Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (МОДУЛЬ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»)

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Оренбург
2017

УДК 517.38(075.8)
ББК 22.161.1я73
О75

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент И.В. Игнатушина

Авторы: И.К. Зубова, О.В. Острая, Л.М. Анциферова, Е.Н. Рассоха

О75 Основы математического анализа (модуль «Определенный интеграл и несобственные интегралы»): учебное пособие / И.К. Зубова, О.В. Острая, Л.М. Анциферова, Е.Н.Рассоха; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2017 – 129 с.
ISBN 978-5-7410-1851-4

Самоучитель «Основы математического анализа» представляет собой комплекс методических материалов, который должен помочь студенту в самостоятельной работе над курсом математического анализа. Этот самоучитель состоит из нескольких пособий. Данное пособие посвящено понятиям определенного и несобственного интегралов, которые рассматриваются во втором семестре. Дается определение определённого интеграла как предела интегральных сумм, доказывается интегральная теорема о среднем и следствия из нее, выводится формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла, рассматривается применение определенного интеграла к вычислению различных геометрических величин. Вводится понятие несобственного интеграла как обобщение определенного интеграла для неограниченных функций и бесконечного промежутка интегрирования. Приводятся некоторые сведения из истории развития интегральных методов.

Кроме теоретических сведений, представлены типичные задачи с решениями по каждой теме, вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения, а также перечень теоретических вопросов к экзамену по разделу «Интегральное исчисление функции одной переменной». В связи с этим самоучитель рекомендуется для самостоятельной работы студентов.

Самоучитель предназначен для студентов, обучающихся по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии, но может использоваться всем обучающимся по физико-математическим, естественнонаучным и инженерно-техническим направлениям подготовки.

УДК 517.38(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-5-7410-1851-4

Содержание

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие можно рассматривать как следующую часть самоучителя «Основы математического анализа», изданного в 2011 г. (модули «Введение в математический анализ»: самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н.Павленко; Оренбург: ООО «НикОс», 2011. – 151 с.; «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»: самоучитель/ И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н.Павленко; Оренбург: ООО «НикОс», 2011. – 173 с.; «Функции нескольких переменных»: самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н.Павленко, Е.Н.Рассоха; Оренбург: ООО «НикОс», 2011. – 106 с.). Комплекс методических материалов, собранных в этом издании, должен помочь студенту в самостоятельной работе над курсом математического анализа. Предлагаемая часть самоучителя продолжает пособие «Основы математического анализа (модуль «Неопределенный интеграл»)». Дается определение определённого интеграла как предела интегральных сумм, доказывается интегральная теорема о среднем и следствия из нее, выводится формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла, рассматривается применение определенного интеграла к вычислению различных геометрических величин. Вводится понятие несобственного интеграла как обобщение определенного интеграла для неограниченных функций и бесконечного промежутка интегрирования. После изложения теоретических сведений в пособии представлены разработки к практическим занятиям по каждой теме. В каждой такой разработке рассмотрены типичные задачи с решениями. Затем даются вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения, которые можно предложить в качестве домашнего задания. В конце пособия составлен перечень теоретических вопросов к зачёту или коллоквиуму по модулю «Определенный интеграл и несобственные интегралы». Эти вопросы обычно входят в программу экзамена по математическому анализу во втором семестре. Представлено также варианты контрольных работ по теме «Определенный и несобственный интегралы».

Введение

Дифференциальное и интегральное исчисление представляет собой основной аппарат высшей математики, необходимый для работы с переменными величинами. В нем, кроме алгебраических операций, выполняющихся над функциями, вводятся ещё две операции – дифференцирование и интегрирование. Основные сведения, касающиеся дифференцирования функций одной и нескольких переменных, изложены в двух предыдущих частях самоучителя.

Далее мы приступим к изучению интегрирования функций одной переменной – операции, обратной дифференцированию. Интегральное исчисление функции одной переменной не только само по себе имеет многочисленные практические приложения, но и необходимо при изучении целого ряда разделов высшей математики («Интегральное исчисление для функций многих переменных», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы», «Векторный анализ» и др.).

1 Определенный интеграл

Постановка геометрической задачи, приводящей к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как предел интегральных сумм (определение интеграла Римана). Свойства определенного интеграла. Определенный интеграл Ньютона-Лейбница.

1.1 Основные определения. Геометрический смысл определенного интеграла

Одной из первых задач, решая которую математики пришли к появлению понятия интеграла, была задача об отыскании площади геометрической фигуры, ограниченной отрезком кривой. Рассмотрим такую задачу.

Пусть задана функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$.

Будем считать, что $a < b$ и предположим, что $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a; b]$.

Рассмотрим фигуру $aABb$, ограниченную графиком этой функции, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox. Эта фигура называется криволинейной трапецией (см. рисунок 1). Её площадь нужно найти.

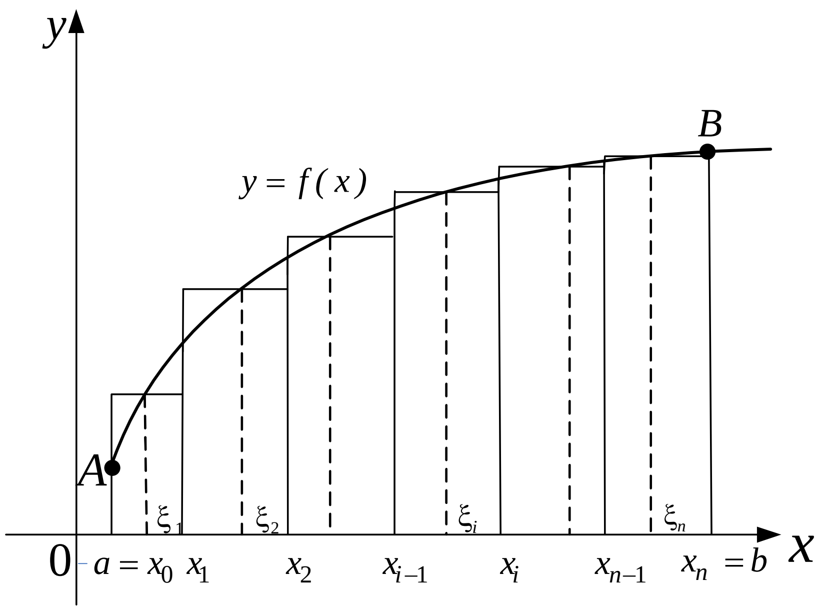

Рисунок 1

Чтобы это сделать, произведем следующие действия:

1. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков точками, выбранными произвольным образом: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Это разбиение обозначим буквой τ.

Пусть Δx_i − длина некоторого i − того частичного отрезка разбиения, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Обозначим буквой l_i наибольшую из длин этих отрезков: $\lambda_i = \max\limits_{[a,\, b]}\{\Delta x_i\}$.

2. В каждом из частичных отрезков произвольным образом выберем точку ξ_i: $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Получится n точек: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

3. Определим значение функции $f(x)$ в каждой из этих точек: найдем $f(\xi_i)$.

4. Составим сумму произведений вида $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

Каждое такое произведение будет равно площади прямоугольника со сторонами $f(\xi_i)$ и Δx_i. Составим сумму всех таких произведений.

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Такая сумма равна площади ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников.

Эта сумма называется интегральной суммой, соответствующей данному разбиению τ и данному выбору точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Ясно, что интегральных сумм для данной функции, непрерывной на отрезке $[a; b]$, можно составить бесконечно много даже для одного разбиения, поскольку точка ξ_i выбирается в каждом отрезке произвольно. Кроме того, и разбиений отрезка $[a; b]$ может быть сколь угодно много. Площади ступенчатых фигур, соответствующих этим интегральным суммам, будут приближаться к площади изображенной нами криволинейной трапеции, причем будут тем ближе к ней, чем больше количество частичных отрезков, на которые разбит отрезок $[a; b]$ и чем меньше каждый из этих отрезков. Здесь весьма существенным является требование $\lambda_i \to 0$. Кроме того, требуется, чтобы $n \to \infty$.

Определение 1. Число I называется **пределом интегральных сумм** $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\Delta x_i$ при $n \to \infty$ и $\lambda_i \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \Delta x_i < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\Delta x_i \right| < \varepsilon$.

Определение 2. Конечный предел интегральных сумм для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;\ b]$ при $\lambda_i \to 0$(при $n \to \infty$) называется **определенным интегралом** функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$.

$$I = \lim_{\substack{\lambda_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

где a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой на отрезке** $[a;\ b]$, если для всякой последовательности разбиений τ отрезка $[a;b]$, у которой при $\lambda_i \to 0$ существует предел интегральных сумм $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = I$.

Интеграл, введенный по *определению 2*, называется **интегралом Римана**[1], а интегральные суммы σ_n − **Римановскими или Римановыми суммами**.

Геометрический смысл определенного интеграла таков:

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен числу, выражающему площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox.

[1]Георг Бернард Риман (1826−1866) − немецкий математик, который ввел математически строгое определение определенного интеграла и выяснил условия его существования. Он является также создателем так называемой Римановой геометрии − многомерного обобщения геометрии Евклида.

1.2 Свойства определенного интеграла

Свойство 1. Определенный интеграл меняет знак при перемене местами пределов интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Доказательство: докажем это свойство, исходя из определения интеграла.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i^*,\ \Delta x_i^* = x_{i-1} - x_i = -\Delta x_i,\ \text{значит}$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -\int_a^b f(x)dx,\ \text{что и требовалось доказать.}$$

Свойство 2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Вспомнив геометрический смысл определенного интеграла, мы сможем считать это свойство очевидным.

Свойство 3. Свойство аддитивности: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ где $c \in (a;b)$.

Докажите это свойство самостоятельно, исходя из определения определенного интеграла и вспомнив теорему об арифметических свойствах пределов.

Свойство 4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: $\int_a^b k\ f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

Доказательство: а) Фиксируем разбиение отрезка $[a;b]$ и выбор точек ξ_i.

б) Составим интегральную сумму, соответствующую этому разбиению и этому выбору точек.

$$\sum_{i=1}^{n} k\, f(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Это равенство верно, согласно распределительному закону для чисел.

в) Перейдем в этом равенстве к пределу: $\lim\limits_{\substack{\lambda_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} k\, f(\xi_i)\Delta x_i = k \lim\limits_{\substack{\lambda_i \to 0 \\ n\to\infty}} f(\xi_i)\Delta x_i$.

По определению определенного интеграла это означает, что $\int\limits_a^b k\, f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx,$ что и требовалось доказать.

Свойство 5. Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций: $\int\limits_a^b (f(x)+q(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b q(x)dx$.

Докажите это свойство самостоятельно.

Свойство 6. Предыдущие два свойства можно обобщить и назвать свойством линейности определенного интеграла: если функции $f(x)$ и $q(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то для любых двух действительных чисел k_1 и k_2 выполняется равенство $\int\limits_a^b [k_1\, f(x)+k_2\, q(x)]dx = k_1\int\limits_a^b f(x)dx + k_2\int\limits_a^b q(x)dx$.

1.3 Формула Ньютона–Лейбница. Вычисление определенных интегралов

Исаак Ньютон (1643−1727) − великий английский физик, астроном, математик, философ. Основоположник современной теоретической механики, создатель математики непрерывных процессов.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646−1716) − немецкий математик, физик, философ, лингвист.

Основы дифференциального и интегрального исчисления были разработаны этими учеными практически одновременно, однако Ньютон рассматривал их как аппарат для решения задач механики (отыскание скорости по известному закону движения и наоборот, установление закона движения по известной скорости).

Лейбниц же создавал аппарат для решения геометрических задач, например, задачи о проведении касательной к заданной кривой и, наоборот, о построении кривой, если построены касательные к ней. Не случайно мы постоянно обращали внимание на геометрический и механический смысл основных понятий дифференциального и интегрального исчисления. Именно для решения задач механики и геометрии это исчисление было создано, и история его создания началась задолго до XVII века.

На рубеже XVII−XVIII веков понятие предела не было еще окончательно определено, поэтому ни Ньютон, ни Лейбниц, конечно, не рассматривали определенный интеграл как предел интегральных сумм.

Попытаемся ввести это понятие, не пользуясь понятием предела, а используя только тот факт, что дифференцирование и интегрирование являются взаимно – обратными операциями. Это было показано в середине XVII века ближайшими предшественниками Ньютона и Лейбница, в частности, учителем Ньютона, английским ученым **Исааком Барроу (1630−1677)**.

Пусть у функции $f(x)$, определенной в некотором промежутке X, существует в этом промежутке неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \forall x \in X$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а C − постоянная интегрирования; a и b – любые две точки, принадлежащие промежутку X. Разность $F(b) - F(a)$ представляет собой приращение первообразной $F(x)$ при переходе от точки a к точке b.

Теорема. Приращения любых первообразных, вызванные приращением $\Delta x = b - a$ переменной интегрирования x, одинаковы.

Доказательство: пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – какие-либо две первообразные функции $f(x)$. Тогда, поскольку две первообразные могут отличаться друг от друга только на некоторую постоянную величину, можно написать: $F_2(a) = F_1(a) + C$, $F_2(b) = F_1(b) + C.$

Поэтому $F_2(b) - F_2(a) = [F_1(b) + C] - [F_1(a) + C] = F_1(b) + C - F_1(a) - C =$

$= F_1(b) - F_1(a)$, что и требовалось доказать.

Определение 3. Приращение $F(b) - F(a)$ произвольной первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ при изменении аргумента x от значения a до значения b назовем **определенным интегралом Ньютона-Лейбница** и обозначим символом, $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким образом, у нас получится формула, которую мы назовем формулой Ньютона – Лейбница и которую будем использовать для вычисления определенного интеграла: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_1^3 x^2 dx$.

Решение: $\int\limits_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$.

Ответ: $\int\limits_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$.

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет конечное число точек разрыва первого рода $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то интеграл Ньютона-Лейбница по этому отрезку определяют как сумму интегралов по частичным отрезкам $[a;c_1], [c_1;c_2], \ldots, [c_n;b]$; для этого на каждом из этих отрезков исходная функция доопределяется в концевых точках односторонними пределами.

Пример 2. Вычислить интеграл от составной функции: $f(x) = \begin{cases} x+1, \ x \in [-1;0); \\ \sin x, \ x \in (0;1); \\ 3x, \quad x \in [1;2]. \end{cases}$

Решение: график этой функции представлен на рисунке 2.

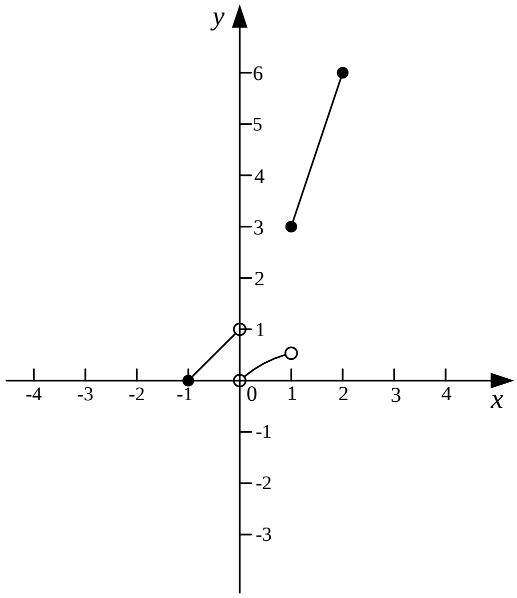

Рисунок 2

Функция имеет точки разрыва первого рода $c_1 = 0, c_2 = 1$. Для того, чтобы проинтегрировать составную функцию, нужно функцию $f_1(x) = x + 1$ доопределить в точке $c_1 = 0$ значением 1 (левый предел). Функцию $f_2(x) = \sin x$ нужно в точке $c_1 = 0$ доопределить значением $y = 0$ (правый предел), а в точке $c_2 = 1$ – значением $\sin 1$ (левый предел).

Тогда $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{0}(x+1)dx + \int\limits_{0}^{1}\sin x dx + \int\limits_{1}^{2} 3x dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \cos x\Big|_0^1 + \frac{3}{2}x^2\Bigg|_1^2 =$

$$= -\frac{1}{2} + 1 - \cos 1 + 1 + \frac{3}{2}\cdot 4 - \frac{3}{2} = 6 - \cos 1.$$

Ответ: $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,dx = 6 - \cos 1.$

Замечание: Пользуясь формулой Ньютона – Лейбница, легко доказать рассмотренные выше свойства определенного интеграла. Сделайте это самостоятельно.

1.4 Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_1^2 2x^2dx.$

Решение: пользуясь свойствами определенного интеграла, вынесем постоянную за знак интеграла и, применяя табличное интегрирование степенной функции, получим $\int\limits_1^2 2x^2dx = 2\int\limits_1^2 x^2dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3}.$

Ответ: $\int\limits_1^2 2x^2dx = \frac{14}{3}.$

Задача 2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_1^5 \frac{7dx}{x};$

Решение: используя свойства определенного интеграла, таблицу интегралов и формулу Ньютона-Лейбница, получим: $\int\limits_1^5 \frac{7dx}{x} = 7\int\limits_1^5 \frac{dx}{x} = 7\cdot \ln|x|\Big|_1^5 = 7\cdot(\ln 5 - \ln 1) =$

$= 7\ln 5$.

Ответ: $\int\limits_1^5 \frac{7dx}{x} = 7\ln 5.$

Задача 3. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

Решение: применяя таблицу интегралов и формулу Ньютона-Лейбница, получаем: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$

Ответ: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1.$

Задача 4. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{-1}^1 e^x dx.$

Решение: используя таблицу интегралов и формулу Ньютона-Лейбница, получаем: $\int\limits_{-1}^1 e^x dx = e^x\Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2-1}{e}.$

Ответ: $\int_{-1}^{1} e^x dx = \frac{e^2 - 1}{e}.$

Задача 5. Вычислить определенный интеграл: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$

Решение: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(ctg\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$

Задача 6. Вычислить определенный интеграл: $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение: $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$

Ответ: $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5\pi}{6}.$

Задача 7. Вычислить определенный интеграл: $\int_{-2}^{4} \left(8 + 2x - x^2\right) dx.$

Решение: используя свойство линейности определенного интеграла, таблицу интегралов и вынося постоянную за знак интеграла, получим:

$$\int_{-2}^{4} \left(8 + 2x - x^2\right) dx = 8\int_{-2}^{4} dx + 2\int_{-2}^{4} x dx - \int_{-2}^{4} x^2 dx =$$

применяя формулу Ньютона-Лейбница для каждого из трех слагаемых, получим:

$$= \left(8x + 2\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 8(4-(-2)) + \left(4^2 - (-2)^2\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(4^3 - (-2)^3\right) = 48 + 12 - 24 = 36.$$

Ответ: $\int_{-2}^{4} \left(8 + 2x - x^2\right) dx = 36.$

Задача 8. Вычислить определенный интеграл: $\int_{1}^{2} \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x} dx.$

Решение: разделив почленно числитель на знаменатель и применив свойства определенного интеграла, получим:

$$\int_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}dx=\int_1^2\left(3x^3-5x+\frac{7}{x}\right)dx=3\int_1^2 x^3dx-5\int_1^2 xdx+7\int_1^2\frac{dx}{x}=$$

Все три интеграла табличные. Применив таблицу основных интегралов и формулу Ньютона-Лейбница, окончательно имеем:

$$=3\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2-5\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2+7\ln|x|\big|_1^2=\frac{3}{4}(16-1)-\frac{5}{2}(4-1)+7(\ln 2-\ln 1)=3{,}75+\ln 2.$$

Ответ: $\int_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}dx=3{,}75+\ln 2.$

Задача 9. Вычислить определенный интеграл: $\int_4^9\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$

Решение: на основании свойств определенного интеграла и формулы Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int_4^9\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{5}\int_4^9 xdx+\frac{1}{2}\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_4^9+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x}\big|_4^9=\frac{1}{5}\cdot\left(9^2-4^2\right)+\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot(81-16)+(3-2)=13+1=14.$$

Ответ: $\int_4^9\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=14.$

Задача 10. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}.$

Решение: $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\big|_0^1=arctg1-arctg\,0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$

Ответ: $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$

1.5 Вопросы для самоконтроля

1. Введите понятие определенного интеграла как предела интегральных сумм (интеграл Римана).

2. Перечислите свойства определенного интеграла и докажите их, пользуясь определением интеграла Римана.

3. Охарактеризуйте геометрический смысл интеграла Римана.

4. Выведите формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

5. Докажите свойства определенного интеграла, используя формулу Ньютона-Лейбница.

1.6 Задачи для самостоятельного решения

Вычислите следующие определенные интегралы:

1. $\int_1^3 x^4 dx;$

2. $\int_{-2}^{3} \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1\right) dx;$

3. $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$

4. $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx;$

5. $\int_0^1 e^{3x} dx;$

6. $\int_1^3 \frac{dx}{x+3};$

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\, dx;$

8. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx;$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4dx}{\cos^2 x};$

10. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right) dx;$

11. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}};$

12. $\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25 + x^2};$

2 Вычисление определенных интегралов (продолжение)

Особенности основных методов интегрирования в применении к определенным интегралам. Определенные интегралы от четных и нечетных функций по промежутку, симметричному относительно нуля. Интегральная теорема о среднем и следствия из нее.

2.1 Метод замены переменной

Если определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ преобразуется при помощи подстановки $x=\varphi(t)$ в другой интеграл с новой переменной интегрирования t, то старые пределы интегрирования $x_1=a$ и $x_2=b$ необходимо заменить новыми пределами $t_1=\alpha$ и $t_2=\beta$, которые определяются из исходной подстановки $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, функция $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$ и $x_1=a$, а $x_2=b$. Тогда имеет место следующее правило замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt=\int\limits_\alpha^\beta q(t)dt.$$

К исходной переменной при отыскании определенного интеграла не возвращаются, да это и невозможно сделать, так как при решении такой задачи ответ выражается числом.

Пример 1. Найти определенный интеграл $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение: $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left| \begin{array}{l} t^2 = 1+3x \\ 2tdt = 3dx \\ x = \dfrac{t^2-1}{3} \\ x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \\ x_2 = 5 \Rightarrow t_2 = 4 \\ \alpha \le t \le \beta \;\; \alpha = 1;\; \beta = 4 \end{array} \right| = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot t}{t}dt = \frac{2}{9}\left[\int\limits_1^4 (t^2-1)dt\right] =$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left[\frac{64}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1\right] = \frac{2}{9}(21-3) = \frac{2\cdot 18}{9} = 4.$$

Ответ: $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = 4$.

2.2 Метод интегрирования «по частям»

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две функции, дифференцируемые на промежутке X. Тогда $(uv)' = u'v + uv'$. Интегрируя обе части этого тождества в пределах от a до b, получим: $\int\limits_a^b (uv)'\,dx = \int\limits_a^b u'vdx + \int\limits_a^b uv'\,dx$.

Так как $\int (uv)'\,dx = uv + C$, то $\int\limits_a^b (uv)'\,dx = uv\big|_a^b$.

Теперь можно перейти к равенству

$uv\big|_a^b = \int\limits_a^b u'v\,dx + \int\limits_a^b u\,v'\,dx$, или $uv\big|_a^b = \int\limits_a^b v\,du + \int\limits_a^b u\;dv$,или $\int\limits_a^b v\,du = u\,v\big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

Пример 1. Найти определенный интеграл $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$.

Решение: $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & x\,dx = dv \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^2 - \frac{x^2}{4}\Bigg|_1^2 =$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\int_1^2 x\ln x\,dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

2.3 Определенные интегралы от четных и нечетных функций по симметричному промежутку интегрирования

Если функция четная или нечетная и является интегрируемой на отрезке $[-a,a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ для четной функции $f(x)$; если же подынтегральная функция нечетная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Доказательство: разделив отрезок интегрирования $[-a;a]$ точкой $x=0$ на две части, по свойству аддитивности интеграла получим тождество $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$.

В интеграле $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ заменим переменную x на $-z$. Тогда $dx=-dz$. Если $x_1=-a$, то $z_1=a$; если $x_2=0$, то $z_2=0$.

Таким образом, $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-z)dz = \int_0^a f(-z)dz$ по *свойству 1* определенного интеграла. Но значение определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, поэтому

$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-z)dz = \int_0^a f(-x)dx$, и тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(-x)=f(x), \\ 0, & \text{если } f(x)=-f(x). \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

2.4 Интегральная теорема о среднем и следствия из нее

В этом параграфе мы установим соотношение, связывающее значение определенного интеграла функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ со значением подынтегральной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка. Это соотношение будет следовать из интегральной теоремы о среднем и позволит получить неравенства, оценивающие интеграл.

Теорема. Если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$, имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$, то внутри отрезка $[a,b]$существует такая точка С, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(C)\cdot(b-a). \tag{1}$$

Доказательство: согласно определению первообразной $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a;b]$, т.е. функция $F(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$, а значит, и непрерывна на нем. Тогда эта функция удовлетворяет теореме Лагранжа, т.е. $\exists c\in(a;b): F(b)-F(a)=F'(c)\cdot(b-a)$. Но по формуле Ньютона-Лейбница $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$, а по определению первообразной $F'(c)=f(c)$.

