, \quad (5.6)$$

где t – расстояние от линии опор арки до затяжки.

2 Определение внутренних усилий в произвольном сечении арки

Для определения внутренних усилий, возникающих в произвольном сечении K с координатами x_K , y_K (рисунок 5.4а), проведем сквозное сечение арки и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рисунок 5.4в).

Из условия равенства нулю суммы моментов сил, действующих на левую отсеченную часть, имеем:

$$M_K = V_A x_K - q \frac{x_K^2}{2} - H y_K. \quad (5.7)$$

Обозначим

$$M_K^0 = V_A x_K - q \frac{x_K^2}{2}, \quad (5.8)$$

где M_K^0 – балочный изгибающий момент в сечении K эквивалентной балки (рисунок 5.4з).

С учетом обозначения (5.8) *изгибающий момент в сечении K арки* равен

$$M_K = M_K^0 - H y_K. \quad (5.9)$$

Выражение для поперечной силы, действующей в рассматриваемом сечении K , получим из уравнения проекций сил на нормаль n к оси арки:

$$Q_K - V_A - q x_K \cos \varphi_K + H \sin \varphi_K = 0, \quad (5.10)$$

где φ_K – угол между касательной τ , проведенной к оси арки в сечении K , и положительным направлением оси x (рисунок 5.4в).

Обозначим

$$Q_K^0 = V_A - q x_K, \quad (5.11)$$

где Q_K^0 – балочная поперечная сила в сечении K эквивалентной балки (рисунок 5.4з).

С учетом обозначения (5.11) *поперечная сила в сечении K арки* равна

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K. \quad (5.12)$$

Выражение для продольной силы, действующей в рассматриваемом сечении K , получим из уравнения проекций сил на касательную τ к оси арки:

$$N_K + V_A - qx_K \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K = 0. \quad (5.13)$$

С учетом обозначения (5.11) **продольная сила в сечении K арки** равна

$$N_K = -[Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K]. \quad (5.14)$$

При использовании формул (5.9), (5.12) и (5.14) для вычисления внутренних усилий в сечениях, расположенных на правой части арки, следует иметь в виду, что угол наклона касательной φ_K будет отрицательным, т.е. $\sin \varphi_K < 0$.

Для трехшарнирной арки с повышенной затяжкой, расположенной на высоте t над уровнем опор, внутренние усилия будут соответственно равны:

– для сечений, расположенных ниже затяжки:

$$M_K = M_K^0, \quad Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K, \quad N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K.$$

– для сечений, расположенных выше затяжки:

$$M_K = M_K^0 - N_{зам} y_K - t, \quad Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - N_{зам} \sin \varphi_K,$$

$$N_K = -[Q_K^0 \sin \varphi_K + N_{зам} \cos \varphi_K].$$

Проанализировав выражения для вычисления внутренних усилий (5.9), (5.12) и (5.14), проведем *сравнение усилий, возникающих в сечениях арки и эквивалентной балки*:

– Изгибающий момент (5.9) в сечениях арки всегда меньше, чем в соответствующих сечениях эквивалентной балки. Чем круче ось арки, тем меньшие изгибающие моменты действуют в ее сечениях. Это позволяет проектировать арки меньшего поперечного сечения, чем балки.

– Поперечные силы (5.12) в сечениях арки значительно меньше балочных поперечных сил из-за влияния распора.

– В арке возникают значительные продольные силы (5.14), в то время как в балке продольных сил нет. Причем продольные усилия в арке тем меньше, чем круче арка.

5.3 Рациональное очертание оси трехшарнирной арки

Рациональным называется такое очертание оси арки, при котором изгибающие моменты во всех ее сечениях равны нулю.

Из выражения (5.9) имеем:

$$M_K = M_K^0 - H y_K = 0.$$

Подставляя формулу для определения распора (5.4), получим

$$y_K = \frac{M_K^0}{H} = \frac{M_K^0}{M_C^0} f.$$

Следовательно, уравнение рационального очертания оси арки будет иметь вид:

$$y = \frac{M^0}{M_C^0} x f. \quad (5.15)$$

В качестве примера найдем уравнение рационального очертания арки при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рисунок 5.5).

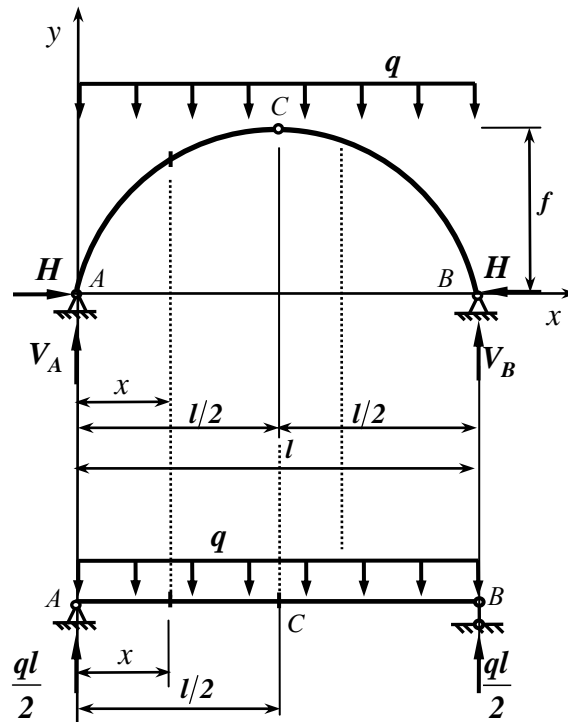


Рисунок 5.5

Балочные изгибающие моменты в сечении с координатой x и в сечении C , соответствующем центру ключевого шарнира арки, будут равны:

$$M^0(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}l - x, \quad (5.16)$$

$$M_C^0 = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}. \quad (5.17)$$

После подстановки выражений (5.16), (5.17) в уравнение (5.15) получим уравнение квадратной параболы:

$$y_x = \frac{\frac{qx}{2} l - x}{\frac{ql^2}{8}} f = \frac{4f}{l^2} x l - x . \quad (5.18)$$

Заметим, что уравнение (5.18) не содержит величины интенсивности равномерно распределенной нагрузки q .

5.4 Построение линий влияния усилий в трехшарнирной арке

5.4.1 Построение линий влияния опорных реакций

Как было установлено ранее (п. 5.2), вертикальные опорные реакции арки совпадают с опорными реакциями эквивалентной балки. Следовательно, *линии влияния вертикальных составляющих опорных реакций арки строятся так же, как линии влияния соответствующих реакций эквивалентной балки* (п. 4.2.1).

Для построения линии влияния распора воспользуемся полученным ранее аналитическим выражением для его вычисления (5.4), из которого следует, что линия влияния распора H отличается от линии влияния балочного изгибающего момента в сечении C постоянным множителем $1/f$.

Таким образом, *для построения линии влияния распора арки H необходимо построить линию влияния балочного изгибающего момента для сечения C* (п. 4.2.2), *а затем разделить все ее ординаты на стрелу подъема арки f .*

Линии влияния опорных реакций арки показаны на рисунке 5.6.

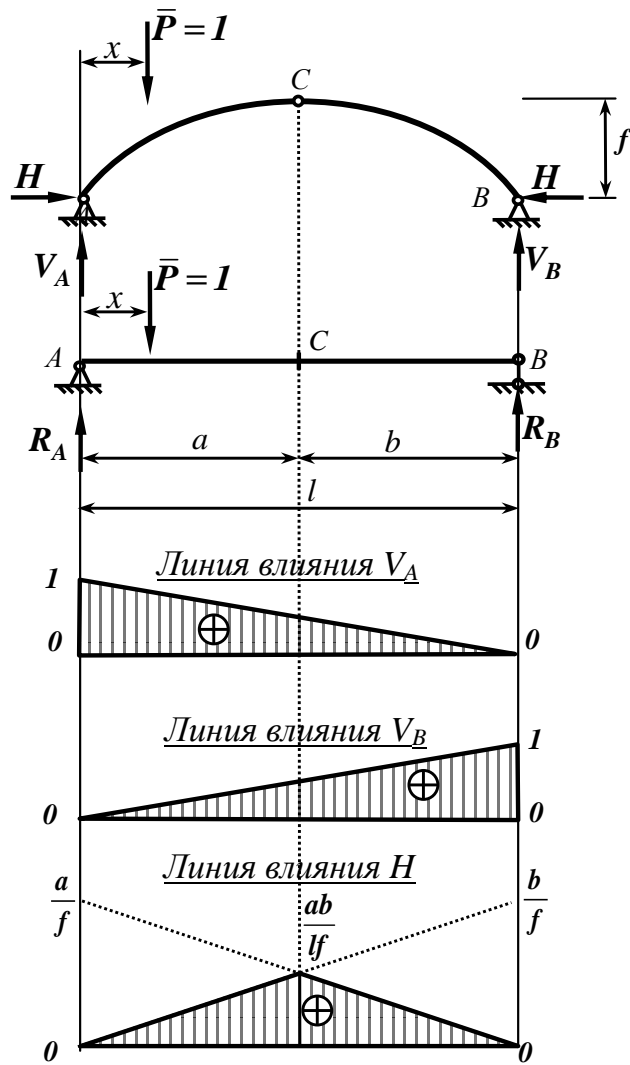


Рисунок 5.6

5.4.2 Построение линий влияния внутренних усилий

Для построения линий влияния внутренних усилий в произвольном сечении K арки с координатами x_K , y_K воспользуемся аналитическими выражениями для их вычисления (5.9), (5.12), (5.14).

Из этих выражений следует, что линии влияния (л. вл.) внутренних усилий для арки могут быть построены *способом наложения* (алгебраического сложения) балочных линий влияния и распора:

$$\begin{cases} \text{л. вл. } M_K = \text{л. вл. } M_K^0 - \text{л. вл. } H \cdot y_K; \\ \text{л. вл. } Q_K = \text{л. вл. } Q_K^0 \cdot \cos \varphi_K - \text{л. вл. } H \cdot \sin \varphi_K; \\ \text{л. вл. } N_K = - \left[\text{л. вл. } Q_K^0 \cdot \sin \varphi_K + \text{л. вл. } H \cdot \cos \varphi_K \right]. \end{cases} \quad (5.19)$$

Из выражения (5.19) для изгибающего момента M_K следует, что **для построения линии влияния изгибающего момента в произвольном сечении арки необходимо построить линию влияния балочного изгибающего момента M_K^0** (п. 4.2.2) в соответствующем сечении эквивалентной балки, а затем из полученных ординат вычесть ординаты линии влияния распора H (п. 5.4.2), умноженные на ординату сечения y_K (рисунок 5.7).

Характерные ординаты линии влияния изгибающего момента M_K получают алгебраическим сложением (вычитанием) соответствующих ординат линий влияния M_K^0 и распора H , умноженного на ординату сечения y_K .

Из выражения (5.19) для поперечной силы Q_K следует, что **для построения линии влияния поперечной силы в произвольном сечении арки необходимо:**

- **построить линию влияния балочной поперечной силы Q_K^0** (п. 4.2.3) в соответствующем сечении эквивалентной балки и умножить ее ординаты на $\cos \varphi_K$;
- **построить линию влияния распора H** (п. 5.4.2), умножить ее ординаты на $\sin \varphi_K$ и изменить знак на противоположный;
- **сложить построенные линии влияния с учетом знаков, определив ординаты характерных точек.**

Линия влияния поперечной силы в произвольном сечении арки представлена на рисунке 5.8.

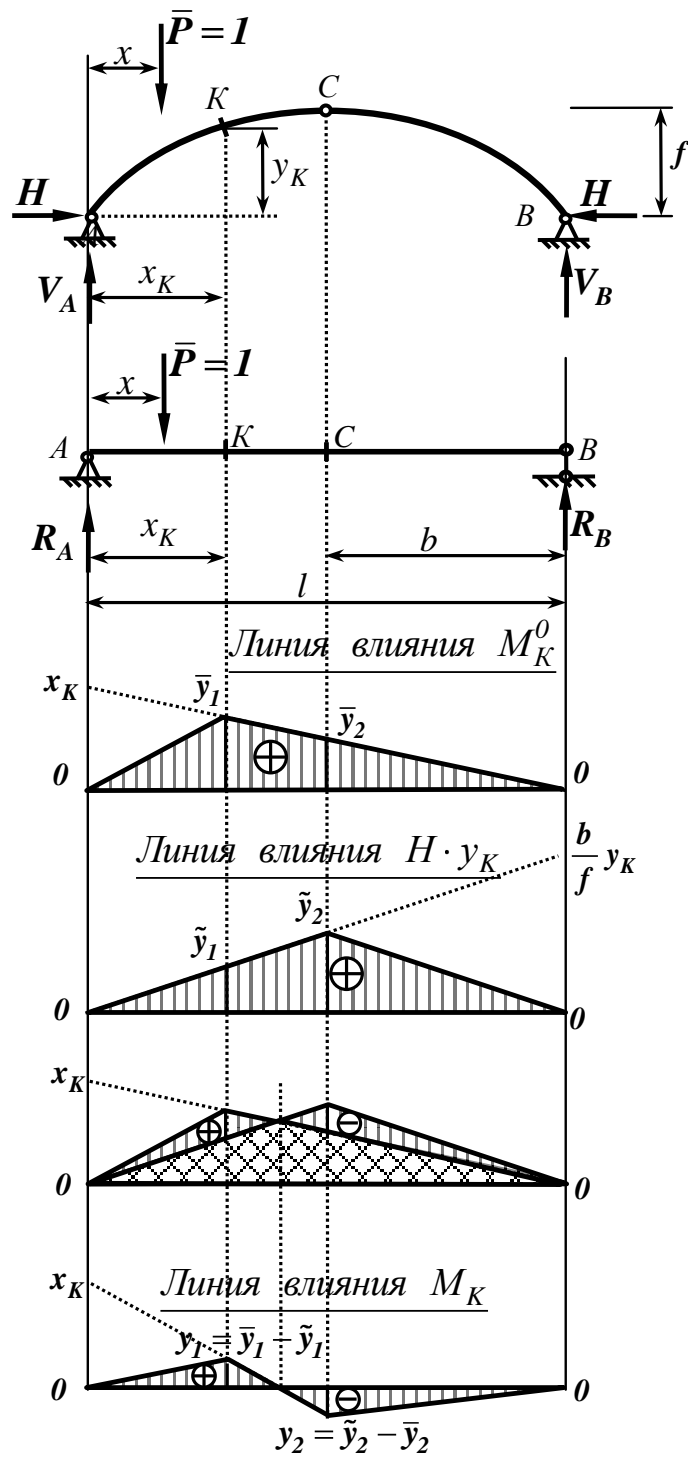


Рисунок 5.7

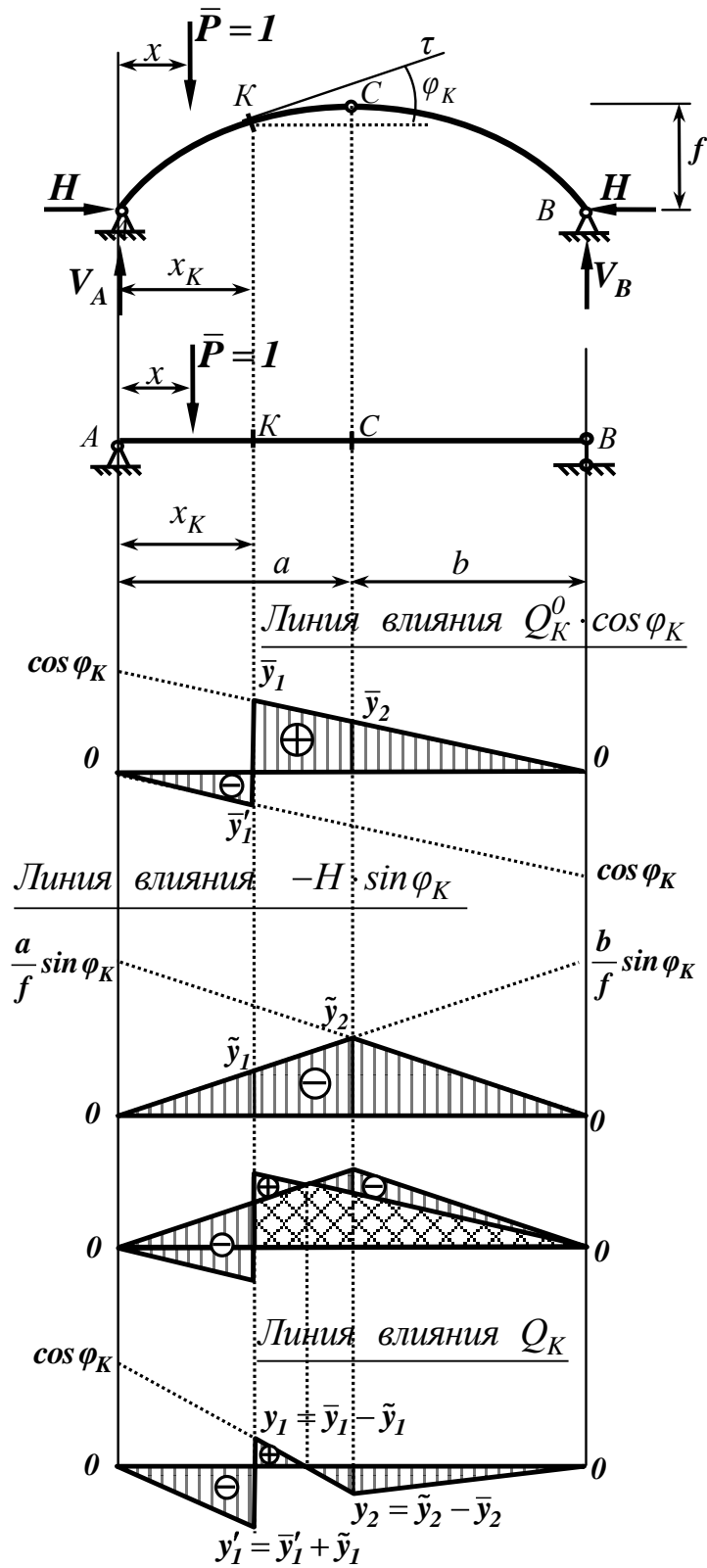


Рисунок 5.8

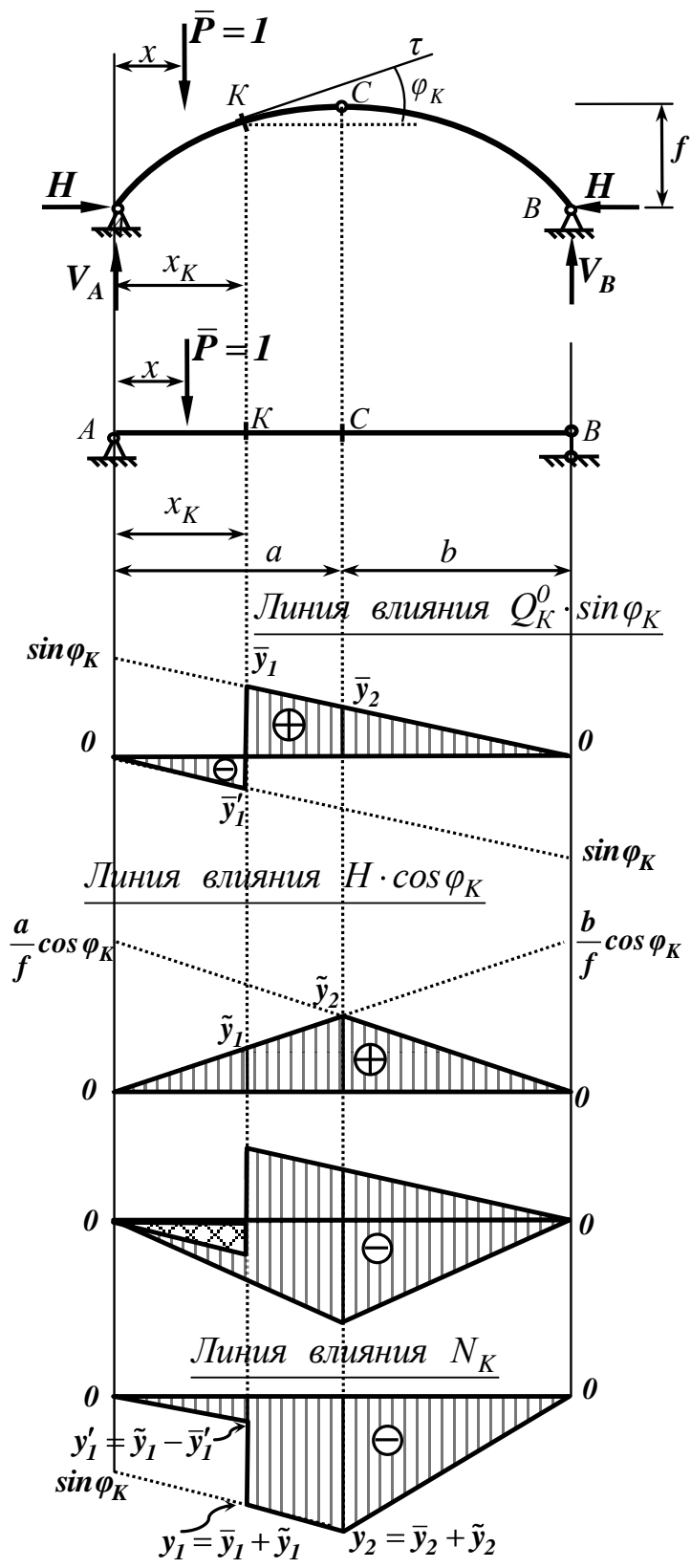


Рисунок 5.9

Из выражения (5.19) для продольной силы N_K следует, что *для построения линии влияния продольной силы в произвольном сечении арки необходимо:*

– построить линию влияния балочной поперечной силы Q_K^0 (п. 4.2.3) в соответствующем сечении эквивалентной балки и умножить ее ординаты на $\sin \varphi_K$;

– построить линию влияния распора H (п. 5.4.2) и умножить ее ординаты на $\cos \varphi_K$;

– сложить построенные линии влияния с учетом знаков, изменить знак на противоположный и определить ординаты характерных точек.

