

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра машиноведения

А.А. Гаврилов

ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 08.03.01 Строительство

Оренбург
2017

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.213 я73
Г 12

Рецензент – доцент, кандидат технических наук Ю.Л. Власов

Гаврилов, А.А.
Г 12 Применение основных теорем динамики к изучению движения механических систем: методические указания / А. А. Гаврилов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2017. – 30 с.

Методические указания содержат варианты заданий и порядок решения задачи по применению основных теорем динамики к изучению движения механических систем.

Методические указания предназначены для обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 08.03.01 Строительство по дисциплине «Теоретическая механика».

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.213 я73

© Гаврилов А.А., 2017
© ОГУ, 2017

Содержание

1	Постановка задачи и исходные данные	4
2	Пример выполнения задачи	6
2.1	Исходные данные	6
2.2	Решение	7
2.2.1	Кинематический анализ системы	7
2.2.2	Составление дифференциальных уравнений движения системы	9
2.2.3	Решение системы уравнений движения системы	14
2.2.4	Решение дифференциального уравнения движения груза.....	15
2.2.5	Проверка значения скорости с помощью теоремы об изменении кинетической энергии	16
3	Решение системы уравнений и интегрирование дифференциального уравнения при помощи пакета MathCad.....	21
3.1	Решение системы уравнений.....	21
3.2	Интегрирование дифференциального уравнения	23
4	Частные случаи при определении направлений и значений силы трения скольжения.....	25
4.1	Выбор направления силы трения.....	25
4.2	Случай, когда полученное значение силы трения превышает предельное значение.....	27
5	Требования к оформлению.....	29
	Список использованных источников	30

1 Постановка задачи и исходные данные

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел, движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен f , коэффициент трения при качении равен δ .

Пользуясь основными теоремами динамики, определить ускорение и скорость тела I в момент времени t_1 , а также натяжения нитей между телами и реакции опор.

Проверить полученное значение скорости тела I с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы.

Исходные данные для работы формируются по номеру варианта: первая цифра варианта – номер строки с данными из таблицы 1 задания, вторая цифра варианта – номер схемы задания из рисунка 1. Номера вариантов выдаются преподавателем в начале семестра.

Принять при расчетах $m=1,02$ кг, $g=9,81$ м/с². Если значение $i_{3\xi}$ для катка не задано, то считать его однородным круглым цилиндром.

Таблица 1 – Исходные данные задания

Первая цифра варианта	m_1	m_2	m_3	r_2/R_2	i_{2x}/R_2	δ/R_3	R_3 , см	f	α	t_1 , с
0	3m	m	m	0,5	0,8	0,01	20	0,2	30	1,2
1	4m	2m	m	0,2	0,9	0,02	25	0,1	60	0,5
2	5m	3m	3m	0,6	0,8	0,025	50	0,25	30	1,0
3	2m	m	m/2	0,5	0,7	0,03	30	0,4	30	1,5
4	m	2m	m/5	0,4	0,7	0,01	28	0	60	1,0
5	4m	3m	2m	0,8	0,8	0,02	35	0,3	30	0,5
6	2m	m	m	0,3	0,9	0,03	25	0,2	45	1,5
7	3m	2m	1,5m	0,2	0,6	0,025	20	0,1	60	2,0
8	m	m	m	0,5	0,7	0,01	40	0,25	45	1,0
9	5m	2m	4m	0,6	0,8	0,02	45	0,3	30	0,5

П р и м е ч а н и е – Некоторые значения из таблицы для конкретной схемы могут не использоваться, например, для схемы 5 не используются значения δ/R_3 , f , α .