Итак, $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$, $\forall c\in(a;b)$, что и требовалось доказать.

Выразим из последнего равенства $f(c)$:

$$\overline{f} = f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Число $\overline{f}$ будем называть средним значением функции на отрезке $[a;b]$.

Доказанное нами равенство (1) означает, что для функции, имеющей на отрезке $[a;b]$ первообразную, существует, по крайней мере, одна внутренняя точка отрезка $[a;b]$, в которой значение функции совпадает с ее средним значением на этом отрезке.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ первообразную и

$$f(x) \geq 0 \ \forall x \in (a;b), \text{ то } \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \tag{3}$$

Доказательство: так как $f(x) \geq 0 \ \forall x \in (a;b)$, $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a) \geq 0$, значит из (1) следует (3).

Следствие 2. Если функции $g(x)$ и $h(x)$ имеют на отрезке $[a;b]$ первообразные и $g(x) \geq h(x)$ для любого $x \in (a;b)$ то

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b h(x)dx. \tag{4}$$

Доказательство: рассмотрим разность данных функций $f(x) = g(x) - h(x)$. Эта разность неотрицательная для любого $x \in (a;b)$. Тогда, в силу следствия (1) $\int_a^b [g(x) - h(x)]dx \geq 0$, а с учетом свойства линейности определенного интеграла $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx \geq 0$ или $\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b h(x)\,dx,$ для любого $x \in (a;b)$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. Если функции $g(x)$ и $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ имеют на отрезке $[a;b]$ первообразные, $m \leq f(x) \leq M$, $g(x) \geq 0$, для любого $x \in (a;b)$, то $m \cdot \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \leq M \cdot \int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство: поскольку $g(x) \geq 0$, выполняются неравенства

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x), \text{ для любого } x \in (a;b). \tag{5}$$

Из определения первообразной следует, что если функция $g(x)$ имеет первообразную $G(x)$ на отрезке $[a;b]$, то и функция $m \cdot g(x)$ также имеет первообразную на отрезке $[a;b]$, для любого $m \in R$ равную $m \cdot G(x)$. Таким образом, функции $m \cdot g(x)$ и $M \cdot g(x)$ имеют первообразные на отрезке $[a;b]$. Проинтегрируем почленно неравенство (5).

$$m \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx \leq M \cdot \int_a^b g(x)dx, \text{ для любого } x \in (a;b). \tag{6}$$

Эти неравенства справедливы согласно следствию (2), примененному здесь дважды.

Следствие 4. Рассмотрим ситуацию, обратную той, которая была в *следствии 3*. Если функции $g(x)$ и $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ имеют на отрезке $[a;b]$ первообразные, и если $m \le f(x) \le M$, $g(x) \le 0$ для любого $x \in (a;b)$, то выполняются неравенства

$$m\cdot\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \ge M\cdot\int_a^b g(x)dx, \text{ для любого } x\in(a;b). \qquad (7)$$

Доказательство: умножим неравенства $m \le f(x) \le M$ на $g(x) \le 0$, для любого $x \in (a;b)$: $m\cdot g(x) \ge f(x)\cdot g(x) \ge M\cdot g(x)$, для любого $x \in (a;b)$.

Проинтегрируем почленно это неравенство. Это возможно, так как у функций $m\cdot g(x)$ и $M\cdot g(x)$ существуют первообразные на отрезке $[a;b]$. Согласно двукратно примененному следствию (2), видно, что двойное неравенство (7) верно.

Следствие 5. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ первообразную и выполняются неравенства $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in (a;b)$, то справедливы и неравенства

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a). \qquad (8)$$

Доказательство: неравенства (8) следуют из неравенств (5) следствия 3, когда $g(x) \equiv 1$, для любого $x \in [a;b]$.

Следствие 6. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ имеют на отрезке $[a;b]$ первообразные, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (9)$$

Доказательство: поскольку $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, $\forall x \in (a;b)$ можно дважды применить неравенство (4) из следствия (2).

$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$ что равносильно двойному неравенству (9).

Следствие 7. Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на отрезке $[a; b]$ и $f(x) \geq 0$, $x \in [a; b]$, причем $f(x) > 0$ хотя бы в одной точке отрезка $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx > 0. \tag{10}$$

Доказательство: при указанных условиях записанный интеграл в силу следствия (1) неотрицателен. Предположим, что он равен нулю. Тогда, согласно формуле Ньютона-Лейбница, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = 0$, значит $F(b) = F(a)$. Из условия $F'(x) = f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a; b]$ следует, что функция $F(x)$ не убывает на отрезке $[a; b]$, т.е. $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ для любого $x \in [a; b]$. Но если при этом $F(a) = F(b)$, то $F(x)$ на отрезке $[a; b]$ постоянна, а тогда $F'(x) = f(x) \equiv 0$ для любого $x \in [a; b]$, что противоречит одному из условий следствия.

Значит, неравенство (10) верно.

Следствие 8. Если функции $g(x)$ и $h(x)$ имеют на отрезке $[a; b]$ первообразные, и если $g(x) \geq h(x)$ для любого $x \in [a; b]$, причем $g(x)$ и $h(x)$ различаются хотя бы в одной точке отрезка $[a; b]$, то выполняется неравенство

$$\int_a^b g(x)dx > \int_a^b h(x)dx. \tag{11}$$

Докажите это свойство самостоятельно, введя вспомогательную функцию $f(x) = g(x) - h(x)$, воспользовавшись *следствием 7* и свойством линейности определенного интеграла.

Замечание. Следствия из теоремы о среднем справедливы только для отрезка, т.е. только для случая, когда $a \leq x \leq b$. Если это ограничение снять, то в формулировки следствий нужно вносить коррективы. Подумайте самостоятельно, какие.

Рассмотрим пример использования следствий из теоремы о среднем. Установим, от какой из функций $\sin x$ и x интеграл Ньютона-Лейбница по отрезку

$\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right]$ больше, не вычисляя значений интегралов. Поскольку при $x\in\left(\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right)$

$0 < \sin x < x$, в силу *следствия 8* получим: $0<\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx<\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}}x dx$.

2.5 Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_2^3(2x-1)^3 dx.$

Решение: $\int\limits_2^3(2x-1)^3 dx=\left|\begin{array}{l}2x-1=t,\\ x=\dfrac{t+1}{2}\\ x_1=2\Rightarrow t_1=3\\ x_2=3\Rightarrow t_2=5\\ dx=\dfrac{1}{2}dt\end{array}\right|=\int\limits_3^5 t^3\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{t^4}{4}\right|_3^5=\frac{1}{8}\left(5^4-3^4\right)=68.$

Ответ: $\int\limits_2^3(2x-1)^3 dx=68.$

Задача 2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_2^3 x(3-x)^7 dx.$

Решение: $\int\limits_2^3 x(3-x)^7 dx=\left|\begin{array}{l}3-x=t,\ x_1=2\Rightarrow t_1=1\\ x_2=3\Rightarrow t_2=0\\ x=3-t\\ dx=-dt\end{array}\right|=\int\limits_1^0(3-t)\cdot t^7(-dt)=$

$$=\int\limits_1^0\left(t^8-3t^7\right)dt=\left.\left(\frac{t^9}{9}-\frac{3}{8}t^8\right)\right|_1^0=-\frac{1}{9}+\frac{3}{8}=\frac{19}{72}.$$

Ответ: $\int\limits_2^3 x(3-x)^7 dx=\frac{19}{72}.$

Задача 3. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}dx.$

$$\textit{Решение:} \int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+4}=t,\ x+4=t^2 \\ x=t^2-4 \\ dx=2tdt \\ x_1=0 \Rightarrow t_1=2, \\ x_2=5 \Rightarrow t_2=3 \end{array} \right| = \int_2^3 \left(t^2-4\right)\cdot t2tdt =$$

$$= \int_2^3 \left(2t^4-8t^2\right)dt = 2\int_2^3 t^4dt - 8\int_2^3 t^2dt = 2\frac{t^5}{5}\Big|_2^3 - 8\frac{t^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{2}{5}\left(3^5-2^5\right) - \frac{8}{3}\left(3^3-2^3\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 211 - \frac{8}{3}\cdot 19 = \frac{506}{15} = 33\frac{11}{15}.$$

Ответ: $\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx = 33\frac{11}{15}.$

Задача 4. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}.$

$$\textit{Решение:} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t,\ x=t^2 \\ x_1=0 \Rightarrow t_1=0 \\ x_2=4 \Rightarrow t_2=2 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_0^2 \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\int_0^2 dt - 2\int_0^2 \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t\Big|_0^2 - 2\ln|t+1|\Big|_0^2 = 2(2-0) - 2\left[\ln(2+1) - \ln(0+1)\right] = 4 - 2\ln 3 \approx 1{,}803$$

Ответ: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = 1{,}803.$

Задача 5. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x dx.$

$$\textit{Решение:} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u=x^2,\ dv=\sin 2x dx \\ du=2xdx,\ v=\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 2x \cdot 2xdx = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cos 2\cdot\frac{\pi}{4} - 0\right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx =$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x,\ dv=\cos 2x dx \\ du=dx,\ v=\int \cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x dx =$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x dx = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$

Задача 6. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^1 e^{2x}\sin x dx$;

Решение: данный интеграл берется дважды «по частям». В процессе решения приходим к уравнению относительно искомого интеграла.

$$\int_0^1 e^{2x}\sin x dx = \left|\begin{matrix} u=e^{2x} \Rightarrow du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin x dx \Rightarrow v=\int \sin x dx=-\cos x \end{matrix}\right| = -e^{2x}\cos x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 e^{2x}\cos x dx =$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{2x} \Rightarrow du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos x dx \Rightarrow v=\int \cos x dx=\sin x \end{matrix}\right| = -\left(e^{2\cdot 1}\cos 1 - e^{2\cdot 0}\cos 0\right)+$$

$$+2\left(e^{2x}\sin x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x}\sin x dx\right) = -\left(e^2\cos 1 - 1\right) + 2\left(e^{2\cdot 1}\sin 1 - e^0\sin 0\right) -$$

$$-2\int_0^1 e^{2x}\sin x dx = -e^2\cos 1 + 1 + 2e^2\sin 1 - 2\int_0^1 e^{2x}\sin x dx.$$

Получим уравнение относительно искомого интеграла. Обозначим $\int\limits_0^1 e^{2x}\sin x dx = I$.

Тогда $I = e^2(2\sin 1 - \cos 1) - 2I$, $3I = e^2(2\sin 1 - \cos 1)$,

$$I=\frac{1}{3}e^2(2\sin 1-\cos 1) \Rightarrow \int_0^1 e^{2x}\sin x dx = \frac{e^2}{3}(2\sin 1 - \cos 1).$$

Ответ: $\int\limits_0^1 e^{2x}\sin x dx = \frac{e^2}{3}(2\sin 1 - \cos 1).$

Задача 7. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{-2}^{2}\left(x^3 - x\right)dx$.

Решение: функция $y = x^3 - x$ нечетная, следовательно

$$\int_{-2}^{2}\left(x^3 - x\right)dx = \int_{-2}^{0}\left(x^3 - x\right)dx + \int_{0}^{2}\left(x^3 - x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2} = \frac{1}{4}\left(0^4 - (-2)^4\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(0^2 - (-2)^2\right) + \frac{1}{4}\left(2^4 - 0^4\right) - \frac{1}{2}\left(2^2 - 0^2\right) = \frac{1}{4}\cdot(-16) - \frac{1}{2}\cdot(-4) + \frac{1}{4}\cdot 16 - \frac{1}{2}\cdot 4 = 0.$$

Ответ: $\int_{-2}^{2}\left(x^3 - x\right)dx = 0.$

Задача 8. Вычислить определенный интеграл: $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x \cdot \cos x dx;$

Решение: в силу нечетности подынтегральной функции и симметричности отрезка интегрирования относительно начала координат имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cdot\cos x dx = \int_{-\pi}^{0}\sin x\cdot\cos x dx + \int_{0}^{\pi}\sin x\cdot\cos x dx = \left|\begin{array}{l} \cos x = t, d(\cos x) = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ x_1 = -\pi, t_1 = -1, \\ x_2 = 0, \quad t_2 = 1; \\ x_1' = 0, \quad t_1' = 1, \\ x_2' = \pi, \quad t_2' = -1; \end{array}\right| =$$

$$= -\int_{-1}^{1} t dt - \int_{1}^{-1} t dt = -\left(\frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{t^2}{2}\bigg|_{1}^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\left((1-1) + (1-1)\right) = 0.$$

Ответ: $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cdot\cos x dx = 0.$

Задача 9. Вычислить определенный интеграл: $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx;$

Решение: в силу четности подынтегральной функции и симметричности отрезка интегрирования относительно начала координат имеем $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Для нахождения последнего интеграла воспользуемся тригонометрической подстановкой $x = \sin t$. Будем полагать, что если $x_1 = 0$, то $t_1 = 0$; если $x_2 = 1$, то $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Тогда $dx = \cos t dt$ и $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t dt.$

Так как $\cos t > 0$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то $|\cos t| = \cos t$. Применяя тригонометрическую формулу понижения степени, получаем $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$

$$= \frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left(\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Окончательно имеем $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = 2\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$

Ответ: $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\rho}{2}.$

Задача 10. Оценить интеграл: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}dx.$

Решение: Так как $0 \le \cos^2 x \le 1$, то по формуле 8 находим $(b-a) = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$, $m = 1$, $M = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $1{,}57 < I < 1{,}91$.

Ответ: $1{,}57 < I < 1{,}91$.

2.6 Вопросы для самоконтроля

1. Каковы особенности метода замены переменной в случае применения его к вычислению определенного интеграла?

2. Каковы особенности отыскания определенного интеграла от четной или нечетной функции по промежутку, симметричному относительно нуля?

3. Сформулируйте и докажите интегральную теорему о среднем?

4. Объясните, как с помощью интегральной теоремы о среднем и следствии из нее, можно оценивать и сравнивать определенные интегралы.

2.7 Задачи для самостоятельного решения

Вычислите следующие определенные интегралы:

1. $\int_4^5 (4-x)^3 dx;$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4};$

3. $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1}dx;$

4. $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx;$

5. $\int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}};$

6. $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}};$

7. $\int_1^0 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}};$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin xdx;$

9. $\int_0^{0,2} xe^{5x}dx;$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2xdx$.

Оценить интеграл:

11. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}dx;$

12. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

3 Интеграл Римана и суммы Дарбу. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Необходимое условие интегрируемости функций. Определение верхней и нижней сумм Дарбу. Свойства сумм Дарбу. Достаточное условие существования определенного интеграла. Классы интегрируемых функций. Определенный интеграл как функция верхнего предела.

3.1 Необходимое условие интегрируемости функции. Интеграл Римана и суммы Дарбу

Наша следующая цель – выяснить условия существования определенного интеграла Римана.

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a;b]$, если существует конечный предел $I \in R$ ее интегральных (Римановых) сумм на этом отрезке:

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Этот предел называется **интегралом Римана**.

Сформулируем и докажем теорему, дающую нам необходимое условие интегрируемости функции.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство: доказательство этой теоремы проведем «от противного». Предположим, что функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, но не ограничена на нем. По определению интегрируемой функции, существует конечный предел $I = \lim\limits_{\substack{\lambda_n\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

По определению предела это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_\varepsilon > 0$, что если $\Delta x_i < \delta_\varepsilon$, то $\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что множество интегральных сумм, для которых $\lambda_n < \delta_\varepsilon$, ограничено. Выберем одну из таких интегральных сумм. Поскольку, по предположению, функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a;b]$, среди частичных отрезков, на которые разбит отрезок $[a;b]$, обязательно найдется такой частичный отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, на котором функция $f(x)$ окажется неограниченной. Путем соответствующего выбора точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ в интегральной сумме можно сделать сколь угодно большим по абсолютной величине. Но вместе с этим слагаемым сколь угодно большой по абсолютной величине станет и интегральная сумма (см. рисунок 3).

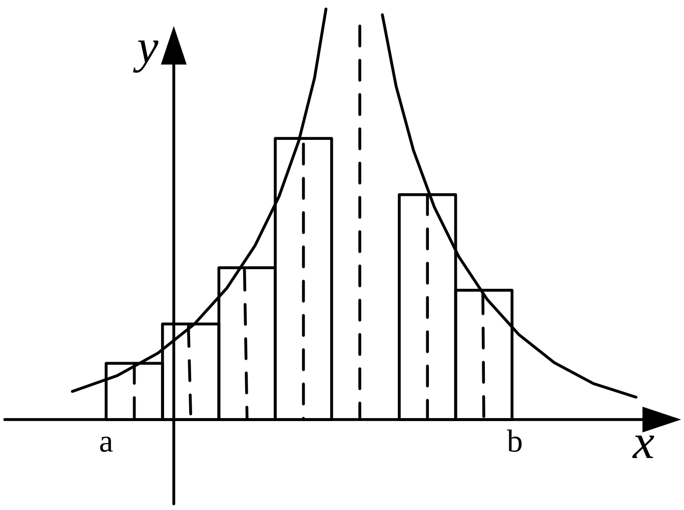

Рисунок 3

Но интегральная сумма выбиралась из ограниченного множества интегральных сумм, значит, она не может быть сколь угодно большой по абсолютной величине. Возникло противоречие, которое доказывает утверждение теоремы.

Таким образом, функция $y = f(x)$, интегрируемая на отрезке $[a;b]$, ограничена на этом отрезке, что и требовалось доказать.

Однако ограниченность функции на отрезке - условие необходимое, но не достаточное для ее интегрируемости.

Рассмотрим теперь функцию $y = f(x)$, ограниченную на отрезке $[a;b]$. Для такой функции существуют такие положительные числа m и M, что $m \le f(x) \le M$, если $a \le x \le b$. Функция будет ограниченной и на каждом из частичных отрезков при всяком разбиении отрезка $[a;b]$.

Обозначим через m_i и M_i соответственно точные нижнюю и верхнюю границы значений функций $f(x)$ в частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ и составим две суммы:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \,\Delta x_i \text{ и } S = \sum_{i=1}^{n} M_i \,\Delta x_i .$$

Эти суммы называются соответственно **нижней и верхней суммами Дарбу**.[2]

В частном случае, когда функция $f(x)$ непрерывна, нижняя и верхняя суммы Дарбу являются просто наименьшей и наибольшей из интегральных сумм, соответствующих данному разбиению. В этом случае функция $f(x)$ в каждом частичном отрезке достигает своих точных нижней и верхней границ, и точки ξ_i можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство $f(\xi_i) = m_i$ или $f(\xi_i) = M_i$. И тогда можно говорить о геометрическом смысле сумм Дарбу: нижней сумме соответствует ступенчатая фигура, содержащаяся в криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$, осью Ox и графиком функции $f(x)$. Верхней сумме Дарбу соответствует ступенчатая фигура, содержащая в себе эту криволинейную трапецию (см. рисунок 4).

[*] Гастон Дарбу (1842-1917) – французский математик, работы которого были посвящены математическому анализу, дифференциальным уравнениям, дифференциальной геометрии, аналитической механике.

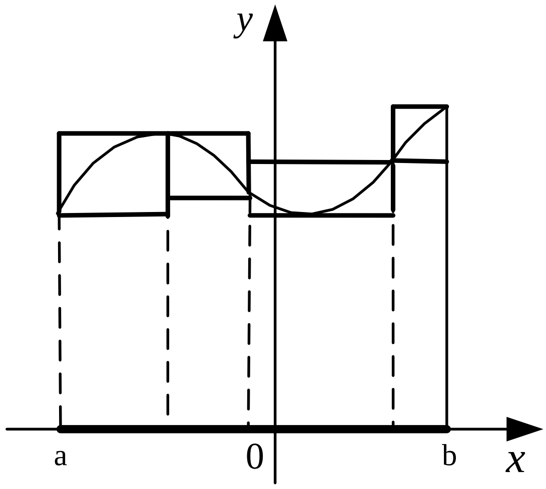

Рисунок 4

В общем случае из самого определения верхней и нижней границ для множества значений функции следует выполнение неравенств $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$. Умножив все члены обоих этих неравенств на $\Delta x_i \, (\Delta x_i > 0)$, получим: $m_i \cdot \Delta x_i \le f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \le M_i \cdot \Delta x_i$; просуммировав все такие произведения по i, получим неравенства для сумм: $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$, или $s \le \sigma \le S$.

При фиксированном разбиении соответствующие ему суммы s и S будут постоянными числами, в то время как σ останется переменной величиной ввиду произвольности выбора точек ξ_i. Но легко видеть, что за счет выбора точек ξ_i можно сделать $f(\xi_i)$ сколь угодно близкими как к m_i, так и к M_i, а значит, и сумму σ можно сделать сколь угодно близкой к s или S. А тогда предыдущие неравенства приводят к следующему общему замечанию: при данном разбиении промежутка $[a;b]$ суммы Дарбу s и S служат, соответственно, точной нижней и точной верхней границами для всех интегральных сумм, соответствующих этому разбиению.

С помощью сумм Дарбу мы выясним условия, при которых римановы суммы имеют конечный предел, т.е. условия существования определенного интеграла. Для этого потребуется доказать некоторые свойства сумм Дарбу.

Свойства сумм Дарбу.

Свойство 1. Если к имеющимся точками разбиения отрезка $[a;\, b]$ добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу может от этого только возрасти, а верхняя – только уменьшиться.

Доказательство: для доказательства этого свойства достаточно ограничиться присоединением к уже имеющимся точкам разбиения отрезка еще одной точки x'.

Пусть эта точка попадает между точками x_k и x_{k+1}, так что $x_k < x' < x_{k+1}$. Если через S' обозначить новую верхнюю сумму, то от прежней верхней суммы S она будет отличаться только тем, что в сумме S промежутку $[x_k;\, x_{k+1}]$ отвечало слагаемое $M_k(x_{k+1} - x_k)$, а в новой сумме S' этому промежутку соответствует уже сумма двух слагаемых: $\overline{M}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x')$, где $\overline{M}_k$ и $\overline{\overline{M}}_k$ – это точные верхние границы значений функции $f(x)$ соответственно в промежутках $[x_k;\, x']$ и $[x';\, x_{k+1}]$. Так как эти промежутки являются частями промежутка $[x_k;\, x_{k+1}]$, ясно, что $\overline{M}_k \le M_k$, $\overline{\overline{M}}_k \le M_k$, так что $\overline{M}_k \cdot (x' - x_k) \le M_k \cdot (x' - x_k)$, $\overline{\overline{M}}_k \cdot (x_{k+1} - x'_k) \le M_k \cdot (x_{k+1} - x')$.

Складывая эти неравенства почленно, получим: $\overline{M}_k \cdot (x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k \cdot (x_{k+1} - x') \le M_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$.

Отсюда и следует, что $S' \le S$. Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы отвечающей и другому разбиению промежутка.

Доказательство: разобьем промежуток $[a;\, b]$ произвольным образом на части и составим для этого разбиения суммы Дарбу s_1 и S_1.

Рассмотрим теперь некоторое другое, никак не связанное с первым, разбиение промежутка $[a; b]$. Ему также будут соответствовать его суммы Дарбу, s_2 и S_2.

Требуется доказать, что $s_1 \le S_2$. Для доказательства объединим точки деления обоих разбиений и получим новое, третье разбиение, которому будут соответствовать свои суммы Дарбу, s_3 и S_3. Это разбиение мы получим из первого, добавив к имеющимся точкам деления новые точки. На основании доказанного нами первого свойства сумм Дарбу, справедливо неравенство $s_1 \le s_3$.

Сопоставим теперь второе и третье разбиения, таким же образом заключим, что $S_3 \le S_2$. Но $s_3 \le S_3$, поэтому из полученных неравенств следует неравенство $s_1 \le S_2$, что и требовалось доказать.

Из доказанных свойств сумм Дарбу следует, что все множество нижних сумм Дарбу $\{s\}$ будет ограничено сверху, например, любой верхней суммой S. Ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу. То есть существует $\sup\{s\} = I_*$, причем $I_* \le S$ какова бы ни была верхняя сумма S.

Тогда все множество верхних сумм $\{S\}$ будет ограниченным снизу числом I_*. Ограниченное снизу множество обязательно имеет точную нижнюю границу, то есть существует число $I^* = \inf\{S\}$. Очевидно, что $I_* \le I^*$. Сопоставляя все сказанное, получим:

$$s \le I_* \le I^* \le S. \tag{1}$$

Теперь, с помощью сумм Дарбу, мы легко сформулируем условие существования определенного интеграла:

Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} (s - S) = 0. \tag{2}$$

Перепишем условие (2) на языке $(\varepsilon - \delta)$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \Delta x_i < \delta \Rightarrow S - s < \varepsilon$.

Доказательство:

1 Необходимость. Пусть существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sigma_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \Delta x_i < \delta \Rightarrow |\sigma_n - I| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < \sigma_n - I < \varepsilon$. Эти неравенства будут выполняться, как бы мы ни выбирали ξ_i в пределах соответствующих промежутков.

Но нижняя и верхняя суммы Дарбу при данном разбиении промежутка являются для множества интегральных сумм соответственно точной нижней и точной верхней границами. Поэтому для них при любом разбиении будут выполняться неравенства: $I-\varepsilon \le s_n \le \sigma_n \le S_n \le I+\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} s_n = I$ и $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} S_n = I$. Отсюда следует выполнение условия (2).