Линия влияния продольной силы в произвольном сечении арки представлена на рисунке 5.9.

5.5 Построение линий влияния внутренних усилий в трехшарнирной арке способом нулевых точек

Рассмотрим другой способ построения линий влияния внутренних усилий в сечениях арки, связанный с отысканием таких положений единичной силы $\bar{P} = 1$ на арке, при котором исследуемый силовой фактор (изгибающий момент, поперечная сила или продольная сила) равны нулю. Иначе говоря, данный способ связан с отысканием на линиях влияния нулевых точек (нулевых ординат). Очевидно, что к таким точкам относятся опорные шарниры арки. Кроме этого на линиях влияния имеются и другие нулевые точки. Остановимся подробнее на отыскании координат таких точек для различных линий влияния.

5.5.1 Линия влияния изгибающего момента

Пусть на трехшарнирную арку (рисунок 5.10) действуют три внешние силы: опорные реакции R_A , R_B и единичная сила \bar{P} . Из рассмотрения равновесия части арки, расположенной левее сечения K , приходим к заключению, что изгибающий момент M_K равен нулю только в том случае, когда линия действия опорной реакции R_A проходит через сечение K . С другой стороны, из условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно шарнира C для правой части арки следует, что линия действия реакции R_B должна проходить через центр ключевого шарнира C .

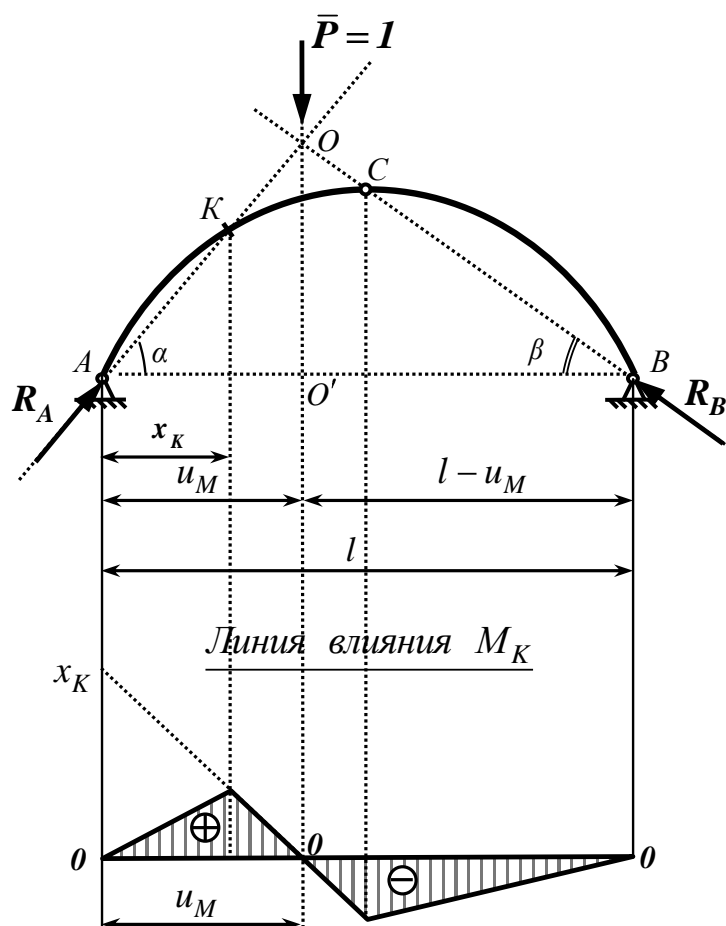


Рисунок 5.10

По теореме о трех непараллельных силах из курса теоретической механики арка будет находиться в равновесии под действием опорных реакций R_A , R_B и единичной силы \bar{P} только в том случае, если линии действия этих сил пересекаются в одной точке. Следовательно, линия действия единичной силы \bar{P} должна проходить через точку пересечения опорных реакций.

Таким образом, положение точки O на рисунке 5.10 определяет положение нулевой точки на линии влияния изгибающего момента M_K . Координату этой точки u_M найдем из простых геометрических соображений.

С одной стороны, из треугольника AOO' имеем:

$$OO' = u_M \cdot \operatorname{tg}\alpha. \quad (5.20)$$

С другой стороны из треугольника BOO' :

$$OO' = l - u_M \operatorname{tg}\beta. \quad (5.21)$$

Приравнивая правые части (5.20) и (5.21), после преобразований получим

$$u_M = \frac{l \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}. \quad (5.22)$$

Найдя по известным координатам сечения значение абсциссы нулевой точки из формулы (5.22), можно легко построить линию влияния изгибающего момента M_K (рисунок 5.10).

5.5.2 Линия влияния поперечной силы

Пусть на трехшарнирную арку (рисунок 5.11) действуют три внешние силы: опорные реакции R_A , R_B и единичная сила \bar{P} . Поперечная сила Q_K будет равна нулю только в том случае, когда линия действия опорной реакции R_A параллельна касательной τ , проведенной к оси арки через сечение K . Из условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно шарнира C для правой части арки следует, что линия действия реакции R_B проходит через центр ключевого шарнира C .

По теореме о трех непараллельных силах для равновесия арки необходимо, чтобы линии действия опорных реакций R_A , R_B и единичной силы \bar{P} пересекались в одной точке.

Таким образом, положение точки O на рисунке 5.11 определяет положение нулевой точки на линии влияния поперечной силы Q_K . Найдем координату этой точки u_Q .

Из треугольника AOO' имеем:

$$OO' = u_Q \cdot \operatorname{tg} \varphi_K, \quad (5.23)$$

где φ_K – угол наклона касательной τ , проведенной к оси арки в сечении K .

С другой стороны, из треугольника BOO' :

$$OO' = l - u_Q \operatorname{tg} \beta. \quad (5.24)$$

Приравнивая правые части (5.23) и (5.24), после преобразований получим

$$u_Q = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varphi_K + \operatorname{tg} \beta}. \quad (5.25)$$

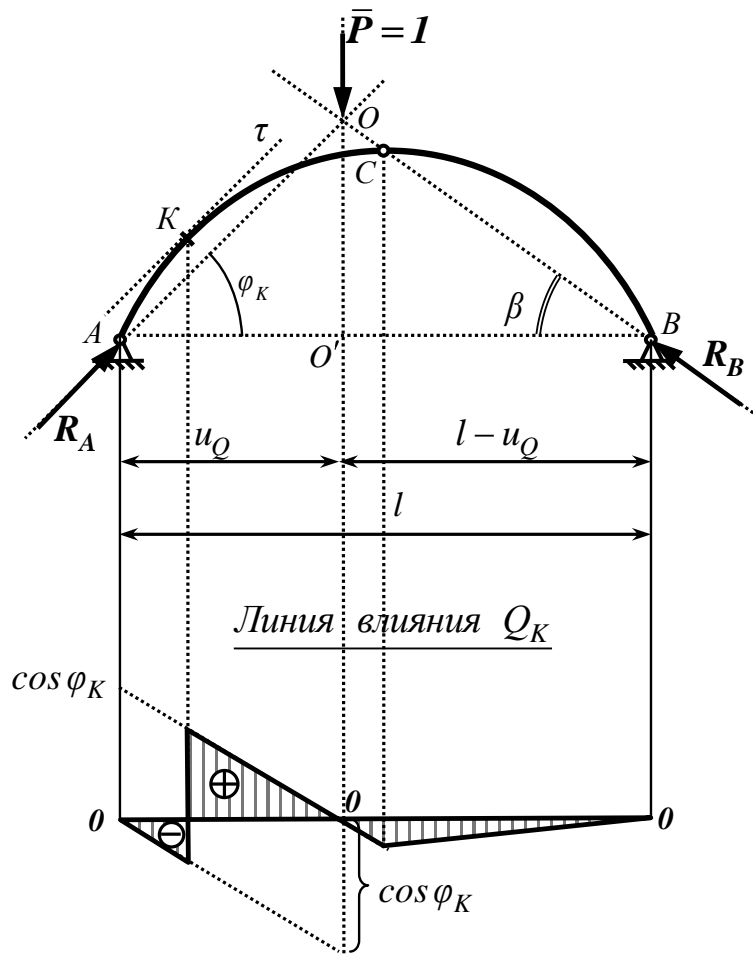


Рисунок 5.11

Определив значение абсциссы нулевой точки по формуле (5.25), можно легко построить линию влияния поперечной силы Q_K (рисунок 5.11).

5.5.3 Линия влияния продольной силы

Пусть на трехшарнирную арку (рисунок 5.12) действуют три внешние силы: опорные реакции R_A , R_B и единичная сила \bar{P} . Продольная сила N_K будет равна нулю только в том случае, когда линия действия опорной реакции R_A будет перпендикулярна касательной τ , проведенной к оси арки через сечение K . Из условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно шарнира C для правой части арки следует, что линия действия реакции R_B проходит через центр ключевого шарнира C .

По теореме о трех непараллельных силах для равновесия арки необходимо, чтобы линии действия опорных реакций R_A , R_B и единичной силы \bar{P} пересекались в одной точке. Таким образом, положение точки O на рисунке 5.12 определяет положение нулевой точки на линии влияния продольной силы N_K . Найдем координату этой точки u_N .

Из треугольника AOO' имеем:

$$OO' = u_N \cdot \operatorname{ctg} \varphi_K, \quad (5.26)$$

где φ_K – угол наклона касательной τ , проведенной к оси арки в сечении K .

С другой стороны, из треугольника BOO' :

$$OO' = l + u_N \operatorname{tg} \beta. \quad (5.27)$$

Приравнивая правые части (5.26) и (5.27), после преобразований получим

$$u_N = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \varphi_K}. \quad (5.28)$$

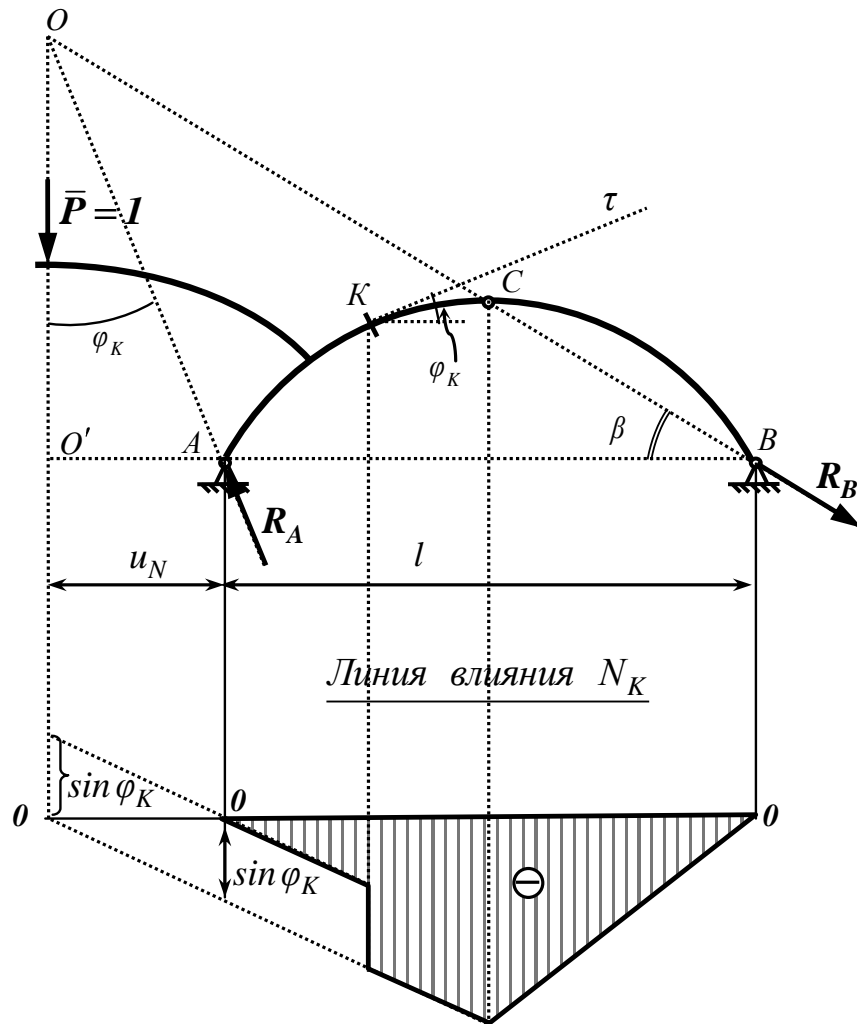


Рисунок 5.12

Заметим, что в формуле (5.28) знак был изменен на противоположный, так как абсцисса нулевой точки в рассматриваемом случае должна быть отрицательной.

Определив значение абсциссы нулевой точки по формуле (5.28), можно легко построить линию влияния продольной силы N_K (рисунок 5.12).

5.6 Особенности расчета рам с замкнутым контуром

В ряду статически определимых систем встречаются расчетные схемы рам с замкнутым контуром, которые состоят из трех стержней различного (прямолинейного или ломаного) очертания, связанных между собой тремя шарнирами.

Различают замкнутые контуры двух типов. Замкнутый контур *первого типа* содержит один свободный от внешней нагрузки прямолинейный стержень с шарнирными окончаниями (рисунок 5.13). В замкнутом контуре *второго типа* все стержни имеют ломаное очертание, или имеется один прямолинейный стержень с поперечной внешней нагрузкой.

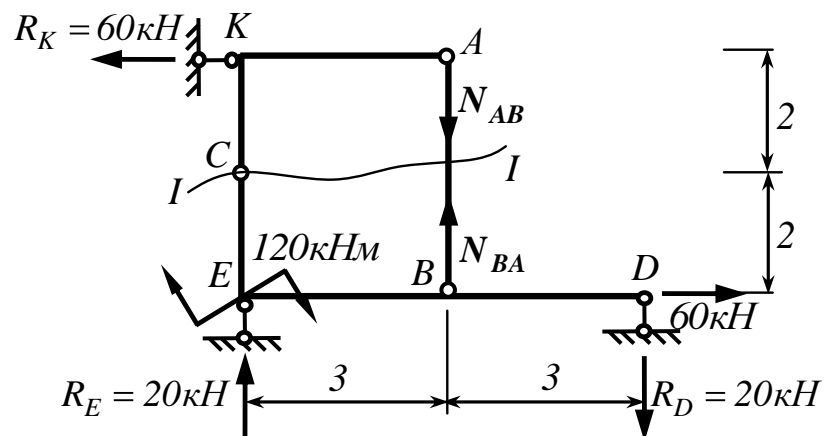


Рисунок 5.13

После определения усилия в затяжке N_{AB} строятся эпюры внутренних силовых факторов, возникающих в раме от действия внешней нагрузки и вычисленных реакций, как в обычной статически определимой системе.

Замкнутый контур второго типа раскрывается путем расчленения системы на три отдельных диска или выделения трехшарнирной рамы (рисунки 5.14 и 5.15).

Независимо от типа замкнутого контура расчет рамы начинается с определения опорных реакций из условий равновесия рамы в целом. Затем в контуре первого

типа (рисунок 5.13) можно провести сквозное сечение $I - I$, проходящее через стержень AB и шарнир C . Стержень AB служит затяжкой в трехшарнирной раме. Продольную силу N_{AB} , возникающую в затяжке, можно вычислить из уравнения моментов сил относительно шарнира C для верхней части рамы AKC :

$$\sum M_C = 0; \quad 60 \cdot 2 - 3N_{AB} = 0; \quad N_{AB} = 40 \text{ кН}.$$

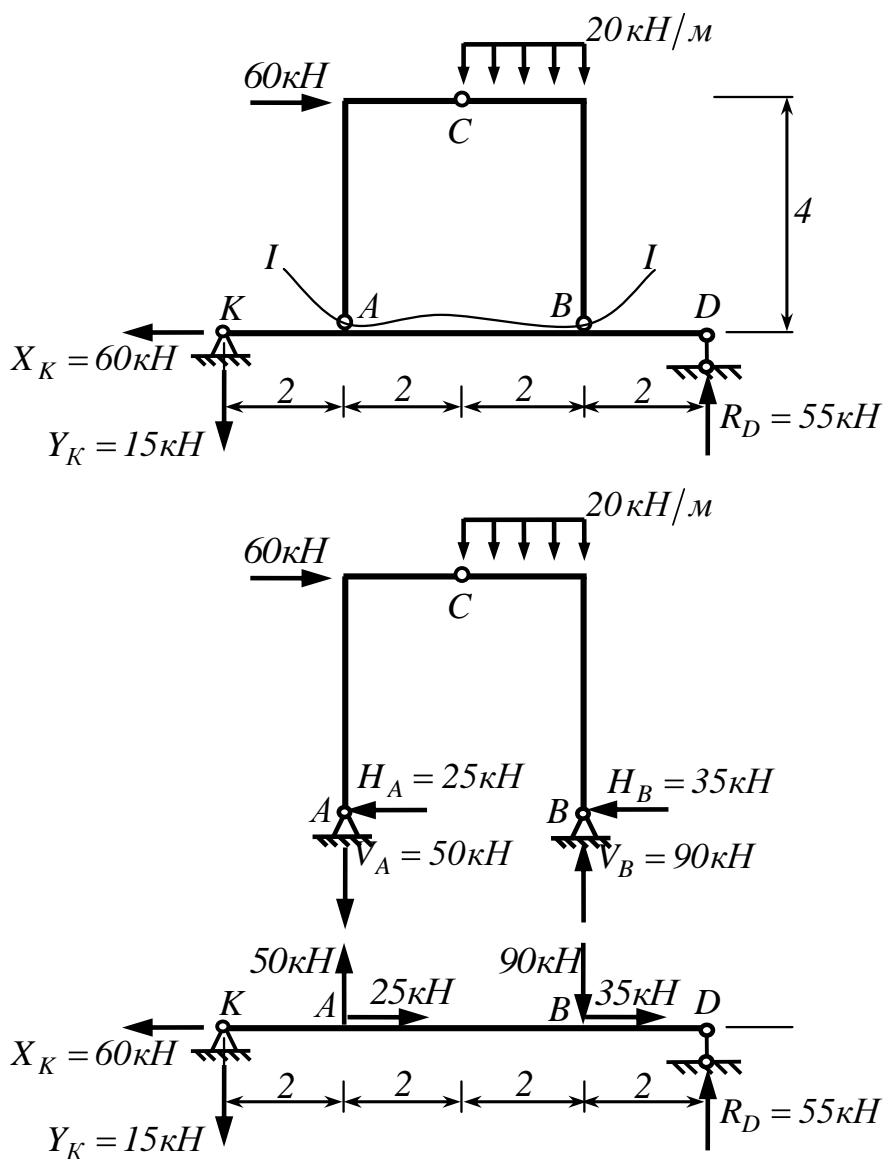


Рисунок 5.14

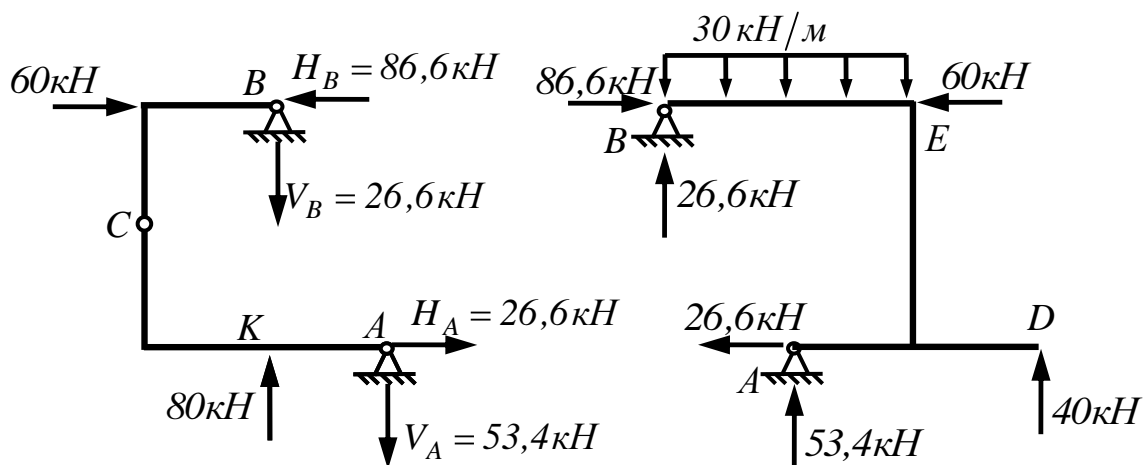
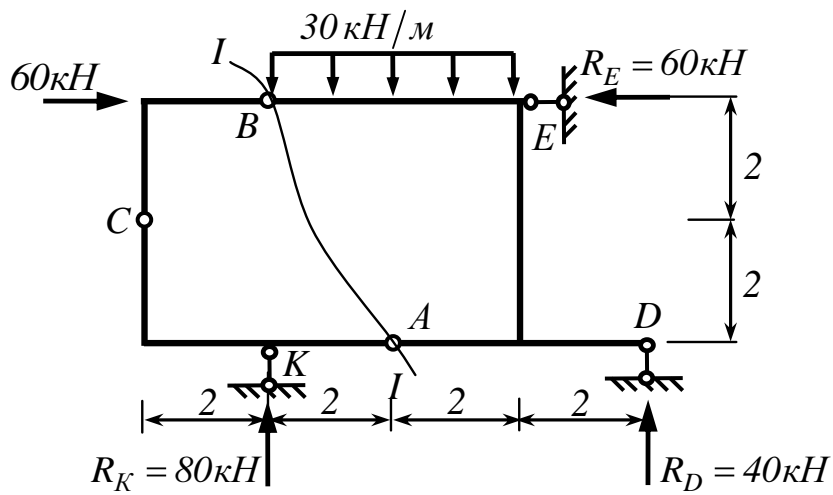


Рисунок 5.15

6 Расчет плоских статически определимых ферм

6.1 Общие сведения о фермах. Классификация ферм

Фермой называется стержневая система, которая остается геометрически неизменяемой после условной замены ее реальных жестких узлов идеальными шарнирами.