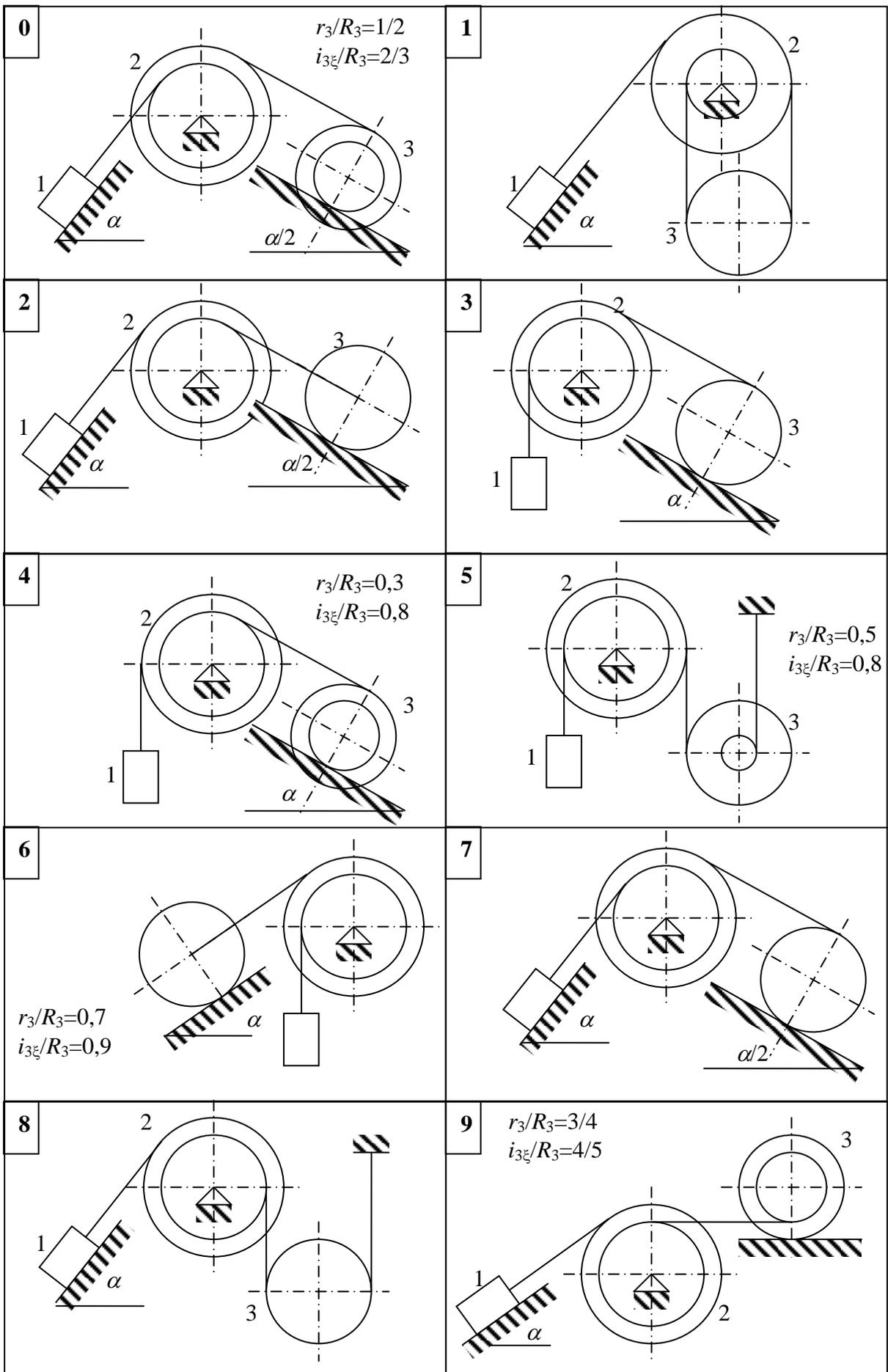


Рисунок 1 – Исходные схемы заданий

2 Пример выполнения задачи

2.1 Исходные данные

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел (рисунок 2), движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен f , коэффициент трения при качении равен δ . Исходные данные для примера приведены в таблице 2.

Пользуясь основными теоремами динамики определить ускорение и скорость тела 1 в момент времени t_1 , а также натяжения нитей между телами и реакции опор.

Проверить полученное значение скорости тела 1 с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы.

Таблица 2 – Исходные данные для примера задания

m_1	m_2	m_3	r_2/R_2	i_{2x}/R_2	δ/R_3	R_3 , см	f	t_1 , с
5m	m	2m	2/3	4/5	1/20	20	0,1	1

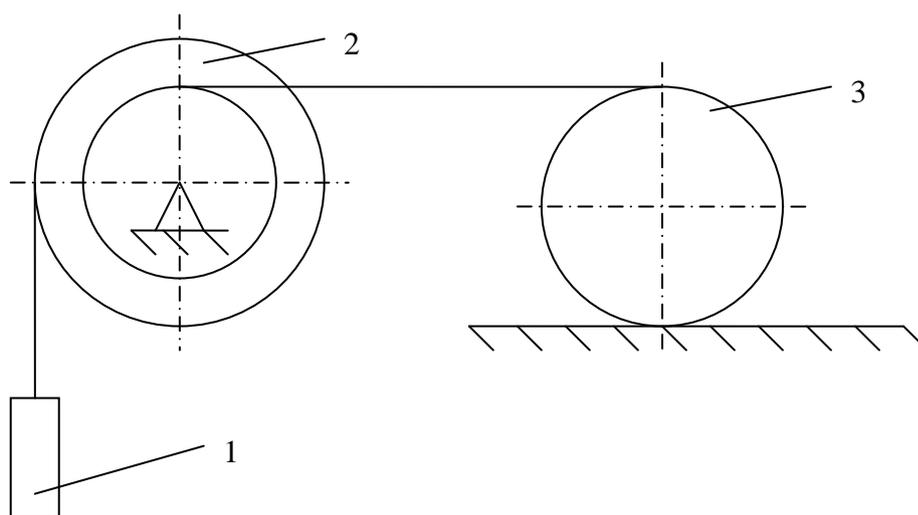


Рисунок 2 – Исходная схема для примера

2.2 Решение

2.2.1 Кинематический анализ системы

Установим зависимость между кинематическими характеристиками тел системы [2, с.158-175] и выразим все характеристики через характеристики движения тела 1, для этого составим уравнения связей.

Выразим скорости точки A и B блока через угловую скорость блока (рисунок 3а)

$$v_A = \omega_2 R_2, \quad (1)$$

$$v_B = \omega_2 r_2. \quad (2)$$

Мгновенный центр скоростей (МЦС) плоскодвижущегося катка находится в точке соприкосновения катка и неподвижной поверхности. Скорости точек C и D катка

$$v_C = \omega_3 R_3, \quad (3)$$

$$v_D = \omega_3 \cdot 2R_3. \quad (4)$$

Скорости груза и точки A блока равны, откуда

$$v_1 = \omega_2 R_2, \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}. \quad (5)$$

Скорости точек B блока и D катка равны

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 \cdot 2R_3, \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{2R_3} = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3}, \quad (6)$$

$$v_C = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} R_3 = \frac{v_1 r_2}{2R_2}. \quad (7)$$

