Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (МОДУЛЬ «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»)

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Оренбург
2017

УДК 517.31(075.8)
ББК 22.161.1я73
О75

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент И.В. Игнатушина

Авторы: И.К. Зубова, О.В. Острая, Л.М. Анциферова, Е.Н. Рассоха

О75 Основы математического анализа (модуль «Неопределенный интеграл»): учебное пособие / И.К. Зубова, О.В. Острая, Л.М. Анциферова, Е.Н. Рассоха; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2017 – 119 с.
ISBN 978-5-7410-1794-4

Самоучитель «Основы математического анализа» представляет собой комплекс методических материалов, который должен помочь студенту в самостоятельной работе над курсом математического анализа. Этот самоучитель состоит из нескольких пособий. Данное пособие посвящено третьей части курса, изучающейся во втором семестре, где рассматриваются основные понятия интегрального исчисления функции одной переменной. Это понятия первообразной функции, неопределённого интеграла, основные методы интегрирования. Наряду с таблицей основных интегралов и анализом главных методов интегрирования представлен подробный обзор приёмов, применяющихся при интегрировании различных функций.

Кроме теоретических сведений, представлены типичные задачи с решениями по каждой теме, вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения, а также перечень теоретических вопросов к экзамену по модулю «Неопределенный интеграл». В связи с этим самоучитель рекомендуется для самостоятельной работы студентов.

Самоучитель предназначен для студентов, обучающихся по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии, но может использоваться всем обучающимся по физико-математическим, естественнонаучным и инженерно-техническим направлениям подготовки.

УДК 517.31(075.8)
ББК 22.161.1я73
ISBN 978-5-7410-1794-4

Содержание

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие можно рассматривать как следующую часть самоучителя «Основы математического анализа», изданного в 2011 г. (модули «Введение в математический анализ»: самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н.Павленко; Оренбург: ООО «НикОс», 2011. – 151 с.; «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»: самоучитель/ И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н.Павленко; Оренбург: ООО «НикОс», 2011. – 173 с.; «Функции нескольких переменных»: самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н.Павленко, Е.Н.Рассоха; Оренбург: ООО «НикОс», 2011. – 106 с.). Комплекс методических материалов, собранных в этом издании, должен помочь студенту в самостоятельной работе над курсом математического анализа. В предлагаемой части самоучителя излагаются основы интегрального исчисления функции одной переменной. После изложения теоретических сведений в пособии представлены разработки к практическим занятиям по каждой теме. В каждой такой разработке рассмотрены типичные задачи с решениями. Затем даются вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения, которые можно предложить в качестве домашнего задания. В конце пособия составлен перечень теоретических вопросов к зачёту или коллоквиуму по модулю «Неопределенный интеграл». Эти вопросы обычно входят в программу экзамена по математическому анализу во втором семестре. Представлено также два варианта контрольной работы по теме «Неопределенный интеграл».

Введение

Дифференциальное и интегральное исчисление представляет собой основной аппарат высшей математики, необходимый для работы с переменными величинами. В нем, кроме алгебраических операций, выполняющихся над функциями, вводятся ещё две операции – дифференцирование и интегрирование. Основные сведения, касающиеся дифференцирования функций одной и нескольких переменных, изложены в двух предыдущих частях самоучителя.

Далее мы приступим к изучению интегрирования функций одной переменной – операции, обратной дифференцированию. Интегральное исчисление функции одной переменной не только само по себе имеет многочисленные практические приложения, но и необходимо при изучении целого ряда разделов высшей математики («Интегральное исчисление для функций многих переменных», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы», «Векторный анализ» и др.).

1 Первообразная функция. Неопределенный интеграл

Первообразная функция для функции, заданной на некотором промежутке. Неопределённый интеграл, его свойства. Интегрирование – операция, обратная дифференцированию. Непосредственное интегрирование.

1.1 Введение понятий первообразной функции и неопределенного интеграла

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на этом интервале и если $F'(x)=f(x)$ при любом $x\in(a;b)$.

Пример 1. Функция $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ – первообразная для функции $f(x)=x^2$ на интервале $(-\infty;+\infty)$. Проверим это, воспользовавшись введенным определением: находим производную заданной функции. $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=\dfrac{3x^2}{3}=x^2$. Это равенство справедливо $\forall x\in(-\infty;+\infty)$. Таким образом, функция $F(x)$ дифференцируема на всей числовой оси и $F'(x)=f(x)$ при любом $x\in(-\infty;+\infty)$.

Теорема 1. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то функция $F(x)+C$ – также первообразная для функции $f(x)$ на этом интервале. Здесь C – постоянная, т.е. любое число.

Доказательство: найдем производную функции $F(x)+C$. $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$, и это равенство верно $\forall x\in(a;b)$. Что и требовалось доказать.

Пример 2. Функция $F(x) = \ln x$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на интервале $(0; +\infty)$ так как $D(F(x)) = (0; +\infty)$, на этом промежутке функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Теорема 2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то $F_1(x) - F_2(x) = C \ \ \forall x \in (a; b)$, где C – некоторая постоянная.

Доказательство: по условию $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b)$. Составим функцию $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Очевидно, что $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\forall x \in (a; b)$. Пользуясь теоремой Лагранжа, можно доказать, что если функция имеет на интервале $(a; b)$ производную, равную нулю, то она постоянна на этом интервале. Проведите это доказательство самостоятельно, и тогда станет ясно, что $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Из этих двух теорем следует, что если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то любая другая первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ имеет вид: $\Phi(x) = F(x) + C$. Этим равенством, следовательно, выражается вся совокупность первообразных заданной функции.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$; функция $f(x)$ тогда называется **подынтегральной функцией**, а произведение $f(x)dx$ – **подынтегральным выражением**.

Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то, согласно сказанному выше, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ для $\forall x \in (a; b)$, где C – произвольная постоянная.

Операцию нахождения неопределенного интеграла называют **интегрированием** функции $f(x)$. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то подынтегральное выражение $f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF(x)$ является дифференциалом первообразной функции $F(x)$.

Механический смысл интегрирования. По известной скорости движения материальной точки в каждой момент времени находим закон этого движения.

Геометрический смысл интегрирования. Зная значение тангенса угла наклона касательной к кривой в каждой точке промежутка $(a;b)$, находим эту кривую (график функции $y = F(x)$). Выражение $y = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, задает соответствующее семейство кривых (рисунок 1).

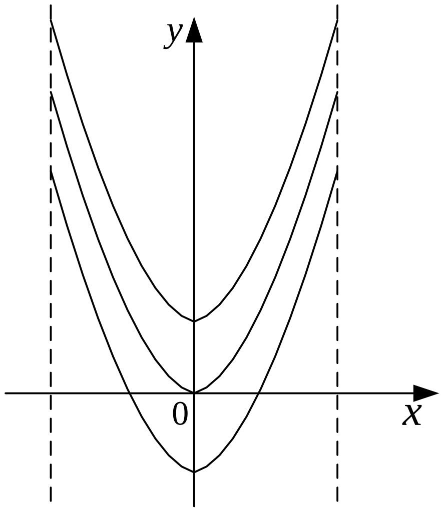

Рисунок 1.

1.2 Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла есть подынтегральная функция, т.е. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла есть подынтегральное выражение, т.е. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Доказательство: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, отсюда $df(x)dx = d(F(x)) =$

$= (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)\,dx$. Что и требовалось доказать.

3. Интеграл от дифференциала функции $F(x)$ равен $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Доказательство: $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx \overset{\text{по опред.}}{=} F(x) + C$, где C – произвольная постоянная. Что и требовалось доказать.

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла, т.е. $\int A \cdot f(x)\,dx = A \cdot \int f(x)dx + C$.

(Докажите это свойство самостоятельно).

5. Интеграл от алгебраической суммы двух и более функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx + C$, где C – постоянная.

Доказательство: докажем равенство для случая суммы двух функций. $\left(\int \left(f(x) + g(x)\right)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' \overset{\text{по опред.}}{=} f(x) + g(x)$. С другой стороны, $\left(\int \left(f(x) + g(x)\right)dx\right)' = f(x) + g(x)$. Таким образом, функция $\int f(x)dx + \int g(x)dx$ и функция $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x) + g(x)$. Но тогда они должны отличаться только на некоторую постоянную C: $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C$. Что и требовалось доказать.

6. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Доказательство: $\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a} \cdot a \cdot F'(ax+b) = f(ax+b)$. Что и требовалось доказать.