В действительности элементы реальных ферм соединяются, как правило, жестко. Например, в металлических фермах – сварными швами, заклепками или болтами. В железобетонных фермах узлы изготавливаются одновременно с самими элементами и составляют с ними единое целое. Однако, как показывают проведенные исследования деформации, усилия, напряжения в элементах реальных ферм с жесткими узлами незначительно отличаются от соответствующих значений этих факторов, найденных по расчетной схеме фермы с идеальными шарнирами, поэтому такая замена допустима. Фермы проектируют под узловую нагрузку, передающуюся на узлы фермы, например, через систему вспомогательных балок. Кроме того, по сравнению с величиной внешней нагрузки, приложенной в узлах фермы, собственным весом элементов ферм можно пренебречь. При принятых допущениях элементы фермы будут работать только на растяжение (сжатие), что обеспечивает более полное использование несущей способности материала фермы по сравнению с балками.

Основное назначение ферм то же, что и балок, но фермы более экономичны при перекрытии больших пролетов, чем балки со сплошной стенкой.

Если оси всех стержней фермы и внешние силы, приложенные в ее узлах, лежат в одной плоскости, то ферма называется *плоской*. Плоские фермы широко используются при строительстве мостов, промышленных зданий и т.п.

Совокупность стержней, окаймляющих ферму сверху и снизу, называют соответственно *верхним и нижним поясами* фермы (рисунок 6.1).

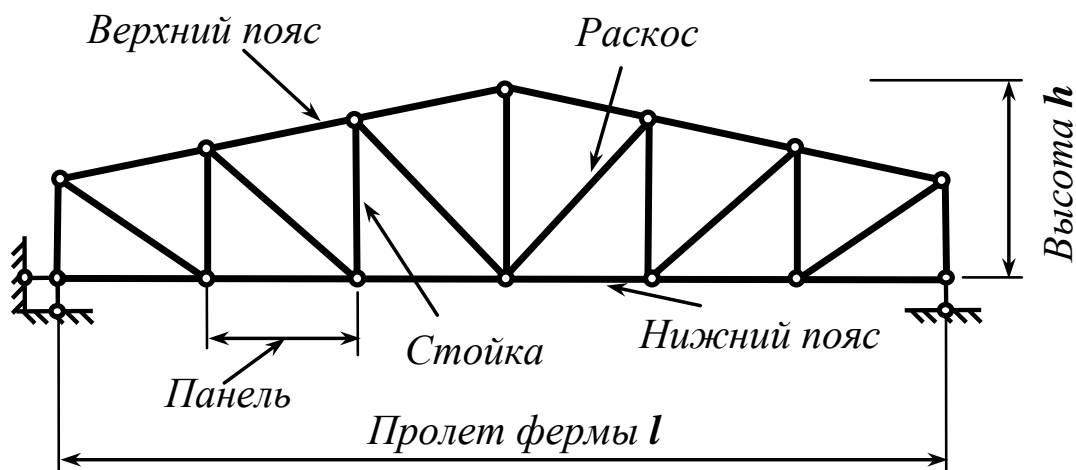


Рисунок 6.1

Стержни, соединяющие пояса между собой, образуют *решетку фермы*. Сюда входят *раскосы* и *стойки*. Расстояние между соседними узлами одного пояса называется *панелью* фермы.

Простейшими называются фермы, образованные из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения узлов с помощью двух стержней (диад). Такие фермы геометрически неизменяемы и статически определимы.

Классификация ферм может быть проведена по нескольким признакам:

1 По назначению различают фермы мостовые, стропильные, подстропильные, крановые, мачтовые и т.п.

2 По очертанию поясов различают фермы с параллельными поясами, полигональные, трапецеидальные, треугольные и т.п.

3 По типу решетки фермы различают фермы с треугольной решеткой, с раскосной, полураскосной, ромбической решеткой и т.п.

4 По типу опирания различают фермы балочные, консольные, арочные и т.п.

5 По направлению опорных реакций, вызываемых действием вертикальной нагрузки:

– безраспорные (балочные, консольные, консольно-балочные) фермы, в которых от действия вертикальной внешней нагрузки возникают только вертикальные реакции;

– распорные (арочные, висячие, комбинированные) фермы, в которых действие вертикальной внешней нагрузки вызывает появление горизонтальных составляющих опорных реакций (распора).

б По статическому признаку: простейшие, сложные, статически определимые, статически неопределимые и т.п.

Оптимальная высота фермы h из условия минимальной массы и требуемой жесткости составляет $(0,2...0,25)$ пролета l . При одинаковой высоте наибольшую жесткость имеет ферма с параллельными поясами, наименьшую – треугольная. Рекомендуемые рациональные соотношения h/l для ферм различного очертания:

- фермы с параллельными поясами $h/l = 1/8...1/12$;
- фермы полигональные и сегментные $h/l = 1/6...1/10$;
- треугольные фермы $h/l = 1/4...1/6$.

6.2 Аналитические способы определения усилий в элементах простейших ферм

Различают аналитические и графические способы определения усилий в стержнях. Аналитические способы базируются на методе сечений. К ним относятся способ вырезания узлов, способ проекций, способ моментной точки. Перечисленные способы подробно рассматриваются в курсе теоретической механики, причем два последних объединяются общим названием – *способ Риттера* (или способ сечений). Для сложных ферм используются также способ замкнутого сечения, способ замены стержней, способ совместных (нескольких) сечений и т.д.

В общем случае расчет ферм начинается с определения опорных реакций из уравнений равновесия всей фермы в целом. Внутренние усилия определяются из рассмотрения равновесия отдельных узлов или частей фермы под действием внешних нагрузок и усилий в рассеченных стержнях. Уравнения равновесия следует со-

ставлять так, чтобы усилия в элементах фермы определялись наиболее просто, по возможности независимо друг от друга.

6.2.1 Способ вырезания узлов

Этот способ заключается в последовательном отсечении от фермы ее узлов и рассмотрении равновесия каждого из них под действием внешней узловой нагрузки и реакций разрезанных стержней. Реакции отсеченных стержней направляют в общем случае *от узла*, считая стержни *растянутыми*. Расчет начинают с узла, в котором сходится только два стержня. Усилия в стержнях определяют, используя уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил, действующей на вырезанный узел:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases}$$

Если в результате вычислений значения усилий в стержнях получаются отрицательными, то это означает, что соответствующие стержни сжаты. Следующим рассматривается узел, в котором может сходиться произвольное число стержней, но усилия неизвестны только в двух из них. Переходя последовательно от узла к узлу, вычисляют усилия во всех стержнях фермы.

Пример 6.1

Определить усилия в стержнях фермы, изображенной на рисунке 6.2а.

1 Определение реакций опор

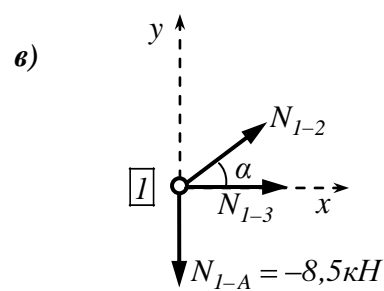
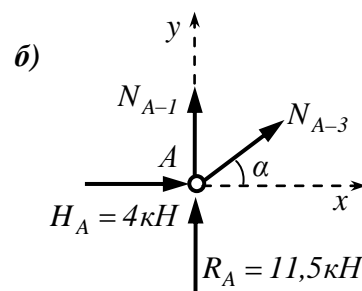
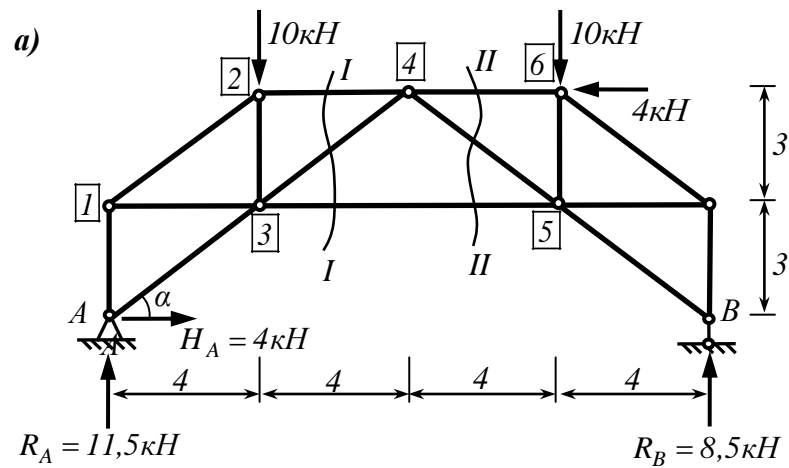


Рисунок 6.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} H_A - 4 = 0; \\ 16R_B - 4 \cdot 10 - 12 \cdot 10 + 6 \cdot 4 = 0; \\ 4 \cdot 10 + 12 \cdot 10 + 6 \cdot 4 - 16R_A = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} H_A = 4 \text{ кН}; \\ R_B = \frac{40 + 120 - 24}{16} = 8,5 \text{ кН}; \\ R_A = \frac{40 + 120 + 24}{16} = 11,5 \text{ кН}. \end{array} \right.$$

2 Определение усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов

Расчет начинаем с узла *A*, в котором сходится только два стержня (рисунок 6.2б):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{A-3} \cos \alpha + 4 = 0; \\ N_{A-1} + 11,5 + N_{A-3} \sin \alpha = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{A-3} = -\frac{4}{0,8} = -5 \text{ кН сжат}; \\ N_{A-1} = -11,5 + 5 \cdot 0,6 = -8,5 \text{ кН сжат}; \end{cases}$$

Затем рассматриваем равновесие узла I , в котором сходится три стержня, но усилия неизвестны только в двух из них (рисунок 6.2в):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{I-2} \sin \alpha - N_{I-A} = 0; \\ N_{I-2} \cos \alpha + N_{I-3} = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{I-2} = -\frac{8,5}{0,6} = -14,17 \text{ кН сжат}; \\ N_{I-3} = 14,17 \cdot 0,8 = 11,34 \text{ кН}. \end{cases}$$

Следующим рассматривается узел 2 и т.д.

6.2.2 Способ проекций

Этот способ применяется для выборочного определения усилий в стержнях в тех случаях, когда можно провести сечение фермы, пересекающее три стержня, причем линии действия двух из них параллельны.

Пример 6.2

Определить усилия в стержнях 3-4 и 4-5 фермы, изображенной на рисунке 6.2а.

Для определения усилия в стержне 3-4 фермы проведем сквозное сечение фермы $I-I$, пересекающие стержни 2-4, 3-4, 3-5. Рассматривая равновесие левой отсеченной части фермы (рисунок 6.3а), составим уравнение проекций сил на вертикальную ось:

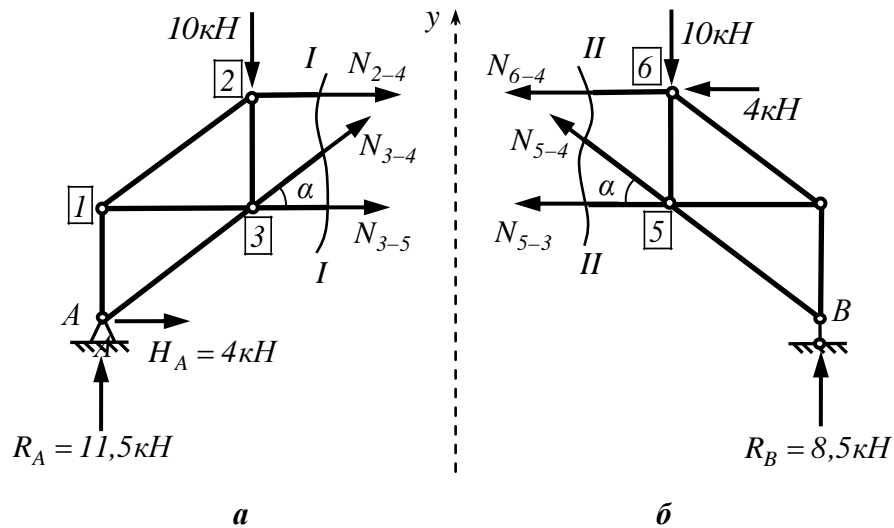


Рисунок 6.3

$$\sum Y^{лев} = 0; \quad 11,5 - 10 + N_{3-4} \sin \alpha = 0; \quad N_{3-4} = -\frac{1,5}{0,6} = -2,5 \text{ кН сжат} .$$

Для определения усилия в стержне 4-5 проведем сечение II – II и составим уравнение проекций сил на вертикальную ось для правой части фермы:

$$\sum Y^{прав} = 0; \quad 8,5 - 10 + N_{5-4} \sin \alpha = 0; \quad N_{5-4} = \frac{1,5}{0,6} = 2,5 \text{ кН} .$$

6.2.3 Способ моментной точки

Способ моментной точки применяется для выборочного определения усилий в отдельном стержне в тех случаях, когда линии действия двух из трех стержней, попадающих в сечение фермы, пересекаются в одной точке, называемой *моментной* или *точкой Риттера*.

Пример 6.3

Определить усилия в стержнях 2-3, 2-5 и 4-5 фермы, изображенной на рисунке 6.4.

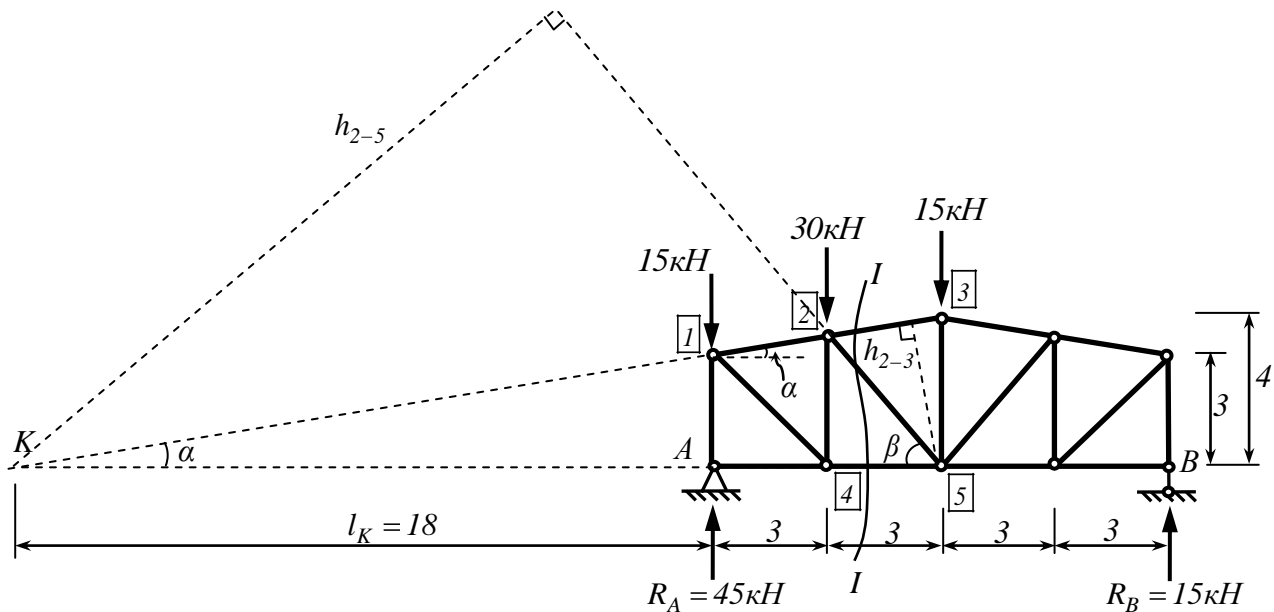


Рисунок 6.4

1 Определение реакций опор

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \end{cases} \begin{cases} 12R_B - 3 \cdot 30 - 6 \cdot 15 = 0; \\ 12 \cdot 15 + 9 \cdot 30 + 6 \cdot 15 - 12R_A = 0; \end{cases} \begin{cases} R_B = 15 \text{ кН}; \\ R_A = 45 \text{ кН}. \end{cases}$$

2 Определение усилий в стержнях способом моментной точки

Проведем сквозное сечение фермы $I - I$ и рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы.

Усилие в стержне 2-3 определим из уравнения моментов действующих сил относительно точки 5 пересечения двух других стержней, попадающих в сечение:

$$\sum M_5^{лев} = 0; \quad 6 \cdot 15 + 3 \cdot 10 - 6 \cdot 45 - N_{2-3} \cdot h_{2-3} = 0.$$

Из геометрии фермы:

$$ctg \alpha = 6; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + ctg^2 \alpha}} = 0,164; \quad l_K = 3 \cdot ctg \alpha = 18 \text{ м}; \quad h_{2-3} = 24 \sin \alpha = 3,95 \text{ м}.$$

Тогда

$$N_{2-3} = -\frac{90}{h_{2-3}} = -\frac{90}{3,95} = -22,78 \text{ кН сжат}.$$

Усилие в стержне 2-5 определим из уравнения моментов сил относительно точки K пересечения двух других стержней, попадающих в сечение:

$$\sum M_K^{лев} = 0; \quad 18 \cdot 45 - 18 \cdot 15 - 21 \cdot 30 - N_{2-5} \cdot h_{2-5} = 0.$$

Из геометрии фермы

$$ctg \beta = \frac{3}{3,5} = 0,857; \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + ctg^2 \beta}} = 0,759; \quad h_{2-5} = 24 \sin \beta = 18,22 \text{ м}.$$

Тогда

$$N_{2-5} = -\frac{90}{h_{2-5}} = -\frac{90}{18,22} = -4,94 \text{ кН сжат}.$$

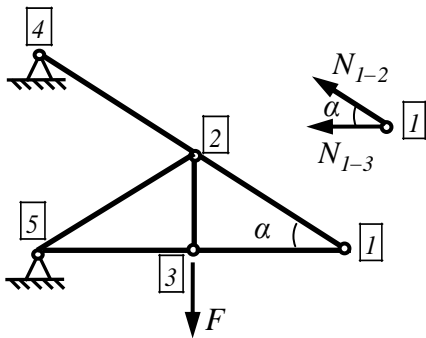
Усилие в стержне 4-5 определим из уравнения моментов сил относительно точки 2 пересечения двух других стержней, попадающих в сечение:

$$\sum M_2^{лев} = 0; \quad 3 \cdot 15 - 3 \cdot 45 + 3,5 N_{4-5} = 0; \quad N_{4-5} = \frac{90}{3,5} = 25,71 \text{ кН}.$$

6.3 Некоторые частные случаи равновесия узлов простейших ферм (признаки нулевых стержней)

Нулевыми называют стержни фермы, усилия в которых при данной нагрузке оказываются равными нулю. Из способа вырезания узлов (п. 6.2.1), вытекают некоторые частные случаи их равновесия:

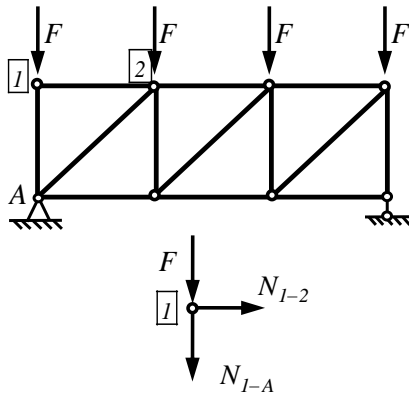
1) Если в ненагруженном узле фермы сходятся два стержня, не лежащие на одной прямой, то усилия в этих стержнях равны нулю.



Например, составив уравнения равновесия узла 1, получим:

$$\begin{cases} \sum Y = 0; \\ \sum X = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{1-2} \sin \alpha = 0; \\ -N_{1-2} \cos \alpha - N_{1-3} = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{1-2} = 0; \\ N_{1-3} = 0. \end{cases}$$

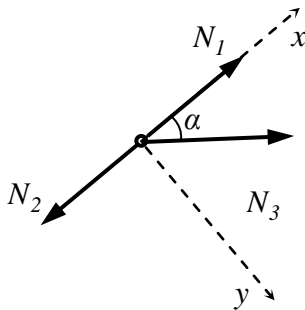
2) Если в нагруженном узле фермы сходятся два стержня, не лежащие на одной прямой, и внешняя сила, действующая на узел, направлена по оси одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по величине и противоположно по направлению действующей силе, а в другом – нулю.



Например, из уравнений равновесия узла 1 следует:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{1-2} = 0; \\ N_{1-A} = -F. \end{cases}$$

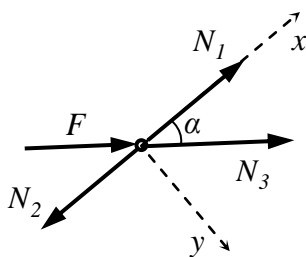
3) Если в ненагруженном узле фермы сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, то усилия в этих двух стержнях равны между собой по величине и по знаку, а усилие в третьем (отдельно стоящем) стержне равно нулю.