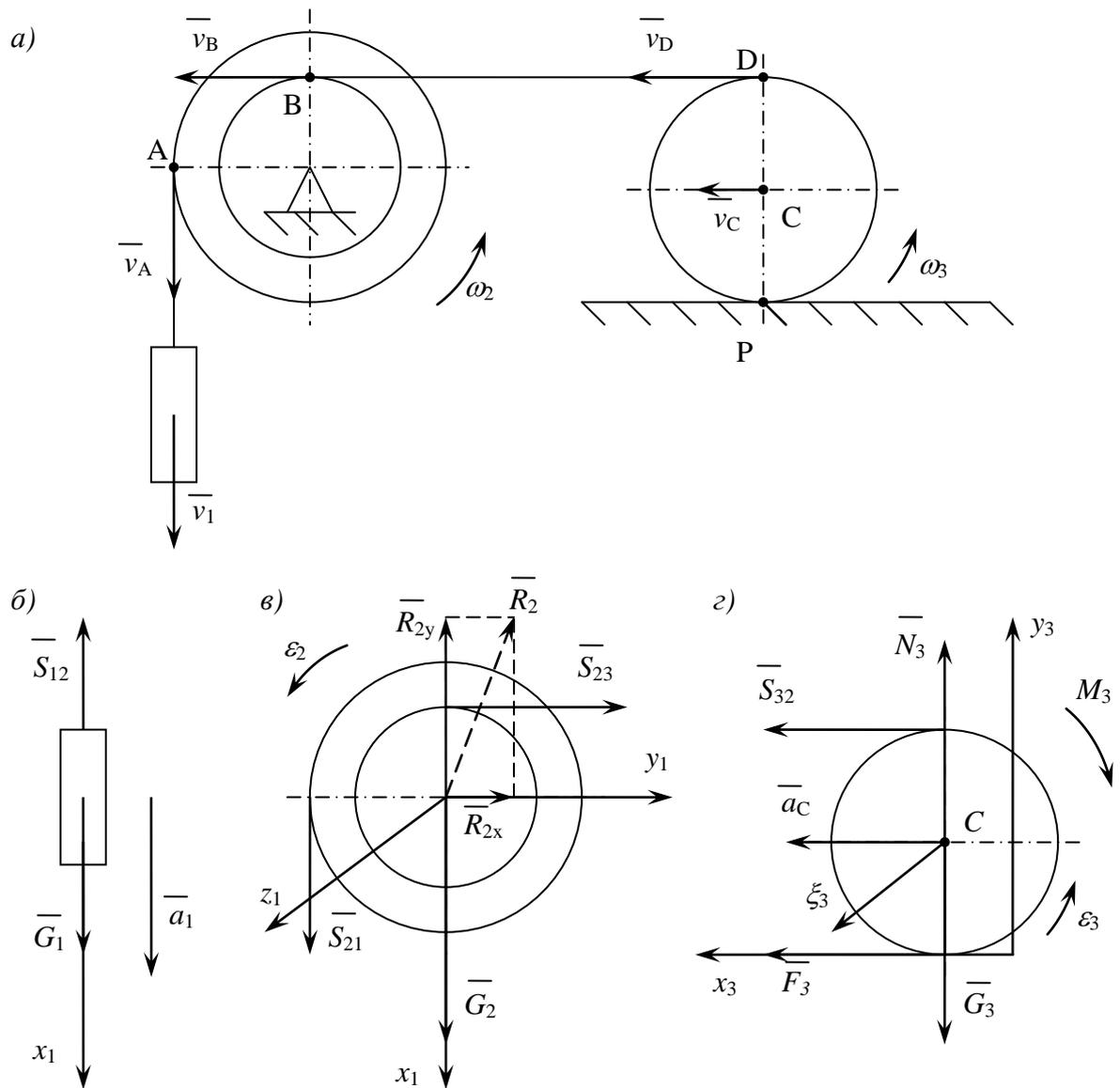


Рисунок 3 – Расчетная схема системы

Уравнения (5)-(7) являются уравнениями связи для системы груз-блок-каток. Установим зависимости между ускорениями

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_1}{R_2} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{dv_1}{dt} = \frac{a_1}{R_2}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} \right) = \frac{a_1 r_2}{2R_2 R_3}, \quad (9)$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = R_3 \frac{d\omega_3}{dt} = R_3 \varepsilon_3 = \frac{a_1 r_2}{2R_2}. \quad (10)$$

2.2.2 Составление дифференциальных уравнений движения системы

Составим дифференциальные уравнения движения тел системы, пользуясь теоремой о движении центра масс [2, с. 289]

$$M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \quad (11)$$

и теоремой об изменении кинетического момента относительно оси вращения или подвижной оси, проходящей через центр масс, при плоскопараллельном движении [2, с. 292]

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z (\bar{F}_k^e). \quad (12)$$

Рассмотрим движение каждого тела системы в отдельности, учитывая связи между телами.

Рассмотрим движение груза 1. Груз совершает поступательное движение. Проведем ось x_1 вдоль линии движения тела в направлении движения тела, то есть вниз. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому положение груза полностью описывается координатой x_1 , скорость тела \bar{v}_1 ($v_1 = \dot{x}_1$), ускорение \bar{a}_1 ($a_1 = \ddot{x}_1$).

Применим теорему о движении центра масс в виде (11). При учете, что на тело действует сила тяжести \bar{G}_1 ($G_1 = m_1 g$) и натяжение нити между телами 1 и 2 \bar{S}_{12} (рисунок 3б), векторное выражение теоремы примет вид

$$m_1 \bar{a}_1 = \bar{G}_1 + \bar{S}_{12}. \quad (13)$$

Проецируя выражение (13) на ось x_1 , получим дифференциальное уравнение движения груза 1

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - S_{12}. \quad (14)$$

В данном уравнении содержится две неизвестных – ускорение груза и натяжение нити.

Рассмотрим движение блока 2. Блок совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси z_2 , перпендикулярной плоскости чертежа. Положение вращающегося тела определяется его углом поворота φ_2 , угловая скорость ω_2 ($\omega_2 = \dot{\varphi}_2$), угловое ускорение ε_2 ($\varepsilon_2 = \ddot{\varphi}_2$).

Блок находится под действием силы тяжести \bar{G}_2 ($G_2 = m_2 g$), натяжения нитей между телами 2 и 1 \bar{S}_{21} и телами 2 и 3 \bar{S}_{23} , а также реакции неподвижного шарнира \bar{R}_2 (рисунок 3в), которую можно представить как сумму двух составляющих по осям координат $\bar{R}_2 = \bar{R}_{2x_1} + \bar{R}_{2y_1}$. Модуль реакции

$$R_2 = \sqrt{R_{2x_1}^2 + R_{2y_1}^2}. \quad (15)$$

На основании теоремы об изменении кинетического момента вращающегося тела получим дифференциальное уравнение вращения блока 2 относительно неподвижной оси

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = S_{21} R_2 - T_{23} r_2, \quad (16)$$

здесь $J_2 = m_2 i_{2z}^2$ – момент инерции блока относительно оси вращения.

