Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

Е. М. Крипак, О. Б. Матвеева, Т. Н. Образцова

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ХАРРОДА-ДОМАРА С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТОВ MS EXCEL И MATHCAD

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.04 Прикладная математика, 38.03.05 Бизнес-информатика, 38.04.01 Экономика

Оренбург

2018

УДК 33.7:519.86
ББК 65.292+65.290-2
К 82

Рецензент – кандидат экономических наук, доцент О. Н. Яркова

Крипак Е. М.
К 82 Исследование экономического роста на основе модели Харрода-Домара с помощью пакетов MS EXCEL и MATHCAD : методические указания / Е. М. Крипак, О. Б. Матвеева, Т. Н. Образцова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 30 с.

Методические указания к лабораторному практикуму, семинарским занятиям и самостоятельной работе предназначены для освоения обучающимися моделей экономического роста при изучении дисциплин «Математическое моделирование» направлений подготовки 01.03.04 Прикладная математика и 38.03.05 Бизнес-информатика; «Моделирование в бизнес системах» направления подготовки 38.04.01 Экономика, а также могут быть рекомендованы обучающимся других направлений для моделирования экономического роста.

УДК 33.7:519.86
ББК 65.292+65.290-2

Содержание

Введение

В математической экономике рассматриваются две важнейшие проблемы: проблема экономического равновесия и проблема экономического роста. Ключом к решению первой проблемы послужили работы классической школы экономики, представленной А. Маршаллом и Л. Вальрасом, а также работы Дж. Кейнса. Но по мере решения проблемы равновесия актуальной задачей становится исследование экономического роста.

Рассматриваемые в работе модели экономического роста Е. Д. Домара и Р. Ф. Харрода представляют собой первую системную попытку обобщить процессы, рассматриваемые в рамках кейнсианской модели, распространив их с краткосрочного периода на долгосрочный. В модели Дж. Кейнса рассматриваются условия формирования равновесного уровня национального дохода, тогда как в моделях, предложенных Е. Д. Домаром и Р. Ф. Харродом, изучается совокупность условий, обеспечивающих равновесный или устойчивый темп роста национального дохода.

Модель устойчивого роста Е. Д. Домара описывает условия, обеспечивающие такой темп роста дохода, который необходим для полной загрузки увеличивающегося основного капитала, а такой подход предполагает совместное рассмотрение мультипликационного эффекта инвестиций и их влияния на расширение производственных мощностей. Модель Р. Ф. Харрода несколько перемещает акценты, выдвигая в центр анализа последствия прироста индуцированных инвестиций (инвестиций, которые были вызваны (по крайней мере частично) ростом дохода в результате действия принципа акселерации). В качестве «побочного продукта» такого воздействия у Харрода выступает рост сбережений, связанный с увеличением дохода. В результате исследований Домара и Харрода была разработана модель, в рамках которой удалось интегрировать описание процессов мультипликации и акселерации. Такая модель позволяет определить темпы роста дохода, необходимые для поддержания равенства между планируемыми сбережениями и инвестициями.

1 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим модель макроэкономической динамики с непрерывным временем, известную как модель Харрода-Домара. Модель предназначена для описания динамики дохода Y(t), который рассматривается как сумма потребления C(t) и инвестиций I(t):

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{1}$$

Предполагается, что экономика является закрытой, поэтому чистый экспорт равен нулю, кроме того, государственные расходы в модели не выделяются.

Основное предположение модели заключается в том, что скорость роста дохода пропорциональна инвестициям:

$$I(t) = B\frac{dY(t)}{dt}. \tag{2}$$

где B – коэффициент капиталоемкости прироста дохода, или приростной капиталоемкости (соответственно, обратная ему величина 1/B называется приростной капиталоотдачей).

Модель строится при следующих допущениях:

1) инвестиционный лаг равен нулю, то есть инвестиции мгновенно переходят в прирост капитала. Формально это означает, что прирост капитала ΔK(t)=I(t), где ΔK(t) - непрерывная функция прироста капитала во времени;

2) выбытие капитала отсутствует либо не учитывается;

3) из пропорциональности прироста дохода приросту капитала следует, что производственная функция в модели линейна;

4) из линейности производственной функции следует, что затраты труда постоянны во времени либо выпуск не зависит от затрат труда, т.к. труд -не является дефицитным ресурсом;

5) модель не учитывает влияния научно-технического прогресса.

Указанные допущения существенно огрубляют модель, не позволяют использовать ее для непосредственных расчетов или прогноза, но ценность модели заключается в том, чтобы изучить взаимосвязь динамики инвестиций и роста выпуска и определить характер траекторий для рассматриваемых параметров.

Базовым положением во всех моделях макроэкономической динамики является определение зависимости, связывающей показатели инвестиций и определяемый ими объем основного капитала. Модель позволяет определить принципы формирования структуры дохода и распределения его между потреблением и накоплением. Эти принципы могут основываться на оптимизационном подходе, экстраполяционном, равновесном.

В рассматриваемой модели предполагается, что динамика потребления C(t) задается экзогенно. Этот показатель может быть постоянным во времени, расти с заданным постоянным темпом либо демонстрировать какую-то другую динамику.

Анализ модели будем проводить при следующих вариантах:

1) потребление отсутствует, то есть C(t)=0.
2) потребление постоянно на рассматриваемом интервале времени, $C(t)=C_0$- постоянная величина;
3) потребление растет с постоянным темпом роста r:

$$C(t) = C_0 e^{rt}. \tag{3}$$

В третьем варианте возможно 4 случая:

$$\begin{aligned} &1)\ \ r > 1/B; \\ &2)\ \ \rho_0 / B < r < 1/B; \\ &3)\ \ r < \rho_0 / B; \\ &4)\ \ r = \rho_0 / B, \end{aligned} \tag{4}$$

где ρ_0 – отношение нормы накопления в начальный момент времени к коэффициенту капиталоемкости.

Для анализа модели уточним обозначения:

Y(t) – доход в момент времени t;

C(t) – потребление в момент времени t;

I(t) – инвестиции в момент времени t.

Исходя из основного допущения модели запишем уравнение динамики дохода, дополнив его начальным условием:

$$\begin{cases} Y(t) = \dfrac{1}{B}\dfrac{dY(t)}{dt}; \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{5}$$

(5) – задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения, решение которой имеет вид:

$$Y(t) = Y_0 e^{\frac{t}{B}}. \tag{6}$$

Определим темп прироста дохода как:

$$\alpha(t) = \frac{Y'}{Y}. \tag{7}$$

Непрерывный темп прироста дохода в этом варианте равен 1/B, что соответствует максимально технологически возможному темпу прироста. Данный вариант показывает потенциальные возможности экономической системы. Такие темпы прироста вряд ли достижимы, но к ним можно стремиться.