Из уравнений равновесия изображенного на рисунке узла следует:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = N_2; \\ N_3 = 0. \end{cases}$$

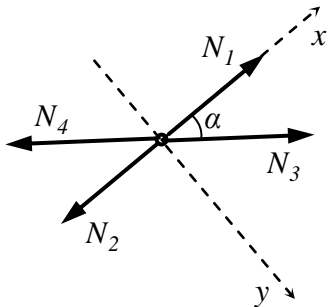
3) Если в узле фермы сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, а внешняя сила направлена вдоль третьего (отдельно стоящего) стержня, то усилие в этом стержне равно по величине и противоположно по направлению внешней силе, а усилия в двух других стержнях равны между собой по величине и по знаку.



Из уравнений равновесия изображенного на рисунке узла следует:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = N_2; \\ N_3 = -F. \end{cases}$$

5) Если в ненагруженном узле фермы сходятся четыре стержня, оси которых попарно лежат на одной прямой, то усилия в стержнях, лежащих на одной прямой, равны между собой.



Из уравнений равновесия изображенного на рисунке узла следует:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = N_2; \\ N_3 = N_4. \end{cases}$$

6.4 Графический метод определения усилий в стержнях простейших ферм (диаграмма Максвелла-Кремоны)

Графический метод определения усилий в стержнях ферм основан на однозначности разложения внешней силы, действующей в узле, по двум заданным направлениям на плоскости и построении замкнутого силового многоугольника для каждого вырезанного узла фермы. Последовательность вырезания узлов в данном случае та же, что и в способе вырезания узлов: в каждом рассматриваемом узле должно сходиться не более двух стержней с неизвестными усилиями. В общем случае приходится строить столько силовых многоугольников, сколько у фермы имеется узлов, что является неудобным и трудоемким. Кроме того, каждое усилие повторяется дважды, т.к. каждый стержень фермы примыкает к двум узлам. Указанных недостатков можно избежать, если объединить силовые многоугольники, построенные для отдельных узлов, в общую диаграмму, получившую название *диаграммы Максвелла-Кремоны*, по имени ученых почти одновременно предложивших этот способ.

Порядок построения диаграммы Максвелла-Кремоны:

- 1) Определить опорные реакции фермы аналитическим способом.

2) Разбить плоскость фермы на *внешние* и *внутренние зоны*, границами которых являются линии действия внешних сил и стержни фермы. Как правило, для внешних и внутренних зон принимают различные обозначения: например, внешние обозначают буквами, а внутренние – цифрами.

3) Обходя внешние зоны фермы по ходу часовой стрелки, построить многоугольник внешних сил. Каждая внешняя сила при этом обозначается двумя индексами соответственно наименованиям внешних зон, на границе которых расположена сила. Если опорные реакции вычислены верно, силовой многоугольник должен быть замкнут.

4) Построение диаграммы начинается с узла, в котором сходится два стержня. Обходя узел по ходу часовой стрелки, обозначают стержни с неизвестными усилиями по тому же правилу, что и внешние силы. Из точек, обозначение которых присутствует в наименовании стержней и уже отмеченных на диаграмме, проводят прямые, параллельные соответствующим стержням. Точка пересечения прямых обозначается недостающим общим индексом, входящим в наименование стержней.

5) Проводят аналогичные построения для следующего узла, в котором может сходиться произвольное число стержней, но усилия неизвестны не более чем в двух стержнях и т.д. Диаграмма считается построенной, когда на ней будут указаны все точки, соответствующие наименованиям всех внутренних зон фермы.

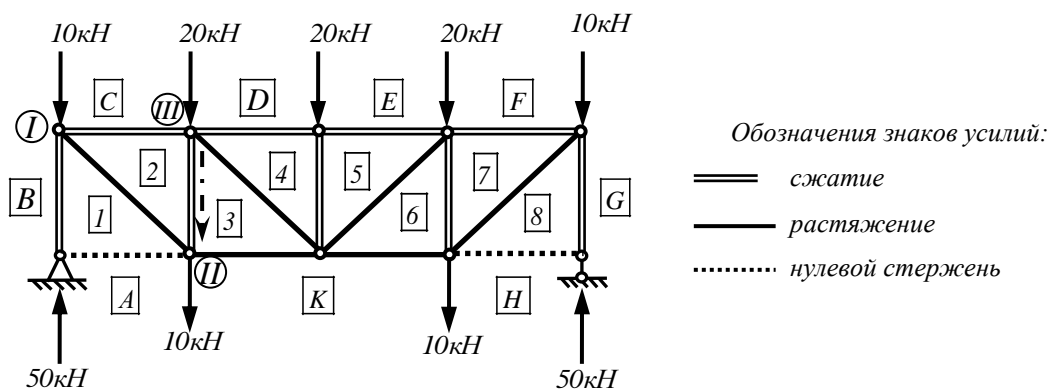
Направление и знак усилия в любом стержне фермы можно определить по построенной диаграмме Максвелла-Кремоны по следующему правилу:

1) Рассматриваемый стержень относят к конкретному узлу фермы. Обходя выбранный узел по ходу часовой стрелки, обозначают его двумя индексами по правилу, изложенному выше. Первый индекс соответствует началу вектора.

2) На диаграмме Максвелла-Кремоны устанавливают направление вектора усилия и мысленно переносят этот вектор на схему фермы, совмещая его со стержнем. Если вектор усилия направлен к узлу, то стержень сжат, если вектор направлен от рассматриваемого узла – стержень растянут.

Построение диаграммы Максвелла-Кремоны поясним на примере фермы, изображенной на рисунке 6.5.

Строим схему фермы в произвольном масштабе. Начиная обход фермы по ходу часовой стрелки, например, с внешней зоны B , откладываем в выбранном масштабе внешние силы: BC , CD , DE и т.д.



Масштаб
1 см – 10 кН

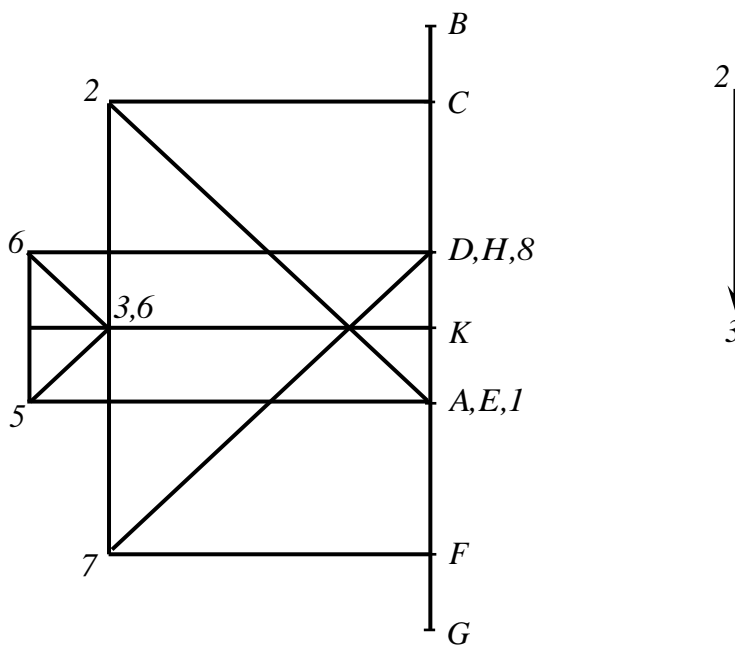


Рисунок 6.5

Построение диаграммы начинаем, например, с левого опорного узла, в котором сходятся два стержня $B-1$ и $1-A$ (при обходе узла по ходу часовой стрелки). Из точек B и A , уже отмеченных на диаграмме, проводим прямые, параллельные соответствующим стержням. Точка пересечения этих прямых обозначается общим индексом 1 , входящим в наименование стержней. На рисунке 6.5 точка 1 совпадает с

точкой A . Следующим рассматриваем узел I , в котором сходятся два стержня с известными усилиями: $C-2$ и $2-1$. Из точек C и I проводим прямые, параллельные соответствующим стержням. Точка пересечения прямых получает обозначение 2 и т.д. Построение диаграммы продолжается до тех пор, пока на ней не появятся точки с наименованиями всех внутренних зон фермы.

Для примера определим усилие в стойке, расположенной между узлами фермы $III - II$. Выбираем один из узлов, к которым примыкает стойка, например, узел II нижнего пояса фермы. При обходе узла II по ходу часовой стрелки стойка получает обозначение $2-3$. Первый индекс – начало вектора, второй индекс – его конец. На рисунке 6.5 вектор $2-3$ для удобства вынесен за пределы построенной диаграммы. Длина вектора в выбранном масштабе – величина усилия в стойке. Мысленно перенеся направление вектора на стойку на схеме фермы, приходим к выводу, что вектор будет направлен к узлу II , следовательно, стойка сжата, усилие имеет отрицательный знак. Направление вектора $2-3$ показано на схеме фермы рядом со стойкой пунктиром. Таким образом, $N_{III-II} = N_{II-III} = -29,5 кН$.

6.5 Построение линий влияния усилий в стержнях простейших ферм

Линией влияния усилия в элементе фермы называется график изменения этого усилия при перемещении единичной силы постоянного направления по грузовому поясу фермы. Любая ордината линии влияния показывает величину усилия в данном стержне при приложении единичной силы к той точке грузового пояса, которая находится над этой ординатой. Так как внешняя нагрузка на ферму передается только в ее узлах, то линии влияния усилий строятся с учетом узловой передачи нагрузки (п. 4.7).

При построении линий влияния усилий будем пользоваться статическим способом (п.4.1). Линии влияния реакций опор балочных ферм строятся по тем же правилам, что и для обычной балки (п. 4.2.1).

Для построения линий влияния усилий в стержнях фермы следует рассечь ферму по соответствующей панели грузового пояса. Усилия в рассеченных стержнях направляют от узлов, считая стержни растянутыми. При построении линии влияния рассматривают два положения единичного груза: слева и справа от рассеченной грузовой панели. В первом случае получают левую ветвь, во втором – правую. В пределах рассеченной грузовой панели соединяют обе ветви передаточной прямой.

Общий порядок построения линий влияния в элементах фермы состоит в следующем:

1) При произвольном положении единичной силы в пределах грузового пояса выбирается способ определения усилия в данном стержне (способ вырезания узлов, способ проекций или способ моментной точки).

2) Из рассмотрения равновесия отсеченной части фермы записывается аналитическое выражение (уравнение) для определения искомого усилия.

3) После анализа полученной зависимости строится линия влияния усилия и определяется ее знак.

6.5.1 Фермы с параллельными поясами

Рассмотрим построение линий влияния усилий на примере фермы с параллельными поясами, изображенной на рисунке 6.6а. Грузовой пояс фермы, по которому перемещается единичная сила $\bar{P} = 1$, обозначен пунктиром.

Линии влияния опорных реакций для этой фермы (рисунок 6.6б, в) имеют тот же вид, что и для простой балки (п. 4.2.1).

Для построения *линии влияния (л. вл.) усилия* N_{2-3} проведем сечение $I-I$ и составим уравнение суммы моментов сил относительно точки 7 (моментная точка).

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_7^{прав} = 0; \quad R_B \cdot 2a + N_{3-2} \cdot h = 0; \quad N_{3-2} = -\frac{2a}{h} R_B;$$

$$\text{л.вл. } N_{3-2} = \left(-\frac{2a}{h} \right) \cdot \text{л.вл. } R_B.$$

Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 2-3.

Из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_7^{лев} = 0; \quad -R_A \cdot 2a - N_{2-3} \cdot h = 0; \quad N_{2-3} = -\frac{2a}{h} R_A;$$

$$\text{л.вл. } N_{2-3} = \left(-\frac{2a}{h} \right) \cdot \text{л.вл. } R_A.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Заметим, что обе построенные ветви пересекаются под моментной точкой 7. Затем в соответствии с правилами, изложенными в п. 4.7, сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки 2' и 3', расположенные соответственно под узлами 2 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.6г).

Для построения *линии влияния (л. вл.) усилия* N_{7-8} воспользуемся тем же сечением I-I и составим уравнение суммы моментов сил относительно точки 2 (моментная точка).

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 2-3.

Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_2^{прав} = 0; \quad R_B \cdot 3a - N_{7-8} \cdot h = 0; \quad N_{7-8} = \frac{3a}{h} R_B;$$

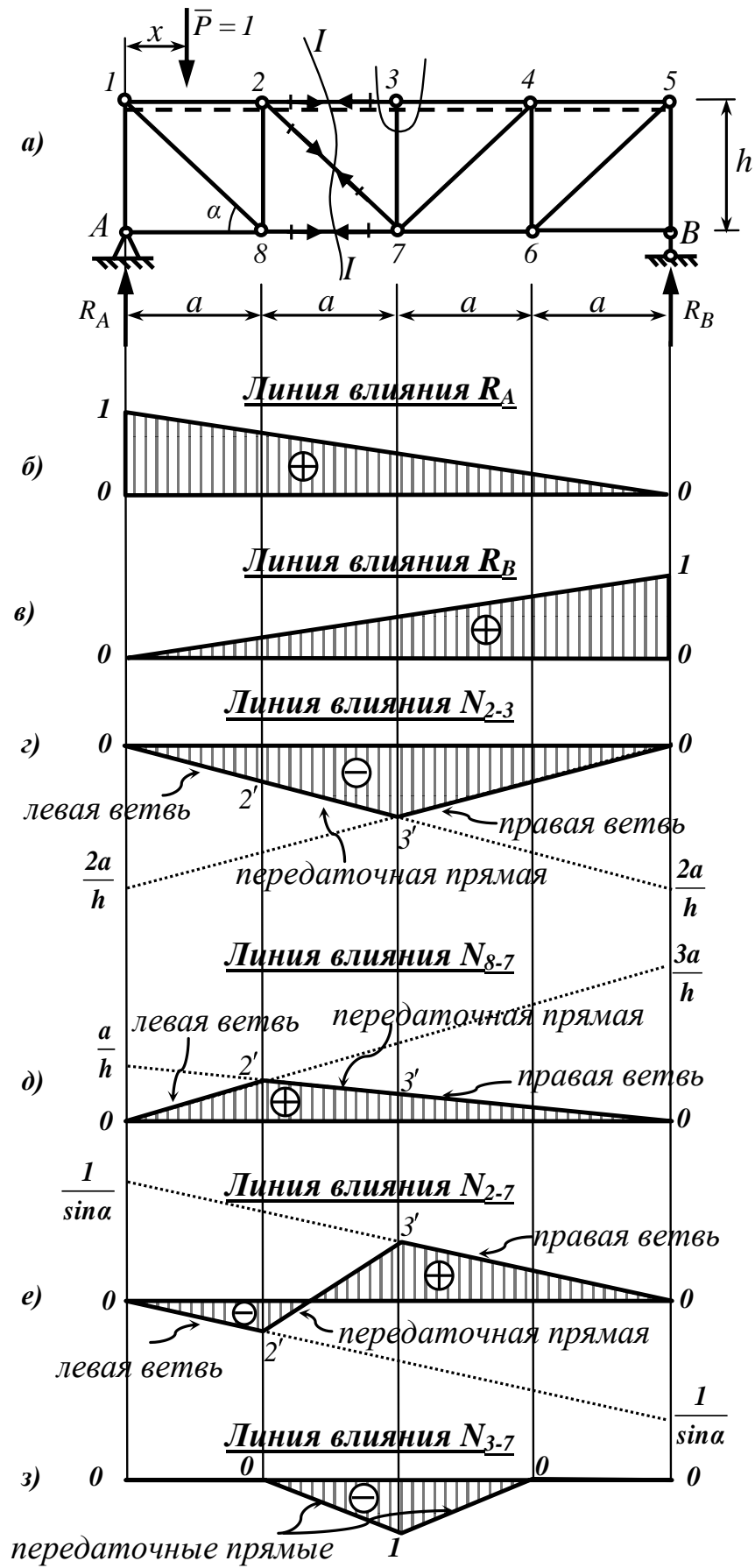


Рисунок 6.6

$$\text{л.вл. } N_{7-8} = \left(\frac{3a}{h} \right) \cdot \text{л.вл. } R_B.$$

Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 2-3.

Из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_2^{\text{лев}} = 0; \quad -R_A \cdot a + N_{8-7} \cdot h = 0; \quad N_{8-7} = \frac{a}{h} R_A;$$

$$\text{л.вл. } N_{8-7} = \left(\frac{a}{h} \right) \cdot \text{л.вл. } R_A.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Заметим, что обе построенные ветви пересекаются под моментной точкой 2. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки 2' и 3', расположенные соответственно под узлами 2 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.6д).

Обобщая проведенные построения, сформулируем **правило построения линий влияния усилий способом моментной точки, расположенной в пролете фермы:**

– над левой опорой отложить отрезок, равный расстоянию от левой опоры до найденной моментной точки, и соединить полученную точку с нулевым значением на правой опоре (правая ветвь);

– над правой опорой отложить отрезок, равный расстоянию от правой опоры до найденной моментной точки, и соединить полученную точку с нулевым значением на левой опоре (левая ветвь);

– обе построенные ветви должны пересекаться под моментной точкой;

– разделить все ординаты линии влияния на плечо усилия относительно найденной моментной точки;

– на левую ветвь перенести левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый;

– соединить полученные точки передаточной прямой и выделить на ветвях участки от нулевых значений на опорах до полученных точек;

– определить знак линии влияния.

Определить знак линии влияния можно следующим образом: рассматривая равновесие левой отсеченной части фермы (единичная сила находится на отброшенной правой части), направляем усилие в данном стержне таким образом, чтобы оно уравновешивало опорную реакцию R_A на левой опоре. Если усилие при этом должно быть направлено от узла, то правая ветвь линии влияния положительна, если к узлу – соответственно отрицательна.

Для построения линии влияния (л. вл.) усилия N_{2-7} также воспользуемся сечением $I-I$ и составим уравнение суммы проекций сил на вертикальную ось. Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{прав} = 0; \quad R_B + N_{7-2} \cdot \sin \alpha = 0; \quad N_{7-2} = -\frac{1}{\sin \alpha} R_B;$$

$$\text{л. вл. } N_{7-2} = \left(-\frac{1}{\sin \alpha} \right) \cdot \text{л. вл. } R_B.$$

Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 2-3.

Из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{лев} = 0; \quad R_A - N_{2-7} \cdot \sin \alpha = 0; \quad N_{2-7} = \frac{1}{\sin \alpha} R_A;$$

$$\text{л.вл. } N_{2-7} = \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right) \cdot \text{л.вл. } R_A.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $2'$ и $3'$, расположенные соответственно под узлами 2 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.6e).

Обобщая проведенные построения, сформулируем **правило построения линий влияния усилий способом проекций**:

- *построить линию влияния балочной поперечной силы (п. 4.2.3);*
- *разделить все ординаты линии влияния на синус угла наклона рассматриваемого элемента к горизонтальной оси;*
- *на левую ветвь перенести левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый;*
- *соединить полученные точки передаточной прямой и выделить на ветвях участки от нулевых значений на опорах до полученных точек;*
- *определить знак линии влияния.*

Построение линий влияния усилий **способом вырезания узлов** рассмотрим на примере усилия в стойке 3-7. Вырезаем узел 3 и рассматриваем его равновесие, составляя уравнение проекций сил на вертикальную ось. Если единичная сила $\bar{P} = 1$ находится левее узла 2 или правее узла 4, то узел не нагружен, и усилие в стойке равно нулю $N_{3-7} = 0$ (признак 3 п. 6.3). Если единичная сила $\bar{P} = 1$ приложена в узле 3, усилие в стойке равно по величине и противоположно по направлению единичной силе $N_{3-7} = -1$ (признак 4 п. 6.3). Отметив соответствующие точки и соединив их передаточными прямыми, получим линию влияния усилия N_{3-7} (рисунок 6.6з).

В заключение обратим внимание, что в фермах могут встречаться стержни, линии влияния усилий в которых выглядят неодинаково при перемещении единичного груза по верхнему и по нижнему поясу. Для фермы, изображенной на рисунке 6.7, показан вид линии влияния усилия N_{1-3} в зависимости от расположения грузового пояса. Очевидно, что различный вид линий влияния объясняется тем, что проекции соответствующих узлов пересекаемых сечением грузовых панелей верхнего и нижнего пояса не совпадают.