В конечном виде дифференциальное уравнение вращения блока

$$m_2 i_{2z}^2 \ddot{\varphi}_2 = S_{21} R_2 - S_{23} r_2. \quad (17)$$

В этом уравнении три неизвестных – угловое ускорение блока и натяжения нитей.

Рассмотрим движение катка. Каток катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, совершая плоскопараллельное движение. Разложим плоскопараллельное движение на два простейших: поступательное движение катка вместе с центром масс, которое задается координатами центра масс x_C и y_C (скорость и ускорение центра масс \bar{v}_C и \bar{a}_C) и вращательное движение вокруг подвижной оси z_3 , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения катка, которое задается углом поворота φ_3 (угловая скорость и угловое ускорение ω_3 и ε_3).

На каток действуют следующие силы: сила тяжести \bar{G}_3 ($G_3 = m_3 g$), натяжение нити между телами 3 и 2 \bar{S}_{32} и реакция поверхности, которая раскладывается на нормальную реакцию \bar{N}_3 (направлена по нормали к соприкасаемым поверхностям), силу трения скольжения \bar{F}_3 (направленную по касательной к соприкасаемым поверхностям в сторону, противоположную возможному проскальзыванию тела по поверхности) и момент сопротивления качению \bar{M}_3 (направленный в сторону, противоположную качению тела) (рисунок 3г). Теорема о движении центра масс в применении к катку примет вид

$$m_3 \bar{a}_C = \bar{G}_3 + \bar{S}_{32} + \bar{N}_3 + \bar{F}_3. \quad (18)$$

Выберем направления координатных осей: ось x_3 направим вдоль поверхности, по которой катится тело в сторону движения, ось y_3 ей перпендикулярно, и спроецируем на них выражение (18)

$$m_3 \ddot{x}_C = S_{32} + F_3, \quad (19)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 = N_3 - G_3. \quad (20)$$

Так как движения вдоль оси y_3 не происходит, то $\ddot{y}_3 = 0$, и выражение (20) позволит определить нормальную реакцию, с помощью которой можно определить силу трения скольжения и момент сопротивления качению

$$N_3 = G_3 = m_3 g, \quad (21)$$

$$M_3 = N_3 \delta = m_3 g \delta, \quad (22)$$

$$0 \leq F_3 < N_3 f = m_3 g f. \quad (23)$$

Условие (23) является условием отсутствия проскальзывания.

Применим теорему об изменении кинетического момента катка относительно оси ξ_3

$$J_3 \ddot{\phi}_3 = S_{32} R_3 - F_3 R_3 - M_3, \quad (24)$$

здесь $J_3 = m_3 R_3^2 / 2$ – момент инерции катка относительно оси ξ_3 .

После подстановки значений получим

$$\frac{m_3 R_3^2 \ddot{\phi}_3}{2} = S_{32} R_3 - F_3 R_3 - m_3 g \delta. \quad (25)$$

Выражения (19) и (25) являются дифференциальными уравнениями движения катка. Они содержат четыре неизвестных – ускорение центра масс и угловое ускорение катка, натяжение нити и силу трения.

Так как нити, связывающие тела системы, невесомые, то усилия в разных частях каждой нити равны, то есть

$$S_{12} = S_{21} = S_1, \quad S_{23} = S_{32} = S_2. \quad (26)$$

Подставим значения ускорений в уравнения движения (14), (17), (19) и (25), после некоторых преобразований получим

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - S_1, \quad (27)$$

$$m_2 i_{2z}^2 \frac{\ddot{x}_1}{R_2} = S_1 R_2 - S_2 r_2, \quad (28)$$

$$m_3 \frac{\ddot{x}_1 r_2}{2R_2} = S_2 + F_3, \quad (29)$$

$$\frac{m_3 R_3 \ddot{x}_1 r_2}{4R_2} = S_2 R_3 - F_3 R_3 - m_3 g \delta. \quad (30)$$

Полученная система уравнений содержит четыре неизвестных величины. После подстановки исходных данных система принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 5m\ddot{x}_1 = 5mg - S_1 \quad (31) \\ \frac{16m\ddot{x}_1}{25} = S_1 - \frac{2}{3}S_2 \quad (32) \\ \frac{2m\ddot{x}_1}{3} = S_2 + F_3 \quad (33) \\ \frac{m\ddot{x}_1}{3} = S_2 - F_3 - \frac{mg}{10}. \quad (34) \end{array} \right.$$

2.2.3 Решение системы уравнений движения системы

Решение системы уравнений может производиться с использованием программных средств (пример изложен в п.3.1) или аналитически. Далее рассмотрен аналитический вариант решения.

Из первых трех уравнений системы

$$S_1 = 5m(g - \ddot{x}_1), \quad (35)$$

$$S_2 = \frac{m}{50}(375g - 423\ddot{x}_1), \quad (36)$$

$$F_3 = \frac{m}{150}(1369\ddot{x}_1 - 1125g). \quad (37)$$

Подставим (36), (37) в (34), после преобразований получим

$$\ddot{x}_1 = \frac{2235}{2688}g = 0,831g = 8,16 \text{ м/с}^2. \quad (38)$$

Используем полученное значение в (35)-(37), найдем значения реакций $S_1 = 0,845mg = 8,45 \text{ Н}$, $S_2 = 0,47mg = 4,7 \text{ Н}$, $F_3 = 0,084mg = 0,84 \text{ Н}$.

Определим оставшиеся реакции. Реакции поверхности на каток по (20) и (22): $N_3 = 2mg = 20 \text{ Н}$, $M_3 = 2mg \cdot 0,01 = 0,2 \text{ Н/м}$.

Проверим условие отсутствия проскальзывания по (23): $F_3 < 2mg \cdot 0,1 = 2 \text{ Н}$. Следовательно, проскальзывание отсутствует.