2 Достаточность: предположим, что условие (2) выполняется, и $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} \left(S_n - s_n\right)=0$. Тогда из условия (1) $s \le I_* \le I^* \le S$ сразу следует, что $I_* = I^*$, и, если обозначить их общее значение буквой I, то неравенство (1) примет вид: $s \le I \le S$. (1′).

Пусть s и S - нижняя и верхняя суммы, соответствующие какому – либо разбиению, а σ – одна из интегральных сумм, отвечающих тому же разбиению промежутка. Тогда $s \le \sigma \le S$.

Согласно условию (2), если предположить все Δx_i достаточно малыми, суммы s и S отличаются меньше, чем на произвольно взятое $\varepsilon > 0$. Но в таком случае это справедливо и относительно заключенных между s и S чисел σ и I: $\left|\sigma - I\right| < \varepsilon$, значит, I является пределом для σ, т.е. определенным интегралом.

Если обозначить колебание значений функции в каждом i-ом частичном промежутке $M_i - m_i = w_i$, то получим: $S - s = \sum\limits_{i=0}^{n}\left(M_i - m_i\right)\cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=0}^{n} w_i \cdot \Delta x_i$. Тогда условие существования определенного интеграла будет переписано так:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot \Delta x_i = 0 . \qquad (3)$$

Перечислим классы интегрируемых функций.

1. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a;b]$, то она интегрируема.

2. Если ограниченная функция $f(x)$ в промежутке $[a;b]$ имеет только конечное число разрывов первого рода, то она интегрируема.

3. Монотонная ограниченная функция всегда интегрируема.

3.2 Определенный интеграл как функция верхнего предела

Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a;b]$, то она будет интегрируема и в промежутке $[a;x]$, где x - любые значения из $[a;b]$. Заменив предел интегрирования b определенного интеграла переменной x, получим выражение

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, \tag{1}$$

которое, очевидно, является функцией от x.

Здесь мы обозначили переменную интегрирования буквой t, чтобы не путать ее с верхним пределом x, который для функции $\Phi(x)$ будет играть роль независимой переменной.

Рассмотрим свойства функции $\Phi(x)$:

Свойство 1. Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a;b]$, то функция $\Phi(x)$ будет непрерывной функцией от x в этом промежутке.

Доказательство: придадим x произвольное приращение $\Delta x = h$ с тем, чтобы $x+h$ не выходило за пределы промежутка $[a;b]$. Получим новое значение функции $\Phi(x)$: $\Phi(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt$. Значит, $\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$.

К этому интегралу применим теорему о среднем значении: $\Phi(x+h)-\Phi(x)=\mu\cdot h$, μ содержится между нижней и верхней границами значений функций $f(x)$ в промежутке $[x;x+h]$, m' и M', а следовательно, и между границами ее значений m и M на всем промежутке $[a;b]$. Эти границы существуют, так как интегрируемая функция на отрезке ограничена.

Если теперь устремить h к нулю, то, очевидно, $\Phi(x+h)-\Phi(x)\to 0$ или $\Phi(x+h)\to\Phi(x)$, что и доказывает непрерывность функции $\Phi(x)$.

Свойство 2. Если функция $f(t)$ непрерывна в точке $t=x$, то в этой точке функция $\Phi(x)$ имеет производную, равную $\Phi'(x)=f(x)$.

Это важное предложение для функции, непрерывной во всем промежутке, впервые строго доказал О.Л. Коши в 1823 г.

Доказательство: так как $\Phi(x+h)-\Phi(x)=\mu\cdot h$ (теорема о среднем), то $\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\mu$, где $m'\le\mu\le M'$.

Но функция $f(t)$ непрерывна при $t=x$. Это значит, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, такое что при $|h|<\delta$ и $\forall t\in[x,x+t]$ будет выполняться неравенство $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$. Это неравенство можно переписать так: $f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon$.

Но в таком случае будут иметь место и неравенства $f(x)-\varepsilon\le\mu\le f(x)+\varepsilon$ или $|\mu-f(x)|\le\varepsilon$.

Теперь ясно, что $\Phi'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\mu=f(x)$, что и требовалось доказать.

К чему мы пришли?

Если предположить, что функция $f(x)$ непрерывна во всем промежутке $[a;b]$, то она интегрируема на этом промежутке и доказанное утверждение применимо к любой точке промежутка $[a;b]$.

Производная от интеграла (1) по переменному верхнему пределу x везде равна значению $f(x)$ подынтегральной функции на этом пределе.

Иными словами, для непрерывной в промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$ всегда существует первообразная. Примером ее является определенный интеграл (1) с переменным верхним пределом.

Доказанные утверждения легко распространяются на случай интеграла с переменным нижним пределом, так как $\int\limits_x^b f(t)dt=-\int\limits_b^x f(t)dt$.

Производная от этого интеграла по x, очевидно, равна $-f(x)$, если x – точка непрерывности функции.

3.3 Примеры решения задач

Задача 1. Не вычисляя интегралов, определить их знак:

а) $\int\limits_{-2}^{1} x^3 dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} xe^x dx$;

в) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx$.

Решение: а) Разобьем отрезок интегрирования $[-2;1]$ на отрезки $[-2;-1]$ и $[-1;1]$. На отрезке $[-1;1]$ интеграл $\int\limits_{-1}^{1} x^3 dx = 0$ так как подынтегральная функция $y = x^3$ нечетная, а на отрезке $[-2;-1]$ подынтегральная функция $y = x^3$ принимает отрицательные значения, следовательно и интеграл имеет знак минус.

б) Поскольку подынтегральная функция $y = xe^x$ на $[-1;1]$ положительна, то и интеграл имеет знак плюс.

в) Так как на отрезке $\left[\frac{1}{2};1\right]$ функция $y = \ln x$ принимает отрицательные значения, следовательно и интеграл имеет знак минус.

Ответ: а) $\int\limits_{-2}^{1} x^3 dx < 0$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} xe^x dx > 0$;

в) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx < 0$.

Задача 2. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{1+x^3} dx$ или $\int\limits_{0}^{1} x dx$;

б) $\int_0^1 x^2\cos^2 x dx$ или $\int_0^1 x\sin^2 x dx$.

Решение: а) на отрезке $[0;\,1]$ для функций $y=\sqrt[3]{1+x^3}$ и $y=x$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{1+x^3}>x$, тогда $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^3}dx>\int_0^1 xdx$.

б) На отрезке $[0;\,1]$ для функций $y=x^2\cos^2 x$ и $y=x\sin^2 x$ выполняется неравенство $x^2\cos^2 x<x\sin^2 x$, тогда $\int_0^1 x^2\cos^2 x dx<\int_0^1 x\sin^2 x dx$.

Ответ: а) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^3}dx>\int_0^1 xdx$;

б) $\int_0^1 x^2\cos^2 x dx<\int_0^1 x\sin^2 x dx$.

Задача 3. Оценить интеграл $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{3+2\cos x}}$.

Решение: на отрезке $[0;\,2\pi]$ функция $y=\frac{1}{\sqrt{3+2\cos x}}$ принимает наименьшее значение $m=\frac{1}{\sqrt{5}}$ и наибольшее $M=1$. Так как $b-a=2\pi$, то получаем что интеграл $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\le\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{3+2\cos x}}\le 2\pi$.

Ответ: $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\le\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{3+2\cos x}}\le 2\pi$.

Задача 4. Найти средние значения функций на заданных промежутках:

а) $f(x)=x^2, 0\le x\le 1$;

б) $f(x)=\cos^3 x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

Решение: а) $f(x)=x^2$, $0\le x\le 1$. Вычислим значение $b-a=1$. Тогда среднее значение функции $f(x)=x^2$ на отрезке $[0;1]$ находим по формуле

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}\left(1^3-0^3\right)=\frac{1}{3}.$$

б) $f(x)=\cos^3 x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$. Вычислим значение $b-a=\frac{\pi}{2}$. Тогда среднее значение функции $f(x)=\cos^3 x$ на отрезке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ находим по формуле:

$$f(c)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\cos xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left.\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3\pi}.$$

Ответ: а) $f(c)=\frac{1}{3}$;

б) $f(c)=\frac{4}{3\pi}$.

Задача 5. Для интеграла $\int_0^{\pi}\sin xdx$ найти верхние и нижние интегральные суммы, соответствующие разбиению отрезка $[0;\pi]$ на 3 и на 6 равных частей.

Решение: разобьем отрезок $[0;\pi]$ на 3 равные части точками

$$x_0=0,\ x_1=\frac{\pi}{3},\ x_2=\frac{2\pi}{3},\ x_3=\pi.$$

На отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$ функция $\sin x$ монотонно возрастает и поэтому наименьшее значение функции для этого отрезка равно $m_0=\sin 0=0$, а наибольшее $M_0=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

На отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ наименьшее значением функции равно $m_1 = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а наибольшее $M_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

На отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ функция $y = \sin x$ монотонно убывает и поэтому $m_2 = \sin\pi = 0$, $M_2 = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как все $\Delta x_k = \frac{\pi}{3}$, то

$$s_3 = \sum_{k=0}^{2} m_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3}\left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}907,$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{2} M_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi\left(\sqrt{3}+1\right)}{3} \approx 0{,}286.$$

При разбиении отрезка $[0; \pi]$ на 6 равных частей точками

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{\pi}{3},\ x_3 = \frac{\pi}{2},\ x_4 = \frac{2\pi}{3},\ x_5 = \frac{5\pi}{6},\ x_6 = \pi$$

таким же способом находим

$m_0 = 0$

$m_1 = \sin \pi/6 = 1/2$

$m = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$

$m_3 = \sin 2\pi/3 = \sqrt{3}/2$

$m_4 = \sin 5\pi/6 = 1/2$

$m_5 = \sin\pi = 0$

$M_0 = \sin \pi/6 = 1/2$

$M_1 = \sin p/3 = \sqrt{3}/2$

$M_2 = \sin \pi/2 = 1$

$M_3 = \sin \pi/2 = 1$

$M_4 = \sin 2\pi/3 = \sqrt{3}/2$

$M_5 = \sin 5\pi/6 = 1/2$

Для этого разбиения получаем, что нижняя интегральная сумма равна $s_6 = \frac{\pi}{6}(m_0 + m_1 + \ldots + m_5) = \frac{\pi}{6}\left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 1{,}43$, а верхняя – $S_6 = \frac{\pi}{6}(M_0 + M_1 + \ldots + M_5) = \frac{\pi}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right) \approx 2{,}48$.

Следовательно $s_3 \le s_6 \le \int\limits_0^{\pi} \sin x dx \le S_6 \le S_3$.

Ответ: $s_3 \approx 0{,}907$, $S_3 \approx 0{,}286$, $s_6 \approx 1{,}43$, $S_6 \approx 2{,}48$.

Задача 6. Оценить абсолютную величину интеграла $\int\limits_{10}^{19} \frac{\sin x}{1 + x^8} dx$.

Решение: известно, что $|\sin x| \le 1$, следовательно при значениях $x \ge 10$ выполняется неравенство $\left|\frac{\sin x}{1 + x^8}\right| < 10^{-8}$.

Тогда $\int\limits_{10}^{19} \frac{\sin x}{1 + x^8} dx < (19 - 10) \cdot 10^{-8} < 10^{-7}$.

Ответ: $\int\limits_{10}^{19} \frac{\sin x}{1 + x^8} dx < (19 - 10) \cdot 10^{-8} < 10^{-7}$.

Задача 7. Найти производную по x от функций:

а) $F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t dt \ (x > 0)$;

б) $F(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right) dt \ (x > 0)$.

Решение: а) $F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t dt \ (x > 0)$. Разобьем отрезок интегрирования $x^2 \le t \le x^3$ произвольной точкой c, где $c > 0$ и запишем заданный интеграл следующим образом: $F(x) = \int\limits_{x^2}^{c} \ln t dt + \int\limits_{c}^{x^3} \ln t dt = \int\limits_{c}^{x^3} \ln t dt - \int\limits_{c}^{x^2} \ln t dt$.

Найдем производную $F'(x)$, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции и теоремой о производной интеграла по верхнему пределу:

$$F'_x(x)=\left[\int_c^{x^3}\ln t dt\right]'_{x^3}\cdot\left(x^3\right)'_x-\left[\int_c^{x^2}\ln t dt\right]'_{x^2}\cdot\left(x^2\right)'_x=\ln x^3 3x^2-\ln x^2 2x=\left(9x^2-4x\right)\ln x.$$

б) $F(x)=\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}}\cos\left(t^2\right)dt\ (x>0).$

$$F(x)=\int_{1/x}^{\sqrt{x}}\cos\left(t^2\right)dt=\int_{1/x}^{c}\cos\left(t^2\right)dt+\int_c^{\sqrt{x}}\cos\left(t^2\right)dt=-\int_c^{1/x}\cos\left(t^2\right)dt+\int_c^{\sqrt{x}}\cos\left(t^2\right)dt;$$

$$F'(x)=-\left[\int_c^{1/x}\cos\left(t^2\right)dt\right]'_{1/x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x+\left[\int_c^{\sqrt{x}}\cos\left(t^2\right)dt\right]'_{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'_x=$$

$$=-\cos\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\cos x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x.$$

Ответ: а) $F'_x(x)=\left(9x^2-4x\right)\ln x$;

б) $F'(x)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x$.

3.4 Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение верхней и нижней сумм Дарбу.

2. Сформулируйте и докажите свойства сумм Дарбу.

3. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условия интегрируемости функций.

4. Перечислите классы интегрируемых функций.

5. Введите понятие определенного интеграла как функции верхнего предела.

3.5 Задачи для самостоятельного решения

1. Не вычисляя интегралов, определить, какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos x\, dx$.

2. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}dx$ или $\int\limits_{0}^{1} x\, dx$;

б) $\int\limits_{0}^{1} x^2 \sin^2 xdx$ или $\int\limits_{0}^{1} x\sin^2 xdx$;

в) $\int\limits_{1}^{2} e^{x^2}dx$ или $\int\limits_{1}^{2} e^{x}dx$.

3. Оценить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4+x^2}dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^2}$;

в) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

4. Найти среднее значение функций на указанных промежутках:

а) $f(x)=a+b\cos x,\ -\pi \le x \le \pi$;

б) $f(x)=\sin^2 x,\ 0 \le x \le \pi$;

в) $f(x)=\sin^4 x,\ 0 \le x \le \pi$.

5. Для интеграла $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$ найти верхние и нижние интегральные суммы, соответствующие разбиению отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ на 3 и на 6 равных частей.

6. Найти производную по x от функций:

а) $F(x)=\int\limits_0^x \frac{e^t}{t^2}dt$;

б) $F(x)=\int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} \cos\sqrt{t}\, dt$.

4 Применение определенного интеграла

Схема применения определенного интеграла к вычислению различных величин. Геометрические приложения определенного интеграла: объемы тел вращения и площади их боковых поверхностей. Площади плоских фигур и длины дуг различных кривых в декартовых и полярных системах координат.

4.1 Общая схема, по которой проводится вычисление любой величины с помощью определенного интеграла

1. Пусть требуется найти некоторую величину U.

Будем считать всякую часть этой величины значением функции $U(x)$, где x – один из параметров величины U, который изменяется в известном из условия задачи промежутке: $a \le x \le b$.

2. Находим дифференциал dU функции $U(x)$. Он представляет собой главную часть приращения этой функции ΔU при изменении x на малую величину Δx (или dx).

Главная часть ΔU – это приближенное значение приращения функции, т.е. $\Delta U \approx dU = U'(x)dx = f(x)dx$.

Функция $f(x)$ должна быть известна из условия задачи или найдена с использованием этого условия.

При этом возможны различные допущения.

3. Убедившись, что дифференциал dU найден, верно, т.е. что при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta U}{dU} \to 1$, найдем величину U, проинтегрировав dU в пределах от $x = a$ до $x = b$: $U = \int_a^b f(x)dx$.

Далее рассмотрим применение этой схемы в конкретных случаях.

4.2 Площадь плоской фигуры в прямоугольной системе координат

Построим в прямоугольной системе координат некоторую плоскую фигуру, ограниченную какими-либо кривыми (см. рисунок 5).

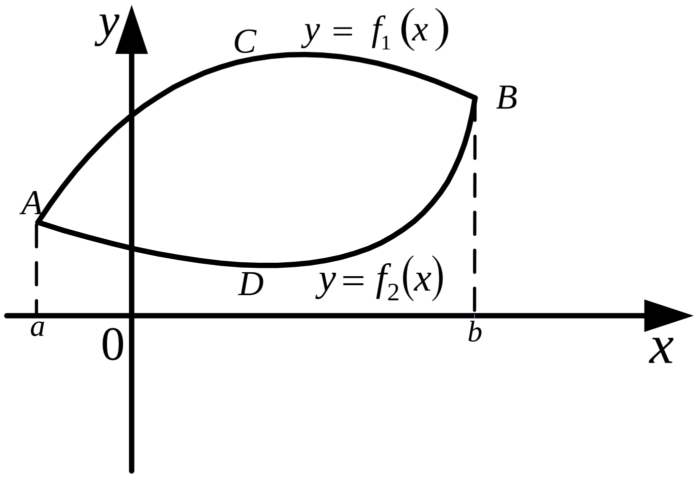

Рисунок 5

Площадь такой фигуры может рассматриваться как алгебраическая сумма площадей криволинейных трапеций, прилежащих к оси Ox или к оси Oy. Рассмотрим, например, фигуру, изображенную на рисунке 11. Её площадь, можно найти как разность площадей криволинейных трапеций *aACBв* и *aADBb*:

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$

С помощью изложенной выше схемы ещё раз покажем, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f_1(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, а снизу – осью Ox, равна определенному интегралу от функции $y = f_1(x)$ по отрезку $[a; b]$ (см. рисунок 6).

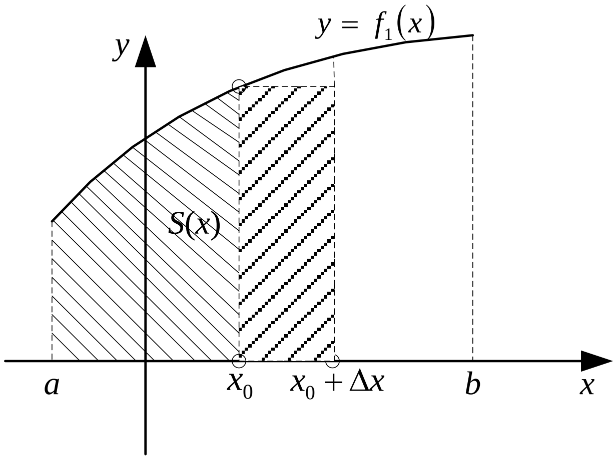

Рисунок 6

Площадь всякой части этой трапеции, отсекаемой прямой $x = x_0$, будем рассматривать как значение функции $S(x_0)$. Дифференциалом этой функции будем считать площадь прямоугольника со сторонами $y = f(x)$ и $\Delta x = dx$: $dS = f(x)dx$. Тогда

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Предположим теперь, что функция $y(x)$ задана параметрически:

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$. В этом случае $dx = \varphi'(x)dt$, $dS = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$,

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt. \tag{2}$$

Таким образом, формула (1) для отыскания площади криволинейной трапеции, в случае, когда функция, график которой ограничивает эту фигуру сверху, принимает вид (2).

4.3 Площадь плоской фигуры в полярной системе координат

Полярными координатами точки M на плоскости являются, как известно, полярный радиус этой точки ρ и полярный угол φ, отсчитываемый от полярной оси к отрезку OM (см. рисунок 7).

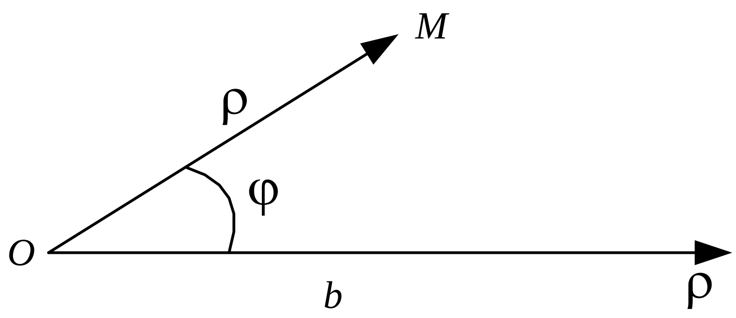

Рисунок 7

Прямоугольные и полярные координаты при соответствующем выборе координатных систем, если совместить начало декартовой системы координат с полюсом полярной системы, окажутся, связаны следующими формулами:

а) $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ – переход от декартовых координат к полярным.

б) $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$ – переход от полярных координат к декартовым.

Уравнение вида $F(\rho;\varphi)$=0 или $\rho = \rho(\varphi)$ задает линию на плоскости в полярной системе координат. Пусть нужно найти площадь фигуры, ограниченной двумя линиями, заданными в полярной системе координат.

Такую площадь можно представить в виде алгебраической суммы площадей криволинейных секторов (см. рисунок 8) $пл.\,S = пл.\,сект.OACB - пл.\,сект.OADB$.

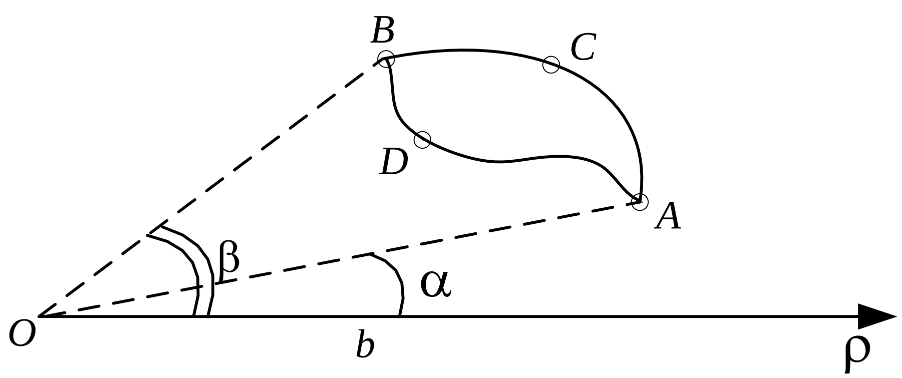

Рисунок 8

Рассмотрим криволинейный сектор в полярной системе координат (см. рисунок 9) и найдем его площадь.

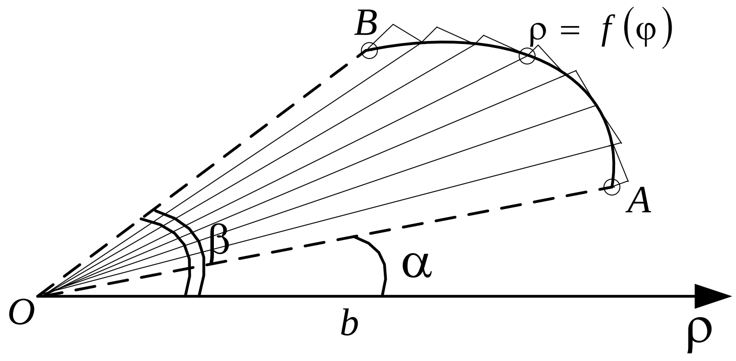

Рисунок 9

Пусть AB – дуга кривой, заданной уравнением $\rho = f(\varphi)$, $f(\varphi)$ – функция, непрерывная при $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Пусть сектор ограничен кривой $\rho = f(\varphi)$ и радиусами – векторами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. Разобьем площадь этого сектора радиусами – векторами $\varphi_0 = \alpha, \varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, \ldots, \varphi_n = \beta$ на n частей. Пусть $\bar{\rho}_i$ – это длина радиуса – вектора, соответствующего какому – либо углу $\bar{\varphi}_i$, заключенному между φ_{i-1} и φ_i. Теперь рассмотрим круговой сектор с радиусом $\bar{\rho}_i$ и центральным углом $\Delta\varphi_i$. Его площадь будет равна $\Delta Q_i = \frac{1}{2}\bar{\rho}_i^2 \Delta\varphi_i$.

Сумма $Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\bar{\rho}_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\bar{\varphi}_i\right)\right]^2 \Delta\varphi_i$ даст площадь ступенчатой фигуры, составленной из маленьких круговых секторов. Эта сумма станет интегральной суммой для функции $\rho^2 = \left[f(\varphi)\right]^2$ на промежутке $\alpha \le \varphi \le \beta$. Если теперь $\max\Delta\varphi_i \to 0$, то $\lim\limits_{\substack{\max\Delta\varphi_i \to 0 \\ n\to\infty}} Q_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\bar{\varphi}_i\right)\right]^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\rho = Q$ и это площадь криволинейного сектора OAB.

4.4 Объемы тел вращения

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$ (см. рисунок 10).