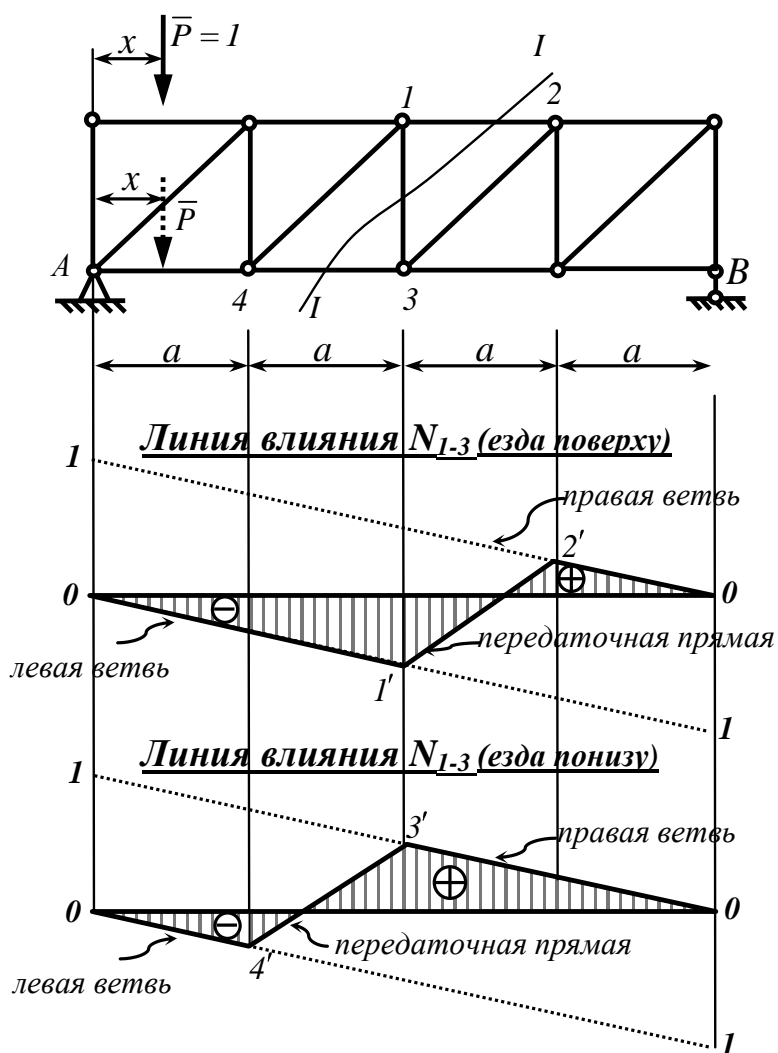


Рисунок 6.7

6.5.2 Фермы с ломаными поясами

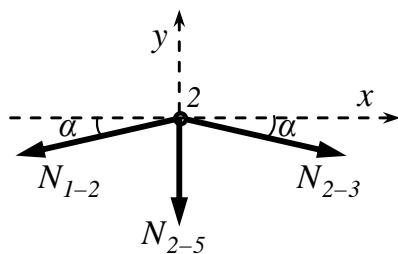
Рассмотрим построение линий влияния усилий на примере фермы, изображенной на рисунке 6.8а.

Линии влияния опорных реакций в этой балочной ферме будут иметь тот же вид, что и для простой однопролетной балки (п. 4.2.1), в чем легко убедиться, составив уравнения равновесия для определения опорных реакций фермы.

Усилие в стержне 1-2 можно определить, проведя сечение I-I и составив уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки 5. Для построения линии влияния усилия N_{1-2} воспользуемся сформулированным в п. 6.5.1 правилом построения линии влияния способом моментной точки, лежащей в пределах пролета фермы (рисунок 6.8б).

При построении линии влияния (л. вл.) усилия N_{2-5} рассмотрим два уровня передвижения единичного груза (по нижнему и по верхнему поясу фермы). Воспользуемся для определения усилия в стержне способом вырезания узлов. Вырежем узел 2 и составим уравнения его равновесия.

Если единичная сила $\bar{P} = 1$ перемещается по нижнему поясу фермы, то узел 2 всегда будет не нагружен:



$$\begin{cases} \sum X = 0; & \begin{cases} -N_{1-2} \cos \alpha + N_{2-3} \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & \begin{cases} -N_{1-2} \sin \alpha - N_{2-5} = 0; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{1-2} = N_{2-3}; \\ N_{2-5} = -2N_{1-2} \sin \alpha. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\text{л.вл. } N_{2-5} = -2 \sin \alpha \cdot \text{л.вл. } N_{1-2}. \quad (6.1)$$

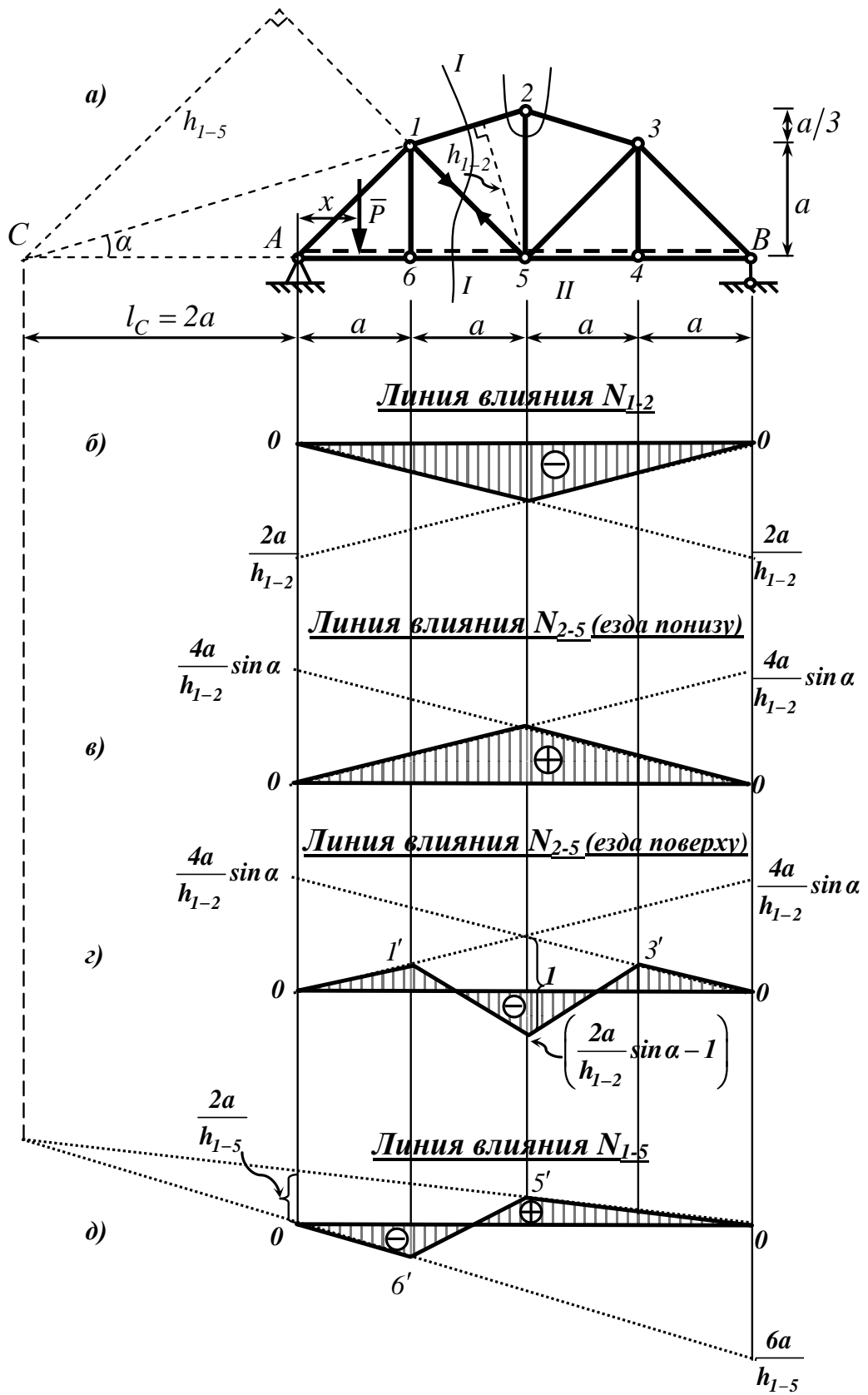
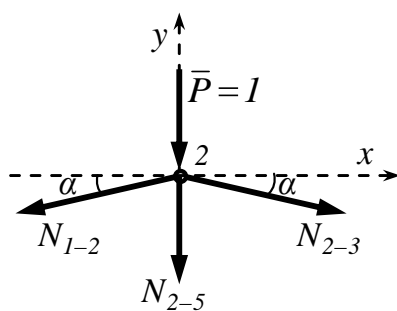


Рисунок 6.8

Вид линии влияния усилия N_{2-5} при перемещении единичного груза по нижнему поясу показан на рисунке 6.8в.

Если единичная сила $\bar{P} = 1$ перемещается по верхнему поясу фермы, то пока она находится левее узла 1 или правее узла 3, узел 2 будет не нагружен, и вид линии влияния определяется выражением (6.1). На рисунке 6.9г соответствующие построения показаны пунктирными линиями.

Если же единичная сила $\bar{P} = 1$, перемещаясь по верхнему поясу фермы, будет приложена в узле 2, то уравнения равновесия узла примут вид:



$$\begin{cases} \sum X = 0; & \begin{cases} -N_{1-2} \cos \alpha + N_{2-3} \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & \begin{cases} -N_{1-2} \sin \alpha - N_{2-3} \sin \alpha - N_{2-5} - \bar{P} = 0; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{1-2} = N_{2-3}; \\ N_{2-5} = -2N_{1-2} \sin \alpha - 1. \end{cases}$$

Следовательно, из ординаты линии влияния, расположенной под узлом 2, необходимо вычесть единицу, перенести на левую и правую ветви соответствующие узлы рассеченных грузовых панелей верхнего пояса 1 и 3 и соединить отмеченные на ветвях точки передаточными линиями.

Вид линии влияния усилия N_{2-5} при перемещении единичного груза по верхнему поясу показан на рисунке 6.8г.

Для построения *линии влияния усилия N_{1-5}* воспользуемся уже проведенным сечением I-I и составим уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки С.

Расстояние до моментной точки определим из простых геометрических соображений:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{a/3} = 3, \quad l_C = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha - a = 2a.$$

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 6-5. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_C^{прав} = 0; \quad R_B \cdot 6a + N_{5-1} \cdot h_{1-5} = 0; \quad N_{5-1} = -\frac{6a}{h_{1-5}} R_B;$$

$$\text{л.вл. } N_{5-1} = \left(-\frac{6a}{h_{1-5}} \right) \cdot \text{л.вл. } R_B.$$

Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 6-5. Из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad R_A \cdot 2a - N_{1-5} \cdot h_{1-5} = 0; \quad N_{1-5} = \frac{2a}{h_{1-5}} R_A;$$

$$\text{л.вл. } N_{1-5} = \left(\frac{2a}{h_{1-5}} \right) \cdot \text{л.вл. } R_A.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Заметим, что обе построенные ветви пересекаются под моментной точкой C . Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $6'$ и $5'$, расположенные соответственно под узлами 6 и 5 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.8д).

Обобщая проведенные построения, сформулируем **правило построения линий влияния усилий способом моментной точки, расположенной за пределами пролета фермы:**

– над левой опорой отложить отрезок, равный расстоянию от левой опоры до найденной моментной точки, и соединить полученную точку с нулевым значением на правой опоре (правая ветвь);

– под правой опорой отложить отрезок, равный расстоянию от правой опоры до найденной моментной точки, и соединить полученную точку с нулевым значением на левой опоре (левая ветвь);

– обе построенные **ветви должны пересекаться под моментной точкой**;

– разделить все ординаты линии влияния на плечо усилия относительно найденной моментной точки;

– на левую ветвь перенести левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый;

– соединить полученные точки передаточной прямой и выделить на ветвях участки от нулевых значений на опорах до полученных точек;

– определить знак линии влияния.

6.5.3 Консольные фермы

В консольных фермах так же, как и в консольных балках (п. 4.3), линии влияния усилий можно строить без определения опорных реакций. Рассмотрим построение линий влияний усилий на примере консольной фермы на рисунке 6.9а.

Для построения *линии влияния усилия* N_{6-7} воспользуемся способом моментной точки. Проведем сечение $I-I$ и составим уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки 2 для правой отсеченной части фермы.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_2^{прав} = 0; \quad N_{7-6} = 0.$$

В соответствии с полученным выражением левая ветвь линии влияния будет нулевой линией.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

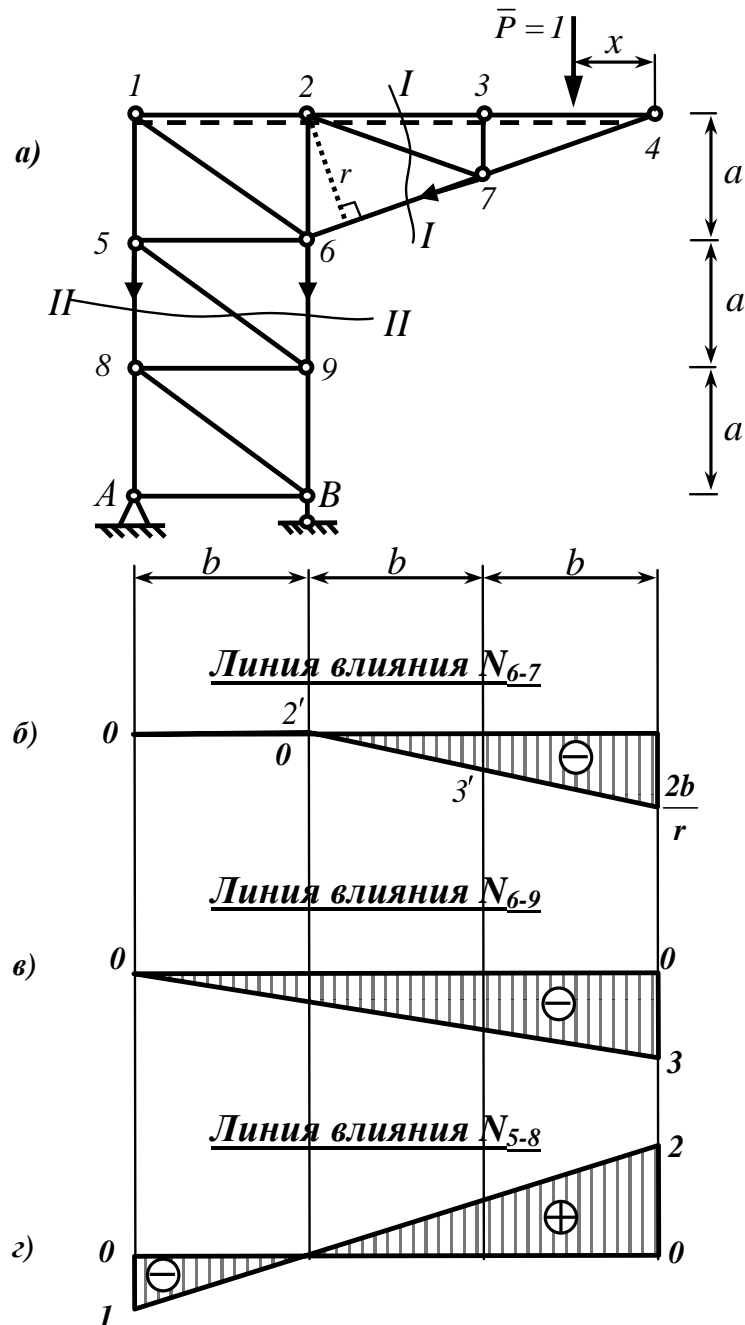


Рисунок 6.9

$$\sum M_2^{прав} = 0; \quad -\bar{P} \cdot 2b - x - N_{7-6} \cdot r = 0; \quad N_{7-6} = \frac{x-2b}{r} \left| \begin{array}{l} x=0; \quad N_{7-6} = -\frac{2b}{r}; \\ x=2b; \quad N_{7-6} = 0. \end{array} \right.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Заметим, что обе построенные ветви пересекаются под моментной точкой 2. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки 2' и 3', расположенные соответственно под узлами 2 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.9б).

Для построения *линии влияния усилия* N_{6-9} также воспользуемся способом моментной точки. Проведем сечение II-II и составим уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки 5 для верхней отсеченной части фермы.

В рассматриваемом случае единичный груз $\bar{P} = 1$ всегда находится на верхней отсеченной части фермы. Из уравнения суммы моментов сил относительно моментной точки 5 имеем:

$$\sum M_5^{верхн} = 0; \quad -\bar{P} \cdot 3b - x - N_{6-9} \cdot b = 0; \quad N_{6-9} = \frac{x-3b}{b} \left| \begin{array}{l} x=0; \quad N_{6-9} = -3; \\ x=3b; \quad N_{6-9} = 0. \end{array} \right.$$

В соответствии с полученным выражением строим линию влияния усилия N_{6-9} (рисунок 6.9в). Заметим, что в рассматриваемом случае узловая передача нагрузки не учитывалась, т.к. сечение не прошло ни через одну панель грузового пояса, и линия влияния имеет только одну ветвь.

Для построения *линии влияния усилия* N_{5-8} также воспользуемся способом моментной точки и сечением II-II. В рассматриваемом случае единичный груз $\bar{P} = 1$ также всегда находится на верхней отсеченной части фермы. Из уравнения суммы моментов сил относительно моментной точки 9 имеем:

$$\sum M_9^{верхн} = 0; \quad -\bar{P} \cdot 2b - x + N_{5-8} \cdot b = 0; \quad N_{5-8} = \frac{2b - x}{b} \left| \begin{array}{l} x=0; \quad N_{5-8} = 2; \\ x=3b; \quad N_{6-9} = -1. \end{array} \right.$$

В соответствии с полученным выражением строим линию влияния усилия N_{5-8} (рисунок 6.9д).

Приведем еще несколько примеров построения линий влияния для консольных ферм.

Пример 6.4

Для фермы, изображенной на рисунке 6.10а, построить линии влияния усилий в стержнях 3-В и 3-6.

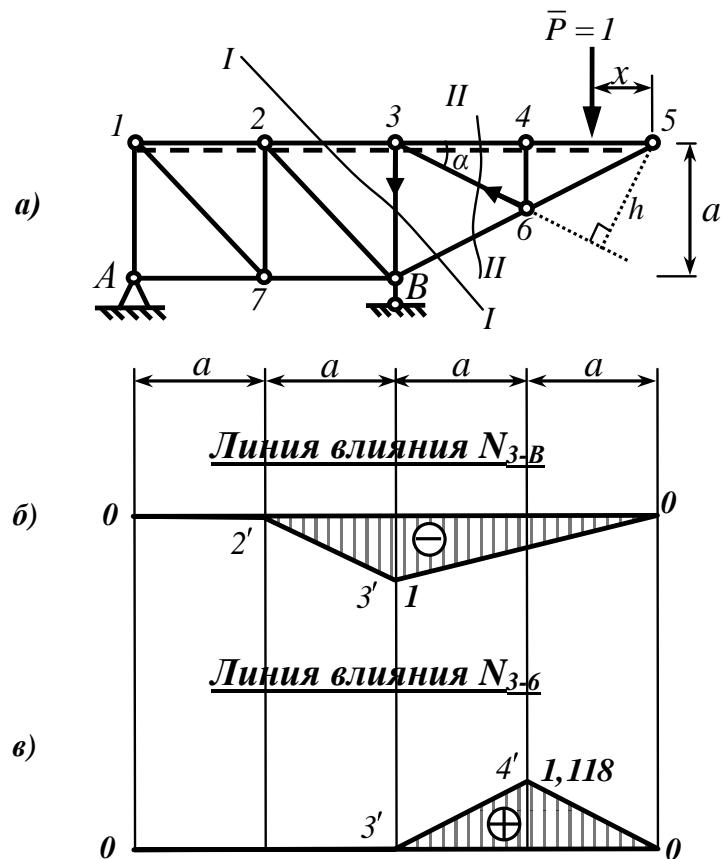


Рисунок 6.10

Для построения *линии влияния усилия* N_{3-B} воспользуемся способом моментной точки. Проведем сечение $I-I$ и составим уравнение суммы моментов сил относительно точки моментной точки 5 для правой отсеченной части фермы.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_5^{прав} = 0; \quad N_{3-B} = 0.$$

В соответствии с полученным выражением левая ветвь линии влияния будет нулевой линией.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_5^{прав} = 0; \quad \bar{P} \cdot x + N_{3-B} \cdot 2a = 0; \quad N_{3-B} = -\frac{x}{2a} \left| \begin{array}{l} x=0; \quad N_{3-B} = 0; \\ x=2a; \quad N_{3-B} = -1. \end{array} \right.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $2'$ и $3'$, расположенные соответственно под узлами 2 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.10б).

Для построения *линии влияния усилия* N_{3-6} также воспользуемся способом моментной точки. Проведем сечение $II-II$ и составим уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки 5 для правой отсеченной части фермы.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 3-4. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_5^{прав} \bar{F}_k = 0; \quad N_{6-3} = 0.$$

В соответствии с полученным выражением левая ветвь линии влияния будет нулевой линией.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 3-4. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_5^{прав} = 0; \quad \bar{P} \cdot x - N_{6-3} \cdot h = 0.$$

Из геометрии фермы $h = 2a \sin \alpha$, $ctg \alpha = 2$, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + ctg^2 \alpha}} = 0,447$.

$$N_{6-3} = \frac{x}{2a \cdot \sin \alpha} \left| \begin{array}{l} x = 0; \quad N_{6-3} = 0; \\ x = 2a; \quad N_{6-3} = \frac{1}{\sin \alpha} = 1,118. \end{array} \right.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки 3' и 4', расположенные соответственно под узлами 3 и 4 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.10в).

Пример 6.5

Для фермы, изображенной на рисунке 6.11а, построить линии влияния усилий в стержнях 2-3 и 3-В.

Для построения *линии влияния усилия* N_{2-3} проведем сечение I-I и воспользуемся способом моментной точки. Составим уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки В для правой отсеченной части фермы.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_B^{прав} = 0; \quad N_{2-3} = 0.$$

В соответствии с полученным выражением левая ветвь линии влияния будет нулевой линией.