Рассмотрим модель в предположении C(t)=const. Получаем неоднородное линейное дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} Y(t) = \dfrac{1}{B}\dfrac{dY(t)}{dt} + C_0; \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{8}$$

Вспоминая, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного и частного решения неоднородного, решение задачи будет иметь вид:

$$Y(t) = (Y_0 - C_0)e^{\frac{t}{B}} + C_0. \tag{9}$$

Непрерывный темп прироста дохода в этом варианте равен:

$$\alpha(t) = \frac{1}{B} \cdot \left(1 - \frac{C(t)}{Y(t)}\right) \tag{10}$$

В начальный момент времени (при t=0) он составляет:

$$\alpha(0) = \frac{1}{B} \cdot \left(1 - \frac{C_0}{Y(0)}\right). \tag{11}$$

Возрастая при $t \to \infty$, непрерывный темп прироста дохода стремится к 1/B, так как $Y(t) \to \infty$, а постоянный объем потребления составляет все меньшую его долю.

Величина

$$\rho(t) = 1 - \frac{C(t)}{Y(t)} \tag{12}$$

является норма накопления в момент времени t.

Таким образом, при прочих равных условиях рост нормы накопления пропорционально увеличивает темпы прироста дохода. В то же время это снижает уровень текущего потребления, и для разрешения проблемы согласования конкурентных целей увеличения темпов роста и уровня текущего благосостояния в модель обычно включают элементы оптимизации. В этом случае решается оптимизационная задача на максимум общего объема потребления за конечный или бесконечный период времени. Для отражения предпочтительности более раннего получения результата в модель включается временное дисконтирование, при котором более ранний результат учитывается в критерии с большим "весом".

Наконец, рассмотрим вариант модели с показателем потребления C(t), растущим с постоянным темпом r:

$$C(t) = C_0 e^{rt}. \qquad (13)$$

Задача Коши для этого варианта модели имеет вид:

$$\begin{cases} Y(t) = \dfrac{1}{B}\dfrac{dY(t)}{dt} + C_0 e^{rt}; \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \qquad (14)$$

Решение задачи для нелинейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид (проверьте дифференцированием!):

$$Y(t) = (Y_0 - \frac{C_0}{1-Br})e^{\frac{t}{B}} + \frac{C_0}{1-Br}e^{rt}. \qquad (15)$$

Характер решения принципиально зависит от величины r.

Из общих соображений ясно, что темп прироста потребления r не должен быть больше максимально возможного общего темпа прироста, определенного в варианте 1, так как иначе потребление будет занимать все большую и, в конце концов, - подавляющую часть дохода, что сведет к нулю сначала инвестиции, а затем и доход.

Это ясно из формулы решения модели, поскольку в случае $r \geq 1/B$ коэффициент (1-Br) - отрицателен, а вторая экспонента растет быстрее, чем первая, следовательно, второе слагаемое при этом отрицательное через некоторое время "перевесит" первое, что приведет к отрицательному доходу.

В решении рассматриваемой модели роста при $r < 1/B$ многое зависит от соотношения между r и ρ_0 / B.

В случае $\rho_0 / B < r < 1/B$ из формулы решения модели следует, что отрицательным будет коэффициент $\left(Y_0 - \frac{C_0}{1 - Br}\right)$, но в этом случае первая экспонента растет быстрее, чем вторая, следовательно, первое слагаемое при этом отрицательное через некоторое время "перевесит" второе, что также приведет к отрицательному доходу.

Если $r < \rho_0 / B$, то норма накопления, а вместе с ней и темп прироста дохода растут, причем последний в пределе приближается $1/B$. Однако в этом случае происходит "накопление ради накопления", ибо потребление растет заданным темпом r, а темп прироста дохода удается увеличить за счет более быстрого роста инвестиций. Норма накопления ρ_0 здесь превышает rB, и если исходить из задачи максимизации объема потребления, то эта норма слишком высока. Более высокий ее уровень требует увеличения инвестиций за счет сокращения потребления в начальный момент, что при фиксированном темпе прироста потребления r обусловливает более низкий его уровень на всей траектории.

Если $r = \rho_0 / B$, то темп прироста дохода равен темпу прироста потребления, и решением является

$$Y(t) = Y_0 e^{rt}. \qquad (16)$$

Норма накопления ρ_0 в этом случае постоянна во времени и равна $r = \rho_0 / B$, а темп прироста дохода пропорционален норме накопления и обратно пропорционален приростной капиталоемкости. Именно эта модификация модели экономического роста, в которой постоянна норма накопления, известна как модель Харрода-Домара.

Таким образом, если требуется поддерживать постоянный темп прироста потребления r, не превышающий технологического темпа, то для максимизации объема потребления за любой период нужно установить начальную норму накопления $\rho_0 = rB$. Более сложен вопрос о том, какой уровень темпа r более предпочтителен. Большая его величина позволяет обеспечить больший объем потребления за длительный период, но это происходит за счет сокращения потребления на начальном этапе. Таким образом, для выбора значения r (если оно предполагается постоянным) нужна информация о межвременных предпочтениях лица, принимающего решение.

2 Описание лабораторной работы

В лабораторной работе «Исследование экономического роста на основе модели Харрода-Домара» объектом исследования является экономика страны, которая выступает в неструктурированном виде.

Цель лабораторной работы – приобретение навыков построения и исследования моделей экономического роста.

Выполнение лабораторной работы включает следующие этапы:

1) изучение теоретического материала по тематике работы;
2) постановку задачи и построение математической модели;
3) исследование модели с помощью пакетов прикладных программ (Mathcad или Excel);
4) подготовку письменного отчета;
5) защиту лабораторной работы.

3 Постановка задачи

На основе неокейнсианской модели макроэкономической динамики Харрода-Домара необходимо описать динамику дохода Y(t), рассматриваемого как сумма потребления C(t) и инвестиций. I(t), для заданных параметров. Построить и провести интерпретацию траекторий экономического роста Y(t) (для t= 1, 2, ….. 10) при различных предположениях относительно динамики потребления и разработать рекомендации для выбора оптимального варианта развития экономической системы.

Необходимо рассмотреть следующие варианты:

1. Потребление отсутствует, то есть C(t)=0.