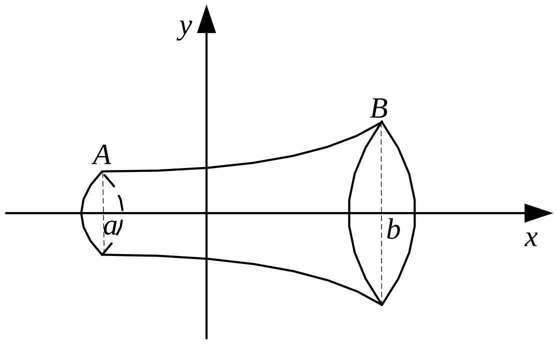

Рисунок 10

Криволинейную трапецию $aABb$, ограниченную графиком функции, прямыми $x = a$ и $x = b$ будем вращать вокруг оси Ox. Как, пользуясь описанной выше схемой, при помощи определенного интеграла найти объём получившегося тела вращения?

Объём тела вращения рассматриваем как функцию от x. Любое плоское сечение этого тела, соответствующее абсциссе x, будет кругом, радиус которого равен соответствующей ординате $y = f(x)$.

Площадь такого сечения – это площадь круга. $S = \pi y^2$. Придадим значению x – приращение $\Delta x = dx$. Тогда функция $V(x)$, задающая объем тела вращения, также получит приращение. Главной частью этого приращения, т.е. дифференциалом функции $V(x)$, будем считать объем маленького цилиндра, основанием которого будет круг радиуса $y = f(x)$, а высотой – отрезок, равный dx (приращению ординаты x): $dv = \pi y^2 dx$. Весь же объём тела вращения тогда определяется формулой $V = \pi \int_a^b y^2 dx$.

Пример 1. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2px$ и $x = a$, вокруг оси Ox.

Решение: тело, объём которого требуется найти – это параболоид вращения (см. рисунок 11).

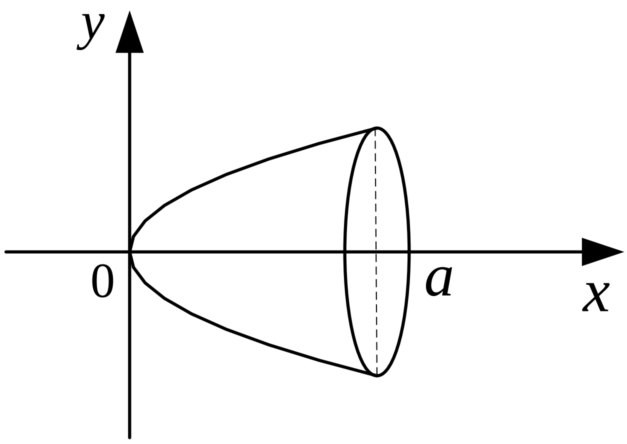

Рисунок 11

Применив только что выведенную формулу, получим:

$$V = \pi\int_0^a 2pxdx = \pi px\Big|_0^a = \pi pa^2.$$

Ответ: $V = \pi pa^2$.

4.5 Длина дуги плоской кривой в прямоугольных координатах

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Найти длину соответствующего отрезка графика функции. Пусть l – искомая величина, т.е. длина отрезка кривой. Эта кривая изображена на рисунке 12.

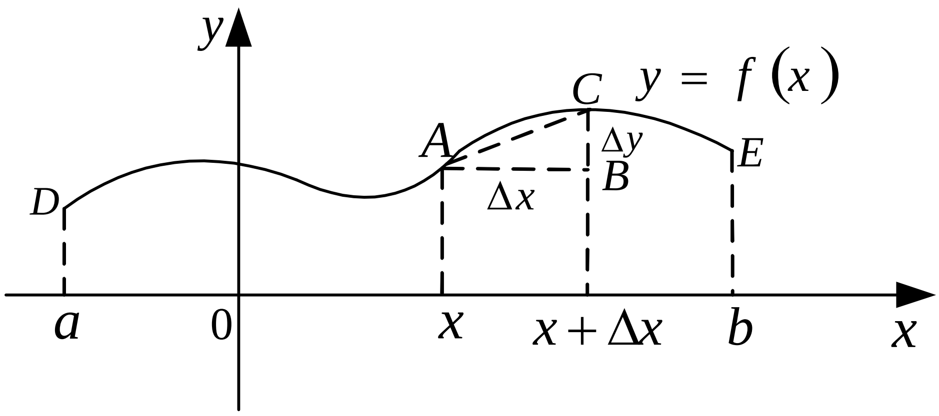

Рисунок 12

Применяя рассмотренную ранее схему, будем рассматривать длину дуги кривой как функцию независимой переменной x. Найдем дифференциал dl этой функции, соответствующий приращению $\Delta x = dx$. Будем считать, что он равен длине отрезка AC: $AB = \Delta x = dx$, $BC = \Delta y \approx dy$, $AC = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \Delta l \approx dl$.

Итак, дифференциал длины дуги отыщется следующим образом: $dl \approx \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$.

Значит, длину всего отрезка дуги DE можно выразить интегралом: $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$.

Если кривая задана параметрически: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то дифференциал длины дуги отыскивается так: $dl = \sqrt{(x'dt)^2 + (y'dt)^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$.

Формула для отыскания длины дуги принимает вид: $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$.

4.6 Длина дуги плоской кривой в полярной системе координат

Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой $\rho = f(x)$, где ρ – полярный радиус, а φ – полярный угол.

Запишем формулы перехода от полярных координат к декартовым: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$. Эти уравнения можно рассматривать как параметрические, где параметром будет переменная φ. Применим тогда уже известную формулу.

$\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi)\cdot\cos\varphi - f(\varphi)\cdot\sin\varphi$, $\frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\cdot\sin\varphi + f(\varphi)\cdot\cos\varphi$,

$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = [f'(\varphi)]^2\cdot\cos^2\varphi - 2f'(\varphi)\cdot\cos\varphi\cdot f(\varphi)\cdot\sin\varphi + f^2(\varphi)\cdot\sin^2\varphi +$

$$+[f'(\varphi)]^2\cdot\sin^2\varphi+2f'(\varphi)\cdot\cos\varphi\cdot f(\varphi)\cdot\sin\varphi+f^2(\varphi)\cdot\cos^2\varphi=$$

$$+[f'(\varphi)]^2\cdot(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+f^2(\varphi)\cdot(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=[f'(\varphi)]^2+[f(\varphi)]^2=$$

$=(\rho')^2+(\rho)^2$; следовательно, $l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{(\rho')^2+(\rho)^2}\,d\varphi$.

4.7 Площадь поверхности вращения

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию *aABb.* Требуется найти площадь поверхности тела вращения, которое получится, если вращать эту криволинейную трапецию вокруг оси *Ox* (см. рисунок 13).

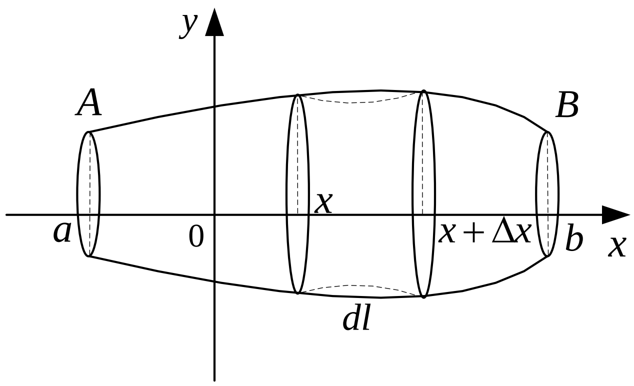

Рисунок 13

Искомую площадь будем рассматривать как функцию $S(x)$ независимой переменной. Дифференциалом этой функции, соответствующим приращению независимой переменной $\Delta x=dx$, будем считать площадь боковой поверхности усеченного кругового конуса с образующей dl и радиусами оснований y и $y+dy$.

$dS=\dfrac{2\pi y+2\pi(y+dy)}{2}\cdot dl=\dfrac{2\pi(2y+dy)}{2}\cdot dl\approx 2\pi y\cdot dl,$ где $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

Значит, $S=\int\limits_a^b dS=2\pi\int\limits_a^b y\,dl=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

Если кривая задана параметрически, то $S=2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

Пример 2. Определить площадь боковой поверхности параболоида, образованного вращением вокруг оси *Ox* дуги параболы $y^2 = 2px$, соответствующей изменению x от $x = 0$ до $x = a$.

Решение: $y = \sqrt{2px}$, $y' = \dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$, $\sqrt{(y')^2 + 1} = \sqrt{1 + \dfrac{2p}{4x}} = \sqrt{\dfrac{2x+p}{2x}}$.

$$S = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x+p}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}\right].$$

Ответ: $S = \dfrac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}\right]$.

4.8 Примеры решения задач

I. Вычисление площадей плоских фигур

Задача 1. Вычислить площади фигуры, ограниченной прямыми $x + 2y - 4 = 0,\ y = 0,\ x = -3$ и $x = 2$.

Решение: построим на плоскости *xOy* прямую $x + 2y - 4 = 0$ по двум точкам $A(4; 0)$ и $B(0; 2)$. Выразим y через x и получим $y = -0{,}5x + 2$. А также прямые $y = 0, x = -3$ и $x = 2$. Получим фигуру M_1MNN_1 (рисунок 14) и вычислим ее площадь по формуле (1) $S = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x) = -0{,}5x + 2$, $a = -3, b = 2$.

Находим $S = \int_{-3}^{2}(-0{,}5x + 2)dx = \left(-\dfrac{x^2}{4} + 2x\right)\Bigg|_{-3}^{2} = -\dfrac{1}{4}\left(2^2 - (-3)^2\right) + 2\left(2 - (-3)\right) = 11{,}25$ (кв. ед.).

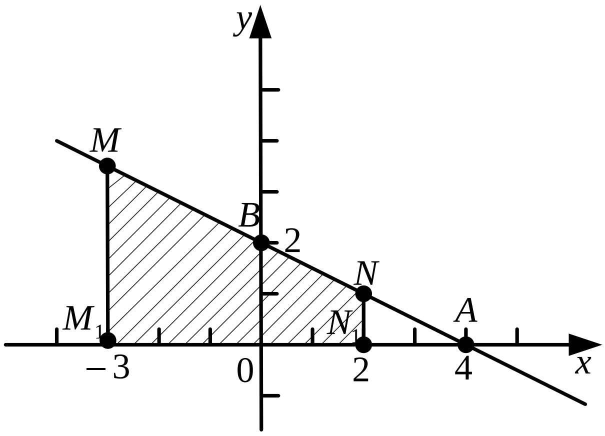

Рисунок 14

Ответ: $S = 11{,}25$ (кв. ед.)

Задача 2. Вычислить площади фигуры, ограниченной прямыми $x - 2y + 4 = 0$, $x + y - 5 = 0$ и $y = 0$.

Решение: для построения фигуры (см. рисунок 15) найдем точки пересечения заданных прямых:

а) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow M(2; 3);$

б) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-4; 0);$

в) $\begin{cases} y = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5; 0).$

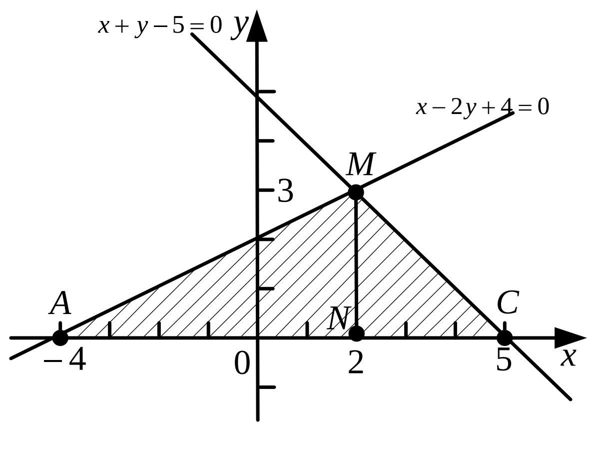

Рисунок 15

Разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC, так как при изменении x от A до N площадь ограничена прямой $x-2y+4=0$, а при изменении x от N до C – прямой $x+y-5=0$.

Для треугольника AMN имеем: $x-2y+4=0$; выразим y через x и получим $y=0{,}5x+2$, т.е. $f(x)=0{,}5x+2$, $a=-4, b=2$. Для треугольника NMC имеем: $x+y-5=0$; выразим y через x и получим $y=-x+5$, т.е. $f(x)=-x+5$, $a=2, b=5$.

Вычислим площадь каждого из треугольников

$$S_{\Delta AMN}=\int_{-4}^{2}(0{,}5x+2)dx=\left(\frac{1}{4}x^2+2x\right)\Bigg|_{-4}^{2}=\frac{1}{4}\left(2^2-(-4)^2\right)+2\left(2-(-2)\right)=9 \text{ (кв.ед.)},$$

$$S_{\Delta NMC}=\int_{2}^{5}(-x+5)dx=\left(-\frac{1}{2}x^2+5x\right)\Bigg|_{2}^{5}=-\frac{1}{2}\left(5^2-2^2\right)+5(5-2)=4{,}5 \text{ (кв.ед.)}.$$

Сложим полученные результаты и получим площадь фигуры

$$S=S_{\Delta AMN}+S_{\Delta NMC}=9+4{,}5=13{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $S=13{,}5$ (кв. ед.)

Задача 3. Вычислить площади фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+4$ и осью Ox $(y=0)$.

Решение: построим фигуру ограниченную заданными линиями (см. рисунок 16).

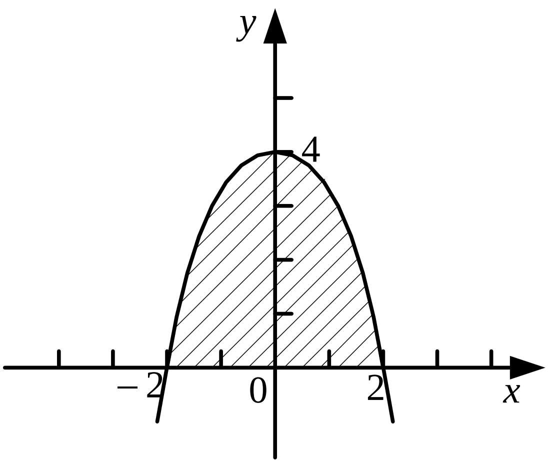

Рисунок 16

Найдем точки пересечения параболы с осью Ox: полагая что $y=0$, получаем $-x^2+4=0$ и тогда $x=\pm 2$. Так как данная фигура симметрична относительно оси Oy, вычислим площадь фигуры, расположенной справа от оси Oy и полученный результат удвоим: $S_1=\int_0^2\left(-x^2+4\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_0^2=-\frac{1}{3}\left(2^3-0^3\right)+4(2-0)=5\frac{1}{3}$ (кв. ед.), $S=2S_1=2\cdot 5\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}$ (кв. ед).

Ответ: $S=10\frac{2}{3}$ (кв. ед.).

Задача 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=2x$.

Решение: изобразим фигуру, площадь которой необходимо найти (см. рисунок 17).

Определим точки пересечения заданных линий, для этого решим систему $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$.

Получаем: $x^2=2x,\ x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ \begin{cases} y=0, \end{cases} \\ x=2,\ \begin{cases} y=4. \end{cases} \end{array}\right.$

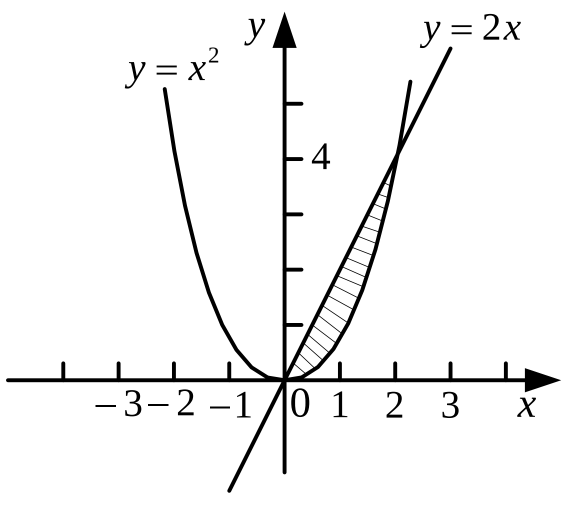

Рисунок 17

По формуле $S=\int\limits_a^b f(x)dx$ находим площадь фигуры:

$$S=\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\left(2^2-0\right)-\frac{1}{3}\left(2^3-0\right)=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\text{ кв.ед.}$$

Ответ: $S=\dfrac{4}{3}$ (кв. ед.).

Задача 5. Вычислить площади фигуры, ограниченной параболами $7x^2-9y+9=0$ и $5x^2-9y+27=0$.

Решение: запишем уравнения парабол в виде $y=\dfrac{7}{9}x^2+1$ и $y=\dfrac{5}{9}x^2+3$ и построим эти кривые на плоскости xOy (рисунок 18).

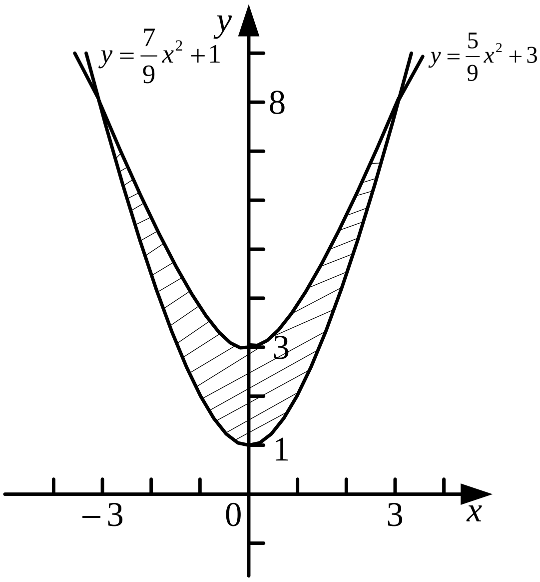

Рисунок 18

Для нахождения точек пересечения парабол решим систему $\begin{cases} y=\dfrac{7}{9}x^2+1 \\ y=\dfrac{5}{9}x^2+3 \end{cases}$, откуда получим: $x=\pm 3$.

Так как фигура симметрична относительно оси Oy, найдем половину ее площади, взяв пределы интегрирования от 0 до 3, и результат удвоим:

$$S_1=\int_0^3\left[\left(\frac{5}{9}x^2+3\right)-\left(\frac{7}{9}x^2+1\right)\right]dx=\int_0^3\left(2-\frac{2}{9}x^2\right)dx=\left(2x-\frac{2}{27}x^3\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=2(3-0)-\frac{2}{27}\left(3^3-0\right)=6-2=4 \text{ (кв. ед.)},$$

$S=2S_1=2\cdot 4=8$ (кв. ед.).

Ответ: $S=8$ (кв. ед.).

Задача 6. Вычислить площади фигуры, ограниченной параболой $x=2-y-y^2$ и осью $Oy\,(x=0)$.

Решение: найдем точки пересечения параболы $x=2-y-y^2$ и оси ординат, для этого решим систему $\begin{cases}x=2-y-y^2\\x=0\end{cases}$. Получим: $y=-2$ и $y=1$.

Построим фигуру, ограниченную заданными кривыми на плоскости xOy (см. рисунок 19).

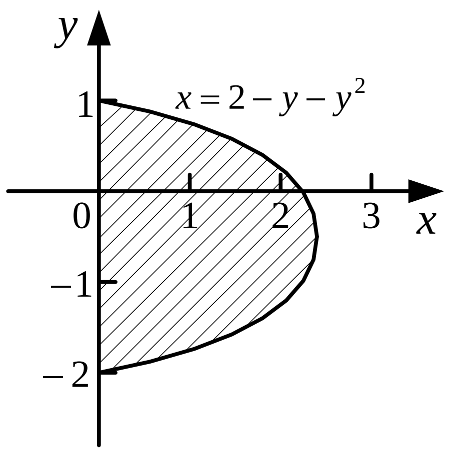

Рисунок 19

Площадь этой фигуры равна:

$$S=\int_{-2}^{1}\left(2-y-y^2\right)dy=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=2(1-(-2))-\frac{1}{2}\left(1^2-(-2)^2\right)-\frac{1}{3}\left(1^3-(-2)^3\right)=$$

$$=6+\frac{3}{2}-3=4{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $S=4{,}5$ (кв. ед.).

II Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4ax$ и прямыми $y = x - a$ и $x = a$ лежащей в первой четверти.

Решение: введем полярную систему координат, поместив полюс в фокус параболы F и направив полярную ось в положительном направлении по оси Ox. Известно, что уравнение параболы записывается в виде $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$, где p – параметр параболы, который в нашем случае равен $p = 2a$, а фокус F имеет координаты $(a; 0)$.

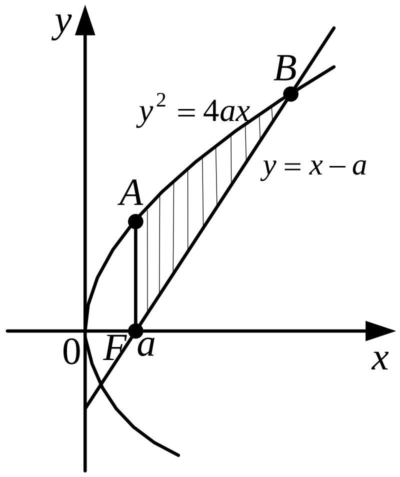

Рисунок 20

Тогда уравнение параболы примет вид $\rho = \dfrac{2a}{1-\cos\varphi}$, а уравнения прямых: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (см. рисунок 20).

Следовательно, $S_{FABF} = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2a}{1-\cos\varphi}\right)^2 d\varphi = 2a^2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{d\varphi}{4\sin^4\dfrac{\varphi}{2}} =$

$$= \left|\begin{array}{l} t = ctg\dfrac{\varphi}{2} \\ dt = -\dfrac{d\varphi}{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4},\ t_1 = ctg\dfrac{\pi}{8} \\ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2},\ t_2 = 1 \end{array}\right| = a^2\int\limits_1^{ctg\frac{\pi}{8}}\left(1+t^2\right)dt = a^2\left(t + \dfrac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{ctg\frac{\pi}{8}} =$$

$$=a^2\left(ctg\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}ctg^3\frac{\pi}{8}-1-\frac{1}{3}\right).$$

Учитывая, что $ctg\frac{\pi}{8}=\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1+\sqrt{2}$, получаем

$$S_{FABF}=a^2\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^3-\frac{4}{3}\right)=2a^2\left(1+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)\text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $S_{FABF}=2a^2\left(1+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ (кв. ед.).

Задача 2. Вычислить площади фигуры, ограниченной кривой $r=5\cos\varphi$.

Решение: графиком заданной кривой является окружность радиуса $\frac{5}{2}$, проходящая через полюс и симметричная относительно полярной оси, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ (см. рисунок 21).

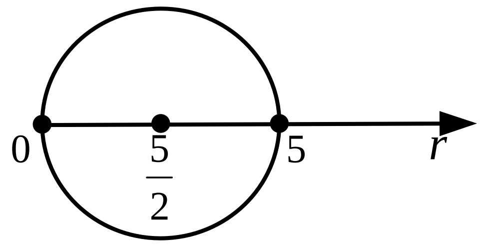

Рисунок 21

Тогда $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(5\cos\varphi)^2d\varphi=\frac{25}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{25}{4}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$

$$=\frac{25}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin(-\pi)\right)\right)=\frac{25}{4}\pi\text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $S=\frac{25}{4}\pi$ (кв. ед.).

Задача 3. Вычислить площади фигуры, ограниченной кривой $\rho=2a\cos 3\varphi$ и лежащей вне круга $\rho=a$.

Решение: так как функция $\rho = 2a\cos 3\varphi$ имеет период $T = \dfrac{2\pi}{3}$, то при изменении $-\pi \le \varphi \le \pi$ радиус – вектор описывает три равных лепестка кривой (см. рисунок 22).

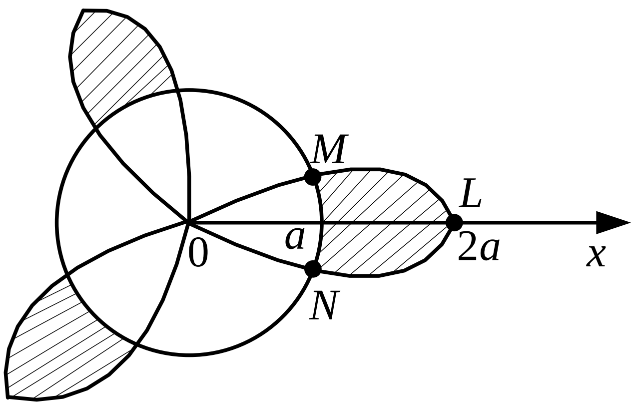

Рисунок 22

При этом для φ допустимыми являются значения для которых $\cos 3\varphi \ge 0$, тогда $-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{3} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{3}$ для всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Следовательно, для одного из лепестков $-\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$, а двух других – $\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$ соответственно. Вырежем из лепестков части принадлежащие кругу $\rho = a$, получим фигуру, площадь которой равна утроенной площади S_{MLNM}.

Найдем полярные координаты точек M и N, для этого решим уравнение $2a\cos 3\varphi = a$, $\cos 3j = \dfrac{1}{2}$, тогда точке N соответствует полярный угол $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{9}$, точке M – $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{9}$.

Из рисунка $S_{MLNM} = S_{OMLNO} - S_{OMNO} = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (2a\cos 3\varphi)^2 d\varphi - \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (a)^2 d\varphi =$

$$= a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi - \frac{1}{2} a^2 \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} = a^2\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $S_{MLNM} = a^2\left(\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ (кв. ед.).