Пример при наличии проскальзывания приведен в п. 4.

Реакции опоры блока вычислим, используя теорему о движении центра масс блока в виде (11), а так как центр масс лежит на оси вращения, то будем иметь

$$\bar{G}_2 + \bar{R}_2 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 0. \quad (39)$$

Спроецируем выражение (39) на оси x_1 и y_1

$$R_{2x_1} + S_2 = 0. \quad (40)$$

$$G_2 - R_{2y_1} + S_1 = 0. \quad (41)$$

Откуда $R_{2x_1} = -S_2 = -4,7\text{Н}$, $R_{2y_1} = G_2 + S_1 = 18,45\text{Н}$.

Отрицательный знак R_{2x_1} говорит о том, что истинное направление этой реакции противоположно показанному на рисунке. В соответствии с (15) получим $R_2 = 19,04\text{Н}$.

2.2.4 Решение дифференциального уравнения движения груза

Решение дифференциального уравнения может производиться с использованием программных средств (пример изложен в п.3.2) или аналитически. Далее рассмотрен аналитический вариант решения.

Ранее было определено, что положение груза полностью задается его координатой x_1 . Поэтому получим уравнение движения груза, проинтегрировав его дифференциальное уравнение движения в виде (38).

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = 8,16; \quad d\dot{x}_1 = 8,16dt; \quad \int d\dot{x}_1 = \int 8,16dt; \quad (42)$$

$$\dot{x}_1 = 8,16t + C_1; \quad (43)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 8,16t + C_1; \quad dx_1 = (8,16t + C_1)dt; \quad \int dx_1 = \int 8,16tdt + \int C_1dt; \quad (44)$$

$$x_1 = 4,08t^2 + C_1t + C_2. \quad (45)$$

В этих выражениях C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Определим их с помощью начальных условий, принимая начальное положение тела в начале координат.

$$\text{При } t=0 \quad x_1 = x_{10} = 0, \quad \dot{x}_1 = v_{10} = 0. \quad (46)$$

(43) и (45) с учетом (46) дают

$$C_1 = v_{10} = 0, \quad C_2 = x_{10} = 0. \quad (47)$$

Подставим значения (47) в (43) и (45), получим закон изменения скорости груза 1

$$v_1 = \dot{x}_1 = 8,16t \quad (48)$$

и закон движения груза 1

$$x_1 = 4,08t^2. \quad (49)$$

В заданный момент времени $t = t_1 = 1\text{с}$ $v_1 = 8,16\text{м/с}$, $x_1 = 4,08\text{м}$.

2.2.5 Проверка значения скорости с помощью теоремы об изменении кинетической энергии

Рассмотрим перемещение системы из начального, при $t = 0$, до конечного, при $t = t_1 = 1\text{с}$, положения. Теорема в общем случае [2, с. 304] имеет вид

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i, \quad (50)$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях;

$\sum_{k=1}^n A_k^e$ и $\sum_{k=1}^n A_k^i$ – сумма работ внешних и внутренних сил системы на

рассматриваемом перемещении.

Определение кинетической энергии системы в начальном и конечном положениях. Кинетическая энергия всей системы определится как сумма кинетических энергий отдельных тел системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (51)$$

Кинетическую энергию каждого тела определяем по формуле, соответствующей виду движения тела. Для поступательно движущегося тела

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (52)$$

Для вращающегося блока 2

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}. \quad (53)$$

Для плоскодвижущегося катка 3

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}. \quad (54)$$

Учитывая значения осевых моментов инерции тел и уравнения связей (5)-(7), подставим (52)-(54) в (51). Получим после преобразований

$$T = \left(m_1 + m_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} + m_3 \frac{3r_2^2}{8R_2^2} \right) \frac{v_1^2}{2}. \quad (55)$$

После подстановки исходных данных выражение принимает вид

$$T = \frac{448mv_1^2}{150}. \quad (56)$$

В начальный момент времени $v_1 = 0$, в конечный $v_1 = 8,16 \text{ м/с}$, в соответствии с этим

$$T_0 = 0, \quad T = 202,85 \text{ Дж}. \quad (57)$$

Определение суммы работ внешних и внутренних сил. Так как тела системы абсолютно твердые, нити нерастяжимые, проскальзывание между телами отсутствует, то сумма работ внутренних сил равна нулю

$$\sum_{k=1}^n A_k^i = 0. \quad (58)$$

Внешними силами, действующими на систему, являются силы тяжести тел $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$, реакция опоры блока \bar{R}_2 , нормальная реакция \bar{N}_3 , сила трения скольжения \bar{F}_3 и момент сопротивления качению M_3 , действующие на каток со стороны поверхности (рисунок 4). Определим работу каждой силы системы, учитывая, что при исследуемом перемещении системы груз опустился на расстояние $x_1 = 4,08 \text{ м}$.

Работа силы тяжести груза 1

$$A_{G_1} = m_1 g x_1. \quad (59)$$

Сила тяжести блока и реакция опоры приложены в неподвижной точке, поэтому

$$A_{G_2} = A_{R_2} = 0. \quad (60)$$

Силы \bar{N}_3 и \bar{F}_3 приложены в мгновенном центре скоростей, а направление силы тяжести катка перпендикулярно перемещению точки ее приложения, следовательно