Хотя этот случай совершенно нереалистичен с практической точки зрения, однако в нем все ресурсы направляются на инвестиции, в результате чего могут быть определены максимальные технически возможные темпы роста.

2. Потребление постоянно на рассматриваемом интервале времени, $C(t)=C_0$ - постоянная величина. Реалистичный вариант, который имеет недостатки, связанные с ухудшением структуры распределения дохода.

3. Потребление растет с постоянным темпом r: $C(t) = C_0 e^{rt}$.

Темпы роста потребления рассмотреть для четырех принципиально различных случаев r_1, r_2, r_3, r_4:

1 случай: $r_1 \geq 1/B$;

2 случай: $\rho_0 / B < r_2 < 1/B$, где ρ_0 – норма накопления в начальный момент времени;

3 случай: $r_3 < \rho_0 / B$;

4 случай: $r = \rho_0 / B$.

Провести сравнительный анализ рассмотренных вариантов и сделать выводы.

Пример 0 варианта задания

Исходные данные для 0 варианта индивидуального задания представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные для индивидуального задания

Показатель	Обозначение	Значение
Доход в начальный момент времени	Y_0	80
Коэффициент приростной капиталоемкости	B	3
Потребление в начальный момент времени	C_0	30

Продолжение таблицы 1.

Темпы прироста потребления:		
1 случай: $r_1 \geq 1/B$	r_1	0,4
2 случай: $\rho_0 / B < r_2 < 1/B$	r_2	0,3
3 случай: $r < \rho_0 / B$	r_3	0,10
4 случай: $r = \rho_0 / B$	r_4	0,208

4 Порядок выполнения работы

Для решения поставленной задачи уточним обозначения:

$Y(t)$– доход в момент времени t;

$C(t)$– потребление в момент времени t;

$I(t)$– инвестиции в момент времени t.

Исходя из основного допущения модели, в котором предполагается, что скорость роста дохода пропорциональна инвестициям: $I(t) = B \cdot \frac{dY}{dt}$, где B – коэффициент капиталоемкости прироста дохода, запишем уравнение динамики дохода, дополнив его начальным условием:

$$\begin{cases} Y(t) = C(t) + B \cdot \dfrac{dY(t)}{dt}; \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{17}$$

Первый вариант модели получается, если считать C(t)=0. Хотя с практической точки зрения такой вариант не реализуем, все же он позволяет определить максимальные технологически возможные темпы роста. В этом случае получаем:

$$\begin{cases} Y(t) = B \cdot \dfrac{dY(t)}{dt}; \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{18}$$

(18) – задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения, и её решение имеет вид:

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{\frac{t}{B}} \tag{19}$$

Найдем решение на горизонте времени 10 лет. Результаты расчетов в ППП MS Excel представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения дохода при C=0 (ППП MS Excel)

Время, t	Доход, Y^1	C^1
0	80,0000	0
1	111,6490	1
2	155,8187	2
3	217,4625	3
4	303,4934	4
5	423,5592	5
6	591,1245	6
7	824,9807	7
8	1151,3533	8
9	1606,8430	9
10	2242,5300	10

Проиллюстрируем полученное решение (рисунок 1).

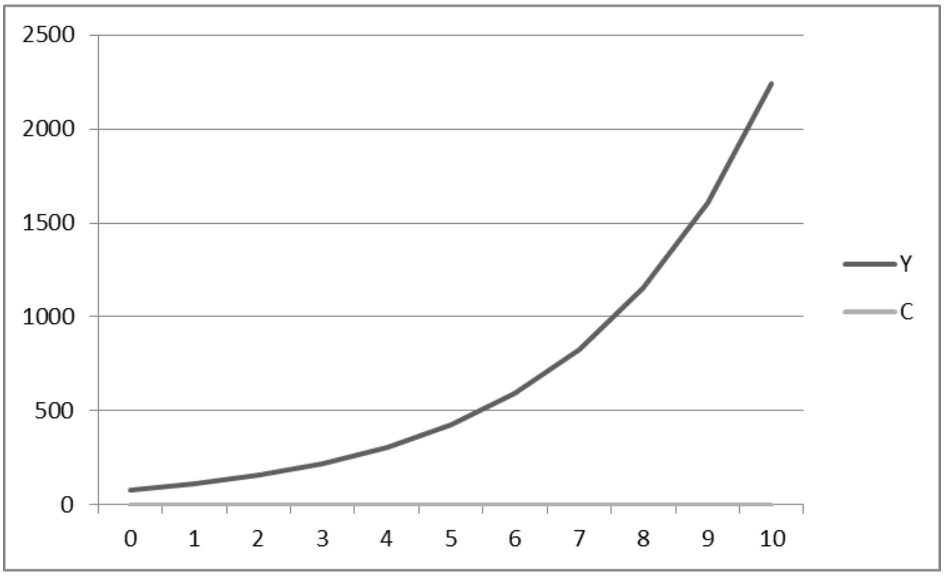

Рисунок 1 – Динамика дохода при нулевом уровне потребления (ППП MS Excel)

Из графика видно, что доход с течением времени растет, однако потребление не учитывается, что не соответствует реальной ситуации.

По аналогии, выполним расчеты и построим график, отражающий динамику дохода при нулевом уровне потребления (C=0) в пакете Mathcad. Результаты представлены на рисунках 2 и 3.

Y =

	0
0	80
1	111.649
2	155.819
3	217.463
4	303.493
5	423.559
6	591.124
7	824.981
8	$1.151 \cdot 10^3$
9	$1.607 \cdot 10^3$
10	$2.243 \cdot 10^3$

Рисунок 2 – Значения дохода при нулевом уровне потребления (ППП Mathcad)

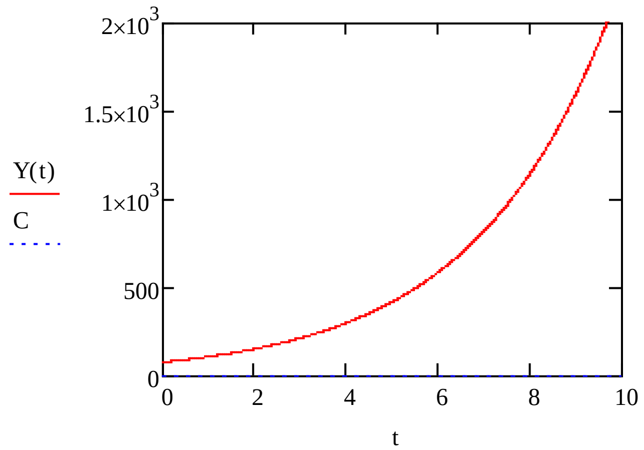

Рисунок 3 – Динамика дохода при нулевом уровне потребления (ППП Mathcad)

Определим непрерывный темп прироста, который здесь равен $\alpha(t)$=0,333, что соответствует максимально технологически возможному темпу прироста. Данный вариант показывает потенциальные возможности системы. Все реальные траектории будут располагаться ниже построенной траектории.