III Вычисление объёмов тел вращения

Задача 1. Вычислить объёмы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной одной полуволновой синусоиды $y=\sin x$ и отрезком $0\le x\le \pi$ оси Ox вокруг: а) оси Ox и б) оси Oy.

Решение: а) для нахождения объёма тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox, воспользуемся формулой $V_x=\pi\int_a^b y^2dx.$

Получаем $V_x=\pi\int_0^\pi \sin^2 xdx=\pi\int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi 1dx-\int_0^\pi \cos 2xdx\right)=$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi\right)=\frac{\pi^2}{2}\text{ (куб. ед.).}$$

б) Для нахождения объёма тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Oy воспользуемся формулой $V_y=\pi\int_a^b xydx.$

$$V_y=\pi\int_a^b xydx=\pi\int_0^\pi x\sin xdx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin xdx & v=\int\sin xdx=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=\pi\left(-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi \cos xdx\right)=\pi\left(-\pi\cdot(-1)+\sin x\Big|_0^\pi\right)=\pi\text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: а) $V_x=\dfrac{\pi^2}{2}$ (куб. ед.),

б) $V_y=\pi^2$ (куб. ед.).

Задача 2. Вычислить объём тела (см. рисунок 23), полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $8x=y^2$.

Решение: очевидно, что функция $x_1(y)=\dfrac{y^2}{8}\le x_2(y)=\sqrt{y}$ на отрезке от начала координат до точки пересечения парабол. Найдем ординаты этих точек решив систему уравнений методом исключения переменной x: $\begin{cases} y=x^2, \\ y=8x.\end{cases}$

Получим $y_1 = 0,\ y_2 = 4.$ Следовательно, $V = \pi\int\limits_0^4 \left(x_2^2(y) - x_1^2(y)\right)dy =$

$$= \pi\int\limits_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64}\right)dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{320}\right)\Bigg|_0^4 = \pi\left(\frac{4^2}{2} - \frac{4^5}{320}\right) = \frac{24}{5}\pi \text{ (куб.ед.).}$$

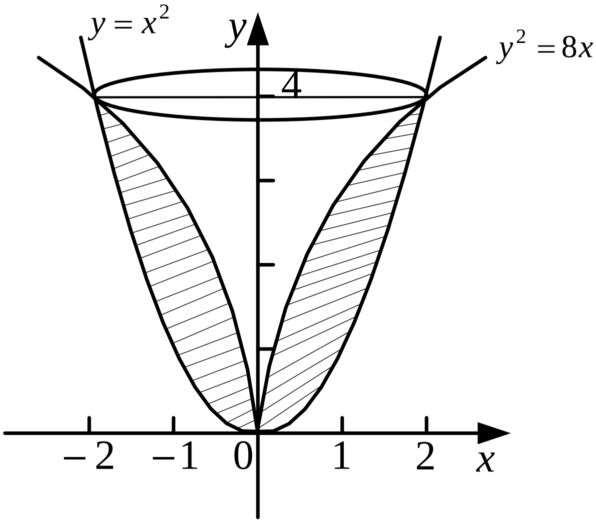

Рисунок 23

Ответ: $V = \dfrac{24}{5}\pi$ (куб.ед.).

Задача 3. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и прямыми $y = \pm 2b$.

Решение: для вычисления объёма воспользуемся формулой $V_y = \pi\int\limits_c^d x^2 dy$.

Из условия задачи пределы интегрирования будут: $c = -2b,\ d = 2b$. Определим из уравнения гиперболы x^2: $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2}, x^2 = a^2\left(1 + \dfrac{y^2}{b^2}\right)$. Подставив полученное выражение в формулу для вычисления объёма получим:

$$V_y = \pi\int\limits_c^d x^2 dy = \pi\int\limits_{-2b}^{2b} a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)dy = \pi a^2\int\limits_{-2b}^{2b}\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)dy = \pi a^2\left(y + \frac{1}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2b}^{2b} =$$

$$= \pi a^2\left(2b - (-2b) + \frac{1}{3b^2}\cdot\left((2b)^3 - (-2b)^3\right)\right) = \pi a^2\left(4b + \frac{1}{3b^2}\cdot 16b^3\right) = \pi a^2\left(4b + \frac{16}{3}b\right) =$$

$$=\frac{28}{3}\pi a^2 b \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $V=\frac{28}{3}\pi a^2 b$ (куб. ед.).

Задача 4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox арки циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

Решение: для нахождения объёма тела вращения воспользуемся формулой $V_x=\pi\int\limits_a^b y^2dx$. Тогда получим $V_x=\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(a(1-\cos t)\right)^2\cdot a(1-\cos t)\,dt=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=$

$$=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)-3\cos t-\frac{\cos 3t+3\cos t}{4}\right)dt=$$

$$=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t-\frac{15}{4}\cos t-\frac{1}{4}\cos 3t\right)dt=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t-\frac{15}{4}\sin t-\frac{1}{12}\sin 3t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\pi a^3\cdot 5\pi=5\pi^2a^3 \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $V=5\pi^2a^3$ (куб. ед.).

Задача 5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг прямой $y=-2a$ фигуры, ограниченной параболой $y^2=4ax$ и прямой $x=a$.

Решение: фигура изображена на рисунке 24.

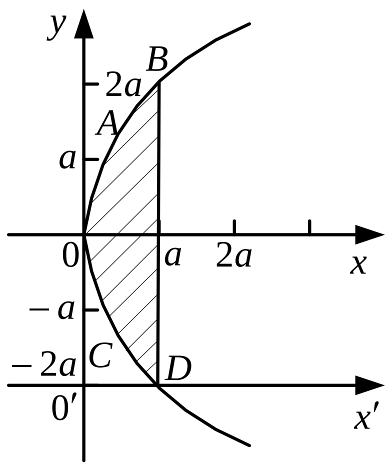

Рисунок 24

Если перенести начало координат в точку $O'(0;\,-2a)$, то в новой системе координат уравнение параболы запишется следующим образом: $(y'-2a)^2=4ax$.

Тогда $y_1=2a-\sqrt{4ax}$ для кривой OCD, а $y_2=2a+\sqrt{4ax}$ для кривой OAB.

Следовательно, искомый объём равен $V=\pi\int\limits_0^a\left(y_2^2-y_1^2\right)dx=$

$$=\pi\int\limits_0^a\left(\left(2a+\sqrt{4ax}\right)^2-\left(2a-\sqrt{4ax}\right)^2\right)dx=\pi\int\limits_0^a 16a^2\sqrt{ax}\,dx=16\pi\cdot a^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^a\sqrt{x}\,dx=\frac{32}{3}\pi a^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{32}{3}\pi a^3 \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $V=\dfrac{32}{3}\pi a^3$ (куб. ед.).

IV Вычисление длин дуг плоских кривых

Задача 1. Найти длину кривой $y=\ln(\sin x)$ между точками с абсциссами $x_1=\dfrac{\pi}{3}$ и $x_2=\dfrac{2\pi}{3}$.

Решение: Изобразим часть графика функции $y=\ln\sin x$ при $x\in(0;\,\pi)$ (рисунок 25).

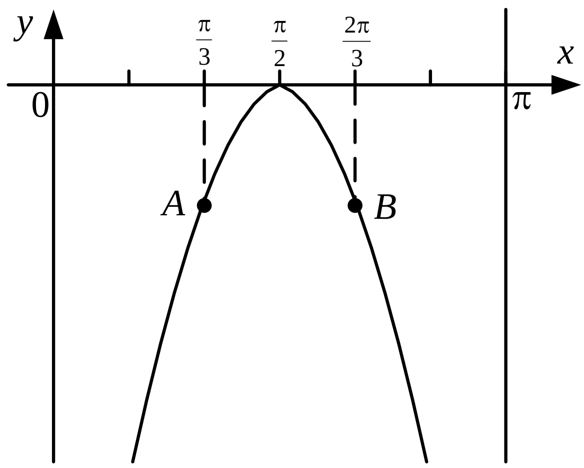

Рисунок 25

Воспользуемся формулой $l=\int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, предварительно определив $\sqrt{1+(y')^2}$: $y=\ln(\sin x), y'=(\ln(\sin x))'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}$,

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{1}{\sin x}\text{, так как } x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right].$$

Найдем длину дуги AB:

$$l=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}=\ln\left|tg\frac{\pi}{3}\right|-\ln\left|tg\frac{\pi}{6}\right|=\ln\sqrt{3}-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=2\ln\sqrt{3}\ \text{(ед.)}.$$

Ответ: $l=2\ln\sqrt{3}$ (ед.).

Задача 2. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$, заключенной между точками $(0;\,0)$ и $(4;8)$ (см. рисунок 26).

Решение: будем вычислять длину дуги по формуле $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

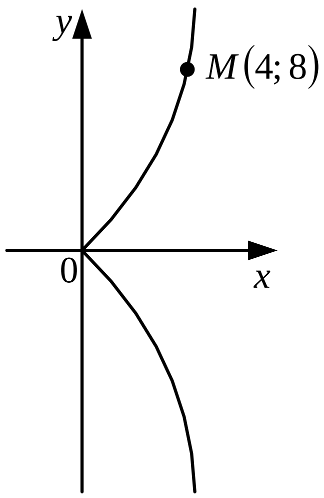

Рисунок 26

Функция $y = y(x)$ определена для всех $x \ge 0$. Поскольку точки, указанные в условии задачи, лежат в первой четверти, то $y = x^{\frac{3}{2}}$. Отсюда $y' = \left(x^{\frac{3}{2}} \right)' = \dfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, а $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \dfrac{9}{4}x}$.

Следовательно, $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \dfrac{9}{4}x}\,dx = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \left(1 + \dfrac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 =$

$= \dfrac{8}{27}\left(\left(1 + \dfrac{9}{4} \cdot 4\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \dfrac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$ (ед.).

Ответ: $l = \dfrac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$ (ед.).

Задача 3. Вычислить длину периметра фигуры $OABCO$, состоящего из участков кривых $y^2 = 2x^3$ и $x^2 + y^2 = 20$ (см. рисунок 27).

Решение: для вычисления длины дуги достаточно вычислить длины дуг $l_{O\breve{A}}$ и $l_{\breve{A}B}$ в силу симметрии фигуры относительно оси Ox, тогда $l = 2\left(l_{O\breve{A}} + l_{A\breve{B}}\right)$.

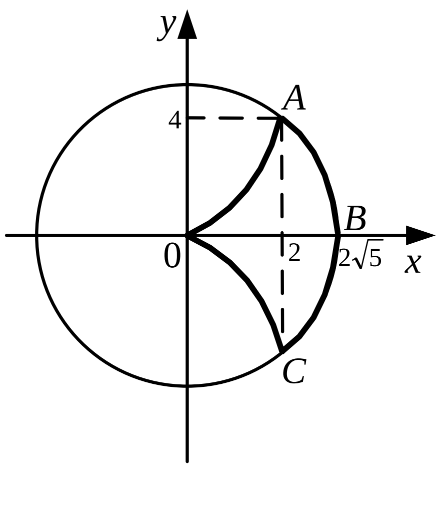

Рисунок 27

Найдем точки пересечения заданых кривых, решив систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ y^2 = 2x^3, \end{cases}$ получим $A(2;\,4)$, $C(2;\,-4)$.

Найдем длину дуги $O\breve{A}$. Для нее $y=\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}$, $y'=\frac{3}{2}\sqrt{2x}$, $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9}{2}x}$.

Следовательно, $l_{O\breve{A}}=\int\limits_0^2\sqrt{1+\frac{9}{2}x}dx=\frac{4}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$.

Так как $l_{\breve{A}B}$ есть длина дуги окружности радиуса $\sqrt{20}$, соответствующей центральному углу $arctg2$, то $l_{\breve{A}B}=\sqrt{20}arctg2$.

Окончательно получаем, что $l=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1+4\sqrt{5}arctg2\right)$ (ед.).

Ответ: $l=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1+4\sqrt{5}arctg2\right)$ (ед.).

V Вычисление длин дуг плоских кривых в полярной системе координат

*Задача 1.*Найти длину дуги кривой $\rho=\sqrt{2}\sin\varphi$.

Решение: для решения задачи воспользуемся формулой $l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{(\rho')^2+(\rho)^2}d\varphi$. В силу симметрии фигуры, ограниченной данной кривой, найдем сначала половину длины кривой: $\frac{l}{2}=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right)^2+\left(\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right)'\right)^2}d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi}\,d\varphi=$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}d\varphi=\sqrt{2}\cdot\varphi\Big|_0^{\pi}=\sqrt{2}\pi \text{ (ед.).}$$

Тогда $l=2\sqrt{2}\pi$ (ед.).

Ответ: $l=2\sqrt{2}\pi$ (ед.).

Задача 2. Найти длину всей кривой $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ при изменении φ от 0 до 3π.

Решение: так как $\rho'=a\cdot 3\cdot\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, то длина дуги

$$l=\int\limits_0^{3\pi}\sqrt{\left(a\sin^3\frac{\varphi}{3}\right)^2+\left(a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2}d\varphi=a\int\limits_0^{3\pi}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi=$$

$$= a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = a\int_0^{3\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{3\pi a}{2} \text{ (ед.).}$$

Ответ: $l = \dfrac{3\pi a}{2}$ (ед.).

VI Вычисление площади поверхности вращения

Задача 1. Вычислить площадь поверхности шара радиуса R, рассматривая его как тело вращения.

Решение: поверхность шара образуется вращением дуги кривой $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (полуокружности) вокруг оси Ox, $-R \le x \le R$ или дуги кривой $x=\sqrt{R^2-y^2}$ (полуокружности) вокруг оси Oy.

Применим формулу $S=\int\limits_{x_1}^{x_2} dS = 2\pi\int\limits_{x_1}^{x_2} y\,dl = 2\pi\int\limits_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, найдем

$$y'=\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}, \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$S_x = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = 2\pi\int_{-R}^{R}Rdx = 2\pi Rx\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

(или $x=\sqrt{R^2-y^2}$ $x'=\left(\sqrt{R^2-y^2}\right)' = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}, \sqrt{1+(x')^2} = \sqrt{1+\dfrac{y^2}{R^2-y^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}$)

$$S_x = 2\pi\int_{-R}^{R}x\sqrt{1+(x')^2}dy = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dy = 4\pi R^2.$$

Если окружность задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

то, применив соответствующую формулу, получим:

$$\frac{1}{2}S_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}dt = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t\sqrt{\left((R\cos t)'\right)^2+\left((R\sin t)'\right)^2}dt =$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t\cdot R dt = 2\pi R(-\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2$$ (кв. ед.). Следовательно $S_x = 4\pi R^2$ (кв. ед.).

Если окружность задана в полярных координатах уравнением $r = R$, то применяя формул $S_x = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\varphi\sqrt{R^2+(R')^2}d\varphi =$

$= 2\pi R^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2$, т.е. $S_x = 4\pi R^2$ (кв. ед.).

Ответ: $S_x = 4\pi R^2$ (кв. ед.).

Задача 2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox петли кривой $9y^2 = x(3-x)^2$ (см. рисунок 28).

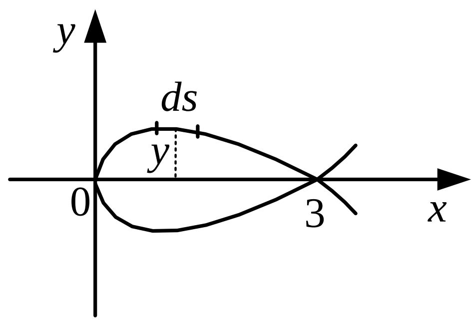

Рисунок 28

Решение: запишем уравнение верхней части кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ при $0 \le x \le 3$.

Применим формулу $S = \int_{x_1}^{x_2} dS = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y dl = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}dx$, найдем

$$y' = \left(\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\right)' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}, \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}} = \frac{(x+1)}{2\sqrt{x}}.$$

Находим искомую площадь:

$$S_x = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\cdot\frac{(x+1)}{2\sqrt{x}}dx = \frac{\pi}{3}\int_0^3 (3-x)\cdot(x+1)dx = \frac{\pi}{3}\int_0^3\left(-x^2+2x+3\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\Bigg|_0^3 = 3\pi \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $S = 3\pi$ (кв. ед.).

Задача 3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox замкнутого контура $OABCO$, образованного кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$.

Решение:

Найдем точки пересечения заданных парабол, для этого составим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2 \end{cases}$ решим ее и получим $O(0;\,0)$ и $B(1;1)$ (см. рисунок 29).

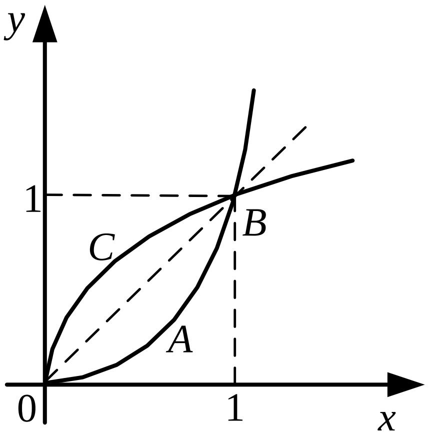

Рисунок 29

Искомая площадь $S = S_1 + S_2$, где S_1 − площадь поверхности, образованной вращением дуги OCB, а S_2 − площадь поверхности, образованной вращением дуги OAB.

Вычислим площадь S_1. Для этого из уравнения $x = y^2$ получаем $y = \sqrt{x}$ и $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Тогда $S_1 = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx = 2\pi\int_0^1 \frac{\sqrt{4x+1}}{2}dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} 4x+1=t \\ x=\dfrac{t-1}{4} \\ dx=\dfrac{1}{4}dt \\ x_1=0 \Rightarrow t_1=1 \\ x_2=1 \Rightarrow t_2=5 \end{array} \right| = \pi\int_1^5 \sqrt{t}\,\frac{1}{4}dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \text{ (кв.ед.).}$$

Теперь вычислим площадь S_2. Из уравнения $y = x^2$ получаем $y' = 2x$ и

$$S_2 = 2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}t,\ dx=\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}t\,dt \\ x_1=0 \Rightarrow t_1=0 \\ x_2=1 \Rightarrow t_2=\operatorname{Arsh}2 \end{array} \right| = 2\pi\int_0^{\operatorname{Arsh}2} \frac{1}{4}\operatorname{sh}^2 t\sqrt{1+sh^2 t}\,\frac{1}{2}\operatorname{ch}t dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\operatorname{Arsh}2} \operatorname{sh}^2 t\cdot\operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}\int_0^{\operatorname{Arsh}2} \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}2t-1\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}2t+1\right)dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{Arsh}2}\left(\operatorname{ch}^2 2t-1\right)dt =$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_0^{\operatorname{Arsh}2}\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}4t+1\right)-1\right)dt = \frac{\pi}{32}\int_0^{\operatorname{Arsh}2}\left(\operatorname{ch}4t-1\right)dt = \frac{\pi}{32}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}4t-t\right)\Bigg|_0^{\operatorname{Arsh}2} =$$

$$= \frac{9\sqrt{5}\pi}{16} - \frac{1}{32}\pi\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \text{ (кв.ед.).}$$

Следовательно, $S = S_1 + S_2 = \dfrac{\left(5\sqrt{5}-1\right)\pi}{6} + \dfrac{9\sqrt{5}\pi}{16} - \dfrac{1}{32}\pi\ln\left(2+\sqrt{5}\right) =$

$$= \frac{67\sqrt{5}\pi}{48} - \frac{\pi}{32}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \frac{\pi}{6} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $S = \dfrac{67\sqrt{5}\pi}{48} - \dfrac{\pi}{32}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \dfrac{\pi}{6}$ (кв. ед.).

4.9 Вопросы для самоконтроля

1. Изложите общую схему применения определенного интеграла к вычислению некоторой величины.

2. С помощью общей схемы выведите формулу для отыскания площади криволинейной трапеции в декартовой системе координат.

3. Выведите формулу для отыскания площади криволинейного сектора в полярной системе координат.

4. Выведите формулу для отыскания объёма тела вращения.

5.Выведите формулы для отыскания длины дуги в декартовой и полярной системах координат.

6. Выведите формулу для отыскания площади поверхности вращения.

4.10 Задачи для самостоятельного решения

I. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1. $x+2y-8=0,\ y=1,\ y=3$ и осью ординат.
2. $y=\sin x,\ y=2\sin x,\ x=0,\ x=\frac{7}{4}\pi$.
3. ветвью гиперболы $y=\frac{1}{x}$, прямыми $x=-3,\ x=-1$ и осью абсцисс.
4. параболой $y^2=x$ и прямой $x=9$.
5. параболой $y=-x^2-2x+3$ и прямыми $x=0,\ x=2,\ y=0.$
6. кривой $y=e^{-2x}$, прямыми $x=-\frac{1}{2},\ x=1$ и осью абсцисс.
7. кривой $x=\sqrt{y},\ \ y=1,\ y=4$ и осью ординат.
8. окружностью $x^2+y^2=25$ и прямыми $2y-5=0$ и $2y-5\sqrt{2}=0.$
9. $y=5-x^2$ и $y=x-1.$
10. части гиперболы $y=\frac{3}{x},$ отсекаемой от нее прямой $x+y-4=0$.
11. параболами $y=x^2$ и $y^2=x$.
12. параболами $y=-x^2+8x$ и $y=x^2+18x-12$.
13. $\begin{cases} x=2+3\cos t, \\ y=3+2\sin t. \end{cases}$
14. эллипсом $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$

15. лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

II Найти площадь плоских фигур в полярной системе координат

1. ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.
2. ограниченную кривой $y = \ln x$, осью Ox и прямой $x = e$.
3. ограниченную кривой $y = x^3$, осью Oy и прямой $y = 8$.
4. ограниченную кривой $\rho = a \sin 3\varphi$.
5. ограниченную кривой $\rho = a \cos^3 \varphi$.
6. ограниченную замкнутой кривой $\rho = a \sin \varphi \cos^2 \varphi,\ a > 0$.
7. ограниченную кривой $\rho = 2a \cos 3\varphi$ и лежащую вне круга $\rho = a$.
8. ограниченную кривыми $\rho = 2\sin\varphi,\ \rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$.
9. ограниченную кривыми $\rho = 4(1 - \cos\varphi),\ \rho = 4\cos\varphi$.

III Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1. $xy = 6,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ вокруг оси Ox и Oy.
2. $y = e^{-x},\ x = 0,\ y = 0\ (x \ge 0)$ вокруг оси Oy.
3. $y^2 = 4x,\ y^2 = x^3$ вокруг оси Ox.
4. $x^2 - y^2 = a^2,\ y = \pm 2a$ вокруг оси Oy.
5. $(y - a)^2 = ax,\ x = 0,\ y = 2a$ вокруг оси Ox.
6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy.
7. $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг оси Oy.
8. $y = x^3, x = -1,\ x = 0,\ y = 4$ вокруг прямой $y = 4$.
9. $x^2 + y^2 = 1$ вокруг прямой $x = 2$.
10. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ вокруг оси Ox.

IV Найти длину дуги плоской кривой:

1. $y=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}$, отсеченной осью Ox.

2. $x=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ от $y=0$ до $y=3$.

3. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$.

4. $r=6(1+\sin\varphi),\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

V Вычислить площадь поверхности вращения:

1. дуги синусоиды $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ вокруг оси Ox.

2. дуги кривой $\begin{cases} x=\frac{t^3}{3}, \\ y=4-\frac{t^2}{2}, \end{cases}$ $0\le t\le 2\sqrt{2}$ вокруг оси Ox.

3. кардиоида $r=10(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

5 Уравнения некоторых кривых в полярных координатах

Рассмотрим уравнения некоторых кривых, которые удобнее задавать в полярной системе координат, чем в декартовой. Многие из этих кривых находят широкое применение в механике. Они интересны и в историческом отношении.

5.1 Окружность радиуса a с центром на полярной оси, проходящая через полюс

Координатами точки M будут угол φ и длина ρ отрезка OM (см. рисунок 30).

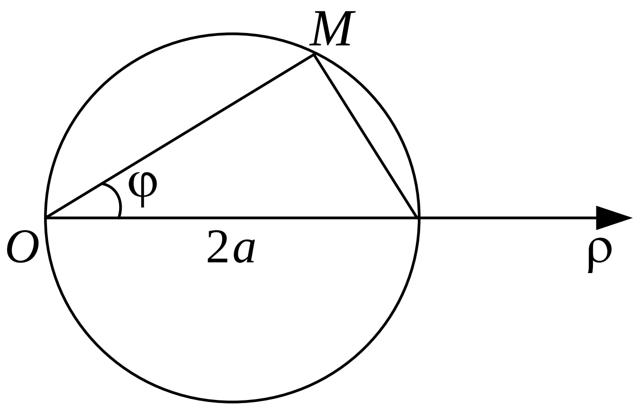

Рисунок 30

$\angle OMD = 90^\circ$; из прямоугольного треугольника OMD получим: $\rho = 2a\cos\varphi$. Так выглядит уравнение рассматриваемой окружности в полярных координатах.