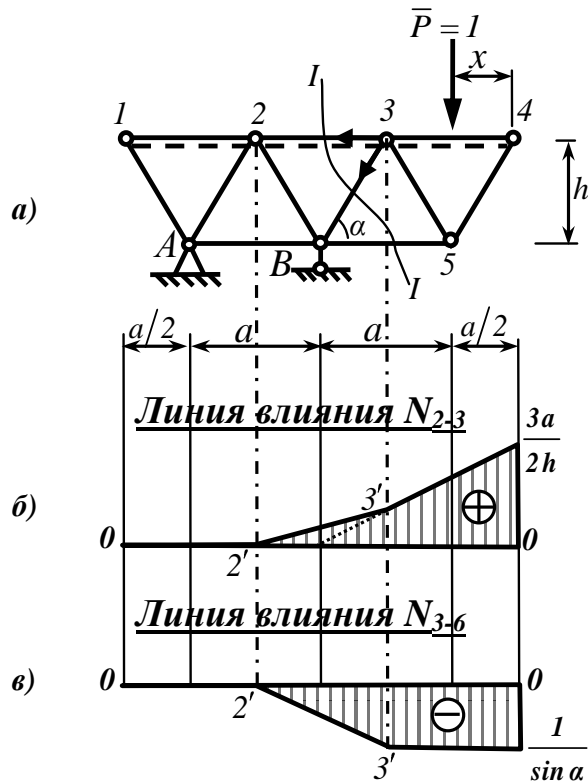


Рисунок 6.11

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_B^{прав} = 0; \quad -\bar{P} \cdot 1,5a - x + N_{3-2} \cdot h = 0; \quad N_{3-2} = \frac{1,5a - x}{h} \left| \begin{array}{l} x = 0; \quad N_{3-2} = \frac{3a}{2h}; \\ x = 1,5a; \quad N_{3-2} = 0. \end{array} \right.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую ветвь левый узел рассе-

ченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $2'$ и $3'$, расположенные соответственно под узлами 2 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.11б).

Для построения *линии влияния усилия* N_{3-B} воспользуемся уже проведенным сечением $I-I$ и способом проекций. Составим уравнение суммы проекций сил на вертикальную ось для правой отсеченной части фермы.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{прав} = 0; \quad N_{3-B} = 0.$$

В соответствии с полученным выражением левая ветвь линии влияния будет нулевой линией.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{прав} = 0; \quad -\bar{P} - N_{3-B} \cdot \sin \alpha = 0; \quad N_{3-B} = -\frac{1}{\sin \alpha}.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $2'$ и $3'$, расположенные соответственно под узлами 2 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.11в).

Пример 6.6

Для фермы, изображенной на рисунке 6.12а, построить линии влияния усилий в стержнях 1-2, 3-7, 3-4, 3-6 и 6-7.

Для построения линии влияния усилия N_{1-2} проведем сечение $I-I$ и воспользуемся способом моментной точки. Составим уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки δ для правой отсеченной части фермы.

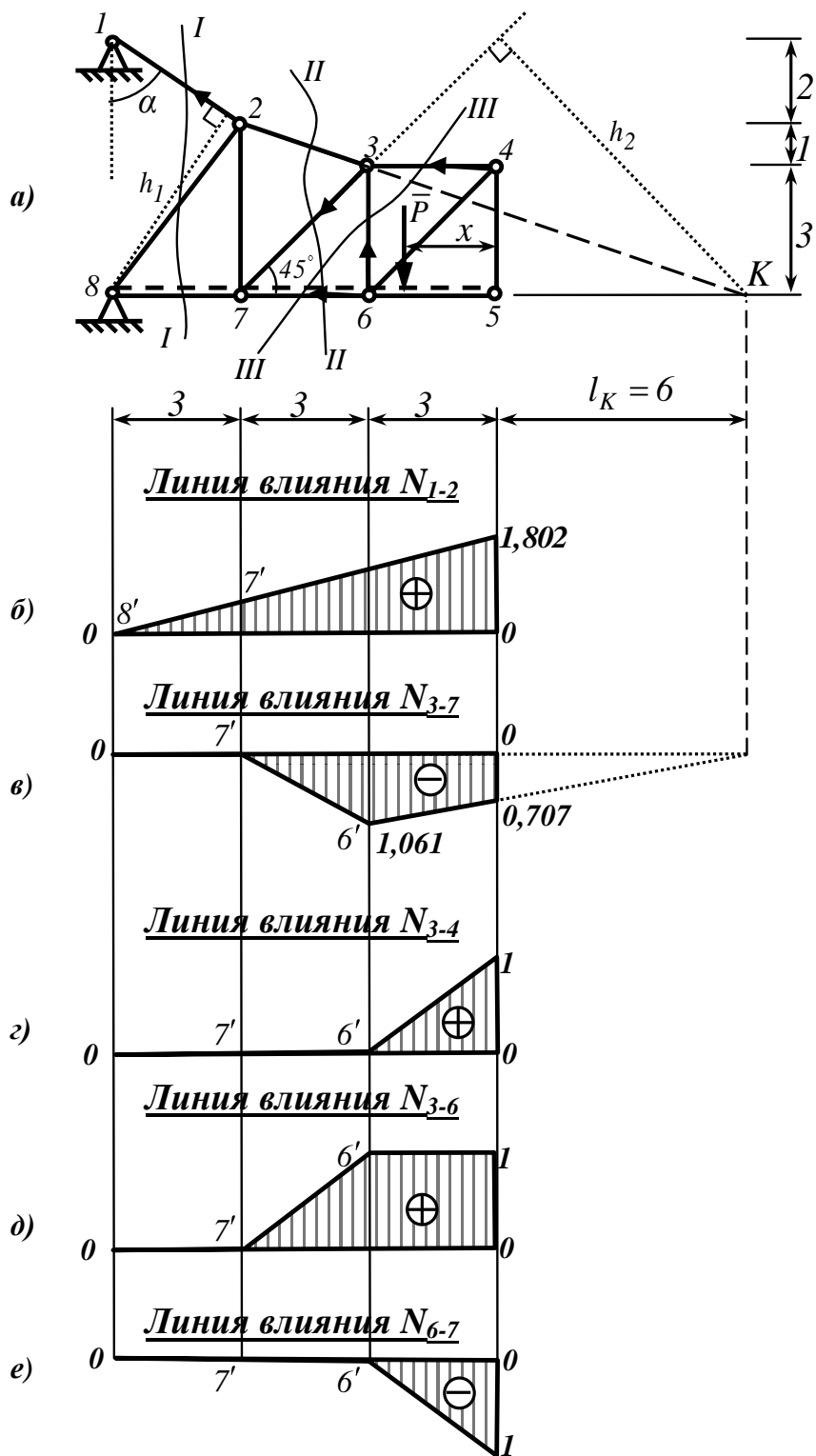


Рисунок 6.12

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 8-7. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_8^{прав} = 0; -\bar{P} \cdot 9 - x + N_{2-1} \cdot h_1 = 0.$$

Из геометрии фермы $h_1 = 6 \sin \alpha$, $ctg \alpha = \frac{2}{3}$, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + ctg^2 \alpha}} = 0,832$.

$$N_{2-1} = \frac{9 - x}{h_1} = \frac{9 - x}{6 \cdot \sin \alpha} \left| \begin{array}{l} x = 0; N_{2-1} = \frac{9}{6 \cdot 0,832} = 1,802; \\ x = 9; N_{2-1} = 0. \end{array} \right.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки 8' и 7', расположенные соответственно под узлами 8 и 7 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.12б). Заметим, что в рассмотренном случае левая ветвь представляет собой одну нулевую точку.

Для построения *линии влияния усилия* N_{3-7} проведем сечение II-II и воспользуемся способом моментной точки. Составим уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки K для правой отсеченной части фермы.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 7-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_K^{прав} = 0; N_{3-7} = 0.$$

В соответствии с полученным выражением левая ветвь линии влияния будет нулевой линией.

Едини́чный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 7-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_K^{прав} = 0; \bar{P} \cdot 6 + x + N_{3-7} \cdot h_2 = 0.$$

Из геометрии фермы $h_2 = 12 \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \text{ м}$.

$$N_{3-7} = -\frac{6+x}{h_2} \left| \begin{array}{l} x=0; N_{3-7} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,707; \\ x=3; N_{3-7} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \approx -1,061. \end{array} \right.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Обратим внимание, что обе ветви пересекаются под моментной точкой K . Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую нулевую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $7'$ и $6'$, расположенные соответственно под узлами 7 и 6 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.12в).

Для построения *линии влияния усилия* N_{3-4} проведем сечение III-III и воспользуемся способом моментной точки. Составим уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки 6 для правой отсеченной части фермы.

Едини́чный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 7-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_6^{прав} = 0; N_{4-3} = 0.$$

Следовательно, левая ветвь линии влияния – нулевая линия.

Едини́чный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 7-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_6^{прав} = 0; -\bar{P} \cdot 3 - x + N_{4-3} \cdot 3 = 0; N_{4-3} = \frac{3-x}{3} \left| \begin{array}{l} x=0; N_{4-3} = 1; \\ x=3; N_{4-3} = 0. \end{array} \right.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую нулевую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $7'$ и $6'$, расположенные соответственно под узлами 7 и 6 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.12з).

Для построения *линии влияния усилия* N_{3-6} воспользуемся уже проведенным сечением III-III и способом проекций. Составим уравнение суммы проекций сил на вертикальную ось для правой отсеченной части фермы.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 7-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{прав} = 0; N_{6-3} = 0.$$

Следовательно, левая ветвь линии влияния – нулевая линия.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 7-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{прав} = 0; -\bar{P} + N_{6-3} = 0; N_{6-3} = 1.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую нулевую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $7'$ и $6'$, расположенные соответственно под узлами 7 и 6 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.12д).

Для построения *линии влияния усилия* N_{6-7} также воспользуемся уже проведенным сечением *III-III* и способом моментной точки. Составим уравнение суммы моментов сил относительно моментной точки 3 для правой отсеченной части фермы.

Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится слева от рассеченной грузовой панели 7-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_3^{прав} = 0; \quad N_{6-7} = 0.$$

Следовательно, левая ветвь линии влияния – нулевая линия.

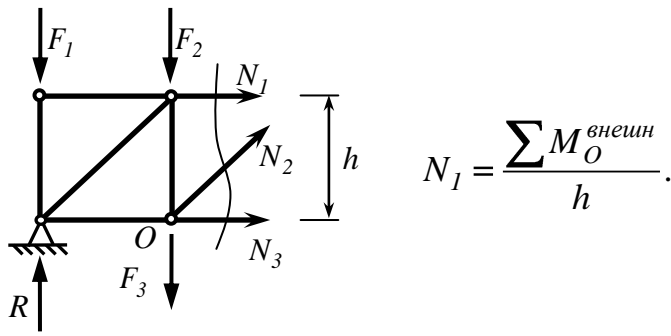
Единичный груз $\bar{P} = 1$ находится справа от рассеченной грузовой панели 7-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum M_3^{прав} = 0; \quad -\bar{P} \cdot 3 - x - N_{6-7} \cdot 3 = 0; \quad N_{6-7} = \frac{x-3}{3} \left| \begin{array}{l} x=0; \quad N_{6-7} = -1; \\ x=3; \quad N_{6-7} = 0. \end{array} \right.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую нулевую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $7'$ и $6'$, расположенные соответственно под узлами 7 и 6 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.12e).

6.6 Расчет шпренгельных ферм

Из рассмотренного ранее способа моментной точки (п. 6.2.3) следует, что возникающее в стержне усилие тем меньше, чем больше его плечо относительно моментной точки (при прочих равных условиях):



Однако увеличение плеча усилия ведет к увеличению высоты фермы, а следовательно, и к увеличению длин стоек и раскосов, а значит и их гибкости. С другой стороны, по конструктивным соображениям удобно, чтобы раскосы составляли со стойками и поясами фермы углы, близкие к 45° , что в свою очередь приводит к увеличению длины панелей и, как следствие, их гибкости, массы и т.п. Возникающее противоречие можно преодолеть путем введения в структуру фермы дополнительных элементов, называемых *шпренгелями* (рисунок 6.13а).

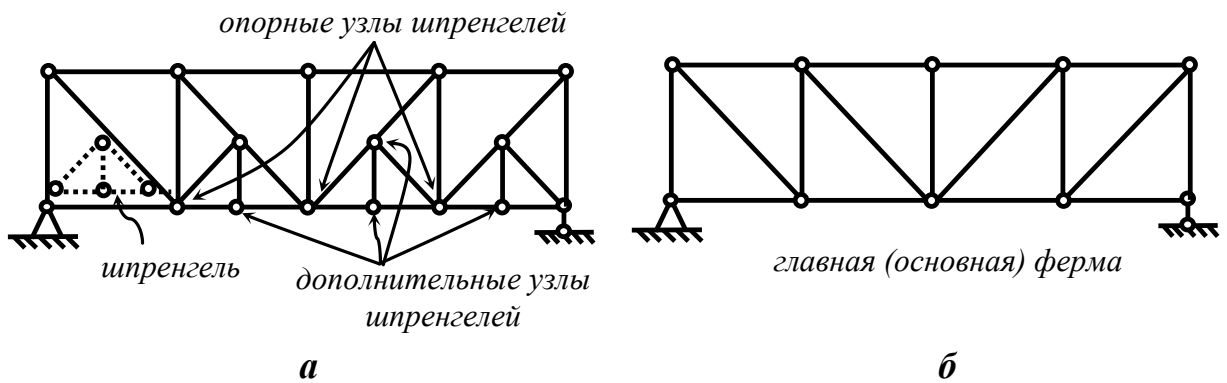


Рисунок 6.13

Введение шпренгелей, опирающихся на узлы основной фермы, позволяет уменьшить усилия в поясах фермы и одновременно уменьшить размеры грузовых панелей, создавая тем самым более экономичную конструкцию.

Шпренгели работают только на местную нагрузку, приложенную в пределах их пролета, передавая ее на узлы основной фермы, являющиеся для них опорными.

Фермы с установленными шпренгелями называются *шпренгельными*. Ферма, получающаяся из исходной шпренгельной мысленным исключением шпренгелей, называется *главной (основной)*, а ее узлы – *основными*. Дополнительные узлы при исключении из главной фермы шпренгелей удаляются (рисунок 6.13б).

По характеру работы различают фермы с *одноярусными* и *двухъярусными* шпренгелями.

В фермах с одноярусными шпренгелями дополнительный узел шпренгеля находится на том же поясе, на который опирается сам шпренгель (рисунок 6.14). Нагрузка, приложенная к дополнительному узлу данного пояса, передается на основные узлы главной фермы того же пояса.

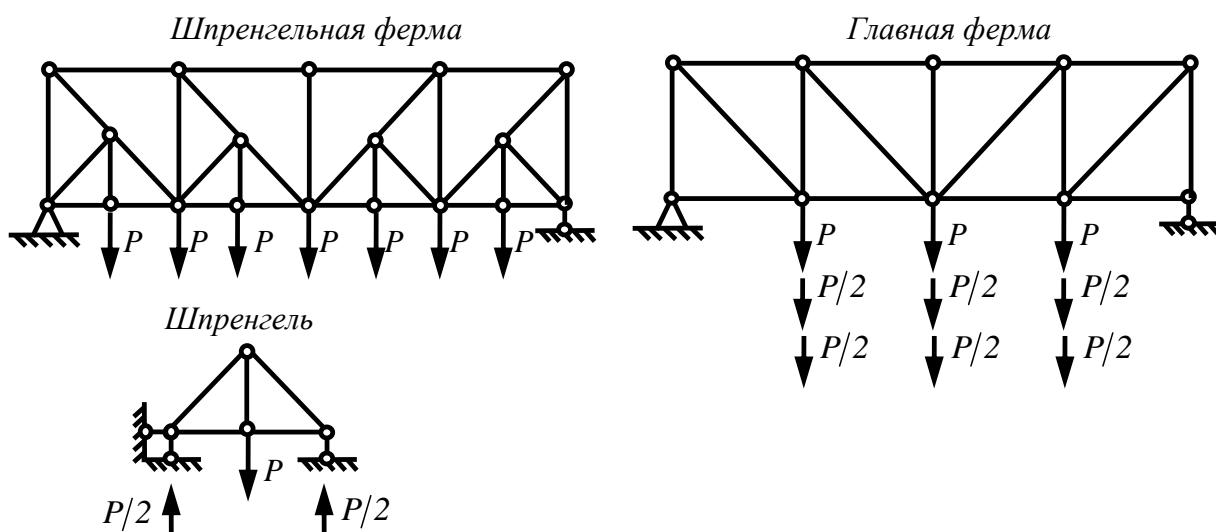


Рисунок 6.14 – Принцип работы одноярусных шпренгелей

В фермах с двухъярусными шпренгелями дополнительный узел шпренгеля находится на одном поясе, а его опорные узлы – на другом (рисунок 6.15). Нагрузка, приложенная к дополнительному узлу шпренгеля на одном поясе, передается на основные узлы главной фермы другого пояса.

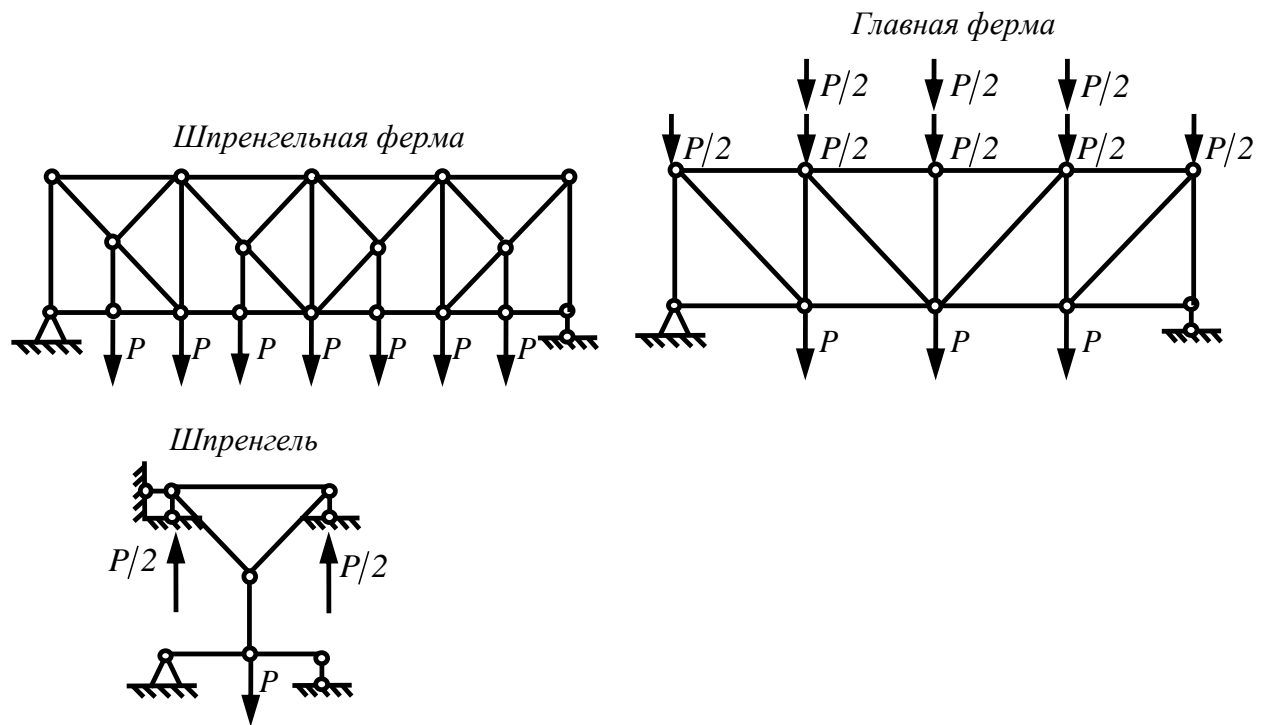


Рисунок 6.15 – Принцип работы двухъярусных шпренгелей

Стержни шпренгельных ферм подразделяются на четыре категории:

- 1) стержни, принадлежащие только главной ферме;
- 2) стержни, принадлежащие только шпренгелю;
- 3) стержни, принадлежащие одновременно главной ферме и шпренгелю;
- 4) стержни, линии влияния для которых имеют различный вид в зависимости от уровня передвижения единичного груза (при езде поверху и езде понизу).

Стержни четвертой категории встречаются только в фермах с двухъярусными шпренгелями.

Сформулируем **порядок расчета шпренгельных ферм**:

1 Выделить из исходной шпренгельной фермы шпренгели и главную ферму. Нагрузка на главную ферму должна быть перераспределена с учетом работы шпренгелей (одноярусных или двухъярусных).

2 Рассчитать отдельно главную ферму и шпренгели (аналитическим или графическим способом).

3 Определить усилия в стержнях исходной шпренгельной фермы соответственно их категориям:

– усилия в стержнях первой категории определяются из расчета только главной фермы;

– усилия в стержнях второй категории определяются из расчета только шпренгеля;

– усилия в стержнях третьей категории определяются как алгебраическая сумма усилий, полученных в данном элементе из расчета главной фермы и шпренгеля.

6.7 Построение линий влияния усилий в стержнях шпренгельных ферм

В силу того, что шпренгельные фермы относятся к простейшим, построение линий влияния в стержнях шпренгельных ферм проводят с учетом их категории по обычным правилам, изложенным в п. 6.5:

– для стержней первой категории линии влияния усилий строятся из рассмотрения только главной фермы;

– для стержней второй категории линии влияния усилий строятся из рассмотрения только шпренгеля;

– для стержней третьей категории линии влияния усилий представляют собой алгебраическую сумму линий влияния, построенных из рассмотрения отдельно главной фермы и отдельно шпренгеля;

– для построения линий влияния в стержнях четвертой категории необходимо построить совмещенную (на одном чертеже) линию влияния изучаемого усилия для главной фермы при перемещении единичного груза по верхнему и по нижнему поясу, а затем с учетом работы двухъярусных шпренгелей установить закон изменения усилия.