Рассмотрим второй вариант, C(t)=30 – потребление постоянно во времени. Исходя из базовой модели Харрода-Домара (17), получаем неоднородное линейное дифференциальное уравнение (20):

$$\begin{cases} Y(t) = C_0 + B \cdot \dfrac{dY(t)}{dt} \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \qquad (20)$$

Решение имеет вид (21):

$$Y(t) = (Y_0 - C_0) \cdot e^{\frac{t}{B}} + C_0 . \qquad (21)$$

Значения дохода при постоянном уровне потребления представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Значения дохода и потребления при С=30 (ППП MS Excel)

Время, t	Доход, Y^2	C^2
0	80,0000	30
1	99,7806	30
2	127,3867	30
3	165,9141	30
4	219,6834	30
5	294,7245	30
6	399,4528	30
7	545,6129	30
8	749,5958	30
9	1034,2768	30
10	1431,5812	30

На рисунке 4 отображена динамика дохода и потребления при постоянном уровне потребления (ППП MS Excel).

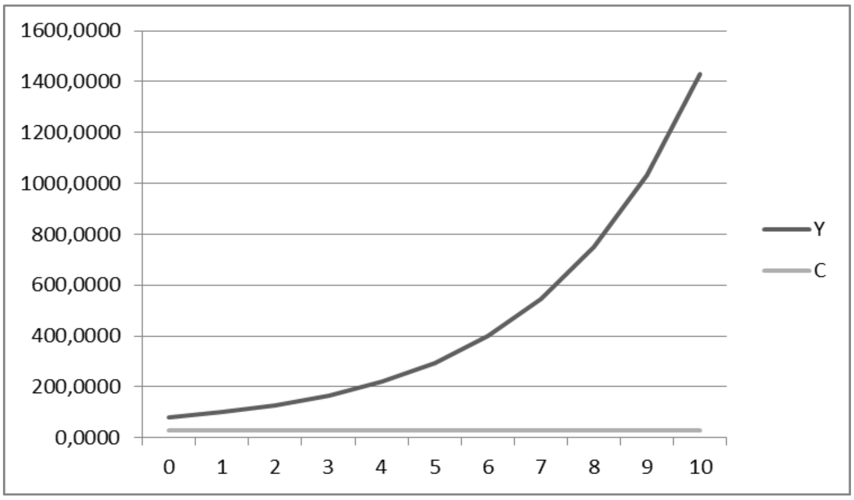

Рисунок 4 – Динамика дохода и потребления при постоянном уровне потребления (ППП MS Excel)

Значения дохода Y(t) и его динамика при постоянном уровне потребления, выполненные с помощью ППП Mathcad, представлены на рисунках 5 и 6.

Y =

	0
0	80
1	99.781
2	127.387
3	165.914
4	219.683
5	294.725
6	399.453
7	545.613
8	749.596
9	$1.034\cdot10^{3}$
10	$1.432\cdot10^{3}$

Рисунок 5 – Значения дохода при C=const (ППП Mathcad)

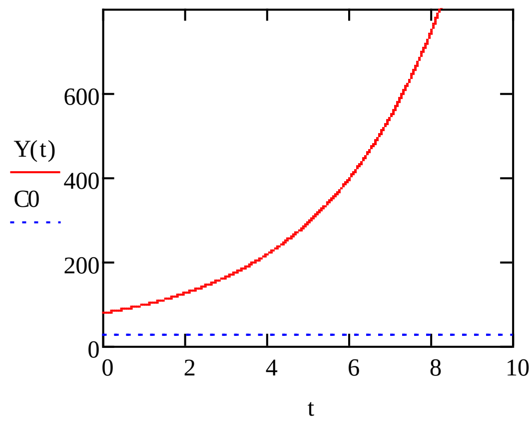

Рисунок 6 – Динамика дохода при постоянном уровне потребления (ППП Mathcad)

Непрерывный темп прироста дохода в этом варианте равен $\alpha(t)=\frac{1}{B}\cdot\left[1-\frac{C_0}{Y(t)}\right]$. В начальный момент времени (при t=0) он составляет $\alpha(0)=0{,}208$ и, возрастая при t→∞, стремится к 1/B=0,333. То есть доход растет, а постоянный объем потребления составляет все меньшую его долю. Реальные темпы роста будут приближаться к идеальным, рассмотренным в варианте 1.

Заметим, что при прочих равных условиях рост нормы накопления пропорционально увеличивает темпы прироста дохода. В то же время это снижает уровень текущего потребления, и возникает проблема согласования конкурентных целей увеличения темпов роста и уровня текущего благосостояния.

Рассмотрим третий вариант модели с показателем потребления C(t), растущим с постоянным темпом r:

$$C(t) = C_0 \cdot e^{rt} \qquad (22)$$

Модель примет вид (23):

$$\begin{cases} Y(t) = B \cdot \dfrac{dY(t)}{dt} + C_0 \cdot e^{rt} \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \qquad (23)$$

Решение поставленной задачи имеет вид (24):

$$Y(t) = \left(Y_0 - \frac{C_0}{1 - Br} \right) \cdot e^{t/B} + \left(\frac{C_0}{1 - Br} \right) \cdot e^{rt} . \qquad (24)$$

Далее исследуем, как влияет на характер решения величина r.

1 случай. Пусть r_1=0,4. В такой ситуации величина темпов прироста превышает максимальные возможные темпы прироста 1/B=0,333.

В таблице 5 приведены значения дохода и потребления, а на рисунке 7 показана их динамика.