1.3 Таблица основных интегралов

Вспомните и выпишите равенства, составляющие таблицу производных важнейших элементарных функций, а затем, основываясь на них, самостоятельно составьте таблицу основных интегралов. Сравните таблицу, получившуюся у Вас, с таблицей, приведенной ниже.

1. $\int 0\cdot dx = C$;

2. $\int dx = x + C$;

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$;

4. $\int x^{-1}\,dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C\ \ (x \neq 0)$;

5. $\int a^{x}\,dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C\ \ (a > 0, a \neq 1)$;

6. $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ (на интервале, где подынтегральная функция непрерывна);

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (на интервале, где подынтегральная функция непрерывна);

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases},\quad -1 < x < 1$;

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C,\ (|x| > 1)$;

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C,\ (|x| > 1)$;

14. $\int \dfrac{dx}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C,\quad (a \neq 0)$;

15. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C,\quad (a \neq 0)$.

Часть формул этой таблицы непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию, и таблицы производных. Справедливость остальных формул легко проверить дифференцированием.

1.4 Примеры непосредственного интегрирования

Непосредственным интегрированием будем называть интегрирование, выполняемое по таблице основных интегралов с применением доказанных выше свойств неопределенного интеграла.

Пример 1. Найти интеграл: $\int\left(x^5-3x^4-7x+5\right)dx$.

Решение: $\int\left(x^5-3x^4-7x+5\right)dx=\int x^5dx-3\int x^4dx-7\int x\,dx+5\int dx=\frac{x^6}{6}-3\frac{x^5}{5}-$

$-7\frac{x^2}{2}+5x+C$.

Ответ: $\int\left(x^5-3x^4-7x+5\right)dx=\frac{x^6}{6}-3\frac{x^5}{5}-7\frac{x^2}{2}+5x+C$.

Таким образом, многочлен интегрируется непосредственно. Постоянные, входящие, по определению, в каждый из неопределенных интегралов, составляющих сумму, объединяются в одну произвольную постоянную.

Пример 2. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$.

Решение: эту задачу также можно решить непосредственным интегрированием. Для этого нужно к единице, стоящей в числителе дроби, прибавить взаимно уничтожающиеся слагаемые x^2 и $-x^2$, и затем, проделывая алгебраические преобразования с подынтегральной функцией, мы сможем её проинтегрировать.

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2}=\int\frac{x^2+1-x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)}-\int\frac{x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2}-$$

$$-\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-\operatorname{arctg}x+C=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{x^4+x^2}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C$.

1.5 Примеры решения задач

Задача 1. Найти неопределенные интегралы: а) $\int \frac{dx}{x^5}$; б) $\int \sqrt{x}\,dx$; в) $\int \sqrt[3]{x}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$.

Решение: применим формулу 3 таблицы основных интегралов, получим:

а) $\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$;

б) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$;

в) $\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \int x^{-\frac{1}{5}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{5}+1}}{-\frac{1}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C = \frac{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}{4} + C$.

Ответ: а) $\int \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4x^4} + C$;

б) $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$;

в) $\int \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \frac{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}{4} + C$.

Задача 2. Найти неопределенные интегралы: а) $\int \sqrt{x+2}dx$; б) $\int \frac{xdx}{x^2+2}$; в) $\int (x+3)^2dx$.

Решение: а) *I способ:* используем свойство 6 неопределенного интеграла $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, получаем: $\int \sqrt{x+2}\,dx = \int (x+2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C =$

$= \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x+2)^3}+C$.

II способ: найдем дифференциал функции $y = x+2$ по формуле $dy = y'(x)dx$, $d(x+2) = dx$, тогда $\int \sqrt{x+2}\,dx = \int (x+2)^{\frac{1}{2}}d(x+2) = \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C = \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C =$

$= \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x+2)^3}+C$.

б) найдем дифференциал функции $y = x^2+2$ по формуле $dy = y'(x)dx$, $d(x^2+2) = 2xdx$, тогда $\int \frac{xdx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2xdx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+2)+C$.

в) *I способ:* $\int (x+3)^2dx = \int (x^2+6x+9)dx = \int x^2dx + \int 6x\,dx + \int 9\,dx = \int x^2\,dx +$

$+6\int x\,dx + 9\int dx = \frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}+9x+C = \frac{x^3}{3}+3x^2+9x+C$.

II способ: найдем дифференциал функции $y = x+3$ по формуле $dy = y'(x)dx$, $d(x+3) = dx$, тогда $\int (x+3)^2dx = \int (x+3)^2d(x+3) = \frac{(x+3)^3}{3}+C_1 =$

$= \frac{x^3+3x^2\cdot 3+3x\cdot 9+27}{3}+C_1 = \frac{x^3+9x^2+27x+27}{3}+C_1 = \frac{x^3}{3}+3x^2+9x+9+C_1$, пусть $C = C_1+9$, тогда $\int (x+3)^2dx = \frac{x^3}{3}+3x^2+9x+C$.

Ответ: а) $\int \sqrt{x+2}dx = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x+2)^3}+C$;

б) $\int \frac{xdx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+2)+C$;

в) $\int (x+3)^2 dx = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x + C$.

Задача 3. Найти неопределенные интегралы: а) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$;

б) $\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\, dx$.

Решение: представляя интеграл алгебраической суммы в виде суммы интегралов слагаемых, вынося постоянные множители за знаки интегралов и применяя формулу 3 таблицы основных интегралов, получим:

$$\text{а) } \int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \sqrt[3]{x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{\frac{2}{3}} dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} +$$

$$+ \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

б) Производя почленное деление числителя на знаменатель, получим:

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\, dx = \int \left(\frac{2}{\sqrt{x^3}} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} + \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx = 2\int x^{-\frac{3}{2}} dx + 3\int x^{-\frac{5}{6}} dx + 5\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 3 \cdot \frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1} + 5 \cdot \ln|x| + C = 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} + 5 \cdot \ln|x| + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18 \cdot \sqrt[6]{x} +$$

$$+ 5 \cdot \ln|x| + C.$$

Ответ: а) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$;

б) $\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\, dx = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18 \cdot \sqrt[6]{x} + 5 \cdot \ln|x| + C$.

Задача 4. Найти неопределенный интеграл: а) $\int \frac{dx}{3x+5}$; б) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx$.

Решение: а) используем свойство 6 неопределенного интеграла $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, получаем: $\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\ln|3x+5|+C$.

б) найдем дифференциал функции $y = x^2+3x+5$ по формуле $dy = y'(x)dx$, $d\left(x^2+3x+5\right) = (2x+3)dx$, тогда $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx = \int \frac{d\left(x^2+3x+5\right)}{x^2+3x+5} = \ln\left(x^2+3x+5\right)+C$.

Ответ: а) $\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\ln|3x+5|+C$; б) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx = \ln\left(x^2+3x+5\right)+C$.

Задача 5. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

Решение: для нахождения интеграла заменим единицу в числителе подынтегральной функции выражением $\sin^2 x+\cos^2 x$ и применим формулы 9 и 10 таблицы основных интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$.

1.6 Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Сформулируйте и докажите две теоремы о первообразных функциях.
3. Дайте определение неопределенного интеграла.
4. Перечислите и докажите все свойства неопределенного интеграла.
5. Напишите по памяти таблицу основных неопределенных интегралов.
6. Что такое непосредственное интегрирование и когда оно возможно?

1.7 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \sqrt[7]{x^5}\,dx$;

б) $\int \left(2x^8-5x^5-1\right)dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2}$;

г) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$;

д) $\int \frac{2-x+x^2}{3x} dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$;

б) $\int \left(2e^x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$;

в) $\int (2\sin x - 3\cos x) dx$;

г) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$;

д) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$.

2 Метод замены переменного в неопределенном интеграле

Первый метод решения задач, не допускающих непосредственного интегрирования. Две его разновидности − метод подведения под знак дифференциала и метод подстановки.

2.1 Понятие об интегрировании посредством замены переменного

Если непосредственное интегрирование невозможно, то есть если интеграл не является табличным или не представляется как алгебраическая сумма табличных интегралов, то нередко приходится проводить замену переменных или подстановку.

Пусть требуется найти интеграл

$$\int f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Переменную x в нем можно заменить переменной t, связанной с x подходящей формулой

$$x=\varphi(t); \qquad (2)$$

из этой формулы определим $dx=\varphi'(t)dt$ и подставим в (1):

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\int\psi(t)\,dt. \qquad (3)$$

Ясно, что применять этот метод целесообразно тогда, когда последний интеграл находится легко.