$$A_{N_3} = A_{F_3} = A_{G_3} = 0. \quad (61)$$

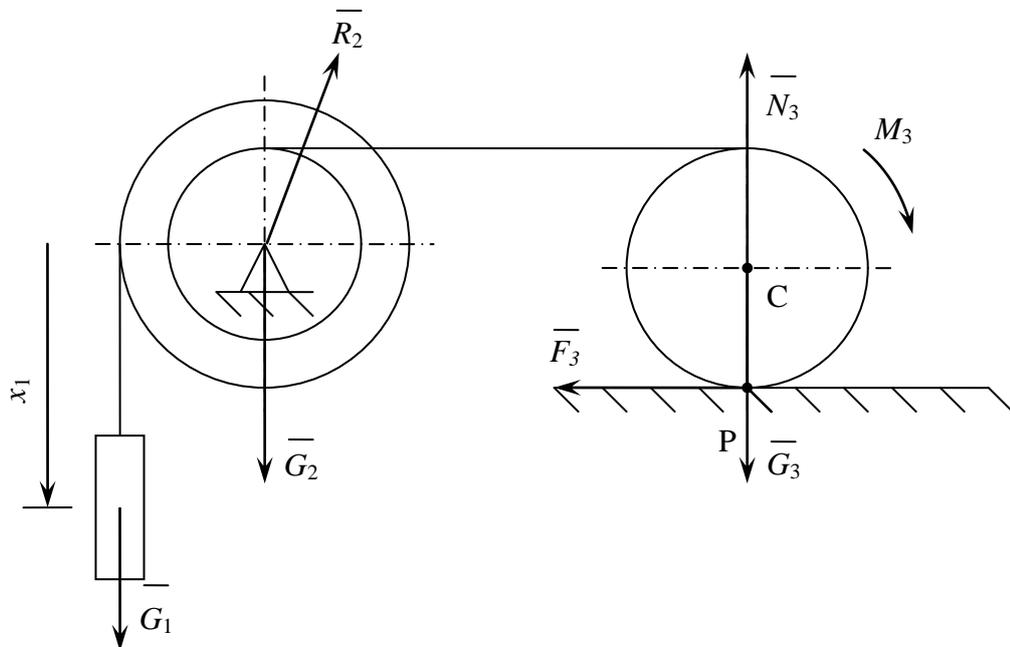


Рисунок 4 – Расчетная схема с указанием внешних сил системы

Работа пары сил с постоянным моментом M_3 определяется как произведение момента пары на угол поворота тела

$$A_{M_3} = -M_3 \varphi_3. \quad (62)$$

Работа будет отрицательной, так как пара сил препятствует перемещению тела. Угол поворота тела определим, воспользовавшись уравнением связи (6), которое представим в виде

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{r_2}{2R_2R_3} \frac{dx_1}{dt} \Rightarrow d\varphi_3 = \frac{r_2}{2R_2R_3} dx_1 \Rightarrow \int_0^{\varphi_3} d\varphi_3 = \int_0^{x_1} \frac{r_2}{2R_2R_3} dx_1, \quad (63)$$

тогда

$$\varphi_3 = \frac{r_2}{2R_2R_3} x_1. \quad (64)$$

Учтем (22) и (64) в (62)

$$A_{M_3} = -m_3 g \delta \frac{r_2}{2R_2R_3} x_1. \quad (65)$$

Сумма работ внешних сил системы после подстановки исходных данных получит вид

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = 5mgx_1 - \frac{1}{30} mgx_1 = \frac{1490}{30} x_1. \quad (66)$$

Учтем перемещение, получим

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = 202,64 \text{ Дж}. \quad (67)$$

После подстановки значений (57), (58) и (67) в (50) получим тождество. Следовательно, значение скорости и перемещения определены верно.

3 Решение системы уравнений и интегрирование дифференциального уравнения при помощи пакета MathCad

3.1 Решение системы уравнений

Для численного решения линейных систем уравнений в MathCAD имеется специальная функция $lsolv(A,B)$ [7, с. 699].

Она решает систему линейных алгебраических уравнений вида $A \cdot X = B$, выдавая решение – вектор X .

A – матрица коэффициентов размерности $n \times n$;

B – вектор свободных членов размерности n ;

X – вектор неизвестных пока решений.

Пример решения приведен на рисунке 5.

Исходные данные:

$$\underline{m} := 1.02 \quad \underline{g} := 9.81$$

Решение:

Решение системы в матричной форме.

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 5m & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{25}m & -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3}m & 0 & -1 & -1 \\ \frac{m}{3} & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} 5m \cdot g \\ 0 \\ 0 \\ -m \cdot \frac{g}{10} \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} := lsolve(\underline{A}, \underline{B}) \quad \text{или} \quad \underline{X} := \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 8.157 \\ 8.432 \\ 4.66 \\ 0.886 \end{pmatrix}$$

Рисунок 5 – Решение системы уравнений с применением функции $lsolv$

Хорошей альтернативой решению систем в матричной форме является так называемый solve block (Блок решения) [7, с. 700]. Он удобен тем, что при его использовании уравнения записываются не в матричной, а в обычной форме, а также тем, что позволяет решать нелинейные уравнения и вводить ограничительные условия для определяемого решения. Блок решения применяется как для нахождения численного решения, так и для отыскания решения в символьном виде.

Синтаксис Блока решения:

Given

Уравнения

Ограничительные условия

Find(v1,v2,...vn) – возвращает значение одной или ряда переменных для точного решения;

v_i – переменные, которые надо найти.

При символьном решении не надо вводить начальные значения, а после ключевого слова *Find(v1,v2,...vn)* вместо знака равенства следует ввести символьный знак равенства (при помощи комбинации [Ctrl+.] или соответствующей пиктограммы панели Evaluation).

Пример приведен на рисунке 6.

Существует еще одно важное отличие между блоком решения и использованием матричных операций. Если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, матричные методы оказываются непригодными. В таком случае система не имеет решений или разрешима неоднозначно. Если же применить блок решения, MathCAD распознает неоднозначность и выдает решение в параметрической форме.

Исходные данные:
 $m := 1.02$ $g := 9.81$

Решение с помощью "Блока решения"

Given

$$5 \cdot m \cdot x'' = 5 \cdot m \cdot g - S_1$$

$$\frac{16}{25} \cdot m \cdot x'' = S_1 - \frac{2}{3} S_2$$

$$\frac{2}{3} \cdot m \cdot x'' = S_2 + F_3$$

$$\frac{1}{3} \cdot m \cdot x'' = S_3 - F_2 - m \cdot \frac{g}{3}$$

$$\text{find}(x'', S_1, S_2, F_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 8.1567522321428571429 \\ 8.4315636160714285714 \\ 4.6602536383928571429 \\ 0.88633787946428571429 \end{pmatrix}$$

Рисунок 6 – Решение системы уравнений с применением блока решения

3.2 Интегрирование дифференциального уравнения

Для численного решения одиночного дифференциального уравнения в MathCAD имеется функция *Odesolve* [7, с. 701], с помощью которой может быть решена как задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, так и граничная задача. Эта функция входит в состав блока решения и является его заключительным ключевым словом.