Таблица 5 – Значения дохода и потребления при r_1=0,4 (ППП MS Excel)

Время, t	Доход, $Y^3{}_1$	$C^3{}_1$
0	80,0000	30,0000
1	97,2172	44,7547
2	114,1477	66,7662
3	127,1873	99,6035
4	129,5888	148,5910
5	109,3743	221,6717
6	46,0064	330,6953
7	-94,8776	493,3394
8	-369,7388	735,9759
9	-870,0617	1097,9470
10	-1742,4488	1637,9445

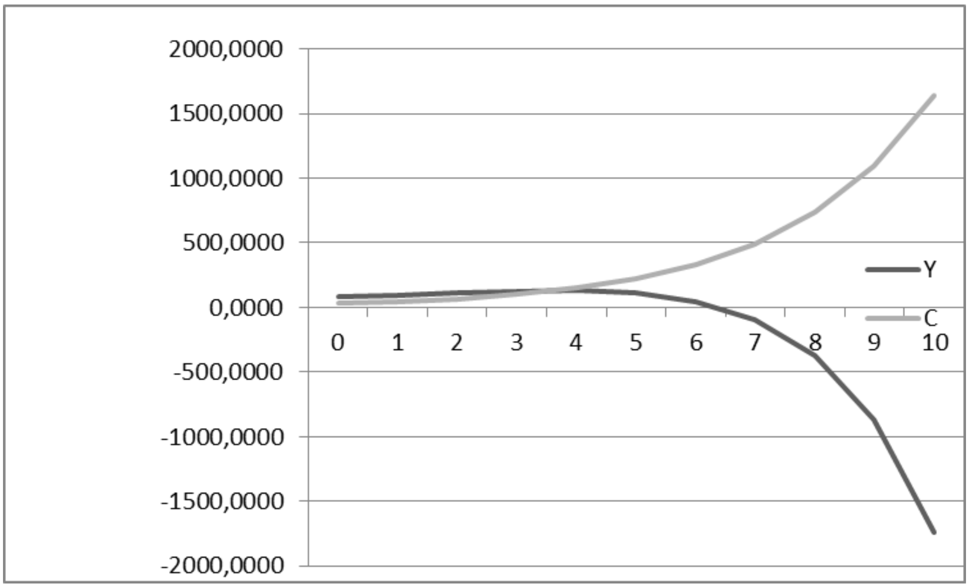

Рисунок 7 – Динамика дохода и потребления при темпе прироста потребления r_1=0,4 (>1/B) (ППП MS Excel)

Расчеты, проведенные в ППП Mathcad, представлены на рисунках 8 и 9.

$$C(t) := C0 \cdot \exp(r1 \cdot t)$$

$$i := 0..10$$

$$Y_{i,0} := \left(Y0 - \frac{C(0)}{1 - B \cdot r1}\right) \cdot \exp\left(\frac{i}{B}\right) + \left(\frac{C(0)}{1 - B \cdot r1}\right) \cdot \exp(r1 \cdot i)$$

$$Y_{i,1} := C0 \cdot \exp(r1 \cdot i)$$

Y =

	0	1
0	80	30
1	97.217	44.755
2	114.148	66.766
3	127.187	99.604
4	129.589	148.591
5	109.374	221.672
6	46.006	330.695
7	-94.878	493.339
8	-369.739	735.976
9	-870.062	$1.098 \cdot 10^3$
10	$-1.742 \cdot 10^3$	$1.638 \cdot 10^3$

Рисунок 8 – Значения дохода при темпе прироста потребления r_1=0,4 (>1/B) (ППП Mathcad)

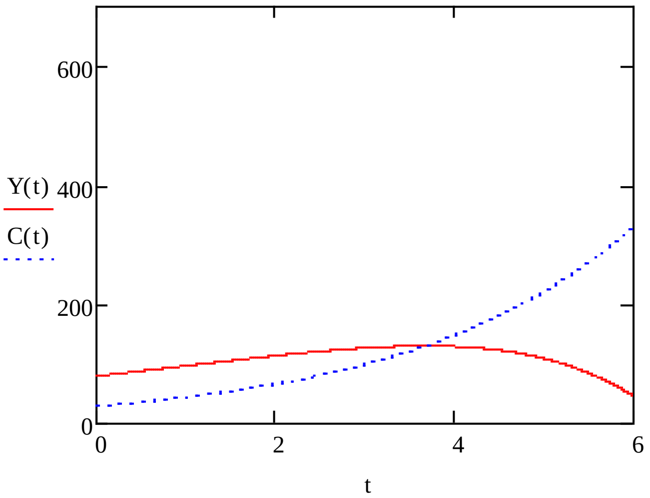

Рисунок 9 – Динамика дохода и потребления при темпе прироста потребления r_1=0,4 (>1/B) (ППП Mathcad)

Из графика видно, что с течением времени потребление будет занимать все большую и, в конце концов, – подавляющую часть дохода. В результате инвестиции придут к нулевой отметке, а затем и доход. Данная модель не может рассматриваться как оптимальная, поскольку в экономике появляется ситуация накопления ради потребления.

2 случай. Рассмотрим динамику дохода и потребления для r_2=0,3. Рассматриваемый темп прироста находится в диапазоне 1/B>r> ρ_0/B. Значения дохода и потребления показаны в таблице 8, а их динамика на рисунке 10.

Таблица 8 – Значения дохода и потребления при r_2=0,3 (1/B>r>ρ_0*/B)* (ППП MS Excel)

Время, t	Доход, Y^3_2	C^3_2
0	80,0000	30,0000
1	97,9229	40,4958
2	118,1342	54,6636
3	139,8589	73,7881
4	161,4281	99,6035
5	179,7189	134,4507
6	189,3019	181,4894
7	181,1541	244,9851
8	140,7314	330,6953
9	45,1014	446,3920
10	-141,2964	602,5661

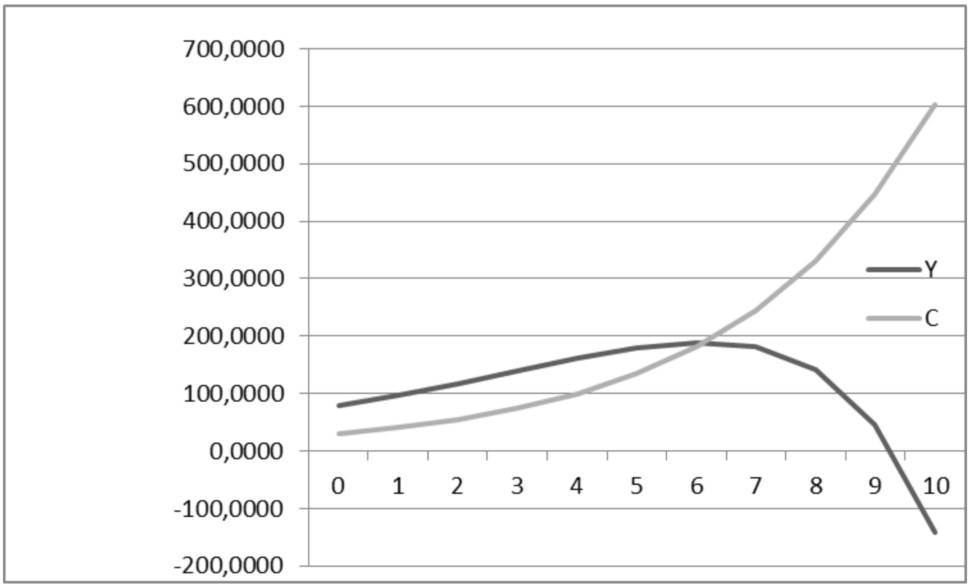

Рисунок 10 – Динамика дохода при темпе прироста потребления r_2 =0,3 ($1/B>r>\rho_0/B$) (ППП MS Excel)