Отыскав его, нужно преобразовать результат к переменной x, пользуясь исходной формулой (2).

Пример 1. Найти интеграл: $\int\frac{2x}{x^4+3}dx$.

Решение: пусть $x^2=t$, тогда $2x\,dx=dt$. $\int\frac{2x}{x^4+3}dx=\int\frac{dt}{t^2+3}=\int\frac{dt}{3\left(\frac{t^2}{3}+1\right)}$; пусть

теперь $u=\frac{t}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\frac{t^2}{3}+1}=\frac{1}{3}\int\frac{\sqrt{3}\,du}{u^2+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}u+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$.

Ответ: $\int\frac{2x}{x^4+3}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$.

Используя замену переменной, мы получаем еще одну формулу для таблицы интегралов:

12 «а». $\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C$.

Используя аналогичную замену переменной можно получить еще несколько формул:

11 «а». $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left\langle\begin{matrix}\text{Замена}:\frac{u}{a}=t\\ dt=\frac{du}{a};\,du=a\,dt\end{matrix}\right\rangle=\int\frac{a}{a\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t+C=$

$$=\arcsin\frac{u}{a}+C\,,\ -|a|<u<|a|\,.$$

13 «а». $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\left\langle\begin{array}{c}\textit{Табличный интеграл:}\\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|+C\end{array}\right\rangle=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{x}{a}=t\\ dt=\frac{dx}{a}\Rightarrow dx=adt\end{array}\right\rangle=\frac{1}{a}\int\frac{a}{\sqrt{t^2+1}}dt=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C_1=$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+C_1=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C_1=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-$$

$$\underbrace{-\ln a+C_1}_{C}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C\,.$$ (Эту формулу называют «длинным логарифмом»).

15«а». $$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\left\langle\begin{array}{c}\text{Табличный интеграл}\\ \int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C\end{array}\right\rangle=\int\frac{du}{a^2\left(1-\left(\frac{u}{a}\right)^2\right)}=\left\langle\begin{array}{c}d\left(\frac{u}{a}\right)=\frac{du}{a}\\ du=a\,d\left(\frac{u}{a}\right)\end{array}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{u}{a}}{1-\frac{u}{a}}\right|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C\,.$$ («Высокий логарифм»).

Пополните таблицу интегралов, составленную в параграфе 1.3, полученными формулами.

2.2 Две разновидности метода замены переменного

Метод замены переменного можно подразделить на две разновидности.

а) Метод подведения выражения под знак дифференциала.

От формул $F(x)=\int f(x)\,dx$ и $F'(x)=f(x)$ перейдем к формуле $F(u)=\int f(u)\,du$, где $u=\varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от независимой переменной x, $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$.

Рассмотрим несколько простейших преобразований дифференциала:

1. $dx=d(x+b)$, $b=const$;
2. $dx=\frac{1}{a}d(ax)$, $a=const$, $a\neq 0$;
3. $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$, $a,b=const$, $a\neq 0$;
4. $x\,dx=\frac{1}{2}d(x^2)$;
5. $x\,dx=\frac{1}{2}d(x^2+b)$;
6. $\sin x\,dx=-d(\cos x)$;
7. $\cos x\,dx=d(\sin x)$.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл: $\int(2x+3)^2dx=I$.

Решение: Заметив, что $d(2x+3)=2dx$, $dx=\frac{1}{2}d(2x+3)$, мы можем не вводить новую переменную, а просто записать: $I=\int(2x+3)^2dx=\frac{1}{2}\int(2x+3)^2d(2x+3)=$

$$=\frac{(2x+3)^3}{6}+C.$$

Ответ: $I=\int(2x+3)^2dx=\frac{(2x+3)^3}{6}+C$.

Пример 3. Найти неопределенный интеграл: $\int x\cdot e^{x^2}dx$.

Решение: Заметим, что $x\,dx=\frac{1}{2}d(x^2)$; значит,

$$\int x\cdot e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2)=\frac{e^{x^2}}{2}+C.$$

Ответ: $\int x\cdot e^{x^2}dx=\dfrac{e^{x^2}}{2}+C$.

б) Метод подстановки. Такое название применяется, когда в более сложных задачах приходится вводить новую переменную t, такую, что $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция этой переменной.

Пример 4. Найти неопределенный интеграл: $\int \mathrm{tg}^3 x\,dx$.

Решение: Используем подстановку $\mathrm{tg}\,x=t$ или, что то же самое, $x=\mathrm{arctg}\,x$; $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$.

$\int \mathrm{tg}^3 x\,dx=\int t^3\cdot\dfrac{dt}{1+t^2}=\int\dfrac{t^3}{1+t^2}dt$; используем новую подстановку: $u=1+t^2$, тогда $t^2=u-1$, $du=2t\,dt$, $t\,dt=\dfrac{1}{2}du$.

$$\int \mathrm{tg}^3 x\,dx=\int t^3\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^3}{1+t^2}dt=\int\frac{t^2\cdot t\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{u-1}{u}du=\frac{1}{2}\int du-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\ln u+C=\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+C=\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)+C=\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\cos x|+C.$$

2.3 Тригонометрическая подстановка

Рассмотрим теперь подстановки $x=a\cos t$ и $x=a\sin t$, которые позволят находить интегралы вида $\mathrm{I}=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, где $a>0$. От того, какую из этих подстановок мы используем, будет зависеть, в каком виде выражается функция, получающаяся в результате интегрирования.

Пусть $\mathrm{I}=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ где $a>0$. Применим подстановку $x=a\cos t$.

$$\mathrm{I}=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left\langle\begin{array}{l}x=a\cos t,\; dx=-a\sin t\,dt,\\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}=\\ =\sqrt{a^2\left(1-\cos^2 t\right)}=a\sqrt{\sin^2 t}=\\ =a\sin t\end{array}\right\rangle=-\int a\sin t\cdot a\sin t\,dt=-a^2\int\sin^2 t\,dt=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\int\left(1-\cos 2t\right)dt=-\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{4}\sin 2t-\frac{a^2}{2}t+C\text{; но }\frac{a^2}{4}\sin 2t=$$

$$=\frac{a^2}{4}2\sin t\cos t=\frac{a^2}{2}\sin t\cos t=\frac{1}{2}a\sin t\cdot a\cos t.$$

Так как $a\cos t=x\Rightarrow a\sin t=a\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}=\sqrt{a^2-x^2}$. Тогда $I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+C$.

Применим теперь вторую разновидность тригонометрической подстановки $x=a\sin t$.

$$\mathrm{I}=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left\langle\begin{array}{l}x=a\sin t,\; dx=a\cos t\,dt,\\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\\ =\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}=a\sqrt{\cos^2 t}=\\ =a\cos t\end{array}\right\rangle=\int a\cos t\cdot a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{4}\sin 2t+\frac{a^2}{2}t+C\text{; но }\frac{a^2}{4}\sin 2t=$$

$$=\frac{a^2}{4}2\sin t\cos t=\frac{a^2}{2}\sin t\cos t=\frac{1}{2}a\sin t\cdot a\cos t.$$

Так как $a\sin t=x\Rightarrow a\cos t=a\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2-x^2}$. Тогда $I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$.

Продифференцируйте обе получившиеся функции и убедитесь, что в обоих случаях получится функция $f(x)=F'(x)=\sqrt{a^2-x^2}$.

2.4 Примеры решения задач

Задача 1. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{ax+b}$.

Решение: найдем дифференциал функции $y = ax+b$ по формуле $dy = y'(x)dx$, $d(ax+b) = (ax+b)' dx = a\,dx$, тогда $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$.

Ответ: $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$.

Задача 2. Найти неопределенный интеграл: $\int \cos\frac{x}{4}dx$.

Решение: найдем дифференциал функции $y = \frac{x}{4}$ по формуле $dy = y'(x)dx$, $d\left(\frac{x}{4}\right) = \left(\frac{x}{4}\right)' dx = \frac{dx}{4}$, тогда получаем $\int \cos\frac{x}{4}dx = 4\int \cos\frac{x}{4}d\left(\frac{x}{4}\right) = 4\sin\frac{x}{4} + C$.

Ответ: $\int \cos\frac{x}{4}dx = 4\sin\frac{x}{4} + C$.

Задача 3. Найти неопределенный интеграл: $\int \sin 3x\,dx$.

Решение: умножим и разделим интеграл на 3 и внесём множитель 3 под знак интеграла; затем вынесем множитель $\frac{1}{3}$ за знак интеграла: $\int \sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\,d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Ответ: $\int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Задача 4. Найти неопределенный интеграл: $\int e^{\frac{x}{2}}dx$.