5.2 Окружность радиуса a с центром в полюсе

Пусть теперь полюс находится в центре окружности (см. рисунок 31). Как будет выглядеть уравнение окружности в этом случае?

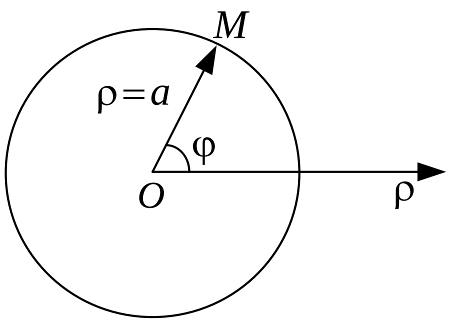

Рисунок 31

Запишем его в декартовой системе координат: $x^2 + y^2 = a^2$. Используя формулы перехода к полярным координатам, получим: $x^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi$; $y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi$; отсюда $x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = \rho^2$.

Значит, в этом случае уравнение окружности может быть записано так: $\rho^2 = a^2$ или $\rho = a$.

5.3 Спираль Архимеда

Эта кривая задается так: пусть точка M равномерно движется по прямой ON, которая в это же время равномерно вращается вокруг точки O.

Траектория точки M называется **спиралью Архимеда (около 287–212 до н.э.)**. Как написать уравнение этой кривой?

Примем точку O за полюс системы, а начальное положение ON – за полярную ось. Пусть в начальный момент движения точка M находится в полюсе. Расстояние $OM = \rho$, пройденное точкой M вдоль прямой ON и полярный угол φ возрастают пропорционально времени (в силу равномерности движения). Значит, они пропорциональны друг другу, т.е. $\rho = a\varphi$, где a – коэффициент пропорциональности.

Перейдем к декартовым координатам. Если $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x}$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot arctg\,\dfrac{y}{x}$.

Это уравнение спирали Архимеда в декартовых координатах.

Построим по точкам график функции $\rho = a \cdot \varphi$. Для построения углу φ придаем только положительные значения, отстоящие друг от друга на $\frac{\pi}{8}$:

φ	0	$\pi/8$	$2 \cdot \pi/8$	$3 \cdot \pi/8$	$\ldots$
ρ	0	$a \cdot \pi/8 = h$	$a \cdot 2 \cdot \pi/8 = 2h$	$a \cdot 3 \cdot \pi/8 = 3h$	$\ldots$

Таким образом, построение кривой сводится к последовательному отложению на сторонах углов $0, \pi/8, 2 \cdot \pi/8, 3 \cdot \pi/8, \ldots$ возрастающих длин $0, h, 2h, 3h, \ldots$.

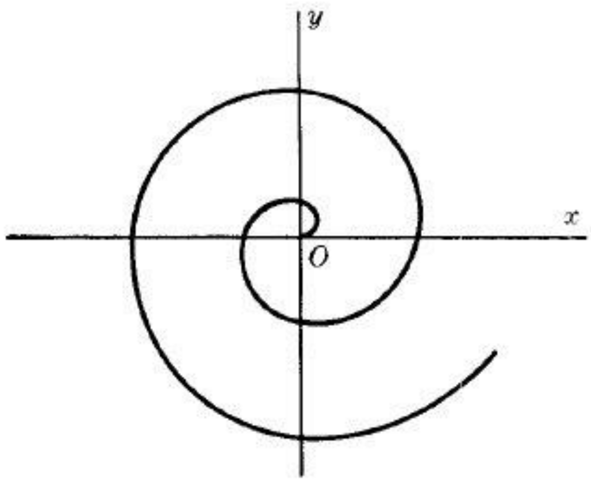

Рисунок 32

$a \cdot (\varphi_0 + 2\pi) = a\varphi_0 + 2\pi a.$ Но $a \cdot (\varphi_0 + 2\pi)$ – это полярный радиус, соответствующий углу $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$; значит, когда полярный угол φ увеличивается на 2π, полярный радиус увеличивается на постоянную величину $2\pi a$ (см. рисунок 32).

Спираль Архимеда – это одна из многих кривых, называемых механическими. Так называются кривые, порожденные движущейся точкой, а значит, определяющиеся не геометрически, а механически.

Первые механические кривые начали строиться и изучаться в Древней Греции начиная с V века до н.э. Однако греческие ученые, стремившиеся к максимальной строгости доказательств и точности построений, к этим кривым, построенным без помощи циркуля и линейки, относились с осторожностью. И только на рубеже XVI и XVII веков, когда под влиянием развития техники движение стало входить в математику, ученые обратили внимание на «механические» кривые.

К таким кривым, например, относятся линии, описываемые точкой окружности, которая катится без скольжения по некоторой траектории. Французские математики XVII века называли такие кривые **рулеттами** (от слова roulette – колесико). К рулеттам можно отнести циклоиду, параметрические уравнения которой было выведено нами в первом семестре.

К кривым такого типа относится и следующая кривая.

5.4 Кардиоида

Пусть окружность радиуса a катится без скольжения по неподвижной окружности того же радиуса, имеющей с первой окружностью внешнее касание. Кривая, описываемая точкой катящейся окружности, называется кардиоидой. Таким образом можно определить эту линию как механическую кривую (см. рисунок 33).

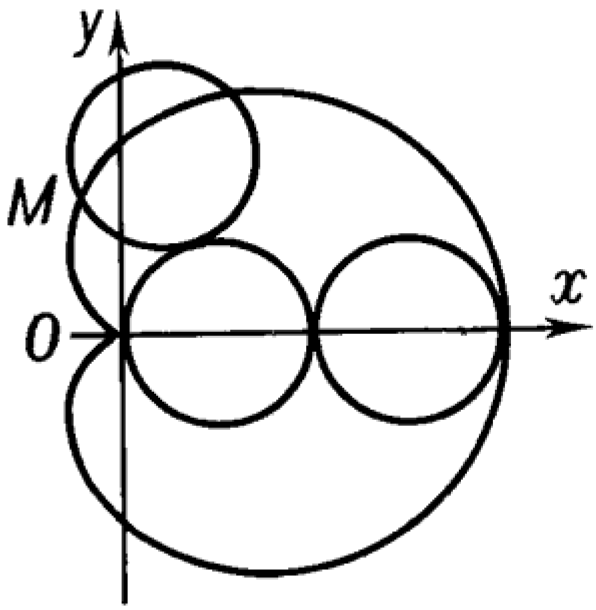

Рисунок 33

Геометрически эту кривую можно определить как геометрическое место точек M и M', расположенных на прямых пучка с центром в точке O, лежащей на неподвижной окружности, и находящихся на равном расстоянии $2a$ по обе стороны от точки L пересечения каждой прямой этого пучка с окружностью.

Построим эту кривую.

Из точки O, лежащей на окружности радиуса a, проведем луч OK.

От точки L пересечения его с окружностью отложим отрезок $LM = 2a$ по направлению луча OK. Когда луч опишет полный оборот, точка M опишет рассмотренную кривую (см. рисунок 34).

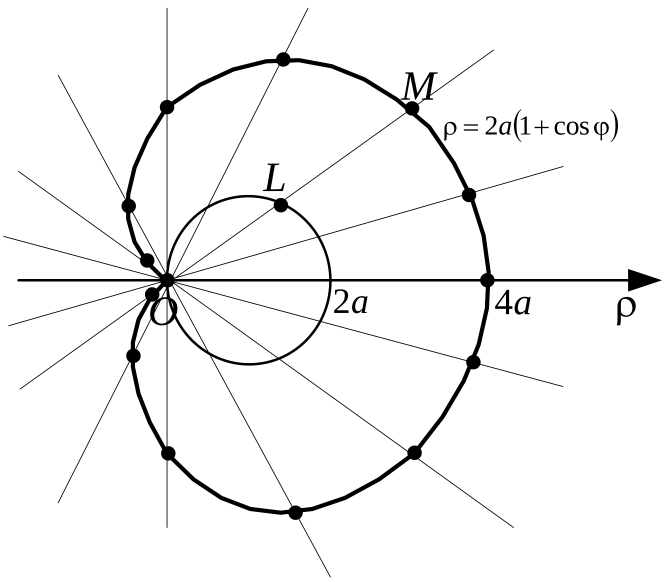

Рисунок 34

Ограниченная этой кривой фигура напоминает стилизованное изображение сердечка, поэтому итальянский ученый **Джованни Кастильон (1708-1791)** назвал эту кривую кардиоидой (от греческого слова «кардиа» – сердце).

Выведем ее уравнение.

$OM = \rho$ – полярный радиус произвольной точки кривой. Он представляет собой сумму длины отрезка OL – полярного радиуса точки, лежащей на неподвижной окружности радиуса a и отрезка LM: $\rho = OL + LM$. $LM = 2a$, так как $2a$ – это диаметр окружности, катящейся по неподвижной окружности того же радиуса. $OL = 2a\cos\varphi$. Тогда $\rho = 2a + 2a\cos\varphi$, или $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$; $-\pi \le \varphi \le \pi$.

В декартовых координатах уравнение кардиоиды выглядит так:

$$\left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 = 4a^2\left(x^2 + y^2\right).$$

Уравнение $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$ также определяет кардиоиду в полярной системе координат с полюсом в той же точке и с противоположно направленной полярной осью (см. рисунок 35).

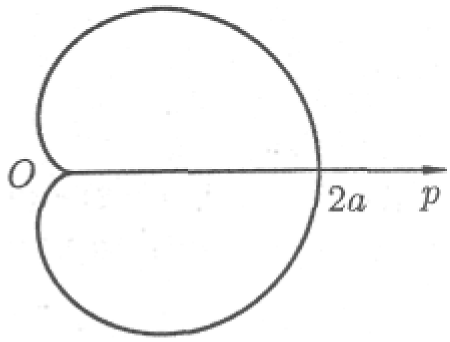

Рисунок 35

Параметрические уравнения этой кривой выглядят так:

$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t, \\ y = 2a\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

Уравнение кривой в декартовых координатах: $\left(x^2 + y^2 + 2ax\right)^2 = 4a^2\left(x^2 + y^2\right)$.

5.5 Улитка Паскаля

Эта кривая называется так в честь геометра – любителя **Этьена Паскаля (1588-1651)**, отца великого французского физика и философа **Блеза Паскаля (1623-1662)**.

Определить её можно как геометрическое место точек M и M', расположенных на прямых пучка с центром в точке O, лежащей на неподвижной окружности, и находящихся на равном расстоянии b по обе стороны от точки L пересечения каждой прямой пучка с окружностью. Из такого определения видно, что кардиоиду можно считать частным случаем улитки Паскаля.

Построим улитку Паскаля. Пусть на окружности радиуса a зафиксирована точка O. Луч OK вращается вокруг этой точки. При этом луч пересекает окружность в точке L. На прямой OL от точки L в направлении луча откладывается отрезок $LM = b \neq a$. Пусть, например, $b > 2a$. Когда луч OK опишет полный оборот, точка M опишет улитку Паскаля. При $b > 2a$ кривая не имеет общих точек с окружностью (см. рисунок 36).

Легко догадаться, что уравнение улитки Паскаля в полярных координатах таково: $\rho = 2a\cos\varphi + b$, а в декартовых координатах таково:

$$\left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 = b^2\left(x^2 + y^2\right).$$

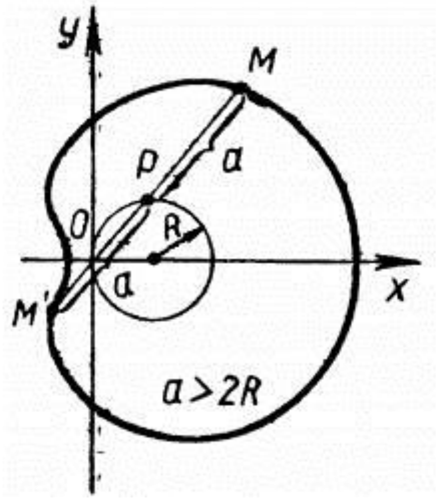

Рисунок 36

При $b = 2a$ кривая является кардиоидой.

При $b < 2a$ кривая в точке O пересекает сама себя (см. рисунок 37).

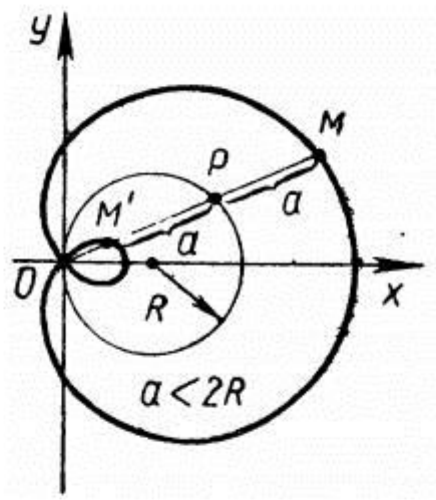

Рисунок 37

5.6 Лемниската Бернулли

Слово «лемниската» означает «подвязка», «бант». Эта кривая впервые описана Якобом Бернулли в 1694 г.

Якоб (I) Бернулли (1654-1705), старший брат и учитель Иоганна (I) Бернулли (1667-1748), о котором в свое время говорилось в связи с правилом Бернулли–Лопиталя.

Лемниската Бернулли – это геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина, равная a^2, где $2a$ – расстояние F_1F_2 (см. рисунок 28). Таким образом, для любой точки $M(x, y)$ лемнискаты справедливо равенство:

$$r_1 \cdot r_2 = a^2 \qquad (1)$$

(это основное свойство точек лемнискаты).

$r_1 = MF_1,\ r_2 = MF_2,\ F_1F_2 = 2a$ (см. рисунок 34); тогда $r_1 \cdot r_2 = \left(\dfrac{F_1F_2}{2}\right)^2$.

Выведем полярное уравнение лемнискаты, исходя из основного свойства (1) ее точек, которое выражено так: $r_1 \cdot r_2 = a^2$.

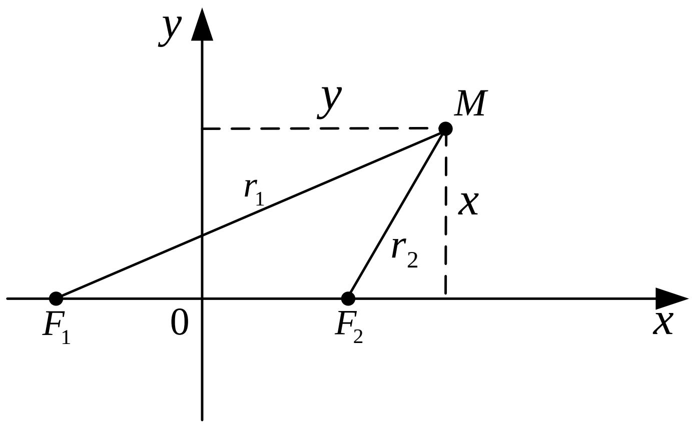

Рисунок 38

Тогда $r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ (см. рисунок 38). Подставим r_1 и r_2 в уравнение (1): $\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2$, избавимся от корней, получим: $\left(x^2 + 2ax + a^2 + y^2\right)\cdot\left(x^2 - 2ax + a^2 + y^2\right) = a^4$; сгруппируем слагаемые: $\left[\left(x^2 + a^2 + y^2\right) + 2ax\right]\cdot\left[\left(x^2 + a^2 + y^2\right) - 2ax\right] = a^4$; получим разность квадратов: $\left(x^2 + a^2 + y^2\right)^2 - 4a^2x^2 = a^4$; раскроем квадрат суммы:

$\left[\left(x^2 + y^2\right) + a^2\right]^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2 + 2a^2\left(x^2 + y^2\right) + a^4$, или

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 2a^2\left(x^2 + y^2\right) + a^4 - 4a^2x^2 = a^4.$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(2x^2 - x^2 - y^2\right).$$

Окончательно получим:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right). \qquad (2)$$

Формула (2) – это уравнение лемнискаты в декартовых координатах.

Теперь получим уравнение этой кривой в полярных координатах. Поместим полюс полярной системы в начало декартовой. Применим формулы перехода от декартовых координат к полярным: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$ Тогда $x^2+y^2=\rho^2$. Подставим x^2 и y^2 в уравнение (2): $\rho^4=2a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi\right)=2a^2\rho^2\cos2\varphi$, или $\rho^4=2a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi\right)=2a^2\rho^2\cos2\varphi$. Тогда

$$\rho^2=2a^2\cos2\varphi \text{ или } \rho=a\sqrt{2\cos2\varphi}. \qquad (3)$$

Формула (3) – это уравнение лемнискаты в полярных координатах.

Построим лемнискату Бернулли (см. рисунок 39).

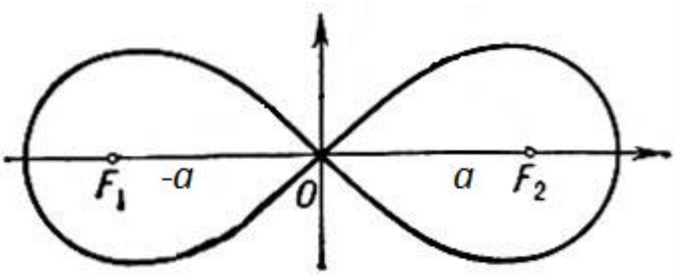

Рисунок 39

Эту кривую относят к кривым 4-ого порядка, так как она задается уравнением 4-й степени в декартовых координатах.

5.7 Четырехлепестковая роза

Эта кривая является геометрическим местом оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на отрезок постоянной длины $2a$, который скользит своими концами по осям декартовых координат (см. рисунок 40).

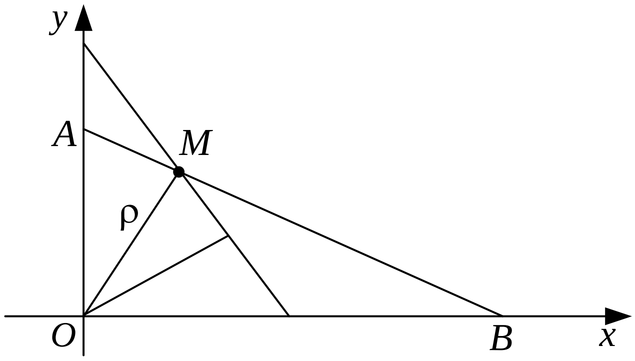

Рисунок 40

M – точка кривой. $\rho = OM$.

Из ΔAOM: $OM = OA \sin\varphi$. Из ΔAOB: $AO = AB\cos\varphi$.

$AB = 2a$. $AO = 2a\cos\varphi$. $OM = 2a\sin\varphi \cdot \cos\varphi$

$$\rho = a\sin 2\varphi. \qquad (4)$$

Формула (4) – это уравнение четырехлепестковой розы. Она изображена на рисунке 41. В декартовых координатах эта линия задается уравнением

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0.$$

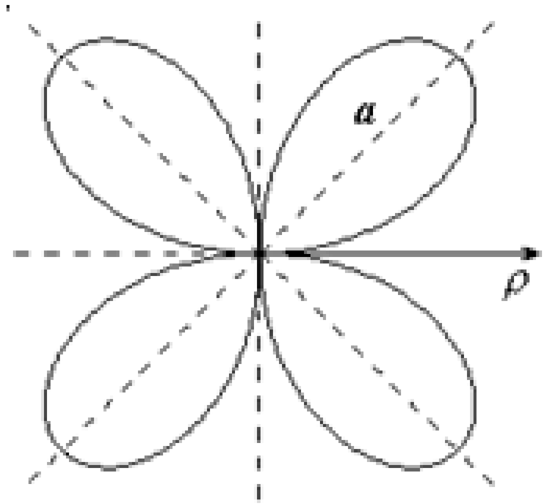

Рисунок 41

Вообще же розами называются кривые, которые задаются полярными уравнениями вида $\rho = a\sin k\varphi$ или $\rho = a\cos k\varphi$, где $a > 0$ и $k > 0$. Роза целиком расположена в круге радиуса $a(\rho \le a)$, т.к. $|\sin k\varphi| \le 1$. Она состоит из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно радиусов окружности, равных a.

Количество лепестков розы зависит от числа k. Если k – целое, то роза состоит при нечетном k из k лепестков, а при четном k – из $2k$ лепестков.

Уравнение трехлепестковой розы: $\rho = a \sin 3\varphi$.

В декартовых координатах: $\left(x^2 + y^2\right)^2 - a(3x^2 y - y^3) = 0$.

Кривая изображена на рисунке 42.

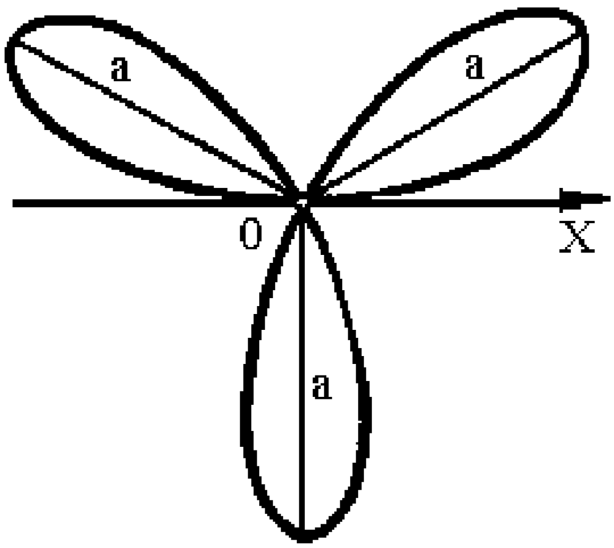

Рисунок 42

Если k – рационально, причем $k = \frac{m}{n}\ (n > 1)$, то роза состоит из m лепестков, когда m и n – нечетные, и из $2m$ лепестков, если одно из этих чисел четное. При этом в отличие от предыдущего случая каждый следующий лепесток будет частично покрывать предыдущий. На рисунке 44 изображена кривая, задающаяся уравнением

$$\rho = a \sin \frac{5}{3}\varphi \quad \left(k = \frac{5}{3}\right).$$

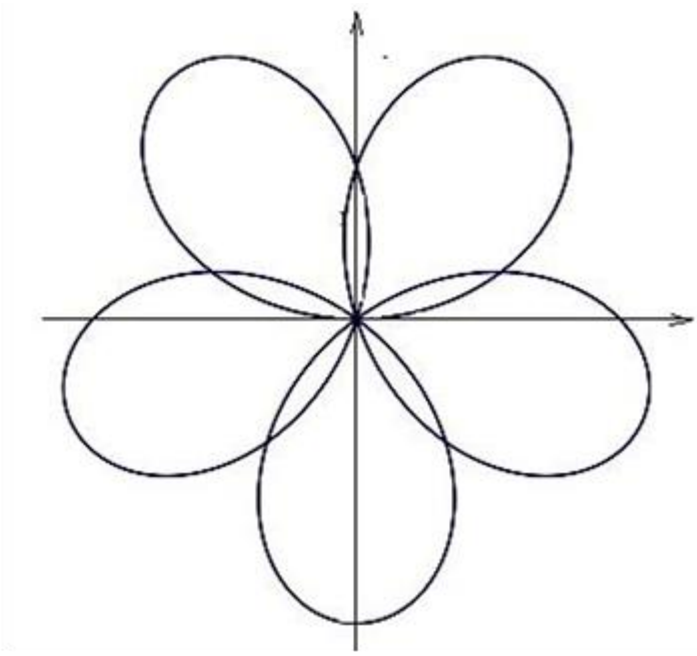

Рисунок 43

На рисунках 44 и 45 изображены, соответственно, «розы», у которых $k = \frac{1}{2}$ и $k = \frac{1}{3}$.

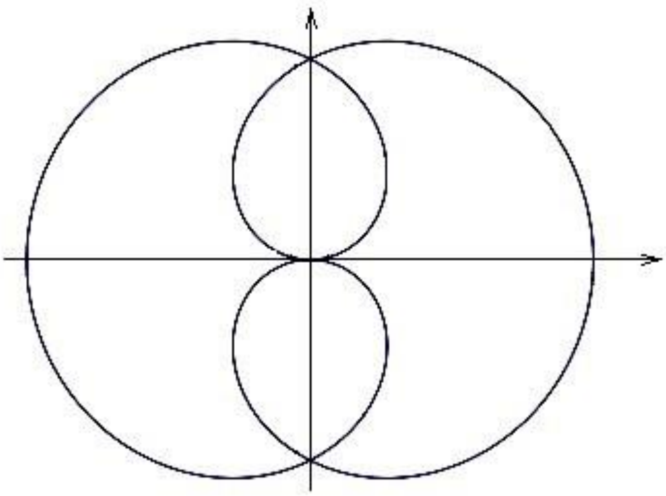

Рисунок 44

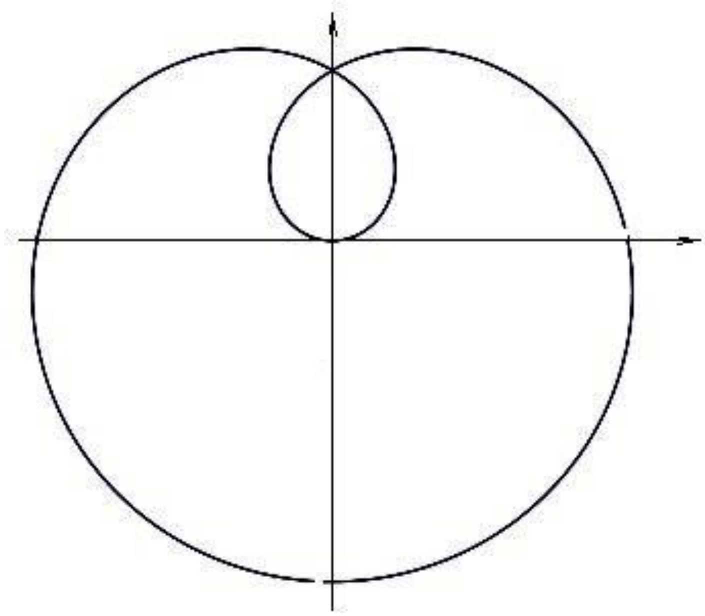

Рисунок 45

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой.