$$C(t) := C0 \cdot \exp(r2 \cdot t)$$

$$i := 0..10$$

$$Y_{i,0} := \left(Y0 - \frac{C(0)}{1 - B \cdot r2}\right) \cdot \exp\left(\frac{i}{B}\right) + \left(\frac{C(0)}{1 - B \cdot r2}\right) \cdot \exp(r2 \cdot i)$$

$$Y_{i,1} := C0 \cdot \exp(r2 \cdot i)$$

Y =

	0	1
0	80	30
1	96.462	49.462
2	109.586	81.548
3	111.658	134.451
4	87.77	221.672
5	10.279	365.475
6	-170.664	602.566
7	-543.211	993.464
8	$-1.261 \cdot 10^3$	$1.638 \cdot 10^3$
9	$-2.589 \cdot 10^3$	$2.701 \cdot 10^3$
10	$-4.98 \cdot 10^3$	$4.452 \cdot 10^3$

Рисунок 11 – Значения дохода при темпе прироста потребления, r_2 = 0,3 ($1/B>r>\rho_0/B$) (ППП Mathcad)

Требуемый темп прироста потребления оказывается слишком высоким для экономики. Поэтому темп прироста дохода падает и становится с некоторого момента отрицательным. Через некоторое время сам доход становится равным нулю, после чего модель теряет экономический смысл.

Значения и траектория экономического роста Y(t) и потребления, выполненные в ППП Mathcad при темпе прироста потребления r_2=0,3 ($1/B>r>\rho_0/B$) представлена на рисунке 12.

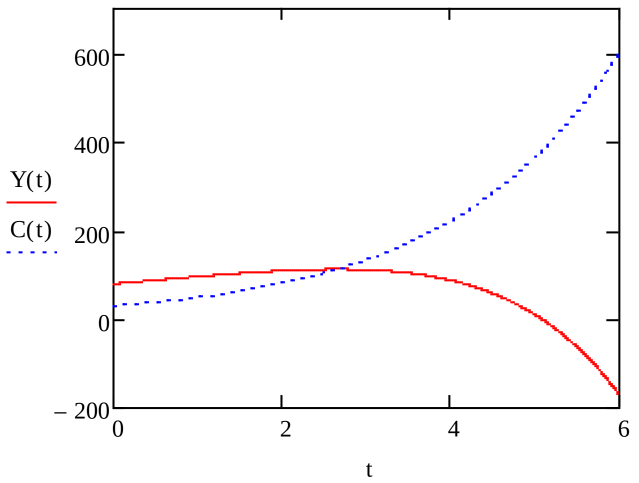

Рисунок 12 – Траектория экономического роста Y(t) и C(t) при темпе прироста потребления r_2 = 0,3 ($1/B>r>\rho_0/B$).

3 случай. Пусть r_3=0,1, что соответствует условию $r<\rho_0/B$. В таблице 9 представлены значения дохода и потребления, а на рисунке 13 их динамика.

Таблица 9 – Динамика дохода и потребления при $r<\rho_0/B$ (ППП MS Excel)

Время, t	Доход, Y^3_3	C^3_3
0	80,0000	30,0000
1	99,2015	33,1551
2	124,6902	36,6421
3	158,8158	40,4958
4	204,8430	44,7547
5	267,3120	49,4616
6	352,5415	54,6636
7	469,3304	60,4126
8	629,9372	66,7662
9	851,4458	73,7881
10	1157,6724	81,5485

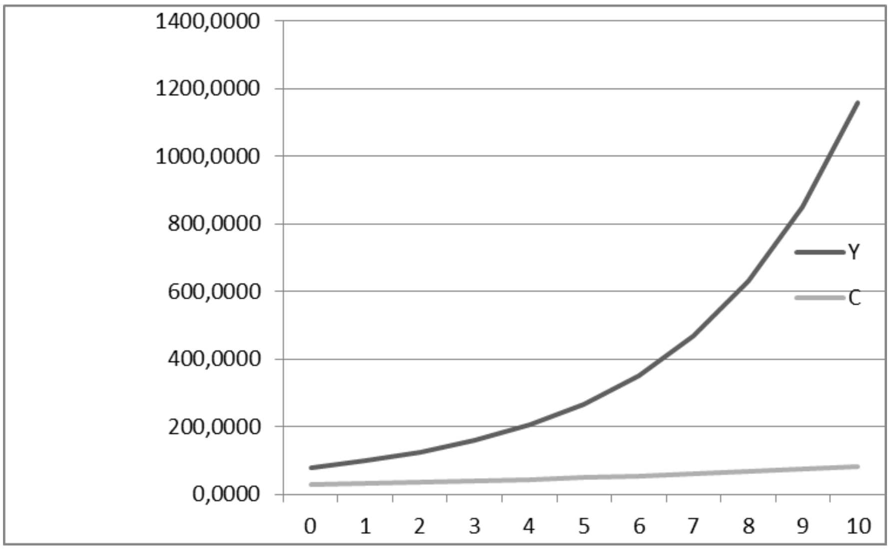

Рисунок 13 – Динамика дохода и потребления при темпе прироста потребления r_3=0,1 (ППП MS Excel)

На рисунках 14 и 15 представлены значения и траектория изменения дохода при темпе прироста r_3=0,1, выполненные в ППП Mathcad.

$$C(t) := C0 \cdot \exp(r3 \cdot t)$$

$$i := 0..10$$

$$Y_{i} := \left(Y0 - \frac{C(0)}{1 - B \cdot r3}\right) \cdot \exp\left(\frac{i}{B}\right) + \left(\frac{C(0)}{1 - B \cdot r3}\right) \cdot \exp(r3 \cdot i)$$

$$Y_{i,1} := C0 \cdot \exp(r3 \cdot i)$$

Y =

	0	1
0	80	30
1	98.583	36.642
2	121.626	44.755
3	150.25	54.664
4	185.884	66.766
5	230.344	81.548
6	285.954	99.604
7	355.701	121.656
8	443.437	148.591
9	554.151	181.489
10	694.337	221.672