Решение: умножим и разделим интеграл на 2 и внесём делитель 2 под знак интеграла, затем множитель 2 – под знак дифференциала: $\int e^{\frac{x}{2}}dx = 2\int e^{\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right) = 2e^{\frac{x}{2}} + C$.

Ответ: $\int e^{\frac{x}{2}}dx = 2e^{\frac{x}{2}} + C$.

Задача 5. Найти неопределенный интеграл: $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

Решение: найдем дифференциал функции $y = \sin x$: $d(\sin x) = \cos x\,dx$; получим: $\int e^{\sin x}\cos x\,dx = \int e^{\sin x}d(\sin x) = e^{\sin x} + C$.

Ответ: $\int e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x} + C$.

Задача 6. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx$.

Решение: умножим и разделим интеграл на 4; внесем множитель 4 под знак интеграла и заметим, что $d(1+4\sin x) = 4\cos x\,dx$. Получим:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(1+4\sin x)}{\sqrt{1+4\sin x}} = \frac{1}{4}\frac{(1+4\sin x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot(1+4\sin x)^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+4\sin x} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+4\sin x} + C$.

Задача 7. Найти неопределенный интеграл: $\int x\sqrt{x^2-2}dx$.

Решение: умножим и разделим интеграл на 2; внесем множитель 2 под знак интеграла; заметим, что $d(x^2-2) = 2x\,dx$; получим:

$$\int x\sqrt{x^2-2}dx = \int \sqrt{x^2-2}\,xdx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-2}\,d(x^2-2) = \frac{1}{2}\frac{(x^2-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2)} + C.$$

Ответ: $\int x\sqrt{x^2-2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2)} + C$.

Задача 8. Найти неопределенный интеграл: $\int xe^{x^2}dx$.

Решение: умножим и разделим интеграл на 2; внесем делитель 2 под знак интеграла; внесём множитель 2 под знак дифференциала и применим формулу $d\left(x^2\right)=2x\,dx$; получим: $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

Ответ: $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

Задача 9. Найти неопределенный интеграл: $\int \mathrm{tg}x\,dx$.

Решение: заменяя $\mathrm{tg}\,x$ выражением $\frac{\sin x}{\cos x}$, получим:

$$\int \mathrm{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+C.$$

Ответ: $\int \mathrm{tg}x\,dx=-\ln\left|\cos x\right|+C$.

Задача 10. Найти неопределенный интеграл: $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

Решение: по свойству степени преобразуем подынтегральную функцию: $\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}=\frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$. Заметим, что $d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, тогда интеграл примет вид:

$$\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx=\int\sqrt{\arcsin x}\;d(\arcsin x)=\frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C.$$

Ответ: $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$.

Задача 11. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{\mathrm{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$.

Решение: умножим и разделим интеграл на 2 и внесём множитель 2 под знак интеграла; используем формулу дифференциала функции $y=\mathrm{arctg}\frac{x}{2}$:

$$d\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right)=\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right)'dx=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'dx=\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{4}{4+x^2}\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{2}{4+x^2}dx.$$

$$\int\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2\cdot\arcsin\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\arcsin\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{4+x^2}\,dx=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\int\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\cdot d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)^2}{2}+C=\frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)^2}{4}+C.$$

Ответ: $\int\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx=\frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)^2}{4}+C$.

Задача 12. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}\,dx$.

Решение: умножим и разделим интеграл на 2 и вынесем множитель $\frac{1}{2}$ за знак интеграла, затем используем формулу дифференциала функции $y=x^2$, $d\left(x^2\right)=2x\,dx$, и получим: $\int\frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{\left(a^2\right)^2-\left(x^2\right)^2}}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{\left(a^2\right)^2-\left(x^2\right)^2}}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\arcsin\frac{x^2}{a^2}+C.$$

Ответ: $\int\frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\arcsin\frac{x^2}{a^2}+C$.

Задача 13. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}$.

Решение: умножим и разделим знаменатель подынтегрального выражения на $\cos x$ и воспользуемся формулой дифференциала функции $y=\operatorname{tg}x$, $d(\operatorname{tg}x)=\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Получим: $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}=\int\frac{dx}{\frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos x}\cdot\cos x}=\int\frac{dx}{\operatorname{tg}x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}=\ln|\operatorname{tg}x|+C$.

Ответ: $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}=\ln|\operatorname{tg}x|+C$.

Задача 14. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение: I способ. Представим $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$, затем умножим и разделим знаменатель на $\cos\frac{x}{2}$ и получим:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot2\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

II способ. Воспользуемся так называемой универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left\langle\begin{matrix}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ x=2\cdot\operatorname{arctg}t\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right\rangle=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

Заметим, что универсальная тригонометрическая подстановка наиболее удобна при интегрировании дробей, в которые входят степени синуса и косинуса. Попробуйте применить эту подстановку к предыдущей задаче и к интегралу $\int\frac{dx}{\cos x}$.

Задача 15. Применяя указанные подстановки, найти неопределенные интегралы: а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $x=\frac{1}{t}$;

б) $\int\frac{dx}{e^x+1}$, $x=-\ln t$;

в) $\int x\left(5x^2-3\right)^7 dx$, $5x^2-3=t$;

г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$, $t=\sqrt{x+1}$;

д) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $t=\sin x$.

Решение: а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}=\left\langle x=\frac{1}{t}, dx=-\frac{dt}{t^2}\right\rangle=\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-2}}=-\int \frac{\frac{dt}{t}}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-2}}=$

$$=-\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1-2t^2}{t^2}}}=-\int \frac{dt}{t\frac{\sqrt{1-2t^2}}{t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2}t\right)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2}t\right)^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}t\right)+C=\left\langle t=\frac{1}{x}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x}+C.$$

б) $\int \frac{dx}{e^x+1}=\left\langle x=-\ln t, dx=-\frac{dt}{t}\right\rangle=\int \frac{-\frac{1}{t}dt}{e^{-\ln t}+1}=-\int \frac{dt}{t\left(e^{\ln\frac{1}{t}}+1\right)}=-\int \frac{dt}{t\left(\frac{1}{t}+1\right)}=-\int \frac{dt}{t\frac{1+t}{t}}=$

$$=-\int \frac{dt}{1+t}=-\ln|1+t|+C=\left\langle t=e^{-x}\right\rangle=-\ln\left|1+e^{-x}\right|+C.$$

в) $\int x\left(5x^2-3\right)^7 dx=\left\langle 5x^2-3=t, 10xdx=dt\right\rangle=\frac{1}{10}\int t^7 dt=\frac{1}{10}\cdot\frac{t^8}{8}+C=\frac{\left(5x^2-3\right)^8}{80}+C.$

г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\left\langle \begin{matrix} t=\sqrt{x+1}, x=t^2-1 \\ dx=2t\,dt \end{matrix}\right\rangle=\int \frac{\left(t^2-1\right)2t}{t}dt=2\int\left(t^2-1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=$

$$=2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}-\sqrt{x+1}\right)+C.$$

д) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}=\left\langle \sin x=t, \cos xdx=dt\right\rangle=\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+C=$

$$=\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)+C.$$

Ответ: а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x} + C$;

б) $\int \frac{dx}{e^x+1} = -\ln\left|1+e^{-x}\right| + C$;

в) $\int x\left(5x^2-3\right)^7 dx = \frac{\left(5x^2-3\right)^8}{80} + C$;

г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = 2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \sqrt{x+1}\right) + C$;

д) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) + C$.

Задача 16. Найти неопределенный интеграл: $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$.

Решение: применим тригонометрическую подстановку:

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \left\langle \begin{array}{l} x = 3\sin t,\ dx = 3\cos t\,dt, \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \\ = \sqrt{9\left(1-\sin^2 t\right)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = \\ = 3\cos t,\ t = \arcsin\frac{x}{3} \end{array} \right\rangle = \int 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt =$$

$$= 9\int \cos^2 t\,dt = \frac{9}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{9}{4}\sin 2t + \frac{9}{2}t + C \text{; но } \frac{9}{4}\sin 2t =$$

$$= \frac{9}{4}2\sin t\cos t = \frac{9}{2}\sin t\cos t = \frac{1}{2}3\sin t \cdot 3\cos t.$$

Так как $3\sin t = x \Rightarrow 3\cos t = 3\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9-x^2}$. Тогда $\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C$.

Ответ: $\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C$.

Задача 17. Найти неопределенный интеграл: $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$.