Следует заметить, что если для определения усилия в стержне в исходной шпренгельной ферме можно провести сечение, пересекающее не более трех стерж-

ней, то построение линии влияния можно проводить по обычным правилам (п. 6.5) без учета категории стержня и выделения главной фермы.

Рассмотрим несколько примеров построения линий влияния для элементов шпренгельных ферм.

Пример 6.7

Для фермы с одноярусными шпренгелями (рисунок 6.16а) построить линии влияния усилий в стержнях $1-2$, $1-6$, $3-6$, $4-5$.

Выделим из исходной фермы главную ферму (рисунок 6.16б).

Для построения *линии влияния усилия* N_{1-2} проведем в исходной шпренгельной ферме (рисунок 6.16а) сечение $I-I$, пересекающее три стержня. Моментная точка для исследуемого усилия совпадает с узлом 3.

Линию влияния строим по правилам, сформулированным в п. 6.5.1. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую нулевую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $5'$ и $3'$, расположенные соответственно под узлами 5 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.16в).

Построение *линии влияния усилия* N_{1-6} будем проводить соответственно его категории, т.к. в исходной шпренгельной ферме не удастся провести для его определения сечение, пересекающее не более трех стержней. Стержень $1-6$ относится к первой категории, поэтому линию влияния усилия в нем можно строить из рассмотрения совпадающего с ним стержня $1-3$ главной фермы (рисунок 6.16б). Проведем в главной ферме сечение $II-II$. Линию влияния строим способом проекций по правилам, сформулированным в п. 6.5.1. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую нулевую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели $4-3$ главной фермы, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $4'$ и $3'$, расположенные соответственно под узлами 4 и 3 разрезанной грузовой панели главной фермы, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.16г).

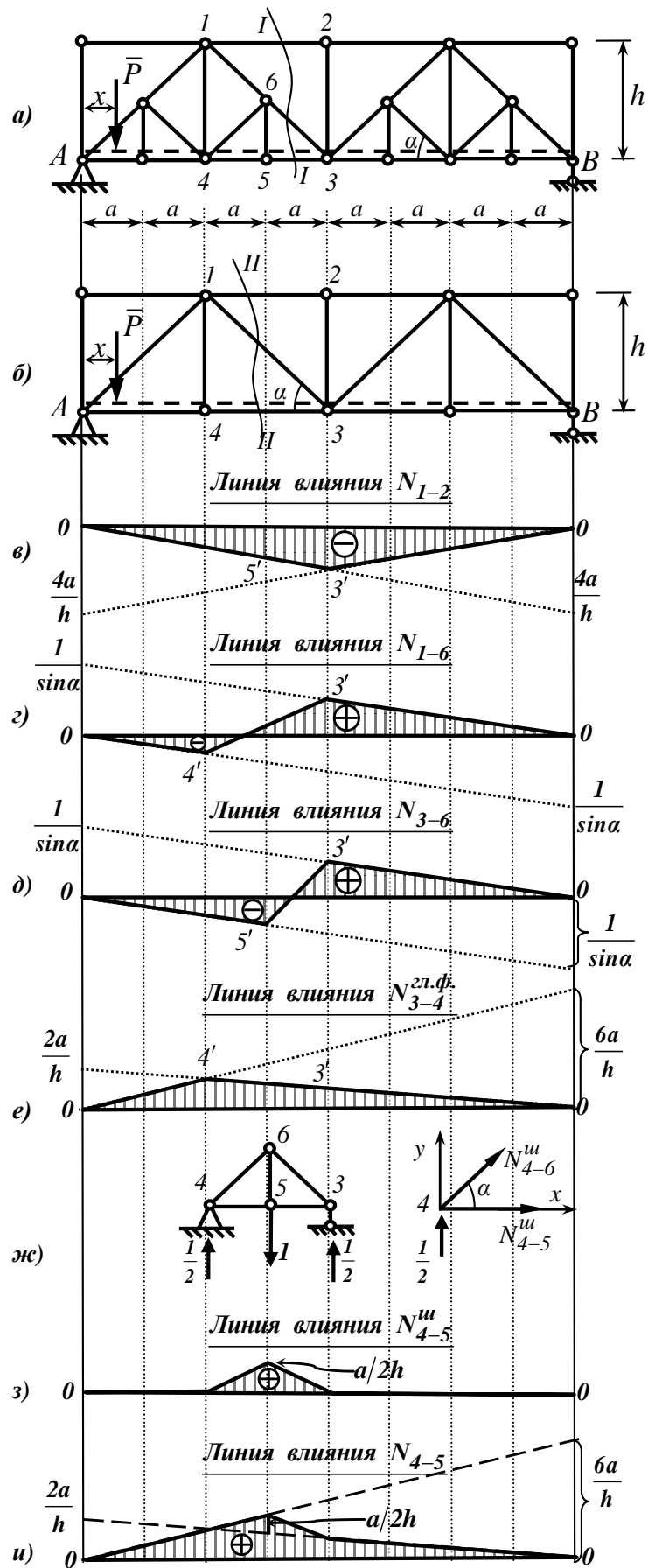


Рисунок 6.16

В рассматриваемом случае наличие шпренгелей не оказывает влияния на усилие в исследуемом стержне $I-6$, относящегося к первой категории.

Для построения *линии влияния усилия* N_{3-6} воспользуемся уже проведенным в исходной шпренгельной ферме сечением $I-I$ (рисунок 6.16а). Линию влияния строим способом проекций по правилам, сформулированным в п. 6.5.1. Учитывая узловую передачу нагрузки, сносим на левую нулевую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели $5-3$, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $5'$ и $3'$, расположенные соответственно под узлами 5 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.16д). Как видно из сравнения построенной линии влияния с линией влияния усилия N_{1-6} (рисунок 6.16з) влияние шпренгелей в рассматриваемом случае учитывается автоматически посредством уменьшения длины рассеченной грузовой панели по сравнению с главной фермой.

Построение *линии влияния усилия* N_{4-5} будем проводить соответственно его категории, т.к. в исходной шпренгельной ферме не удастся провести для его определения сечение, пересекающее не более трех стержней. Стержень $4-5$ относится к третьей категории, поэтому линию влияния можно получить алгебраическим сложением линии влияния усилия $N_{3-4}^{зл.ф.}$ для совпадающего с ним стержня $3-4$ главной фермы и линии влияния усилия $N_{4-5}^{ш.}$ для шпренгеля.

Для построения линии влияния $N_{3-4}^{зл.ф.}$ воспользуемся уже проведенным в главной ферме сечением $II-II$. Моментная точка для стержня совпадает с узлом I . Линию влияния строим способом моментной точки по правилам, сформулированным в п. 6.5.1. Учитывая узловую передачу нагрузки в ферме, сносим на левую нулевую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели $4-3$ главной фермы, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки $4'$ и $3'$, расположенные соответственно под узлами 4 и 3 разрезанной грузовой панели главной фермы, соединяем передаточной прямой (рисунок 6.16д).

Для построения линии влияния $N_{4-5}^{ш.}$ выделим из исходной фермы соответствующий шпренгель (рисунок 6.16е) и рассмотрим равновесие узла 4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} N_{4-6}^{uu} \cos \alpha + N_{4-5}^{uu} = 0; \\ N_{4-6}^{uu} \sin \alpha + \frac{1}{2} = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_{4-6}^{uu} = -\frac{1}{2 \sin \alpha}; \\ N_{4-5}^{uu} = -N_{4-6}^{uu} \cos \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{2h}. \end{array} \right.$$

Линию влияния строим способом вырезания узлов (п. 6.5.1) при действии на шпренгель местной нагрузки (рисунок 6.16ж).

Окончательную линию влияния усилия N_{4-5} получим алгебраическим сложением характерных ординат двух построенных линий влияния (рисунок 6.16и).

Пример 6.8

Для фермы с двухъярусными шпренгелями (рисунок 6.17а) построить линию влияния усилия в стержне 2-4.

Выделим из исходной фермы главную ферму (рисунок 6.17б). Стержень 2-4 принадлежит только главной ферме. Для определения усилия N_{2-4} проведем в главной ферме сечение $I-I$, пересекающее три стержня. Обратим внимание, что проекции соответствующих узлов рассеченных грузовых панелей по верхнему и нижнему поясу не совпадают. Как было показано ранее, вид линии влияния в таких случаях зависит от уровня перемещения единичного груза (рисунок 6.7). В исходной ферме шпренгели – двухъярусные, передающие нагрузку с одного пояса фермы на другой. Следовательно, стержень 2-4 относится к четвертой категории, а не к первой, как могло бы показаться на первый взгляд.

Для построения *линии влияния усилия* N_{2-4} сначала построим на одном графике линии влияния усилия при перемещении единичного груза поверху и понизу (рисунок 6.17в).

Пока единичный груз находится левее узла 3 или правее узла 5, вид линии влияния N_{2-4} не зависит от того, по какому поясу перемещается единичный груз: построенные линии влияния левее точки 3' и правее 5' совпадают. Если же единичный груз в исходной ферме (рисунок 6.17а) находится между узлами 3 и 5 в работу

включаются двухъярусные шпренгели, передающие нагрузку с нижнего пояса фермы на верхний. Руководствуясь этими соображениями, сносим дополнительные узлы двухъярусных шпренгелей 6 и 7 на линию влияния, соответствующую перемещению поверху (точки 6' и 7' на линии влияния). Основную узел главной фермы 4 сносим на линию влияния, соответствующую перемещению по грузовому нижнему поясу (точка 4' на линии влияния).

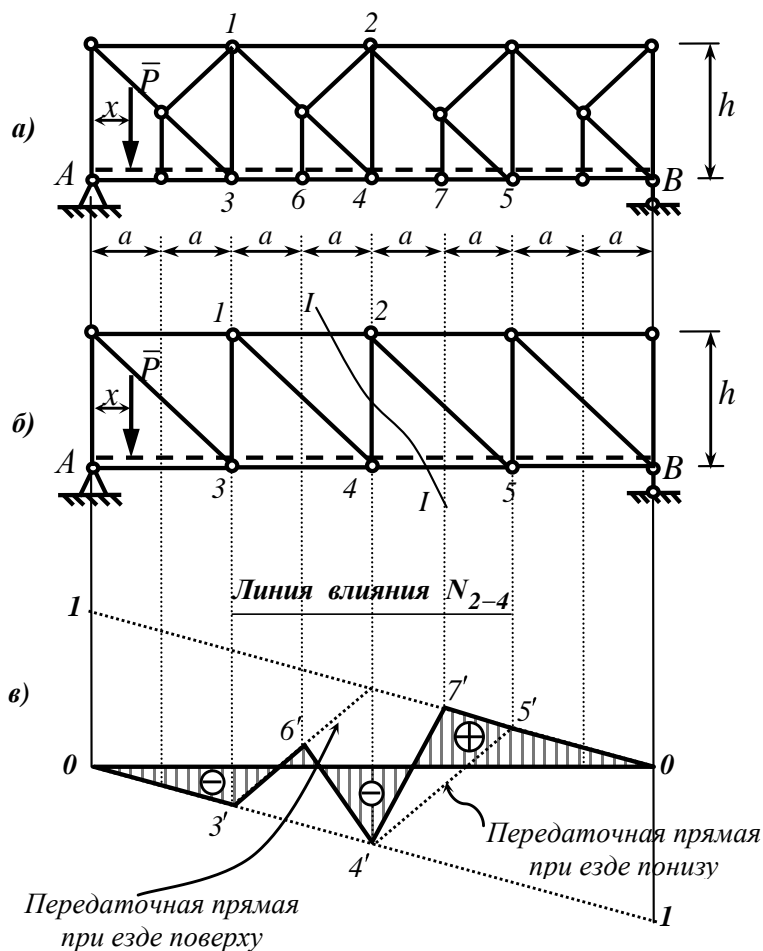


Рисунок 6.17

Таким образом, при построении линий влияния для стержней четвертой категории *основные узлы перерезанных панелей главной фермы сносят на линию влияния при движении по основному грузовому поясу, а дополнительные узлы шпренгелей – на линию влияния, соответствующую перемещению по другому (противоположному) поясу.*

Соединяя отмеченные точки передаточными прямыми, получим окончательную линию влияния усилия N_{2-4} (рисунок 6.17в).

6.8 Расчет сложных ферм

Сложной называется ферма, усилия в элементах которой могут быть определены с помощью уравнений статики после некоторого дополнительного преобразования этой фермы в простейшую или совместного решения системы уравнений.

6.8.1 Способ замены стержней (способ Геннеберга)

Данный способ расчета сложных ферм основывается на преобразовании сложной фермы в простейшую, что позволяет упростить расчет и не требует совместного решения уравнений. Способ замены стержней (способ Геннеберга) универсален и подходит не только для плоских, но и пространственных ферм.

Идея способа замены стержней заключается в следующем:

1 Путем перестановки стержней (одного или нескольких) преобразовать исходную ферму в простейшую. Перестановка стержней состоит в удалении одних стержней (*заменяемых*) и введении в систему других стержней (*заменяющих*).

2 Рассчитать полученную преобразованную ферму на внешнюю нагрузку, определив усилия во всех стержнях, в том числе и *заменяющих*.

3 Рассчитать преобразованную ферму от действия единичных сил, приложенных по направлению *заменяемых* стержней, определив усилия во всех стержнях, в том числе и *заменяющих*.

4 Определить неизвестные усилия в *заменяемых* стержнях из условия равенства нулю усилий в *заменяющих* стержнях, в силу того, что в исходной ферме *заменяющие* стержни отсутствуют.

5 Определить усилия N_i в стержнях исходной фермы по формуле

$$N_i = N_i^P + \bar{N}_i \cdot X, \quad (6.2)$$

где N_i^P – усилие в i -том стержне от действия внешней нагрузки;

\bar{N}_i – усилие в i -том стержне от действия единичных сил, приложенных по направлению заменяемого (отброшенного) стержня.

Здесь и далее черта над обозначением усилия \bar{N}_i указывает, что значение усилия определяется от единичных сил.

Рассмотрим этот способ подробнее на примере фермы, изображенной на рисунке 6.18а.

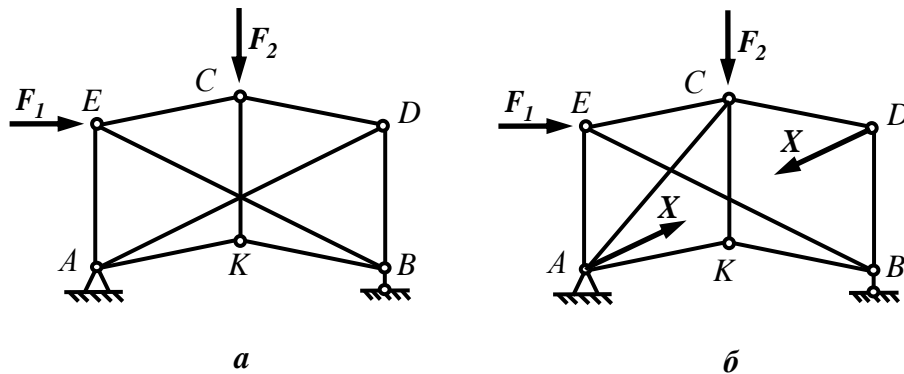


Рисунок 6.18

В каждом узле фермы сходится по три стержня, поэтому усилия в стержнях нельзя определить изложенными ранее способами (способом вырезания узлов или способом Риттера).

Преобразуем заданную ферму в простейшую. Отбросим стержень AD , заменив его другим, например, стержнем AC (рисунок 6.18б). Полученная новая ферма является геометрически неизменяемой, т.к. образована из шарнирного треугольника ACE , к которому последовательно присоединены с помощью диад узлы K , B и D . Усилия в стержнях новой полученной фермы легко определяются без совместного решения системы уравнений, например, способом вырезания узлов.

Вариантов преобразования сложной фермы в простейшую может быть несколько, но при этом нужно учитывать следующее:

- нельзя отбрасывать «нулевые» стержни;
- преобразованная система должна быть геометрически неизменяемой;
- усилия в стержнях преобразованной фермы легко определяются любым элементарным способом, например, способом вырезания узлов.

По направлению отброшенного стержня AD приложим в узлах A и D неизвестное усилие X (рисунок 6.18б). Усилия во всех стержнях исходной фермы от заданной внешней нагрузки (рисунок 6.18а) должны быть равны усилиям в соответствующих стержнях преобразованной фермы от действия внешних сил F_1 , F_2 и усилия X (рисунок 6.18б).

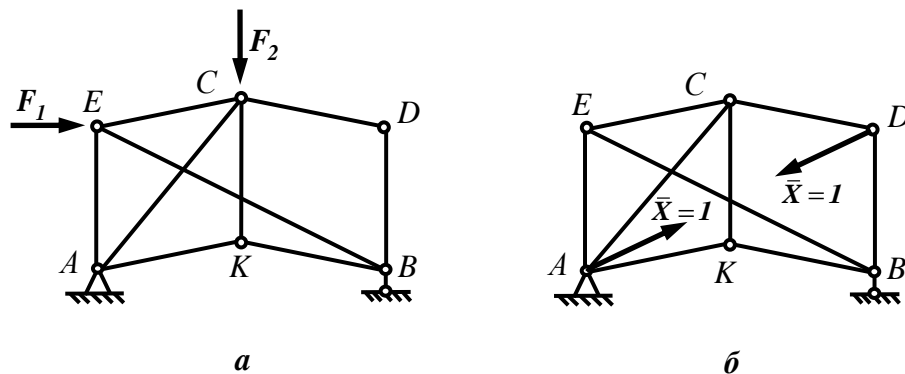


Рисунок 6.19

Определяем усилия в стержнях преобразованной фермы по отдельности от внешних сил F_1 , F_2 (рисунок 6.19а) и от единичных сил $\bar{X} = 1$, приложенных по направлению заменяемого стержня (рисунок 6.19б).

На основании принципа независимости действия сил усилие в любом стержне (в том числе и заменяющем) преобразованной фермы определяется по формуле (6.2). Но усилие в заменяющем стержне AC должно быть равно нулю, т.к. в исходной ферме этот стержень отсутствует:

$$N_{AC} = N_{AC}^P + \bar{N}_{AC} \cdot X = 0.$$

Следовательно, усилие X в отброшенном заменяемом стержне AD равно:

$$X = -\frac{N_{AC}^P}{\bar{N}_{AC}}, \quad (6.3)$$

где N_{AC}^P – усилие в заменяющем стержне AC от действия внешней нагрузки;

\bar{N}_{AC} – усилие в заменяющем стержне AC от действия единичных сил, приложенных по направлению отброшенного стержня AD .

После определения величины X , усилия во всех стержнях исходной фермы определяются по формуле (6.2).

6.8.2 Способ замкнутых сечений

Поясним этот способ на примере фермы В.Г. Шухова, изображенной на рисунке 6.20.

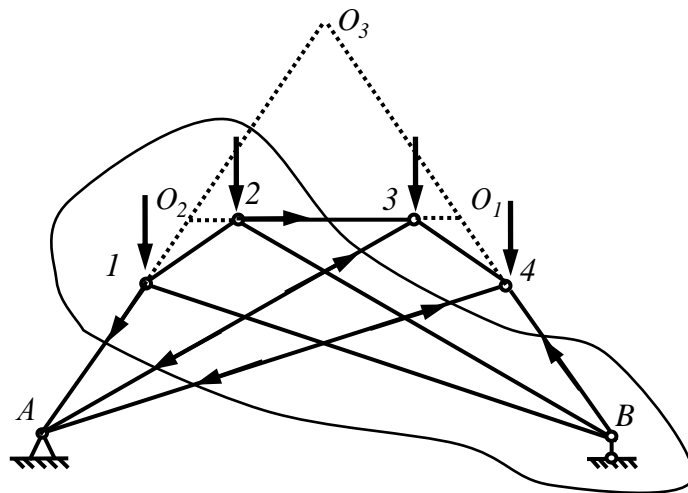


Рисунок 6.20

В этой ферме нет узлов, в которых бы сходились только два стержня с неизвестными усилиями и невозможно провести сечение, пересекающее только три стержня. Проведем замкнутое сечение так, чтобы два стержня $A-3$ и $A-4$ пересекались дважды, а три стержня $A-1$, $2-3$, $B-4$ – один раз. Усилия в стержнях $A-3$ и $A-4$,

перерезанных сечением дважды, уравниваются внутри контура, а усилия в стержнях $A-1$, $2-3$, $B-4$ легко определяются с помощью моментных точек O_1 , O_2 и O_3 . После определения усилий в стержнях $A-1$, $2-3$, $B-4$ легко можно вычислить усилия и в других стержнях фермы.

6.8.3 Способ двух (или нескольких) сечений

Данный способ применяется в тех случаях, когда в системе удастся провести два сечения таким образом, чтобы каждое из них пересекало четыре стержня, причем два стержня с неизвестными усилиями повторялись в обоих разрезах (рисунок 6.21).