Рисунок 14 – Значения дохода при темпе прироста потребления, r_3=0,1 ($r<\rho_0/B$) (ППП Mathcad)

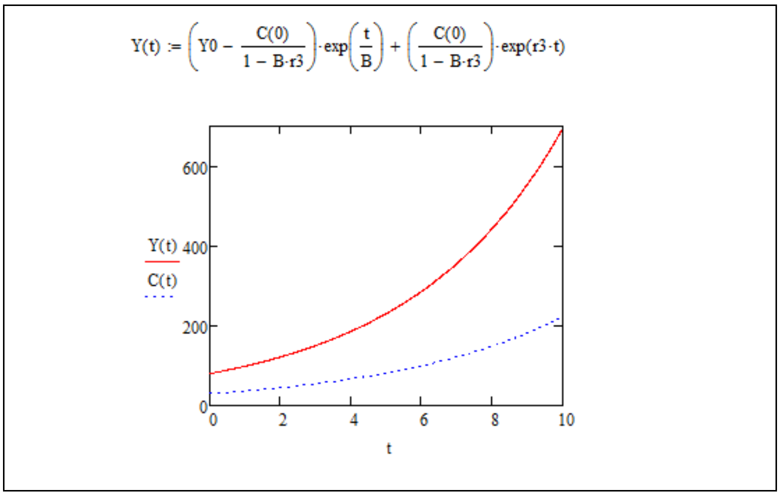

Рисунок 15 – Динамика дохода и потребления при темпе прироста потребления, r_3=0,1 (ППП Mathcad)

Из графической интерпретации следует, что если $r<\rho_0/B$, то норма накопления, а вместе с ней и темп прироста дохода растут, причем последний в пределе приближается к 1/B. Однако в этом случае происходит “накопление ради накопления”, так как потребление растет заданным темпом r, а темп прироста дохода удается увеличить за счет более быстрого роста инвестиций. Норма накопления ρ_0 здесь превышает Br, и если исходить из задачи максимизации объема потребления, то эта норма слишком высока. Более высокий ее уровень требует увеличения инвестиций за счет сокращения потребления в начальный момент, что при фиксированном темпе прироста потребления r обусловливает более низкий его уровень на всей траектории.

4 случай. Рассмотрим ситуацию, когда $r=\dfrac{\rho 0}{B}$.

Тогда, преобразовывая решение, получим:

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{rt}. \qquad (25)$$

В таблице 10 представлены значения дохода и потребления, а на рисунке 16 их динамика, выполненные в ППП MS Excel.

Таблица 10 – Значения дохода и потребления при $r=\rho_0/B$ (ППП MS Excel)

Время, t	Доход, Y^3_4	C^3_4
0	80,0000	30,0000
1	98,4971	36,9364
2	121,2709	45,4766
3	149,3103	55,9914
4	183,8328	68,9373
5	226,3374	84,8765
6	278,6695	104,5011
7	343,1016	128,6631
8	422,4312	158,4117
9	520,1029	195,0386
10	640,3575	240,1341

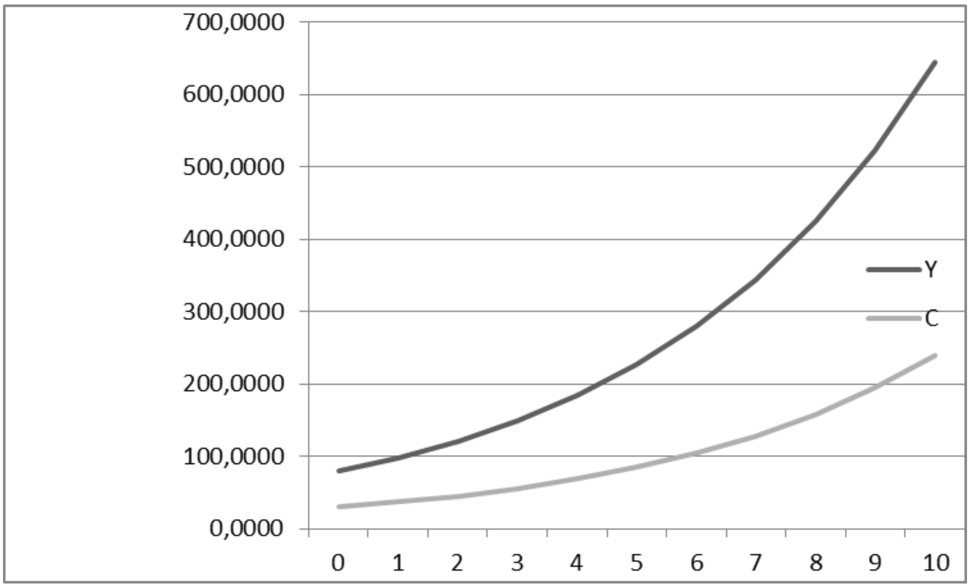

Рисунок 16 – Динамика дохода при темпе прироста потребления, r_4 = 0,208 ($r=\rho 0/B$) (ППП MS Excel)

На рисунках 17 и 18 представлены значения и траектория изменения дохода при темпе прироста r_4=0,208, выполненные в ППП Mathcad.

$C(t) := C0\cdot \exp(r3\cdot t)$

$i := 0..10$

$Y_{i} := \left(Y0 - \frac{C(0)}{1 - B\cdot r3}\right)\cdot \exp\left(\frac{i}{B}\right) + \left(\frac{C(0)}{1 - B\cdot r3}\right)\cdot \exp(r3\cdot i)$

$Y_{i,1} := C0\cdot \exp(r3\cdot i)$

Y =

	0	1
0	80	30
1	98.583	36.642
2	121.626	44.755
3	150.25	54.664
4	185.884	66.766
5	230.344	81.548
6	285.954	99.604
7	355.701	121.656
8	443.437	148.591
9	554.151	181.489
10	694.337	221.672

Рисунок 17 – Значения дохода при темпе прироста потребления, r_4=0,208 ($r=\rho_0/B$) (ППП Mathcad)