Решение: здесь мы применим другую тригонометрическую подстановку:

$$\int \sqrt{x^2-16}\,dx = \left\langle \begin{array}{l} x=\dfrac{4}{\cos t},\ dx=\dfrac{4\sin t}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-16}=\sqrt{\dfrac{16}{\cos^2 t}-16}=\sqrt{\dfrac{16-16\cos^2 t}{\cos^2 t}}= \\ =\sqrt{\dfrac{16(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}}=\sqrt{\dfrac{16\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\dfrac{4\sin t}{\cos t} \end{array} \right\rangle =$$

$$=\int \frac{4\sin t}{\cos t}\cdot\frac{4\sin t}{\cos^2 t}dt = 16\int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = 16\int \frac{\sin^2 t}{\cos t\cdot\cos^2 t}dt = 16\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\frac{dt}{\cos^2 t} = 16\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}d(\operatorname{tg} t)=$$

$$=16\int \frac{\sin t\cdot\sin t}{\cos t}d(\operatorname{tg} t) = 16\int \sin t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}d(\operatorname{tg} t) = 16\int \sin t\cdot\operatorname{tg} t\, d(\operatorname{tg} t)=$$

$$=16\int \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\cdot\operatorname{tg} t\, d(\operatorname{tg} t) = \langle \operatorname{tg} t = z\rangle = 16\int \frac{z^2}{\sqrt{1+z^2}}dz = 16\int \frac{1+z^2-1}{\sqrt{1+z^2}}dz =$$

$$=16\int\left(\frac{1+z^2}{\sqrt{1+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)dz = 16\left(\int\sqrt{1+z^2}\,dz - \int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

Для отыскания интегралов в первом слагаемом воспользуемся следующей формулой: $\int \sqrt{x^2+b}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+b}+\frac{b}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right|+C$. Эта формула будет выведена в параграфе 4.4. Применив ее, получаем:

$$\int\sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{z^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|+C_1.$$

Второе слагаемое суммы представляет собой табличный интеграл. В итоге получаем:

$$16\left(\int\sqrt{1+z^2}\,dz-\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\right)=16\left(\frac{z}{2}\sqrt{1+z^2}+\frac{1}{2}\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|\right)-$$

$$-16\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|+C_1=8z\sqrt{1+z^2}+8\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|-16\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|+C_1=$$

$$=8z\sqrt{1+z^2}-8\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|+C_1=8\operatorname{tg} t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}-8\ln\left|\operatorname{tg} t+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\right|+C_1.$$

Сделаем теперь обратную замену: $x=\frac{4}{\cos t}, \cos t=\frac{4}{x}, \frac{1}{\cos t}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}$, тогда получаем, что

$$\operatorname{tg} t=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x}\right)^2}}{\frac{4}{x}}=\frac{\sqrt{1-\frac{16}{x^2}}}{\frac{4}{x}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}}{\frac{4}{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-16}}{4},\ \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=\frac{x}{4}.$$

$$8\operatorname{tg} t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}-8\ln\left|\operatorname{tg} t+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\right|+C_1=8\cdot\frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\cdot\frac{x}{4}-8\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-16}}{4}+\frac{x}{4}\right|+C_1=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\ln\left|\frac{x}{4}+\frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right|+C_1=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\ln\left|\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)\right|+C_1=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\left(\ln\frac{1}{4}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|\right)+C_1=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\ln\frac{1}{4}-$$

$$-8\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+C_1=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+C_1-8\ln\frac{1}{4}=$$

$=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+C$, здесь $C=C_1-8\ln\dfrac{1}{4}$.

Итак, $\int\sqrt{x^2-16}\,dx=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+C$.

Ответ: $\int\sqrt{x^2-16}\,dx=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+C$.

В задачах вида $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ наиболее продуктивными являются тригонометрические подстановки $x=\dfrac{a}{\cos t}$ и $x=\dfrac{a}{\sin t}$.

2.5 Вопросы для самоконтроля

1. Когда следует применять метод замены переменного? В чем суть этого метода?

2. Какие две разновидности метода замены переменного можно выделить?

3. Какие подстановки называются тригонометрическими? Когда они применяются?

4. Что такое универсальная тригонометрическая подстановка? Когда целесообразно ее применение?

2.6 Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы методом подведения под знак дифференциала:

1. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$;
2. $\int \sqrt{8-2x}dx$;
3. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$;
4. $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}dx$;
5. $\int \frac{x^3}{x^8+5}dx$;
6. $\int \sin^3 x \cos x dx$;
7. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;
8. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$;
9. $\int \sin(2x-3)dx$;
10. $\int e^{-x^5}x^4\,dx$;
11. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$;
12. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$;
13. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin^2 x-1}}dx$;
14. $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}dx$.

Найти неопределенные интегралы применяя подходящие подстановки:

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, $t^3 = x+1$;
2. $\int \frac{x^2}{5-x^6}dx$, $t = x^3$;
3. $\int \frac{e^x}{3+4e^x}dx$, $t = 3+4e^x$;
4. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$, $t = \operatorname{arctg} x$;
5. $\int x^3\sqrt{a-x^2}\,dx$, $\sqrt{a-x^2} = t$;
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x = \frac{1}{t}$.

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$;
2. $\int \sqrt{16-x^2}dx$.

3 Основные методы интегрирования (продолжение). Метод интегрирования «по частям»

Второй из двух основных методов интегрирования. Вывод формулы интегрирования «по частям» и обзор случаев, в которых она применяется.

3.1 Формула интегрирования "по частям"

Предположим, что функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют в одном и том же промежутке непрерывные производные, и, значит, дифференцируемы в этом промежутке. Тогда можно найти дифференциал произведения этих функций.

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = udv + vdu.$$

Из формулы дифференциала произведения двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$: $d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$ интегрированием обеих частей этого равенства получается формула: $\int u\,dv = u \cdot v - \int v \cdot du$. Эта формула и называется формулой интегрирования «по частям». Она получила такое название из-за того, что нахождение исходного, более сложного интеграла, сводиться к отысканию двух более простых, а именно если представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде произведения $u \cdot dv$, то эта формула позволит свести нахождение интеграла $\int u\,dv$ к отысканию интеграла $\int v \cdot du$, если этот интеграл проще исходного.

В качестве дифференциала функции dv нужно выбирать часть подынтегрального выражения $f(x)dx$, содержащую dx, так, чтобы посредством интегрирования легко отыскивалась функция $v(x)$; за $u(x)$ следует принимать функцию, которая упрощается при дифференцировании $(\arcsin x,\ \mathrm{arctg}\,x,\ \ln x,\ x^n)$.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл: $\int x \cdot \ln x\,dx$.

Решение: $\int x \cdot \ln x\,dx = \left\langle \begin{matrix} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x} \\ x\,dx = dv,\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\rangle = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{dx}{x} =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Ответ: $\int x \cdot \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Решение: заметим, что в данном случае применения формулы интегрирования «по частям» не требуется. Этот интеграл легко находится методом замены переменного, так как $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

Пример 3. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Решение: здесь формула интегрирования "по частям" уже потребуется; пусть $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^3} = x^{-3}dx$; тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = -\frac{1}{2x^2}$.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = -\frac{\ln}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = C - \frac{1+2\ln x}{4x^2}.$$

Ответ: $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = C - \frac{1+2\ln x}{4x^2}$.

Пример 4. Найти неопределенный интеграл: $\int \arcsin x\,dx$.

Решение: $\int \arcsin x\,dx = \left\langle \begin{array}{l} u = \arcsin x,\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right\rangle = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \left\langle 1 - x^2 = t,\ dt = -2x\,dx \right\rangle = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Ответ: $\int \arcsin x\,dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

При решении последнего примера пришлось применить оба метода интегрирования.

Метод интегрирования «по частям» может применяться и тогда, когда функции, входящие под знак интеграла, одинаково легко дифференцируются и интегрируются. Классическими ситуациями такого рода является следующие:

а) произведение многочлена *n*-ой степени на тригонометрическую или показательную функции (в качестве функции $u = u(x)$ следует выбрать многочлен и применить формулу n раз);

Пример 5. Найти неопределенный интеграл: $\int \left(x^2 - 3x + 7\right) \cdot \sin x\, dx$.