Решение: каждый лепесток розы можно разбить на две одинаковые части. Лепестки конгруэнтны, значит, можно найти $\frac{1}{6}$ искомой площади. Радиус – вектор точки кривой «заметает» эту часть при изменении угла φ от 0 до $\frac{\pi}{6}$. Таким образом,

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 6\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sin\pi}{6}\right) = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $S = \frac{a^2\pi}{4}$ (кв. ед.).

5.8 Примеры решения задач

1 Окружность радиуса a

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$

Решение: для вычисления площади воспользуемся формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a\sin t \cdot a\sin t dt = a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt = a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{2\pi}dt - \int_0^{2\pi}\cos 2t dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right) = a^2\pi \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $S = a^2\pi$ (кв. ед.).

Задача 2. Найти длину окружности радиуса a.

Решение: окружность (см. рисунок 46) в параметрической форме задается уравнениями: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

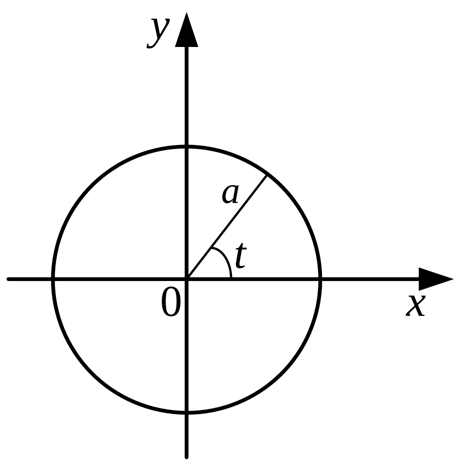

Рисунок 46

Согласно формуле $l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2 + y'^2}dt$ получим

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = a\int_0^{2\pi}dt = 2\pi a.$$

Ответ: $2\pi a$ (ед.).

Задача 3. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линией $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг оси Ox.

Решение: для вычисления объёма воспользуемся формулой $V_x = \pi\int\limits_a^b y^2 dx$.

Запишем уравнение окружности в параметрическом виде $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$. Тогда получим

$$V_x = \pi\int\limits_a^b y^2 dx = \pi\int\limits_{-a}^{a} y^2 dx = \pi\int\limits_{\pi}^{0} (a\sin t)^2 (-a\sin t) dt = -a^3\pi\int\limits_{\pi}^{0} \sin^3 t dt =$$

$$= a^3\pi\int\limits_0^{\pi} \sin^3 t dt = a^3\pi\int\limits_0^{\pi} \sin^2 t \sin t dt = -a^3\pi\int\limits_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) =$$

$$= -a^3\pi\left(\cos t\Big|_0^{\pi} - \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\pi} \right) = \frac{8a^3\pi}{3}.$$

Ответ: $V_x = \dfrac{8a^3\pi}{3}$ (куб. ед.).

3 Спираль Архимеда

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной одним витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

Решение: Кривая (см. рисунок 47) задана в полярной системе координат, поэтому для нахождения площади применим формулу $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$.

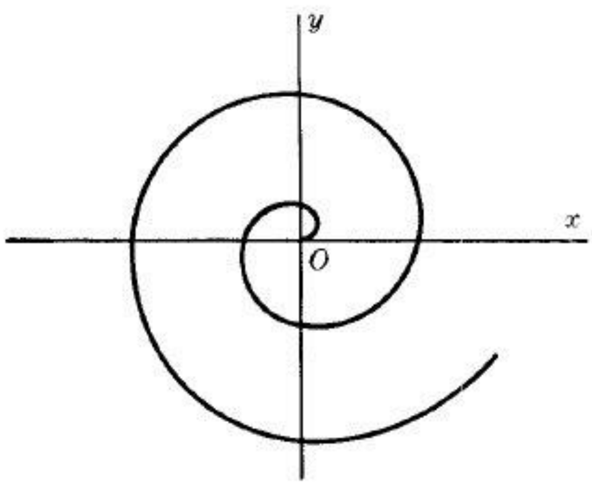

Рисунок 47

Тогда получим $S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\varphi)^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3.$

Ответ: $S=\frac{4}{3}a^2\pi^3$ (кв. ед.).

Задача 2. Найти длину дуги спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ от полюса O до точки A (см. рисунок 48).

Решение: по формуле $l=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi$ получаем

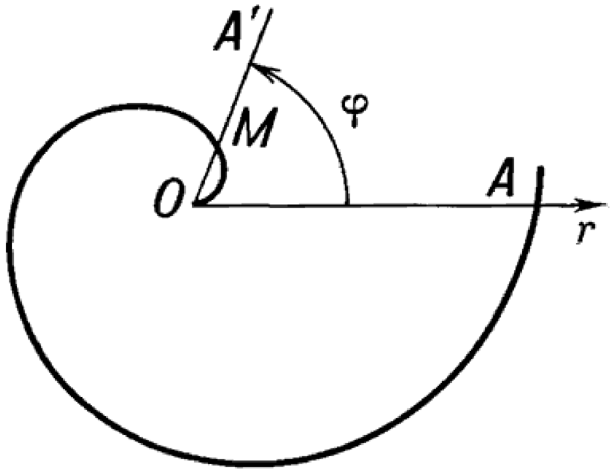

Рисунок 48

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(a\varphi)^2+a^2}d\varphi=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi=\left|\begin{matrix}u=\sqrt{1+\varphi^2}\Rightarrow du=\dfrac{\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\\ dv=d\varphi\Rightarrow v=\varphi\end{matrix}\right|=$$

$$=a\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_0^{2\pi}-\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varphi^2d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\right)=a\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}-\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{1+\varphi^2}}d\varphi\right)=$$

$$=a\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}-\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi+\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\right)=2a\pi\sqrt{1+4\pi^2}-a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi+a\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}.$$

Решим уравнение относительно искомого интеграла $a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi=2a\pi\sqrt{1+4\pi^2}-a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi+a\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}.$

$$2a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = 2a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + a\ln\left|\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right|\Big|_0^{2\pi},$$

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right|,$$

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\phi = a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right|.$$

Тогда $l = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right|$ ед.

Ответ: $l = a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right|$ (ед.).

4 Кардиоида

Задача 1. Найти площадь ограниченную кардиоидой $\rho = a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $\rho = a$ (см. рисунок 49).

Решение: найдем точки пересечения кардиоиды с окружностью, для этого решим систему уравнений $\begin{cases}\rho = a(1-\cos\varphi),\\ \rho = a.\end{cases}$

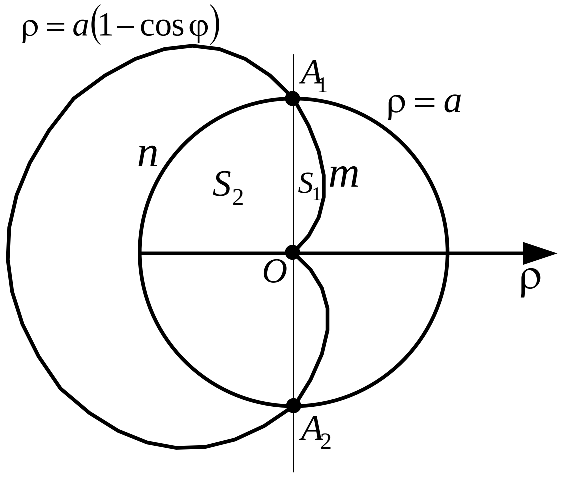

Рисунок 49

Таких точек две: $A_1\left(a; \frac{\pi}{2}\right)$ и $A_2\left(a; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Половина искомой площади равна сумме площадей криволинейных секторов OmA_1O и OA_1nO

$$S' = S_{OmA_1O} + S_{OA_1nO}.$$

В первом секторе полярный угол меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а во втором – от $\frac{\pi}{2}$ до π.

Тогда $S = 2S' = 2(S_1 + S_2) = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a(1-\cos\varphi))^2 d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2 d\varphi\right) =$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi + a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right)d\varphi +$$

$$+ a^2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi + a^2\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}a^2 = a^2\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - 2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right) + \right)$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - 2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right) + \frac{1}{4}\left(\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} - \sin 2\cdot 0\right)\right) + \frac{\pi}{2}a^2 =$$

$$= a^2\left(\frac{3\pi}{4} - 2\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0\right) + \frac{\pi}{2}a^2 = a^2\left(\frac{3\pi}{4} - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = a^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\right) \text{ кв.ед.}$$

Следовательно, $S = 2a^2\left(\frac{5\pi}{8} - 1\right)$ (кв.ед.).

Ответ: $S = 2a^2\left(\frac{5\pi}{8} - 1\right)$ (кв.ед.).

Задача 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

Решение: используя формулы перехода $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ запишем уравнение кардиоиды (см. рисунок 50) в параметрической форме $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi = a\cos\varphi(1-\cos\varphi), \\ y = \rho\sin\varphi = a\sin\varphi(1-\cos\varphi), \end{cases}$ принимая полярный φ угол за параметр.

Фигура ограниченная кардиоидой симметрична относительно оси Ox, поэтому можно найти удвоенную площадь ее половины.

Для нахождения площади применим формулу $S=\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot x'(t)dt$. Найдем границы интегрирования:

для $\rho=2a,\ 2a=a(1-\cos\varphi)\Rightarrow\cos\varphi=-1\Rightarrow\varphi=\pi$,

а для $\rho=0,\ 0=a(1-\cos\varphi)\Rightarrow 1-\cos\varphi=0\Rightarrow\varphi=0.$

Так как $x'=\left(a(1-\cos\varphi)\cos\varphi\right)'=a(\sin 2\varphi-\sin\varphi)$, то искомая площадь равна

$$S=2\int\limits_{\pi}^{0} a(1-\cos\varphi)\sin\varphi a(\sin 2\varphi-\sin\varphi)d\varphi=2a^2\int\limits_{\pi}^{0}(\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)(\sin 2\varphi-\sin\varphi)d\varphi=$$

$$=2a^2\int\limits_{\pi}^{0}\left(\sin 2\varphi\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi-\sin^2\varphi+\sin^2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi=$$

$$=2a^2\left(\int\limits_{\pi}^{0}2\sin^2\cos\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{1}{2}(1-\cos 4\varphi)d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{0}(1-\cos 2\varphi)d\varphi+\int\limits_{\pi}^{0}\sin^2\varphi d(\sin\varphi)\right)=$$

$$=2a^2\left(2\int\limits_{\pi}^{0}\sin^2\varphi d(\sin\varphi)-\frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{0}d\varphi+\frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{0}\cos 4\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{0}d\varphi+\frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{0}\cos 2\varphi d\varphi+\int\limits_{\pi}^{0}\sin^2\varphi d(\sin\varphi)\right)=$$

$$=2a^2\left(2\int\limits_{\pi}^{0}\sin^2\varphi d(\sin\varphi)-\frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{0}d\varphi+\frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{0}\cos 4\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{0}d\varphi+\frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{0}\cos 2\varphi d\varphi+\int\limits_{\pi}^{0}\sin^2\varphi d(\sin\varphi)\right)=$$

$$=2a^2\left(\sin^3\varphi\Big|_{\pi}^{0}-\frac{3}{4}\varphi\Big|_{\pi}^{0}+\frac{1}{16}\sin 4\varphi\Big|_{\pi}^{0}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_{\pi}^{0}\right)=\frac{3\pi a^2}{2}\ \text{(кв.ед.)}$$

Ответ: $S=\dfrac{3}{2}\pi a^2$ (кв.ед.).

Задача 3. Найти длину кардиоиды $\rho=a(1-\cos\varphi),\ a>0.$

Решение: вычислим длину кардиоиды (см. рисунок 51) по формуле $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi.$ Сначала найдем половину длины кривой:

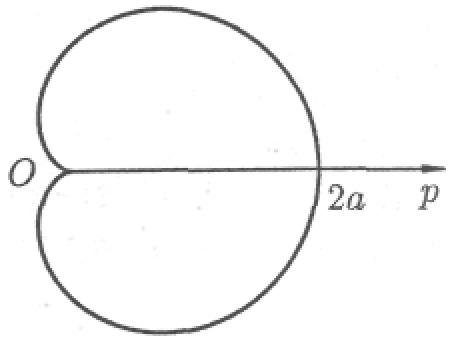

Рисунок 50

$$l_1=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\left(a(1-\cos\varphi)\right)^2+\left(a\sin\varphi\right)^2}\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2\left(2-2\cos\varphi\right)}\,d\varphi=2a\int\limits_0^{\pi}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi.$$

Так как функци $\sin\frac{j}{2}>0$ на $\left[0,p\right]$, то $l_1=2a\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=-4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=4a.$ ед.

$l=2l_1=2\cdot 4a=8a$ ед.

Ответ: $l=8a$ (ед.).

Задача 4. Найти объём тела, которое получается от вращения кардиоиды $\rho=a\left(1-\cos\varphi\right)$ вокруг полярной оси (см. рисунок 51).

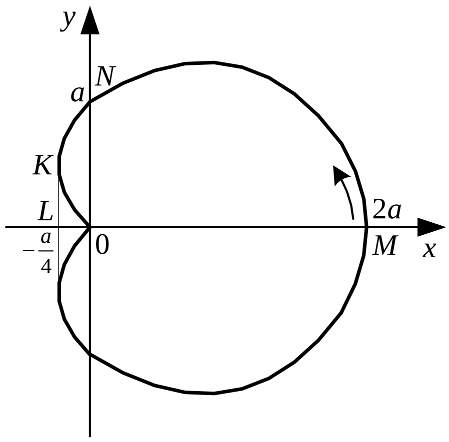

Рисунок 51

Решение: искомый объём равен разности объёмов, полученных от вращения вокруг оси Ox (она является и полярной осью) фигур $MNKLO$ и $OKLO$.

Запишем уравнение кардиоиды в параметрическом виде $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi=a\cos\varphi\,(1-\cos\varphi), \\ y=\rho\sin\varphi=a\sin\varphi\,(1-\cos\varphi), \end{cases}$ принимая за параметр полярный угол φ.

Найдем абсциссы точек M и K: абсцисса точки K есть значение минимума функции $x = a\cos\varphi(1-\cos\varphi)$. Найдем этот минимум: $\dfrac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi(1+2\cos\varphi) = 0$, получаем $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \dfrac{2}{3}\pi$. При $\varphi_1 = 0$ получаем $x_M = 2a$, а при $\varphi_2 = \dfrac{2}{3}\pi$ – $x_K = -\dfrac{a}{4}$.

Тогда искомый объём может быть найден по формуле: $V = \pi\int\limits_{-\frac{a}{4}}^{2a}(y_2)^2 dx - \pi\int\limits_{-\frac{a}{4}}^{2a}(y_1)^2 dx$.

Таким образом получаем, что,

$$V = \pi\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{0} a^2(1-\cos\varphi)^2\sin^2\varphi(-a\sin\varphi(1-2\cos\varphi))d\varphi -$$

$$-\pi\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2\sin^2\varphi(-a\sin\varphi(1-2\cos\varphi))d\varphi =$$

$$= \pi a^3\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^2\sin^3\varphi(1-2\cos\varphi)d\varphi = \left|\begin{array}{l} u=\cos\varphi,\ du=-\sin\varphi d\varphi \\ \varphi_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 1 \\ \varphi_2 = \pi \Rightarrow u_2 = -1 \end{array}\right| =$$

$$= \pi a^3\int\limits_{-1}^{1}(1-u)^2(1-u^2)(1-2u)du = \pi a^3\int\limits_{-1}^{1}(2u^5 - 5u^4 + 2u^3 + 4u^2 - 4u + 1)du = \frac{8}{3}\pi a^3 \text{ куб. ед.}$$

Ответ: $V = \dfrac{8}{3}\pi a^3$ (куб. ед.).

5 Улитка Паскаля

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $\rho = 2 + \cos\varphi$.

Решение: для вычисления площади применим формулу $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi$. Тогда получим, $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(2+\cos\varphi)^2 d\varphi = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\dfrac{9}{2} + 2\cos\varphi + \dfrac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{9}{2}\pi \text{ кв.ед.}$$

Ответ: $S=\frac{9}{2}\pi$ (кв.ед.).

Задача 2.

6 Лемниската Бернулли

Задача 1. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$ (см. рисунок 52).

Решение: кривая симметрична относительно координатных осей поэтому достаточно определить одну четвертую искомой площади по формуле $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi$.

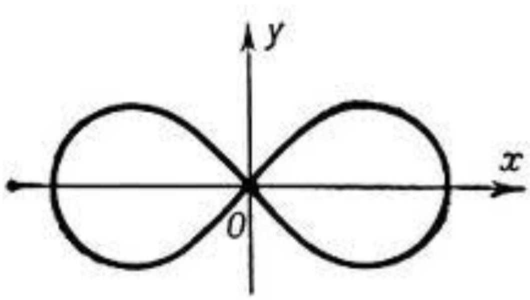

Рисунок 52

Получаем $S=\frac{1}{2}\cdot 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos 2\varphi d\varphi=4a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2$ кв.ед.

Ответ: $S=2a^2$ (кв.ед.).

Задача 2. Найти длину дуги лемнискаты $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ от правой вершины, радиус-вектор которой соответствует $\varphi=0$, до любой точки, полярный угол которой $\varphi<\frac{\pi}{4}$.

Решение: будем вычислять длину дуги по формуле $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$. Если $0\le\varphi<\frac{\pi}{4}$, то $\cos 2\varphi>0$. Поэтому $\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, а $\rho'=-\frac{a\sqrt{2}\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$;

$$\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=\sqrt{2a^2\left(\cos 2\varphi+\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Следовательно, $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=a\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=a\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}$.

В процессе решения мы получили интеграл, называемый эллиптическим интегралом первого рода. Такой интеграл можно с помощью специальных таблиц привести к виду, удобному для вычисления

Задача 3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

Решение: для функции $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ действительные значения получаются при $\cos 2\varphi\ge 0$, т.е. при $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ (правая ветвь лемнискаты) или $\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{5\pi}{4}$ (левая ветвь лемнискаты).

Искомую площадь поверхности можно вычислить по формуле $S=2\pi\cdot\int\limits_{L}ydl$. В силу симметрии тела вращения эта площадь равна удвоенной площади поверхности, образуемой вращением правой дуги. Поэтому $S=2\cdot 2\pi\cdot\int\limits_{L}ydl$.

Дифференциал длины дуги равен $dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=\sqrt{a^2\cos 2\varphi+\left(\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2}\,d\varphi=\frac{ad\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, а $y=\rho\sin\varphi=a\sin\phi\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Поэтому $S=2\cdot 2\pi\cdot\int\limits_{L}ydl=4\pi a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=$

$=4\pi a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4\pi a^2\left(\cos 0-\cos\frac{\pi}{4}\right)=2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ кв.ед.

Ответ: $S = 2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ (кв.ед.).

6 Несобственные интегралы первого и второго рода

Несобственные интегралы первого и второго рода. Понятие сходимости несобственного интеграла. Признак сравнения.

Несобственные интегралы представляют собой обобщение понятия определенного интеграла в различных направлениях, а именно, распространение интегрируемости функции по Риману на новые классы функций:

1) на функции, заданные на бесконечном промежутке;

2) на неограниченные функции.

Начнем с рассмотрения интеграла, распространенного на бесконечный промежуток или с несобственного интеграла первого рода.

6.1 Несобственный интеграл первого рода (первого типа)

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a;+\infty)$, т.е. для любых $x \geq a$ из этого промежутка, и при этом интегрируема в любой конечной его части $[a;\ A]$, так что интеграл $F(A)=\int\limits_a^A f(x)dx$ имеет смысл при любом $A>a$. Если при $A\to+\infty$ существует предел $I=\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$, то этот предел называется **несобственным интегралом первого рода** от функции $f(x)$ на промежутке от $[a;+\infty)$.

Интеграл I обозначают следующим образом:

$$I=\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx. \tag{1}$$

Если предел I существует и конечен, то в этом случае говорят, что интеграл (1) существует или сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в бесконечном промежутке $[a;+\infty)$.

Если предел I бесконечен или вовсе не существует, то о несобственном интеграле говорят, что он не существует или расходится.

Аналогично можно определить и интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $(-\infty;a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{a} f(x)dx, \quad (A'<a). \tag{2}$$

Если предел (2) бесконечен или вообще не существует, то интеграл расходится или не существует.

Аналогично определяется и интеграл вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}}\int_{A'}^{A} f(x)dx. \tag{3}$$

При этом, взяв любое вещественное a, можно воспользоваться свойством аддитивности определенного интеграла и записать: $\int_{A'}^{A} f(x)dx = \int_{A'}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{A} f(x)dx$.

Существование конечного предела при $A'\to-\infty$, $A\to+\infty$ для интеграла в левой части равенства, очевидно, равносильно существованию пределов (1) и (2) для интегралов в правой части равенства. Таким образом, интеграл с бесконечными нижним и верхним пределами можно определить и таким равенством: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, в предположении существования обоих интегралов справа. От выбора точки a это определение не зависит.

Замечание. а) В отличие от несобственных интегралов, обычный определенный интеграл Римана по конечному промежутку называют *собственным*.

б) Из свойств собственного интеграла и определения несобственного интеграла для любых вещественных a и c получим: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$.

в) Геометрически несобственный интеграл (1) от неотрицательной функции выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева – отрезком прямой $x = a$, снизу – осью Ox (см. рисунок 53). В случае сходящегося интеграла эта площадь является конечной, в случае расходящегося интеграла – бесконечной. Аналогичным будет геометрический смысл и для несобственных интегралов видов (2) и (3) при неотрицательной подынтегральной функции.

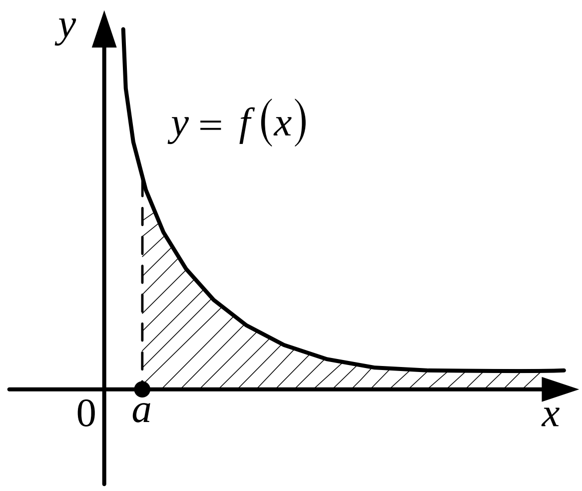

Рисунок 53

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{1+x^2}$. Областью определения этой функции является промежуток $(-\infty;+\infty)$. Она интегрируема в любом конечном промежутке $[A';A]$ своей области определения. Ее график представлен на рисунке 54:

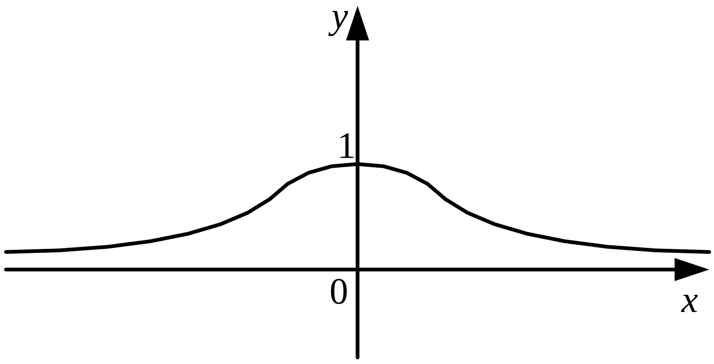

Рисунок 54

Найти несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$, $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. Определить их сходимость.

Решение: 1. Найдем несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$;

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A'\to-\infty}\int\limits_{A'}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A'\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{A'}^{0}=\lim_{A'\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}A'\right)=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится к числу $\frac{\pi}{2}$. Геометрически это означает, что площадь бесконечной криволинейной трапеции, расположенной слева от нуля (см. рисунок 61) равна $\frac{\pi}{2}$ кв. ед.

2. Найдем несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Можно заметить, что подынтегральная функция четная и, в соответствии с этим, ее график симметричен относительно оси *Oy* (см. рисунок 61). Поэтому, учитывая свойство четности функции и геометрический смысл несобственного интеграла первого типа от неотрицательной функции, заметим, что $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. Но, тем не менее, рассмотрим $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}A=\frac{\pi}{2}$. Итак, второй интеграл также сходится к числу $\frac{\pi}{2}$.