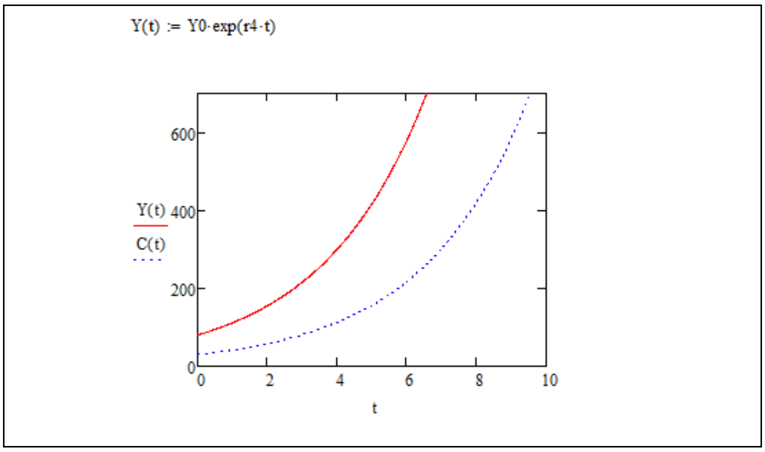

Рисунок 18 – Динамика дохода при темпе прироста потребления, r_4=0,208 ($r=\rho_0/B$) (ППП Mathcad)

Следовательно, нужный темп прироста потребления при $r<1/B$ можно поддерживать, как видно из графика, при $\rho_0=Br$. Таким образом, если требуется поддерживать постоянный темп прироста потребления r, не превышающий технологического темпа, то для максимизации объема потребления за любой период нужно установить начальную норму накопления $\rho_0=Br$.

Более сложен вопрос о том, какой уровень темпа r более предпочтителен. Большая его величина позволяет обеспечить больший объем потребления за длительный период, но это происходит за счет сокращения потребления на начальном этапе. Таким образом, для выбора значения r (если оно предполагается постоянным) нужна информация о межвременных предпочтениях лица, принимающего решение.

Для того, чтобы не происходило накопления ради накопления, целесообразно выбирать темпы прироста потребления на уровне ρ_0/B, т.е. в нашем случае на уровне 0,208. В этой модели темп прироста дохода равен темпу прироста потребления. Темп прироста дохода пропорционален норме накопления и обратно пропорционален приростной капиталоемкости.

Из анализа всех построенных моделей можно сделать вывод, что первая модель развития экономики при темпе прироста потребления $r_1=0,4$ ($>1/B$) не может рассматриваться как оптимальная, поскольку в экономике появляется ситуация накопления ради потребления.

Во второй модели при темпе прироста потребления $r_2=0,3$ ($1/B>r>\rho_0/B$) наблюдается ситуация, в которой темп прироста дохода падает и становится с момента времени $t=4,5$ отрицательной величиной. В результате сам доход становится равным нулю, и модель теряет экономический смысл.

Наиболее оптимальным вариантом развития экономики является модель варианта 3, с темпом прироста потребления $r=\rho_0/B=0,208$ и нормой накопления в данном случае постоянной во времени $\rho_0=0,625$, поскольку темп прироста дохода равен темпу прироста потребления.

5 Содержание письменного отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется на листах формата А4 и должен иметь следующую структуру:

1) краткие теоретические сведения, необходимые для решения поставленных задач;

2) постановка задачи и математические модели, применяемые для исследования;

3) результаты применения ППП для решения задач;

4) анализ полученных результатов и выводы.

6 Вопросы к защите

1. Сформулируйте допущения модели Харрода-Домара.
2. Может ли в модели Харрода-Домара темп прироста потребления быть больше технологического темпа прироста 1/B?
3. При каких условиях в модели Харрода-Домара наблюдается ситуация «накопление ради накопления»?
4. При каких условиях в модели Харрода-Домара наблюдается ситуация «накопление ради потребления»?
5. Как связан темп прироста дохода с нормой накопления?
6. Как оптимально выбрать темпы прироста выпуска при заданном темпе прироста потребления в модели Харрода-Домара?
7. Предложите подходы к решению проблемы выбора наилучшего темпа прироста потребления исходя из модели Харрода-Домара.

7 Варианты для индивидуальных заданий

Варианты для индивидуальных заданий приведены в приложении А (таблица А.1).

8 Литература, рекомендуемая для изучения темы

1. Замков, О. О. Математические методы в экономике: учебник / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных; общ. ред. А. В. Сидорович. – 4-е изд., стер. – М. : Дело и Сервис, 2004. – 368 с. – ISBN 5-86509-054-2.
2. Интриллигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М.: Прогресс, 1975.
3. Колемаев, В. А. Математическая экономика: учебник [Электронный ресурс] / В. А. Колемаев. – Юнити-Дана, 2015.
4. Монахов, А.В. Математические методы анализа экономики / А.В. Монахов. – СПб: Питер, 2002. – 176 с.

Приложение А

(обязательное)

Информационные данные об экономической системе

Таблица А.1 – Варианты для индивидуальных заданий

Вариант	Y_0	B	C_0	r_1	r_2	r_3	r_4
1	2	3	4	5	6	7	8
1	120	3	70	0,4	0,3	0,1	0,1389
2	150	4	100	0,3	0,2	0,07	0,0833
3	160	5	110	0,3	0,15	0,05	0,0625
4	180	2	120	0,6	0,4	0,15	0,1667
5	80	3	60	0,4	0,3	0,06	0,0833
6	220	4	160	0,5	0,2	0,05	0,0682
7	250	5	170	0,3	0,15	0,05	0,064
8	300	2	220	0,6	0,35	0,1	0,1333
9	350	3	250	0,5	0,3	0,05	0,0952
10	410	4	310	0,4	0,2	0,05	0,061
11	200	5	140	0,4	0,15	0,04	0,06
12	210	2	130	0,6	0,45	0,1	0,1905
13	130	3	70	0,4	0,25	0,1	0,1538
14	180	4	110	0,35	0,2	0,05	0,0972
15	190	5	120	0,3	0,15	0,06	0,0737
16	200	3	170	0,3	0,25	0,03	0,05

Продолжение таблицы А.1

1	2	3	4	5	6	7	8
17	210	4	180	0,2	0,15	0,02	0,0357
18	150	2	100	0,35	0,45	0,1	0,1667
19	130	3	120	0,3	0,25	0,02	0,0256
20	300	2	170	0,4	0,25	0,15	0,2167
21	220	4	120	0,35	0,2	0,08	0,1136
22	250	3	90	0,4	0,25	0,15	0,2133
23	320	2	200	0,6	0,3	0,15	0,1875
24	160	4	90	0,3	0,17	0,05	0,1094
25	200	5	130	0,4	0,12	0,05	0,07