Решение: $\int \left(x^2 - 3x + 7\right) \cdot \sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2 - 3x + 7, \\ du = (2x - 3)dx, \\ dv = \sin x dx, \\ v = -\cos x \end{vmatrix} = -\left(x^2 - 3x + 7\right) \cdot \cos x +$

$+ \int (2x - 3) \cdot \cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = 2x - 3, du = 2dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{vmatrix} = -\left(x^2 - 3x + 7\right) \cdot \cos x + (2x - 3) \cdot \sin x -$

$- \int 2 \cdot \sin x\, dx = -\left(x^2 - 3x + 7\right) \cdot \cos x + (2x - 3) \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x + C = (2x - 3) \cdot \sin x +$

$+ \left(3x - x^2 - 5\right) \cdot \cos x + C$.

Ответ: $\int \left(x^2 - 3x + 7\right) \cdot \sin x\, dx = (2x - 3) \cdot \sin x + \left(3x - x^2 - 5\right) \cdot \cos x + C$.

б) произведение тригонометрической функции на показательную.

Пример 6. Найти неопределенный интеграл: $I = \int e^{ax} \cdot \sin bx\, dx$.

Решение: здесь можно было бы представить подынтегральное выражение двумя путями: $u = e^{ax}, dv = \sin bx\, dx$ или $u = \sin bx, dv = e^{ax} dx$. Выберем первый путь. Тогда $du = a \cdot e^{ax} dx$, $v = -\dfrac{\cos bx}{b}$. Отсюда $I = \int e^{ax} \cdot \sin bx\, dx = -\dfrac{1}{b} e^{ax} \cdot \cos bx +$

$$+ \frac{a}{b} \int e^{ax} \cdot \cos bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{a}{b} I_1.$$

К интегралу I_1 снова применим метод интегрирования «по частям». $u = e^{ax},\ dv = \cos bx\, dx,\ du = a \cdot e^{ax},\ v = \dfrac{\sin bx}{b}$.

$$I_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{a}{b} I .$$

Таким образом, получается выражение: $I=-\frac{1}{b}e^{ax}\cdot\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cdot\sin bx-\frac{a^2}{b^2}I$, которое можно рассматривать как уравнение относительно искомого интеграла. Решим его. $I\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)=\left(\frac{a}{b^2}\sin bx-\frac{1}{b}\cos bx\right)\cdot e^{ax}$, $I=\frac{(a\sin bx-b\cos bx)\cdot e^{ax}\cdot b^2}{b^2(a^2+b^2)}+C$, $I=\frac{(a\sin bx-b\cos bx)\cdot e^{ax}}{(a^2+b^2)}+C$.

Ответ: $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx=\frac{(a\sin bx-b\cos bx)\cdot e^{ax}}{(a^2+b^2)}+C$.

Убедитесь самостоятельно, что такой выбор u и v будет лучшим.

3.2 Примеры решения задач

Задача 1. Найти неопределенный интеграл $\int x\cos x\,dx$.

Решение: пусть $u=x$, $dv=\cos x\,dx$. Тогда $du=dx$, $v=\int\cos x\,dx=\sin x$. Используем формулу интегрирования «по частям»: $\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=$

$=x\sin x+\cos x+C$.

Ответ: $\int x\cos x\,dx=x\sin x+\cos x+C$.

Задача 2. Найти неопределенный интеграл: $\int x\arccos x dx$.

Решение: $$\int x\arccos x dx=\left\langle\begin{matrix}u=\arccos x,\ du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ dv=xdx,\qquad v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\frac{x^2}{2}\arccos x+\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{2}\int\frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{2}\left(\arcsin x-\int\sqrt{1-x^2}\,dx\right)=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx.$$

Отдельно найдем неопределенный интеграл $I=\int\sqrt{1-x^2}dx$. Как мы уже заметили выше, его можно найти с помощью тригонометрической подстановки $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$. Однако можно применить к нему и метод интегрирования "по частям".

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=\left\langle \begin{matrix} u=\sqrt{1-x^2},\, dv=dx \\ du=-\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\, v=x \end{matrix} \right\rangle = x\sqrt{1-x^2}+\int x\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\sqrt{1-x^2}+$$

$$+\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1-\left(1-x^2\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\sqrt{1-x^2}+\left(\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-\int\sqrt{1-x^2}dx=$$

$=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-I$. Тогда получаем: $I=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-I$,

$$2I=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,$$

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

Возвращаемся к исходному интегралу: $\int x\arccos x dx=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{2}\arcsin x-$

$$-\frac{1}{2}I=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{4}\arcsin x+C=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{4}\arcsin x-$$

$$-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C.$$

Ответ: $\int x\arccos x dx=\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{4}\arcsin x-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$.

Задача 3. Найти неопределенный интеграл: $\int x^2\operatorname{arctg}x\,dx$.

Решение: $\int x^2\operatorname{arctg}x\,dx=\left\langle \begin{matrix} u=\operatorname{arctg}x,\ dv=x^2dx \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2},\, v=\dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right\rangle=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=$

$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$. Здесь нам встретился интеграл $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$. Это интеграл от дробно-рациональной функции. Правила интегрирования таких функций мы будем рассматривать ниже. Пока только отметим, что $x^3 : \left(1+x^2\right) = x - \frac{x}{x^2+1}$, таким образом, рассматриваемый интеграл представляется как разность двух интегралов: $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx$, и тогда $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\left(\int x\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx\right) =$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\right) = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Ответ: $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right) + C$.

Задача 4. Найти неопределенный интеграл: $\int \ln x\,dx$.

Решение: $\int \ln x\,dx = \left\langle \begin{matrix} u = \ln x,\ dv = dx \\ du = \frac{dx}{x},\ v = x \end{matrix} \right\rangle = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx =$

$= x \cdot \ln x - x + C$.

Ответ: $\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - x + C$.

Задача 5. Найти неопределенный интеграл: $\int x^2 e^{3x}\,dx$.

Решение: применим формулу интегрирования «по частям» дважды, причем оба раза в качестве функции $u = u(x)$ выберем многочлен:

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \left\langle \begin{matrix} u = x^2,\ dv = e^{3x}dx \\ du = 2xdx, v = \frac{e^{3x}}{3} \end{matrix} \right\rangle = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} \cdot 2xdx = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x \cdot e^{3x}dx =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} u = x,\ dv = e^{3x}dx \\ du = dx,\ v = \frac{e^{3x}}{3} \end{matrix} \right\rangle = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx\right) = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) =$$

$$= x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{e^{3x}}{3} + C = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + C =$$

$= \frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2 - 6x + 2\right) + C$.

Очевидно, если бы под знаком интеграла вместо x^2 было x^3, то пришлось бы эту формулу применить три раза. Вообще, для нахождения интеграла $\int x^n e^x dx$, а также и интегралов $\int x^n \sin x dx$, $\int x^n \cos x dx$ (n – целое положительное число) требуется применить интегрирование «по частям» n раз (см. п. 3.1, пример 5).

Ответ: $\int x^2 e^{3x}\, dx = \frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2 - 6x + 2\right) + C$.

Задача 6. Найти неопределенный интеграл: $\int \sin(\ln x) dx$.

Решение: $I = \int \sin(\ln x) dx = \left\langle \begin{matrix} u = \sin(\ln x), & dv = dx \\ du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx, & v = x \end{matrix} \right\rangle = x\sin(\ln x) - \int x \cdot \frac{\cos(\ln x)}{x} dx =$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = \left\langle \begin{matrix} u = \cos(\ln x), dv = dx \\ du = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx, v = x \end{matrix} \right\rangle = x\sin(\ln x) -$$

$$-\left(x\cos(\ln x) + \int x \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \right) = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx = x\sin(\ln x) -$$

$$- x\cos(\ln x) - I$$

Получим уравнение относительно интеграла $I = \int \sin(\ln x) dx$, выразим искомый интеграл из уравнения: $I = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) - I$, $2I = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$, $I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.

Ответ: $\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.

3.3 Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные методы интегрирования.

2. Опишите метод замены переменной. Какие удобные подстановки Вы успели запомнить? Приведите примеры их применения.

3. Выведите формулу интегрирования «по частям». Перечислите типичные случаи ее применения.

3.4 Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы с применением метода интегрирования «по частям»:

1. $\int x\sin x dx$;
2. $\int x\arcsin x dx$
3. $\int \mathrm{arcctg} x\, dx$;
4. $\int x^2 \ln x dx$;
5. $\int xe^{-x} dx$;
6. $\int \left(x^2+5x+6\right)\cos 2x dx$;
7. $\int \left(x^2-2x+3\right)\ln x dx$;
8. $\int \cos(\ln x) dx$;
9. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}\, dx$;
10. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

4 Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

Отыскание интегралов следующих четырех видов: I. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, *II.* $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$, *III.* $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, *IV.* $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$.