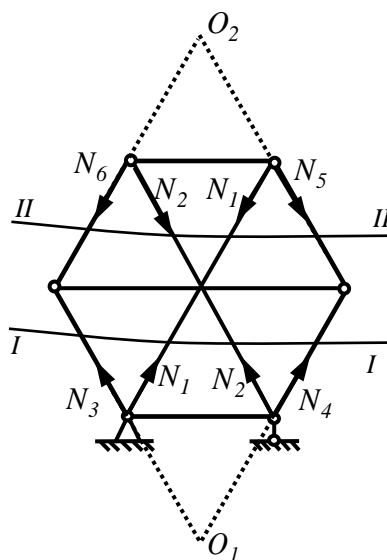


Рисунок 6.21

Составив два уравнения моментов относительно точек O_1 и O_2 с двумя неизвестными для верхней и нижней частей фермы и решая их совместно, можно определить усилия S_1 , S_2 . После чего легко определяются усилия во всех остальных стержнях фермы.

В более сложных случаях могут быть проведены три и более сечения.

6.9 Кинематический анализ сложных ферм

Число степеней свободы W сложных ферм вычисляется, как и для простейших, по формулам (2.3) и (2.4):

$$W = 2Y - C - C_{on},$$

$$W = 2Y - C - 3.$$

Как известно, если выполняется необходимое условие (2.5) геометрической неизменяемости $W \leq 0$, то в системе достаточное число связей, и при правильной их расстановке она может быть геометрически неизменяемой.

Достаточное условие геометрической неизменяемости системы проверяется с помощью анализа геометрической структуры, который удобно проводить с помощью рассмотренного в п. 6.8.1 способа замены стержней.

Рассмотрим применение способа замены стержней для проверки геометрической неизменяемости фермы подробнее. Возможны два случая:

1 случай. Преобразованная система получается из заданной сложной фермы заменой одного стержня.

Если исходная сложная ферма является геометрически неизменяемой, то величина усилия в *заменяемом* стержне имеет определенное конечное значение. Усилие в заменяемом стержне определяется выражением (6.3):

$$X = -\frac{N_{AC}^P}{\bar{N}_{AC}}.$$

Если $N_{AC}^P \neq 0$ и $\bar{N}_{AC} \neq 0$, то $X = const$ и ферма геометрически неизменяема.

Если $N_{AC}^P = 0$ и $\bar{N}_{AC} \neq 0$, то $X = 0$ и ферма геометрически неизменяема.

Если $N_{AC}^P = 0$ и $\bar{N}_{AC} = 0$, то $X = \frac{0}{0}$ (неопределенное значение) и ферма геометрически изменяема.

метрически изменяема.

Если $N_{AC}^P \neq 0$ и $\bar{N}_{AC} = 0$, то $X = \infty$ и ферма мгновенно изменяема.

Таким образом, *сложная ферма является геометрически неизменяемой, если усилие в новом заменяющем стержне от единичных сил по направлению отброшенного заменяемого стержня отлично от нуля, в противном случае – ферма геометрически изменяема.*

2 случай. Преобразованная система получается из заданной сложной фермы заменой нескольких стержней.

Искомые усилия X_1, X_2, \dots, X_n в заменяемых стержнях определяются совместным решением системы n уравнений. Усилие в i -том заменяемом стержне:

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных усилиях X_1, X_2, \dots, X_n ;

Δ_i – определитель, полученный из определителя Δ заменой i -того столбца на свободные члены уравнений.

Если $\Delta \neq 0$, то усилия X_1, X_2, \dots, X_n будут иметь определенное конечное значение, следовательно, исходная сложная ферма является геометрически неизменяемой.

Если $\Delta = 0$, то исходная сложная ферма геометрически изменяема.

Проиллюстрируем изложенный подход на конкретных примерах.

Пример 6.9

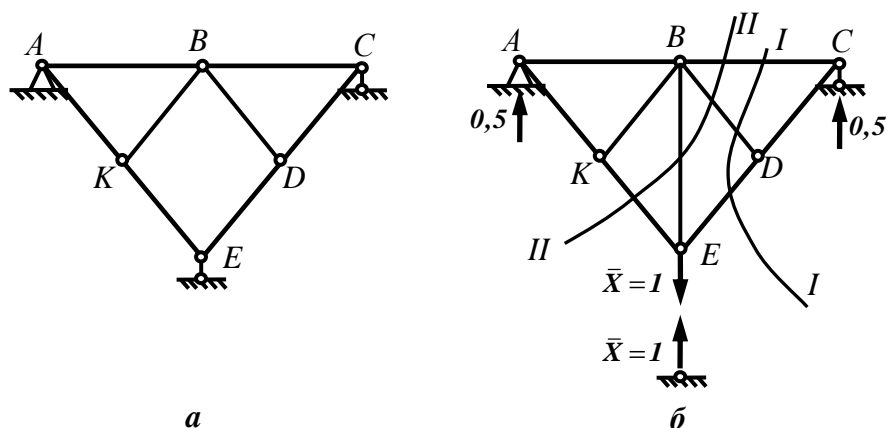


Рисунок 6.22

Проверим выполнение необходимого условия (2.5) для фермы, изображенной на рисунке 6.22а:

$$W = 2Y - C - C_{on} = 2 \cdot 6 - 8 - 4 = 0.$$

Следовательно, необходимое условие (2.5) выполняется, и система обладает необходимым числом связей для обеспечения геометрической неизменяемости.

Преобразуем ферму в простейшую (рисунок 6.22б) и вычислим значения усилия в новом заменяющем стержне BE от единичных сил $\bar{X} = 1$:

$$\sum M_C^{I-I} = 0; \Rightarrow \bar{N}_{DB} = 0;$$

$$\sum M_A^{II-II} = 0; \Rightarrow \bar{N}_{BE} = 0.$$

Так как усилие в заменяющем стержне получилось равным нулю, то исходная ферма (рисунок 6.22а) является мгновенно изменяемой.

Пример 6.10

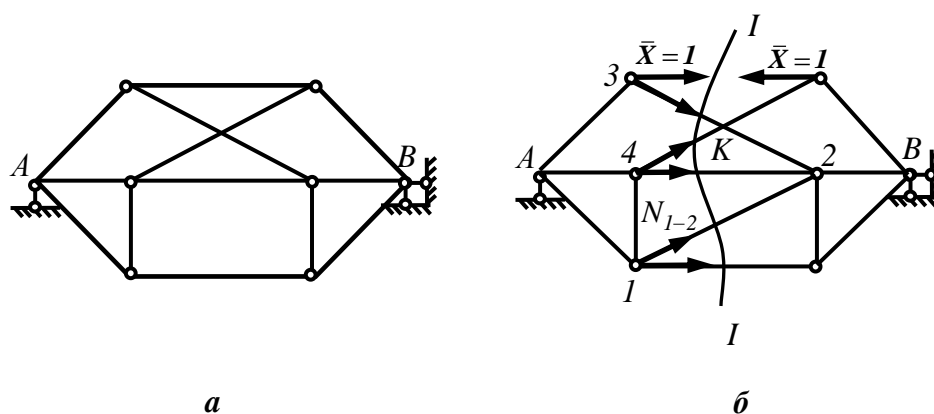


Рисунок 6.23

Проверим выполнение необходимого условия (2.5) для фермы, изображенной на рисунке 6.23а:

$$W = 2Y - C - C_{on} = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0.$$

Следовательно, необходимое условие (2.5) выполняется, и система обладает необходимым числом связей для обеспечения геометрической неизменяемости.

Преобразуем ферму в простейшую (рисунок 6.23б) и вычислим значения усилия в новом заменяющем стержне 1-2 от единичных сил $\bar{X} = 1$:

$$\sum Y^{лев} = 0; \Rightarrow \bar{N}_{1-2} = 0.$$

Так как усилие в заменяющем стержне получилось равным нулю, то исходная ферма (рисунок 6.23а) является мгновенно изменяемой.

6.10 Расчет шпренгельных балок

Шпренгельной называется жесткая балка, усиленная шарнирной цепью (рисунок 6.24), наличие которой позволяет уменьшить изгибающие моменты в сечениях балки по сравнению с обычной балкой.

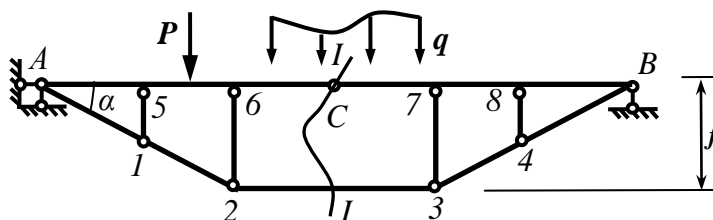
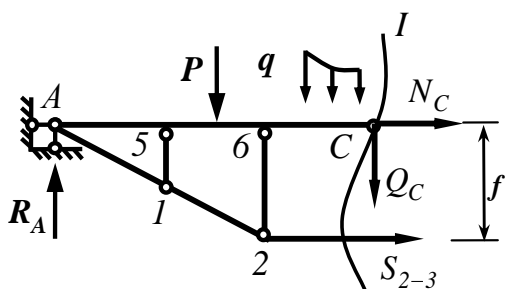


Рисунок 6.24

Опорные реакции шпренгельной балки легко определяются, как и у обычной балки, из уравнений моментов сил относительно опорных шарниров.

Для определения усилий в элементах подвески (шпренгеля) проведем сечение $I-I$ и рассмотрим равновесие левой отсеченной части системы:



$$\sum M_C^{лев} = 0; \Rightarrow S_{2-3} = \frac{M_C^0}{f},$$

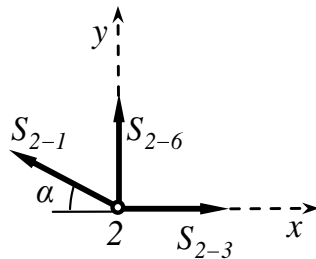
где M_C^0 – балочный изгибающий момент в сечении C эквивалентной балки (пояснения к формуле (5.4) п. 5.2).

Учитывая, что полученная формула совпадает с формулой (5.4) для определения распора в арке примем для усилия S_{2-3} обозначение H :

$$S_{2-3} = H = \frac{M_C^0}{f}. \quad (6.4)$$

Затем, рассматривая поочередно равновесие узлов 2 и 1, можно определить усилия в остальных элементах подвески.

Так, из уравнений равновесия узла 2 получим:



$$\begin{cases} \sum X = 0; & S_{2-3} - S_{2-1} \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & S_{2-6} + S_{2-1} \sin \alpha = 0; \end{cases}$$

$$S_{2-1} = \frac{S_{2-3}}{\cos \alpha} = \frac{M_C^0}{f \cos \alpha}; \quad (6.5)$$

$$S_{2-6} = -S_{2-1} \sin \alpha = -\frac{M_C^0}{f} \operatorname{tg} \alpha.$$

Можно заметить, что усилия в элементах подвески не зависят от способа приложения нагрузки, а зависят только от геометрии шпренгеля

После определения усилий во всех элементах шпренгеля переходят к определению внутренних усилий в балке ABC , отбросив шпренгель и заменив его действие известными усилиями (рисунок 6.25).

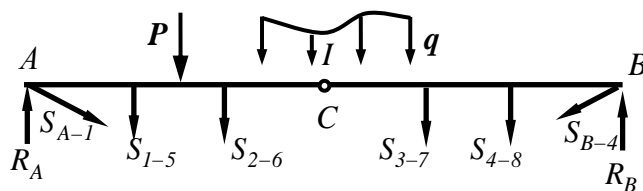


Рисунок 6.25

Для построения линий влияния внутренних усилий в некотором сечении K проведем сквозной вертикальный разрез системы через заданное сечение и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рисунок 6.26).

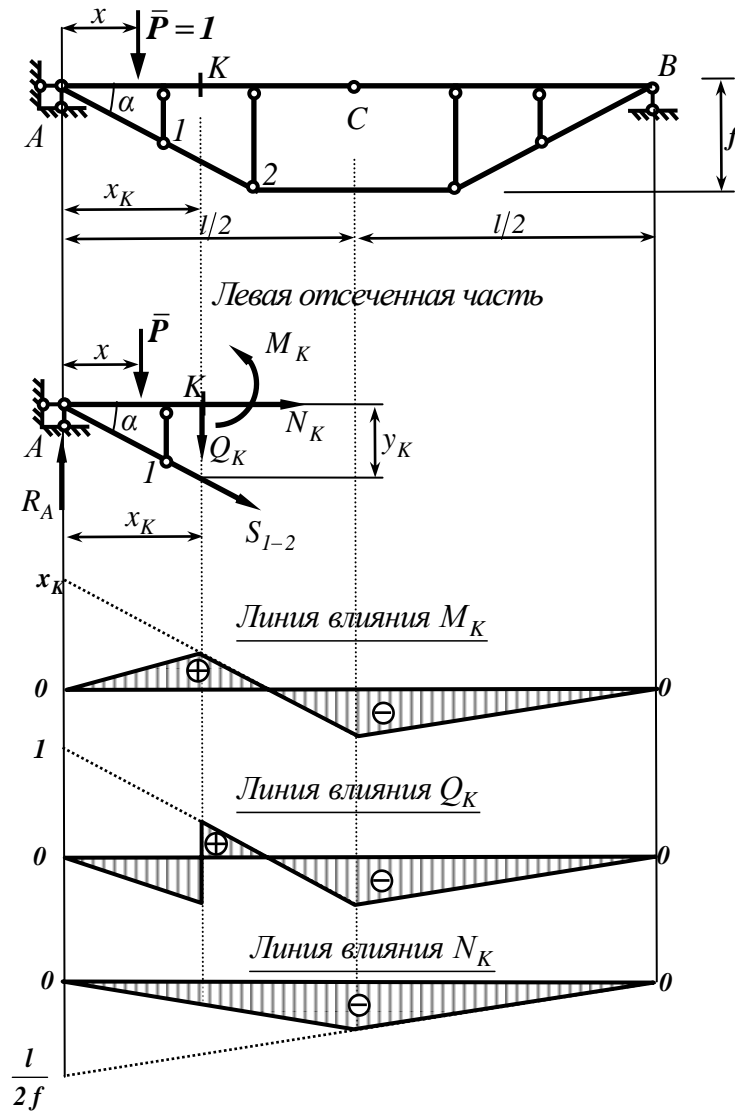


Рисунок 6.26

Изгибающий момент

$$M_K = R_A x_K - \bar{P} x_K - x - S_{1-2} x_K \sin \alpha.$$

С учетом выражения (6.5)

$$S_{I-2} x_K \sin \alpha = \frac{M_C^0}{f \cos \alpha} x_K \sin \alpha = \frac{M_C^0}{f} x_K \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_C^0}{f} y_K.$$

Тогда,

$$M_K = M_K^0 - H y_K, \quad (6.6)$$

где M_K^0 – балочный изгибающий момент в сечении K эквивалентной балки;

H – определяется выражением (6.4).

Поперечная сила

$$Q_K = R_A - \bar{P} - S_{I-2} \sin \alpha = R_A - \bar{P} - \frac{M_C^0}{f \cos \alpha} \sin \alpha;$$

$$Q_K = Q_K^0 - H \operatorname{tg} \alpha, \quad (6.7)$$

где Q_K^0 – балочная поперечная сила в сечении K эквивалентной балки.

Продольная сила

$$N_K = -S_{I-2} \cos \alpha = -\frac{M_C^0}{f} = -H. \quad (6.8)$$

Из полученных выражений следует, что линии влияния (л. вл.) внутренних усилий могут быть построены способом наложения балочных линий влияния:

$$\begin{cases} \text{л.вл.} M_K = \text{л.вл.} M_K^0 - \text{л.вл.} H \cdot y_K; \\ \text{л.вл.} Q_K = \text{л.вл.} Q_K^0 - \text{л.вл.} H \cdot \operatorname{tg} \alpha; \\ \text{л.вл.} N_K = -\text{л.вл.} H. \end{cases} \quad (6.9)$$

Построение линий влияния путем алгебраического сложения балочных линий влияния было подробно рассмотрено в п. 5.4.2 при построении линий влияния в трехшарнирной арке.

6.11 Общие сведения о висячих системах

Висячей называется система, в которой основная несущая конструкция, перекрывающая пролет, работает только на растяжение. Простейшим примером висячей системы может служить трос с подвешенными к нему элементами конструкции, предназначенными для восприятия местной нагрузки. Работа несущих элементов висячих конструкций на растяжение дает возможность наиболее полно использовать механические свойства материалов.

Висячие системы позволяют перекрывать исключительно большие пролеты, в связи с чем они широко применяются при строительстве мостов, для перекрытия рынков, стадионов, выставочных залов и т.п.

Висячие конструкции удобны при монтаже, отличаются сравнительно небольшим весом, надежны в эксплуатации.

Основным недостатком висячих систем является их деформативность (изменяемость) под действием местной нагрузки. Для обеспечения геометрической неизменяемости в систему вводятся дополнительные стабилизирующие элементы: оттяжки, раскосы, балки жесткости и т.п. На рисунке 6.27а показана висячая система, к гибкому несущему элементу которой с помощью отдельных стержней подвешена балка жесткости.

Отличительная особенность данной системы по сравнению с изображенной на рисунке 6.26 балкой состоит в том, что опоры балки жесткости AB отделены от опор цепи D и E .

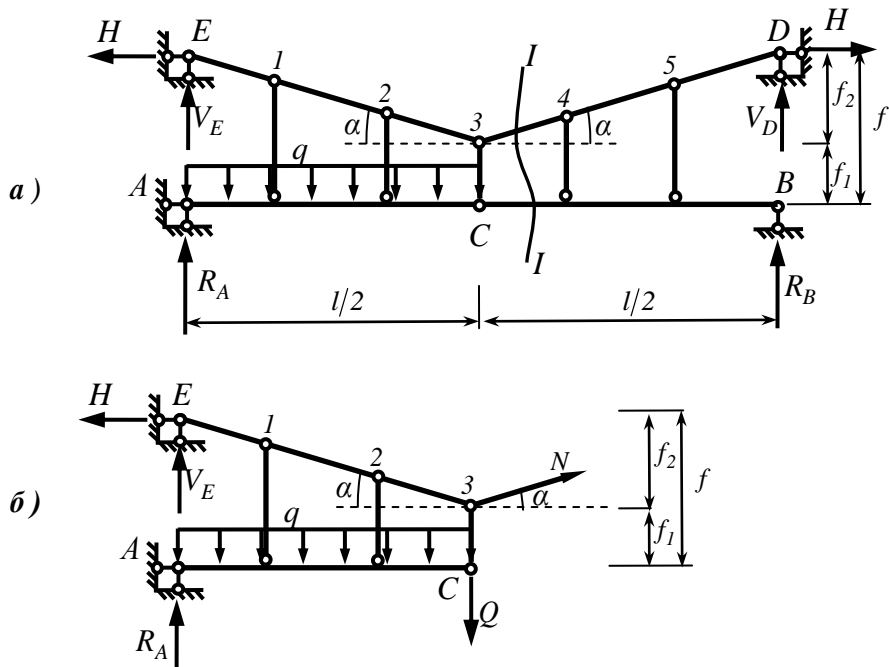


Рисунок 6.27

В балку жесткости AB введен один шарнир C , поэтому в ней недостает одной связи. В верхней ферме 15 стержней и 7 узлов ($C - 2U = I$), т.е. одна связь – избыточная, компенсирующая отсутствующую в балке. В целом для всей системы необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется:

$$W = 3D - 2Ш_n - C_{on} = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 16 - 7 = 0.$$

Система геометрически неизменяема и статически определима. Заметим, что приведенная на рисунке 6.27а система по причине гибкости несущего элемента (троса) может работать только на нагрузку, направленную вертикально вниз.

Проиллюстрируем общий ход расчета висячих систем. Введем обозначения:

$$R_{лев} = R_A + V_E, \quad R_{прав} = R_B + V_D. \quad (6.10)$$

Значения $R_{лев}$ и $R_{прав}$ определяются из условий равенства нулю суммы моментов внешних сил относительно опор D и E .

Выразим вертикальные составляющие реакций V_D и V_E через горизонтальную составляющую H :

$$V_E = V_D = H \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда из выражения (6.10) имеем:

$$R_A = R_{лев} - H \operatorname{tg} \alpha, \quad R_B = R_{прав} - H \operatorname{tg} \alpha.$$

Вычислим значение распора из равновесия левой отсеченной части системы (рисунок 6.27б):

$$\sum X^{лев} = 0; \quad N \cos \alpha - H = 0; \quad N \cos \alpha = H;$$

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad Hf - R_{лев} \frac{l}{2} + q \frac{l^2}{8} - N \cos \alpha f_1 = 0;$$

$$H f - f_1 - \left(R_{лев} \frac{l}{2} - q \frac{l^2}{8} \right) = 0;$$

$$H = \frac{M_C^0}{f_2},$$

где M_C^0 – балочный момент в сечении C эквивалентной балки.

После определения величины распора можно определить усилия во всех элементах системы, последовательно вырезая ее узлы и рассматривая условия их равновесия.

7 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

1 Дарков, А.В. Строительная механика : учеб. / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб. : Лань, 2010. – 656 с.

2 Снитко, Н.К. Строительная механика: учеб. / Н.К. Снитко. – М.: Высш. шк., 1980. – 431 с.

3 Константинов, И.А. Строительная механика : учеб. / И.А. Константинов, В.В. Лалин, И.И. Лалина. – Москва: КНОРУС, 2011. – 432 с.

4 Саргсян А.Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций : учеб. для вузов / А.Е. Саргсян. – М.: Высшая школа, 2004. – 462 с.

5 Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: АСВ, 1996. – 542 с.

6 Кривошапко, С.Н. Строительная механика: лекции, семинары, расчетно-графические работы: учеб. пособие для бакалавров / С.Н. Кривошапко. – М.: Изд-во Юрайт, 2011. – 391 с.

7 Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы / Н.Н. Анохин. – М.: АСВ, 2007. – 335 с.