Odesolve(x,b,[step]) – Возвращает функцию, которая является решением дифференциального уравнения. Используется в блоке с оператором *Given*.

x – переменная интегрирования, действительное число;

b – конечная точка отрезка интегрирования;

step – величина шага по переменной интегрирования (необязательный аргумент).

Замечания:

1. Уравнение должно быть линейным относительно старшей производной.
2. Число заданных начальных или граничных условий внутри блока должно быть равно порядку уравнения.
3. При записи уравнения для обозначения производных функции используйте специальные кнопки с панели Math или ' (штрих) - [Ctrl+F7], для знака равенства = [Ctrl+=] (в том числе и для дополнительных условий).
4. Конечная точка должна быть больше начальной.

Не допускаются начальные и граничные условия смешанного типа ($f'(a)+f(a)=5$).

Искомая функция в блоке должна быть обязательно с аргументом ($f(x)$).

Решение уравнения $\ddot{x}_1 = 8,16$ с построением графиков скорости и координаты приведено на рисунке 7.

Исходные данные:

$$x_0 := 0 \quad v_0 := 0 \quad t_1 := 1$$

Given

$$x'(t) = 8.16$$

$$x(0) = x_0 \quad x'(0) = v_0$$

$$x := \text{Odesolve}(t, 2t_1)$$

$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

В исследуемый момент времени координата и скорость:

$$x(t_1) = 4.08$$

$$v(t_1) = 8.16$$

Строим графики изменения координаты и скорости точки:

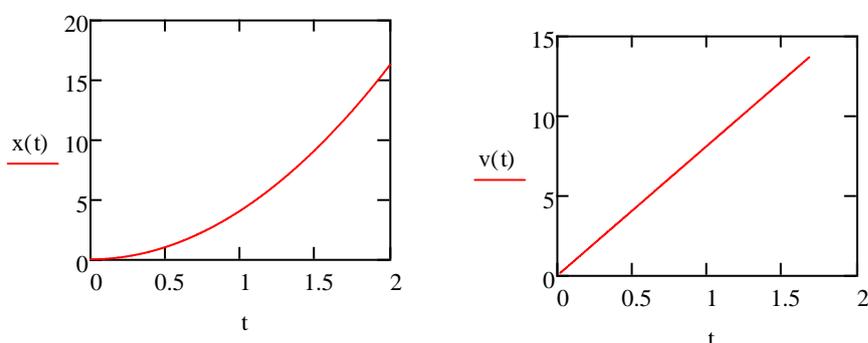


Рисунок 7 – Интегрирование дифференциального уравнения

4 Частные случаи при определении направлений и значений силы трения скольжения

4.1 Выбор направления силы трения

При выборе направления силы трения необходимо исходить из того, что эта сила препятствует проскальзыванию тела по поверхности. В случае, если тело совершает поступательное движение, направление этой силы однозначно противоположно направлению движения. В случае качения тела по поверхности необходимо провести дополнительный анализ.

Рассмотрим следующие варианты крепления тела:

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вниз по наклонной поверхности (рисунок 8а): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вниз, следовательно, сила трения направлена вверх по поверхности;

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вверх по наклонной поверхности (рисунок 8б): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вверх, следовательно, сила трения направлена вниз по поверхности;

– тело, на которое намотана нить, движется вниз по наклонной поверхности (рисунок 8в): при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью скользила бы вниз, так как тело, разматывая нить, также двигалось бы вниз, следовательно, сила трения направлена вверх по поверхности;

– тело, закрепленное нитью в центре, движется вверх по наклонной поверхности (рисунок 8г): в данном случае однозначно направить силу трения нельзя, так как при отсутствии трения точка соприкосновения с поверхностью может скользить вместе с центром вверх, но может и скользить вниз, разматывая нить.

В последнем примере направление силы выбирается произвольным образом, а полученный в результате решения знак сообщит об истинном направлении силы.