4.1 Два важных частных случая применения простейших формул интегрирования

Выпишем две формулы, полученные нами на основании метода подведения под знак дифференциала.

а) $I=\int \frac{dx}{(x-a)^m}=\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m}$, если $m \neq 1$, то $I=\int (x-a)^{-m} d(x-a)=$

$=\frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C$;

б) $I=\int\frac{dx}{(x-a)}=\int\frac{d(x-a)}{(x-a)}=\ln|x-a|+C$.

Эти интегралы будут нужны при отыскании неопределенных интегралов следующего параграфа.

4.2 Интегралы видов I и II

Во всех случаях интегрирования функций, содержащих квадратный трехчлен, решение задач следует начинать с выделения полного квадрата в квадратном трехчлене.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+px+q\right)=a\left(x+\frac{2px}{2}+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}\right)=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right].$$

Рассматривая примеры, мы увидим, что получится после этого.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл вида **I**: $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Решение: $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$.

Ответ: $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$.

После выделения полного квадрата из квадратного трехчлена мы пришли к одной из формул таблицы основных интегралов.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл вида **II**: $\int\frac{5+2x}{x^2+4x+8}dx$.

Решение: $\int\frac{5+2x}{x^2+4x+8}dx=\int\frac{2x+4+1}{(x+2)^2+4}dx=\int\frac{2x+4}{(x+2)^2+4}dx+\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}=$

$$=\left\langle\begin{array}{l}(x+2)^2=t\\ dt=2(x+2)dx=\\ =(2x+4)dx\end{array}\right\rangle=\int\frac{dt}{t+4}+\int\frac{d(t+4)}{t+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+\ln|t+4|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+\ln\left|(x+2)^2+4\right|+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+\ln\left|x^2+4x+8\right|+C.$$

Здесь выделение полного квадрата из квадратного трехчлена привело к сумме двух «табличных» интегралов.

Ответ: $\int\frac{(5+2x)}{x^2+4x+8}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+\ln\left|x^2+4x+8\right|+C$.

Пример 3. Найти неопределенный интеграл вида **II**: $\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$.

Решение: $$\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx=\int\frac{7-8x}{2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)}dx=\int\frac{7-8x}{2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\right]}dx=$$

$$=\int\frac{7-8x}{2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]}dx=\int\frac{6-8x+1}{2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]}dx=\left\langle\begin{matrix}x-\frac{3}{4}=t,\ dx=dt,\\ 4x-3=4t,\ -8t=6-8x\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-8t}{t^2-\frac{1}{16}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{16}}-4\int\frac{t\,dt}{t^2-\frac{1}{16}}=\left\langle\int\frac{dt}{t^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right|-2\int\frac{2t\,dt}{t^2-\frac{1}{16}}=\left\langle 2t\,dt=d\left(t^2-\frac{1}{16}\right)\right\rangle=\ln\left|\frac{x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{x-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\right|-2\ln\left|t^2-\frac{1}{16}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x\text{-}1}{x-0{,}5}\right|-2\ln\left|x^2-1{,}5x+0{,}5\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx=\ln\left|\frac{x-1}{x-0{,}5}\right|-2\ln\left|x^2-1{,}5x+0{,}5\right|+C$.

Здесь та же операция снова привела нас к алгебраической сумме «табличных» интегралов.

Из решения этих трех задач можно сделать следующие выводы:

1. При отыскании интегралов вида **I**: после выделения полного квадрата из квадратного трехчлена возможны три случая.

I. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=$ (после выделения полного квадрата из квадратного трехчлена)

$$\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C, \tag{а}$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C, \tag{б$_1$}$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C. \tag{б$_2$}$$

2. При отыскании интегралов вида **II**: $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ нужно после выделения полного квадрата из квадратного трехчлена сделать замену переменной. Затем интеграл сводится к сумме двух интегралов. Первое слагаемое в этой сумме – это один из интегралов вида (а), (б$_1$) или (б$_2$), а второе – интеграл, находящийся с помощью простой подстановки: $\int \frac{u\,du}{u^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(u^2\pm a^2\right)}{u^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\ln\left|u^2\pm a^2\right|+C$.

4.3 Интегралы вида III

Рассмотрим неопределенный интеграл вида III.

Пример 4. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2+4x+4-4+5\right)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{-\left[(x+2)^2-9\right]}}=$

$=\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{9-(x+2)^2}}=\arcsin\frac{x+2}{3}+C$.

Ответ: $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\arcsin\frac{x+2}{3}+C$.

Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена в данном случае привело к ещё одному «табличному» интегралу.

Пример 5. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9-9+3}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-6}}=$

$$=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-6}}=\ln\left|(x-3)+\sqrt{(x-3)^2-6}\right|+C=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+3}\right|+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+3}\right|+C.$

Здесь операция выделения полного квадрата из квадратного трехчлена привела к «длинному логарифму».

Итак, в случае **III** после выделения полного квадрата из квадратного трехчлена существует две возможности:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\begin{cases}\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C, & \text{(в)}\\[2ex] \displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a}\right|+C. & \text{(г)}\end{cases}$$

4.4 Интегралы вида IV

Для отыскания этих интегралов нам потребуются еще две формулы:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\begin{cases}\displaystyle=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+C,\\[2ex] \displaystyle=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C,\end{cases}\qquad\text{(А)}$$

$$\int\sqrt{x^2+b}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+b}+\frac{b}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right|+C.\qquad\text{(Б)}$$

Интеграл вида (А) был найден с помощью тригонометрической подстановки в разделе 2.5, а в разделе 3.2 − с помощью интегрирования «по частям».

Интеграл (Б) будем искать с помощью формулы интегрирования «по частям».

$$I=\int\sqrt{x^2+b}\,dx=\left\langle\begin{matrix}u=\sqrt{x^2+b},\ du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+b}}dx\\ dx=dv,\ x=v\end{matrix}\right\rangle=x\sqrt{x^2+b}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+b}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+b}-\int\frac{\left(x^2+b\right)-b}{\sqrt{x^2+b}}dx=x\sqrt{x^2+b}-\left(\int\sqrt{x^2+b}\,dx-b\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}\right)=$$

$$= x\sqrt{x^2+b} - \int \sqrt{x^2+b}\,dx + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = x\sqrt{x^2+b} - I + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} \text{ или}$$

$2I = x\sqrt{x^2+b} + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$. Это выражение представляет собой уравнение относительно искомого интеграла. Разрешим его:

$$2\int \sqrt{x^2+b}dx = x\sqrt{x^2+b} + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}. \quad (1)$$

Теперь найдем отдельно интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$. В таблице интегралов присутствует формула: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right| + C$ («длинный логарифм»). Выведем эту формулу. Для этого нужно применить так называемую **подстановку Эйлера**[1]**:**

$$\sqrt{x^2+b} = t - x, \text{ где } t \text{ новая переменная.}$$

Возведем в квадрат обе части последнего равенства: $x^2+b = t^2 - 2tx + x^2$, или $b = t^2 - 2tx$; найдем дифференциалы от обеих частей последнего равенства: $0 = 2t\,dt - (2x\,dt + 2t\,dx)$ или $t\,dx = (t-x)dt$, откуда $\frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t}$, т.е. $\frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \frac{dt}{t}$.

Следовательно, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$, где $t = x + \sqrt{x^2+b}$. Вернувшись к старой переменной, мы получим: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right| + C$.

Теперь возвратимся к решению задачи, т.е. к (1). Получим: $\int \sqrt{x^2+b}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+b} + \frac{b}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right| + C$.

Таким образом, интеграл вида IV сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + C, \quad (A)$$

[1] Леонард Эйлер (1707-1783) – швейцарский математик, физик, механик, астроном, академик Петербургской академии наук, один из основоположников математического анализа.

$$\int \sqrt{u^2+b}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+b} + \frac{b}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+b}\right| + C. \qquad \text{(Б)}$$

Решим две задачи этого вида.

Пример 6. Найти неопределенный интеграл: $\int \sqrt{x^2+8x+25}\,dx$.

Решение: $\int \sqrt{x^2+8x+25}\,dx = \int \sqrt{\left(x^2+8x+16\right)-16+25}\,dx =$

$$= \int \sqrt{(x+4)^2+9}\,d(x+4) = \frac{x+4}{2}\sqrt{(x+4)^2+9} + \frac{9}{2}\ln\left|(x+4)+\sqrt{(x+4)^2+9}\right| + C =$$

$$= \frac{x+4}{2}\sqrt{x^2+8x+25} + \frac{9}{2}\ln\left|(x+4)+\sqrt{x^2+8x+25}\right| + C.$$

Ответ: $\int \sqrt{x^2+8x+25}\,dx = \frac{x+4}{2}\sqrt{x^2+8x+25} + \frac{9}{2}\ln\left|(x+4)+\sqrt{x^2+8x+25}\right| + C$.