3. Таким образом, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$.

Все три рассмотренные нами интеграла сходятся.

Ответ: 1. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$; 2. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$; 3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$.

В этих примерах мы находили интеграл по конечному промежутку с помощью первообразной функции, а затем осуществляли переход к пределу. Можно объединить оба эти момента в одной формуле.

Пусть, например, функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a;+\infty)$, так, что для $f(x)$ в этом промежутке существует первообразная функция $F(x)$, и тогда по формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int\limits_a^A f(x)dx=F(A)-F(a)=F(x)\Big|_a^A.$$

Отсюда ясно, что несобственный интеграл (1) существует в том и только в том случае, если существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)=F(+\infty)$, и тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{a},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

если под $F(-\infty)$ подразумевать предел $\lim\limits_{A'\to-\infty}F(A')$.

Сама возможность вычисления двойной подстановки, связанная с существованием и конечностью фигурирующего в ней предела, свидетельствует уже о существовании интеграла.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 2. Установить, при каких значениях показателя λ существует несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}, \quad (a>0)$.

Решение: пусть $\lambda \neq 1$, тогда $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} \cdot x^{1-\lambda}\Big|_a^\infty$.

а) При $\lambda > 1$ степень x в первообразной функции будет отрицательной. Применим, далее, формулу Ньютона-Лейбница, и заметим, что такой интеграл будет иметь конечное значение, т.е. будет сходящимся.

б) При $\lambda < 1$ степень x в первообразной функции будет положительной. После подстановки в первообразную функцию пределов интегрирования замечаем, что значение интеграла равно ∞. Интеграл расходится.

В случае, когда $\lambda = 1$, имеем: $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty} \ln x\Big|_a^A = \infty$.

Таким образом, данный несобственный интеграл сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \le 1$.

Ответ: интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \le 1$.

Пример 3. Установить сходимость или расходимость интеграла: $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx$.

Решение: $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\cos x\Big|_0^A\right)$ – подстановка пределов интегрирования показывает, что предел не имеет смысла, поскольку $\cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$. Следовательно, интеграл расходится.

Ответ: интеграл расходится.

Аналогичный результат получим и с несобственным интегралом $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx$.

Итак, мы рассмотрели интегралы с бесконечными пределами. Их еще называют несобственными интегралами первого рода.

6.2 Несобственный интеграл второго рода (второго типа)

Несобственными интегралами второго рода называют интегралы от неограниченных функций на некотором промежутке. Как правило, на этом промежутке функции терпят разрыв второго рода.

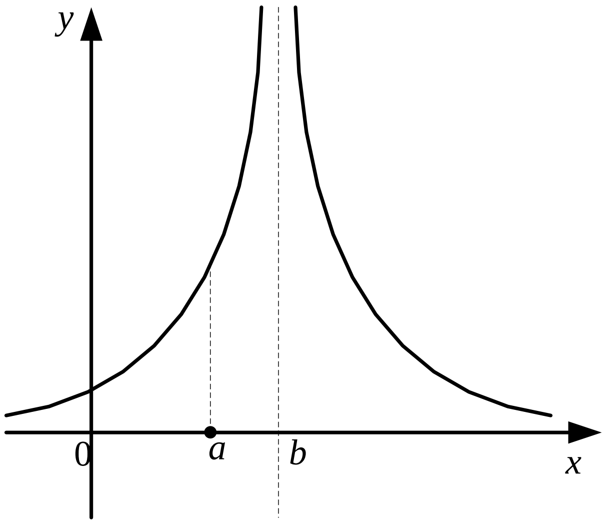

Рисунок 55

Определение. Пусть функция $f(x)$, определена в конечном промежутке $[a;b)$. Точка $x=b$ называется особой точкой, если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности этой точки, но ограничена на любом промежутке $[a;b-\varepsilon]$, заключенном в промежутке $[a;b)$ (см. рисунок 55). Предполагается, что на любом промежутке $[a;\, b-\varepsilon]$ функция $f(x)$ интегрируема. Тогда, как бы ни было мало $\varepsilon>0$, если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \tag{4}$$

то его называют **несобственным интегралом второго рода** и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{5}$$

В этом случае говорят, что интеграл (5) существует, или сходится. Если же предел (4) не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл (5) не существует или расходится.

Аналогично, если точка $x = a$ – особая точка, то несобственный интеграл второго рода будет определяться так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{6}$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точки $c \in [a;b]$, то по определению полагают:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

при условии существования каждого из интегралов в отдельности справа.

Наконец, если $x = a$ и $x = b$ являются одновременно особыми точками, то несобственный интеграл определяется так:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где c произвольная точка из промежутка $(a;b)$, при условии, что оба интеграла в правой части равенства существуют.

Пример 4. Найти несобственный интеграл второго рода $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение: функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – определена всюду, кроме точки $x = 1$. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$. Следовательно, данная функция ограничена и интегрируема в любой точке промежутка $[0; 1-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 1$, и точка $x = 1$ является особой точкой для данного интеграла. В силу определения несобственного интеграла второго рода, будем иметь: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0) = \frac{\pi}{2}$.

Данный несобственный интеграл сходится.

Ответ: интеграл сходится.

Пример 5. Установить, при каких значениях показателя λ несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ сходится, а при каких расходится.

Решение: заметим, что точка $x=0$ является особой точкой для данного интеграла. Поэтому, по определению интеграла (6), имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1-\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} = \begin{cases}\infty, & \text{при} \quad \lambda>1 \\ \dfrac{1}{1-\lambda}, & \text{при} \quad \lambda<1\end{cases}.$$

Рассмотрим случай когда $\lambda=1$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln 1-\ln\varepsilon) = \infty.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл сходится при $\lambda<1$ и расходится при $\lambda\geq 1$.

Ответ: несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ сходится при $\lambda<1$ и расходится при $\lambda\geq 1$.

6.3 Признак сходимости несобственного интеграла (признак сравнения)

Вопрос о сходимости несобственных интегралов рассмотрим на примере несобственного интеграла вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Для других несобственных интегралов рассуждения об их сходимости или о их расходимости будут аналогичными.

Сформулируем и докажем один из признаков сходимости несобственных интегралов.

Теорема 1 (Признак сравнения несобственных интегралов). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на полуинтервале $[a;+\infty)$ и удовлетворяют на нем условию $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{7}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \tag{8}$$

причем, $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$. Из расходимости интеграла (8) следует расходимость интеграла (7).

Доказательство: так как по условию теоремы интеграл (7) сходится, т.е. имеет конечный предел, то это означает, что существует число $M > 0$ такое, что для любого $R > a$ выполняется неравенство $\Phi(R) = \int_a^R g(x)dx \le M$. Тогда, учитывая это неравенство и свойство сравнения определенного интеграла (указать свойство), будем иметь: $\int_a^R f(x)dx \le \int_a^R g(x)dx \le M$. Последнее неравенство означает, что функция $P(R) = \int_a^R f(x)dx$ монотонно возрастает и ограничена, следовательно, имеет конечный предел при $R \to +\infty$. Таким образом, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если интеграл (8) расходится, то допустив сходимость интеграла (7), получим по только что доказанному свойству сходимость интеграла (8), а это противоречит условию. Следовательно, интеграл (7) также расходится.

Что и требовалось доказать.

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Решение: при $x \geq 1$ имеем: $\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$. В примере 2 пункта 15.1 было показано, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ является сходящимся ($a=1; \lambda=2$), причем $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1$.

Таким образом, данный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ тоже сходится, в силу теоремы 1, и при этом его значение будет меньше, либо равно единицы.

Ответ: интеграл сходится и его значение меньше или равно 1.

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$.

Решение: для любого $x \geq 1$ будем иметь: $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. В примере 2 пункта 15.1 было показано, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ является расходящимся $\left(a=1; \lambda = \frac{1}{2}\right)$, тем не менее, рассмотрим $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^{\infty} = \infty$.

Таким образом, если меньший интеграл расходится, то больший интеграл расходится тем более, в силу теоремы 1.

Ответ: интеграл $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$ расходится.

Теорема 2. Если в промежутке $[a; +\infty)$ функция $f(x)$ меняет знак и $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится также и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Примем эту теорему без доказательства.

В этом случае последний интеграл называют ***абсолютно сходящимся***. Если же сам интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то его называют ***условно сходящимся***.

Пример 8. Исследовать сходится ли интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.

Решение: подынтегральная функция является знакопеременной на всем промежутке интегрирования. Поэтому можно заметить, что для любого $x \geq 1$ выполняется: $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{x^3}$. С другой стороны $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\left.\frac{1}{2x^2}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{2}$. Замечаем, что интеграл от большей функции сходится, следовательно, интеграл от меньшей функции, а, именно, $\int\limits_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$, тоже сходится.

Таким образом, в силу теоремы 2, данный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ является сходящимся.

Ответ: интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ сходится.

Замечание. В начале данного пункта уже было сказано, что для других несобственных интегралов рассуждения такого рода будут аналогичными. Так, например, для интеграла второго рода вида (6), признак сравнения будет формулироваться следующим образом: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на полуинтервале $(a;b]$ и для всех точек x в некоторой окрестности точки a выполняются условия $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

6.4 Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Решение: дан несобственный интеграл первого рода, в котором бесконечны как нижний, так и верхний пределы интегрирования. Поэтому в соответствии с определением имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} e^x\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty}(e^0 - e^a) + \lim_{b\to+\infty}(e^b - e^0) = 1 + (+\infty) = +\infty.$$

Таким образом, замечаем, что при разбиении данного интеграла на два несобственных интеграла первый интеграл имеет конечный предел, и, соответственно, сходится, а второй интеграл имеет предел равный бесконечности, следовательно, он расходится. В сумме, получившиеся пределы дают бесконечность и, как следствие, данный интеграл расходится.

Геометрически такая ситуация имеет следующую трактовку (см. рисунок 56): данный интеграл от функции $y = e^x$ определяет бесконечную криволинейную трапецию с бесконечной площадью. Причем, если разбить эту трапецию на две части прямой $x = 0$, то левая бесконечная трапеция имеет конечную площадь, равную 1, а правая бесконечная трапеция имеет бесконечную площадь.

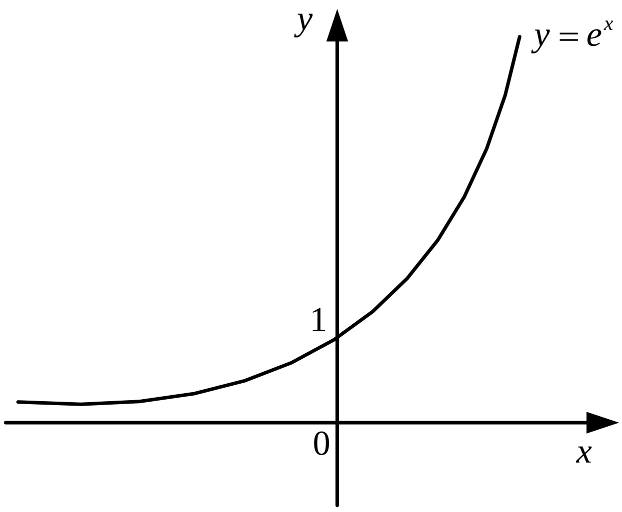

Рисунок 56

Ответ: интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ расходится.

Задача 2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$.

Решение: дан несобственный интеграл первого рода, поэтому в соответствии с определением имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b xe^{-x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^b e^{-x^2} d(-x^2) = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x^2}\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл сходится.

Ответ: $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$.

Задача 3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$.

Решение: в данном случае также имеем несобственный интеграл первого рода. Рассмотрим его в соответствии с определением, но, чтобы сократить вычисления под интегралом, найдем первообразную функцию данной подынтегральной функции отдельно. Итак,

$$\int \frac{dx}{x^2+x} = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \right) dx = \begin{bmatrix} A(x+1) + Bx = 1 & \\ \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \end{bmatrix} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + C;$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2+x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|x| - \ln|x+1| \Big|_1^b \right) = \lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| \Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\frac{b}{b+1} - \ln\frac{1}{2} \right) = 0 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Итак, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ сходится.

Ответ: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \ln 2$.

Задача 4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_0^1 \ln x dx$.

Решение: в данном случае имеем несобственный интеграл второго рода. Подынтегральная функция $y = \ln x$ не ограничена в окрестности точки $x = 0$, то есть «обращается в бесконечность». Поэтому точка $x = 0$ – это особая точка. На любом же отрезке $[0+\varepsilon; 1]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому по определению имеем:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \int_\varepsilon^1 \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{bmatrix} \lim_{\varepsilon\to0+} \left(x \ln x \Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+} \left(-\varepsilon \ln \varepsilon - (1-\varepsilon) \right) = 1.$$

Таким образом, несобственный интеграл второго рода $\int_0^1 \ln x dx$ сходится.

Ответ: $\int\limits_0^1 \ln x dx = 1$.

Задача 5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение: в данном случае имеем несобственный интеграл второго рода. Подынтегральная функция $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ не ограничена в окрестности точки $x = 3$, то есть «обращается в бесконечность». Поэтому точка $x = 3$ – это особая точка. На любом же отрезке $[0; 3-\varepsilon]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому по определению имеем:

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0-} \int\limits_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0-} \arcsin\frac{x}{3}\Bigg|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0-}\left(\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3} - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, несобственный интеграл второго рода $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ сходится.

Ответ: $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

Задача 6. Исследовать несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ на сходимость.

Решение: в данном случае имеем несобственный интеграл второго рода. Подынтегральная функция $y = \frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ не ограничена в окрестности точки $x = 0$, то есть «обращается в бесконечность». Поэтому точка $x = 0$ – это особая точка. На любом же отрезке $[0+\varepsilon; 1]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Для исследования сходимости данного интеграла можно использовать признак сравнения. Замечаем, что на интервале $[0+\varepsilon; 1]$ имеем следующее соответствие: $0 < \frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{x^{1/3}}$. Но при этом несобственный интеграл от большей функции $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ при $\lambda = \frac{1}{3} < 1$ является сходящимся, следовательно, несобственный интеграл от меньшей функции также будет сходиться.

Таким образом, несобственный интеграл второго рода $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$ сходится.

Ответ: интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$ сходится.

Задача 7. Исследовать несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{3 + x^2 + 2x^3}$ на сходимость.

Решение: функция $\frac{1}{3 + x^2 + 2x^3} > 0$ на всем промежутке $[1; +\infty)$ и сравнима на этом промежутке с положительной функцией $\frac{1}{x^3} > 0$, причем $\frac{1}{3 + x^2 + 2x^3} < \frac{1}{x^3}$. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ при $\lambda = 3 > 1$ является сходящимся, следовательно, несобственный интеграл от меньшей функции также будет сходиться.

Таким образом, несобственный интеграл первого рода $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{3 + x^2 + 2x^3}$ сходится.

Ответ: интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{3 + x^2 + 2x^3}$ сходится.

Задача 8. Исследовать несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ (*интеграл Френеля*) на сходимость.

Решение: перепишем данный интеграл с помощью подстановки $x = \sqrt{t} \Rightarrow x^2 = t,\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, причем, замечаем, что данная подстановка сохраняет пределы интегрирования по переменной t такие же, как и по переменной x. Тогда $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$. Представим стоящий справа интеграл в виде суммы:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Первый интеграл является собственным, так как $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$. Рассмотрим второй интеграл.

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{\sqrt{t}}; & dv = \sin t dt \\ du = \frac{-dt}{2t^{3/2}}; & v = -\cos t \end{bmatrix} = -\left.\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right|_{\pi/2}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}dt.$$

Замечаем, что в последней сумме первое слагаемое конечно, так как $\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{cost}{\sqrt{t}} = 0$. Второе слагаемое является сходящимся интегралом. Это определено тем, что подынтегральная функция является знакопеременной на всем промежутке интегрирования и для любого $t \geq 1$ выполняется: $\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \leq \left|\frac{1}{t^{3/2}}\right| = \frac{1}{t^{3/2}}$. С другой стороны интеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ является сходящимся, следовательно, интеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right|dt$ тоже сходится и в силу теоремы 2, интеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}dt$ является сходящимся.

Таким образом, интеграл $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ сходится.

Ответ: интеграл $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ сходится.

Задача 9. Исследовать несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ на сходимость.

Решение: функция $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ – определена всюду, кроме точки $x=1$. Следовательно, данная функция ограничена и интегрируема в любой точке промежутка $[0;1-\varepsilon]$, где $0<\varepsilon<1$, и точка $x=1$ является особой точкой для данного интеграла. Для исследования этого несобственного интеграла 2-го рода на сходимость представим подынтегральную функцию в следующем виде:

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

Можно заметить, что на всем промежутке $[0;1)$ функция сравнима с положительной на этом промежутке функцией $p(x)=\frac{1}{(1-x)^{1/3}}$. Рассмотрим интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0-}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0-}-(1-x)^{2/3}\Big|_0^{1-\varepsilon}=1.$

Интеграл от большей функции $p(x)=\frac{1}{(1-x)^{1/3}}$ является сходящимся, следовательно, интеграл от меньшей функции $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ является сходящимся тем более.

Ответ: интеграл $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ сходится.

6.5 Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение несобственного интеграла первого рода. Приведите примеры.

2. Какой несобственный интеграл первого рода является сходящимся, а какой расходящимся?

3. В чем заключается геометрический смысл сходящегося и расходящегося несобственного интеграла первого рода? Приведите примеры.

4. Сформулируйте определение несобственного интеграла второго рода. Приведите примеры.

5. Какой несобственный интеграл второго рода является сходящимся, а какой расходящимся?

6. Сформулируйте признак сравнения несобственных интегралов первого рода и докажите его.

7. Приведите примеры, в которых применяется признак сравнения несобственных интегралов первого рода.

8. Как будет сформулирован признак сравнения несобственных интегралов второго рода? Приведите примеры.

9. Сформулируйте признак абсолютной сходимости несобственного интеграла первого рода. Приведите примеры.

10. Какие несобственные интегралы являются абсолютно сходящимися, а какие условно сходящимися?

6.6 Задачи для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x} dx$; 2. $\int\limits_0^{+\infty} arctgx dx$;

3. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$; 4. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$;

5. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x^4}$; 6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12}$;

7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$; 8. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$;

9. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; 10. $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{(x-3)^2}$;

11. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$;

12. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1-\cos 2x}$;

13. $\int_{0}^{1/4} \frac{dx}{x \ln x}$;

14. $\int_{0}^{\pi/4} ctgx dx$;

15. $\int_{0}^{1} \ln^2 x dx$;

16. $\int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$.

Исследовать несобственные интегралы на сходимость с помощью признаков сравнения:

1. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}+1}$;

2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{arctgx}{x} dx$;

3. $\int_{1}^{+\infty} \frac{2+3\cos x}{x^4} dx$;

4. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+\cos^2 x}$;

5. $\int_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^6+2}}$;

6. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+8}}$;

7. $\int_{0}^{2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

8. $\int_{0}^{4} \frac{\cos x}{\sqrt{4-x}} dx$;

9. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;

10. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\ln x}$.

7 Контрольная работа по теме «Определенный и несобственный интегралы»

1 уровень

Вариант 1

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^4\sqrt{2x-1}dx$;

2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x dx$;

3. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x}dx$;

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$.

5. Найти длину дуги кривой $r = 6(1+\sin\varphi)$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Вариант 2

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_{1}^{9} \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$;

2. $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$;

3. $\int\limits_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$;

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

5. Найти длину дуги кривой $r = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

2 уровень

Вариант 1

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$;

2. $\int\limits_{0}^{1} 4x \cdot \arcsin x dx$;

Исследовать на сходимость интегралы:

Вариант 2

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x-21}$;

2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x \cdot \mathrm{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

Исследовать на сходимость интегралы:

3. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^6+2}}$;

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=\frac{1}{3}\cos t, \\ y=2\sin t. \end{cases}$

5. Найти объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $y=4$ вокруг прямой $x=2$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6+12}$;

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$. $y=3$ $(y\geq 3)$.

5. Найти объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-1$, $y=0$ вокруг прямой $y=-1$.

8 Вопросы к коллоквиуму по теме «Определенный и несобственный интегралы»

1 Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Ограниченность интегрируемой функции.

2 Свойства определенного интеграла (с доказательствами).

3 Геометрический смысл интегральных сумм и определённого интеграла.

4 Суммы Дарбу. Их свойства.

5 Интеграл Римана. Условие существования определенного интеграла.

6 Формула Ньютона-Лейбница.

7 Вычисление определенного интеграла. Основные методы интегрирования. Особенности применения замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования «по частям» для определённого интеграла.

8 Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Его непрерывность.

9 Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу.

10 Теорема о среднем значении определенного интеграла и следствия из нее.

11 Площадь криволинейной трапеции.

12 Отыскание объема тела вращения при помощи определённого интеграла.

13 Отыскание длины дуги плоской кривой при помощи определённого интеграла.

14 Отыскание площади поверхности вращения при помощи определённого интеграла.

15 Несобственные интегралы 1-го рода.

16 Несобственные интегралы 2-го рода.

17 Признак сравнения для сходимости несобственного интеграла.

Список использованных источников

1 Боголюбов, А.Н. Математики. Механики. Биографический справочник / А.Н. Боголюбов – Киев: Наукова думка, 1983. – 168 с.

2 Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский – М.: Наука, 1984. – 431 с.

3 Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин – М.: Физматлит, 2001. – 480 с.

4 Гусак, А.А. Пособие к решению задач по высшей математике / А.А. Гусак – Минск: Изд. БГУ, 1973. – 532 с.

5 Гусак, А.А. Справочное пособие к решению задач. Математический анализ и дифференциальные уравнения / А.А. Гусак– Минск: НТООО «ТетраСистемс», 2003. – 414 с.

6 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч.: учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Д. Кожевникова – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»; Мир и Образование, 2003. – Ч. 1.

7 Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович – М.: Наука, 1990. – 516 с.

8 Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб. пособие для студентов высших технических учебных заведений /Г.С. Бараненков, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002.

9 Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И.Запорожец – М.: Высшая школа, 1965.

10 Зубова, И.К. Исследование функции методами дифференциального исчисления: методические указания / И.К. Зубова, О.В. Острая; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2003 – 24 с.

11 Зубова, И.К. Основы математического анализа (модуль «Введение в математический анализ»): самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н. Павленко; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2011 – 149 с.

12 Зубова, И.К. Основы математического анализа (модуль «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»): самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н. Павленко; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2011 – 170 с.

13 Иванова, Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного / Е.Е. Иванова – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. – 407 с.

14 Ильин, В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, И.Г. Позняк – М.: Наука, 1982. – 616 с.

15 Ким, В.С. Исследование функций: методические указания / В.С. Ким – Оренбург: Политехнический институт, 1988. – 15 с.

16 Каплан, И.А. Практикум по высшей математике: в 2 т.: учебное пособие / И.А. Каплан, В.И. Пустынников – М.: Эксмо, 2006. – Т.1. –576 с.

17 Козлова, В.А. Саморепетитор по математике / В.А. Козлова, Г.Г. Левитас – М.: Школа – Пресс, 1996. – 272 с.

18 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев – М.: Наука, 1989.

19 Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: сборник задач по математическому анализу : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабулин; под ред. Л.Д. Кудрявцева – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т.1.

20 Кузнецов, Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л.А. Кузнецов – СПб.: Издательство «Лань», 2005.

21 Лихолетов, И.И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И.И. Лихолетов, И.П. Мацкевич – Минск: «Вышэйшая школа», 1969. – 454 с.

22 Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко – М.: Рольф, 2001. – 576 с.

23 Марон, И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной) / И.А. Марон – М.: Издательство «Наука», 1970. – 400 с.

24 Острая, О.В. Интегральное исчисление функции одной переменной (неопределённый интеграл): методические указания / О.В. Острая, Н.В. Максименко − Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009 – 29 с.

25 Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов – М.: Физматгиз, 1961. – 748 с.

26 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2004. – Ч.1.– 288 с.

27 Понтрягин, Л.С. Математический анализ для школьников / Л.С. Понтрягин – М.: Наука, 1983. – 96 с.

28 Рассоха, Е.Н. Неопределенный интеграл: методические указания / Е.Н. Рассоха; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ООО "Экспресс-печать", 2012. – 42 с.

29 Садовничий, В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 т. / В.А. Садовничий – М.: Высшая школа, 2002. – Т.1. – 725 с.

30 Сборник задач по курсу высшей математики: учеб. пособие / П.Е. Дюбюк [и др.]; под ред. П.Е. Дюбюка, Г.И. Кручковича. – 2-е изд. – М.: Высш. Шк., 1965. – 591 с.

31 Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц – М.: Наука, 1970. – Т.1. – 440 с.

32 Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. В 3 т.: учебное пособие для вузов / В.Д. Черненко – СПб.: Политехника, 2003. – Т. 1. – 703 с.

33 Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998.

Учебное пособие

Инна Каримовна Зубова
Ольга Викторовна Острая
Лариса Михайловна Анциферова
Елена Николаевна Рассоха

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (МОДУЛЬ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»)

ISBN 978-5-7410-1851-4
9 785741 018514