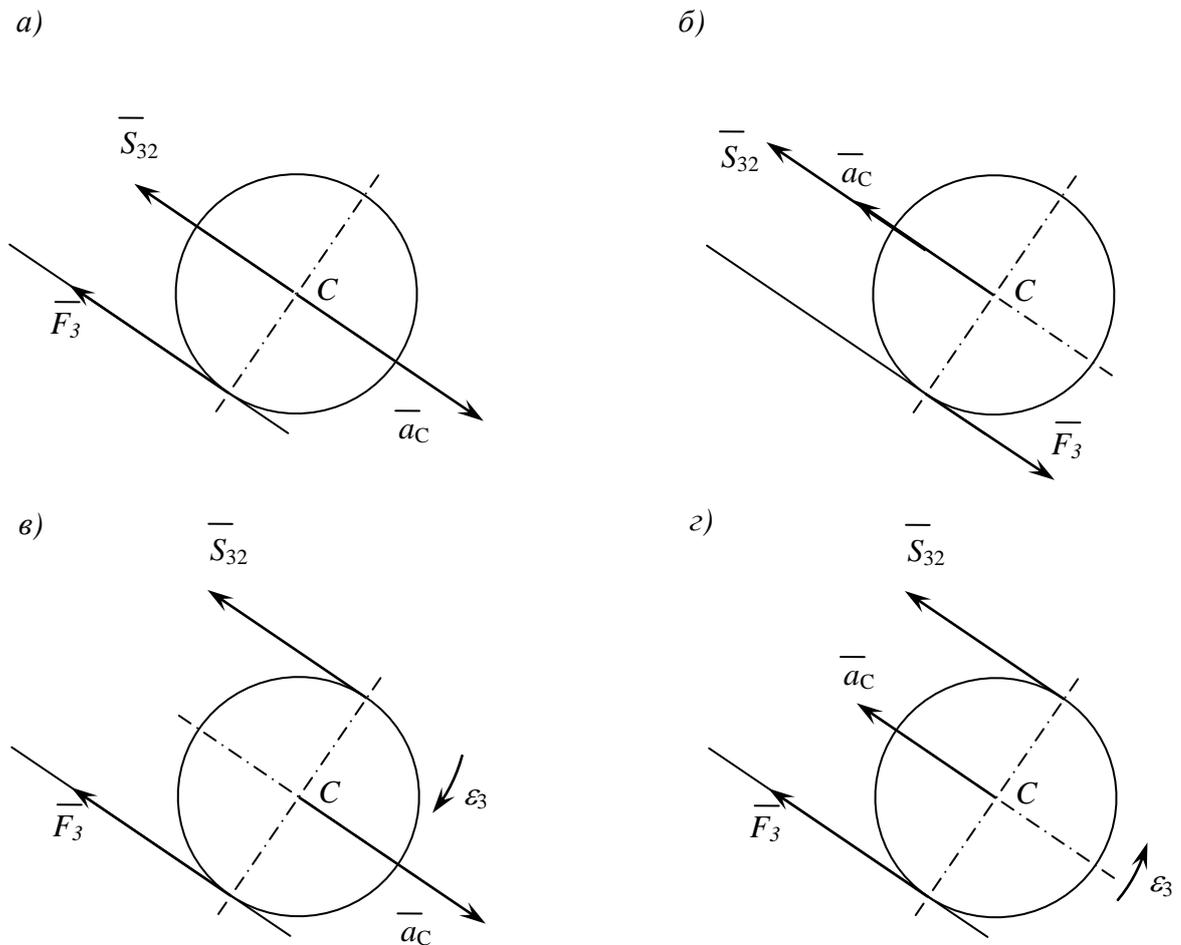


Рисунок 8 – Выбор направления силы трения

4.2 Случай, когда полученное значение силы трения превышает предельное значение

Вернемся к примеру, приведенному в п.2.2, приняв коэффициент трения скольжения $f = 0,04$, тогда, при проверке условия отсутствия проскальзывания (23), получим $F_3 = 0,084mg = 0,84 > 2mg \cdot 0,04 = 0,8 \text{ Н}$. Следовательно, тело проскальзывает по поверхности. В этом случае не будут соблюдаться некоторые кинематические соотношения, так как скорость центра катка уже не будет пропорциональна угловой скорости.

МЦС плоскодвижущегося катка находится в точке соприкосновения катка и неподвижной поверхности. Скорость точки D катка

$$v_D = v_C + \omega_3 R_3 \quad (68)$$

или

$$\omega_2 r_2 = v_C + \omega_3 R_3. \quad (69)$$

Откуда скорость точки С

$$v_C = v_1 \frac{r_2}{R_2} - \omega_3 R_3 \quad (70)$$

и ее ускорение

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = a_1 \frac{r_2}{R_2} - \varepsilon_3 R_3. \quad (71)$$

При подстановке этих значений в (19) и (25) получим для катка уравнения движения в виде

$$m_3 \frac{\ddot{x}_1 r_2}{R_2} - m_3 \varepsilon_3 R_3 = S_2 + F_3, \quad (72)$$

$$\frac{m_3 R_3^2 \varepsilon_3}{2} = S_2 R_3 - F_3 R_3 - m_3 g \delta. \quad (73)$$

Здесь сила трения принимает предельное значение $F_3 = 0,08mg$. В дальнейшем, учитывая уравнения для тел 1 и 2, получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} 5m\ddot{x}_1 = 5mg - S_1 \end{array} \right. \quad (74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{16m\ddot{x}_1}{25} = S_1 - \frac{2}{3}S_2 \end{array} \right. \quad (75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4m\ddot{x}_1}{3} - 2mR_3\varepsilon_3 = S_2 + 0,08mg \end{array} \right. \quad (76)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} mR_3\varepsilon_3 = S_2 - 0,08mg - \frac{mg}{10}. \end{array} \right. \quad (77)$$

Эта система содержит четыре неизвестные и решается известными способами.

При решении

$$\ddot{x}_1 = \frac{3333}{4007} g = 8,16 \text{ м/с}^2, \quad (78)$$

$$S_1 = 5m(g - \ddot{x}_1) = 8,25m = 8.42 \text{ Н}, \quad (79)$$

$$S_2 = 4,68 \text{ Н}, \quad (80)$$

$$\varepsilon_3 = 13,96 \text{ рад/с}^2. \quad (81)$$

Дальнейшее решение не меняется.

5 Требования к оформлению

Изложение решения задач выполняется на стандартных листах белой бумаги формата А-4 (210x297 мм). Правила оформления титульного листа и материалов задач приведены в стандарте СТО 02069024.101–2015 «Работы студенческие. Общие требования и правила оформления».

Перед решением задачи необходимо вычертить в масштабе заданную систему и указать на ней все исходные числовые данные.

Решение задач должно сопровождаться краткими пояснениями и четкими схемами с указанием в необходимых случаях масштабов длин и сил. Расчетно-графические задания должны быть защищены в срок, определенный учебным планом.

Список использованных источников

1. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.
2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
3. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
4. Диевский, В. А. Теоретическая механика: учебное пособие / В. А. Диевский. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 336 с.
5. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т. Т. I. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М.: Наука, 1990. – 672 с.
6. Кирсанов, М. Н. Решебник: Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов; под ред. А. И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.
7. Бертяев, В. Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В. Д. Бертяев. – СПб.: БХВ, 2010. – 752 с.
8. Доев, В. С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad.: учебное пособие / В. С. Доев, Ф. А. Доронин. – СПб.: «Лань», 2010. – 592 с.