Пример 7. Найти неопределенный интеграл: $\int \sqrt{8+2x-x^2}\,dx$.

Решение: $\int \sqrt{8+2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{-\left(x^2-2x-8\right)}dx = \int \sqrt{-\left(x^2-2x+1-8\right)}dx =$

$$= \int \sqrt{-\left(x^2-2x+1\right)+9}\,dx = \int \sqrt{9-(x-1)^2}\,d(x-1) = \frac{x-1}{2}\sqrt{9-(x-1)^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3} + C =$$

$$= \frac{x-1}{2}\sqrt{8+2x-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3} + C.$$

Ответ: $\int \sqrt{8+2x-x^2}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{8+2x-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3} + C$.

4.5 Примеры решения задач

Задача 1. Найти неопределенный интеграл: $\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx$.

Решение:. Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена под знаком интеграла: $x^2+2x+6=(x+1)^2-1+6=(x+1)^2+5$. Далее воспользуемся ранее полученными результатами как формулами:

$$\int \sqrt{u^2+b}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+b} + \frac{b}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+b}\right| + C.$$

$$\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+5}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+5}\,d(x+1) =$$

$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right|+C=\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+6}+$$

$$+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+6}\right|+C.$$

Ответ: $\int\sqrt{x^2+2x+6}\,dx=\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+6}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+6}\right|+C$.

Задача 2. Найти неопределенный интеграл: $\int\sqrt{3+4x-x^2}\,dx$.

Решение: выделяя полный квадрат в подкоренном выражении $3+4x-x^2=-(x^2-4x-3)=-((x-2)^2-7)=7-(x-2)^2$ и применяя формулу $\int\sqrt{a^2-u^2}du=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+C$, при $u=x-2, a^2=7$, получим:

$$\int\sqrt{3+4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{7-(x-2)^2}dx=\int\sqrt{7-(x-2)^2}d(x-2)=$$

$$=\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}+\frac{x-2}{2}\sqrt{7-(x-2)^2}+C=\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}+\frac{x-2}{2}\sqrt{3+4x-x^2}+C.$$

Ответ: $\int\sqrt{3+4x-x^2}\,dx=\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}+\frac{x-2}{2}\sqrt{3+4x-x^2}+C$.

Задача 3. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{dx}{x^2-x-6}$.

Решение: выделив из квадратного трехчлена полный квадрат $x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$, записав $d\left(x-\frac{1}{2}\right)=dx$ и интегрируя,

получим: $\int\frac{dx}{x^2-x-6}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}=\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}\right|+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$.

Ответ: $\int\frac{dx}{x^2-x-6}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$.

Задача 4. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}$.

Решение: выделив из квадратного трехчлена полный квадрат $x^2+4x+29=(x+2)^2-4+29=(x+2)^2+25$, записав $d(x+2)=dx$ и интегрируя, получим: $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+25}=\frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{5}+C$.

Ответ: $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}=\frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{5}+C$.

Задача 5. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{dx}{4x-1-4x^2}$.

Решение: выделим полный квадрат в знаменателе дроби $4x-1-4x^2=$

$$=-\left(4x^2-4x+1\right)=-4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\int\frac{dx}{4x-1-4x^2}=\int\frac{dx}{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}+C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{4x-1-4x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}+C$.

Задача 6. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{4x-3}{x^2+3x+4}dx$.

Решение: выделим полный квадрат из квадратного трехчлена $x^2+3x+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ и заменим переменную x, полагая $x+\frac{3}{2}=t$ и $dx=dt$. Тогда получим: $\int\frac{4x-3}{x^2+3x+4}dx=\int\frac{4x-3}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}dx=$

$$=\int\frac{4\left(t-\frac{3}{2}\right)-3}{t^2+\frac{7}{4}}dt=\int\frac{4t-9}{t^2+\frac{7}{4}}dt=\int\left(\frac{4t}{t^2+\frac{7}{4}}-\frac{9}{t^2+\frac{7}{4}}\right)dt=\int\frac{4t}{t^2+\frac{7}{4}}dt-\int\frac{9}{t^2+\frac{7}{4}}dt=$$

$$=2\int\frac{d\left(t^2+\frac{7}{4}\right)}{t^2+\frac{7}{4}}-9\int\frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}}=2\ln\left(t^2+\frac{7}{4}\right)-9\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=2\ln\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)-$$

$$-\frac{18}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{7}}+C=2\ln\left(x^2+3x+4\right)-\frac{18}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C.$$

Ответ: $\int\frac{4x-3}{x^2+3x+4}dx=2\ln\left(x^2+3x+4\right)-\frac{18}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C.$

4.6 Вопросы для самоконтроля

1. С какими тригонометрическими подстановками Вы познакомились? В каких случаях эти подстановки применяются?

2. Кем и каким образом была выведена формула, которую называют «длинным логарифмом»?

3. Какие четыре типа интегралов от функций, содержащих квадратный трехчлен, мы выделили? С чего начинается отыскание всех этих интегралов? К каким табличным интегралам сводится нахождение интегралов каждого типа?

4.7 Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$;

2. $\int\sqrt{2-x-x^2}\,dx$;

3. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$;

4. $\int\frac{dx}{x^2+2x}$;

5. $\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$;

6. $\int\frac{x}{x^2-7x+13}dx$;

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

5 Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение дробно-рациональной функции. Правильные и неправильные дроби. Разложение правильной дроби на элементарные слагаемые дроби. Интегрирование элементарных дробей. Рекуррентная формула для интеграла $I_* = \int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$

5.1 Понятие о дробно-рациональной функции. Правильные и неправильные дроби

Определение 1: **Дробно-рациональной функцией** называется функция вида $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно:

$P_m(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$, $Q_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$; $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$, $m\geq 0, n\geq 1$.

Всякий алгебраический многочлен можно назвать целой рациональной функцией. Интеграл от такой функции находится непосредственно: $\int\left(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\right)dx=a_0\int dx+a_1\int x\,dx+\ldots+a_n\int x^n dx=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\ldots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+C$.

В результате интегрирования получается многочлен степени $n+1$.

Определение 2. Дробно-рациональная функция называется **неправильной дробью**, если степень многочлена, стоящего в числителе, больше степени многочлена, стоящего в знаменателе, или если эти степени равны.

Таким образом, если $m\geq n$, то дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – неправильная. Такую дробь можно делением числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя. Другими словами, из неправильной дроби всегда можно выделить целую часть. В свою очередь, правильную дробь всегда можно разложить на слагаемые, которые называются **элементарными слагаемыми (простейшими) дробями** и обязательно интегрируются.

5.2 Разложение правильной дроби на элементарные слагаемые дроби

Пусть дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ правильная. Построим схему ее разложения на элементарные (простейшие) слагаемые дроби.

а) Разложить знаменатель дроби на множители. Предположим, что многочлен $Q_n(x)$ имеет различные действительные корни $a, b, \ldots, l$, кратности которых равны соответственно $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Пусть, кроме того, у этого многочлена есть попарно сопряженные корни $\alpha_k \pm i\beta_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, кратности которых равны $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$. Тогда, согласно основной теореме алгебры, $Q_n(x)$ разлагается на множители:

$$Q_n(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} \cdot \ldots \cdot (x-l)^{\lambda} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\nu_1} \cdot \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{\nu_s}.$$

б) При этом будет справедливо следующее разложение дроби на простейшие:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots +$$

$$+ \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{\left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^2} + \ldots + \frac{C_{\nu_1} x + D_{\nu_1}}{\left(x^2 + p_{\nu_1} x + q_{\nu_1}\right)^{\nu_1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_s x + q_s} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + p_s x + q_s\right)^2} + \ldots + \frac{M_{\nu_s} x + N_{\nu_s}}{\left(x^2 + p_{\nu_s} x + q_{\nu_s}\right)^{\nu_s}}; \quad A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_{\nu_s}, N_{\nu_s} \;-$$

произвольные постоянные.

в) Обе части получившегося равенства нужно привести к общему знаменателю $Q_n(x)$. Две дроби с одинаковыми знаменателями равны, если их числители одинаковы. Поэтому, приравняем числители дробей, получившихся в левой и правой частях равенства.

г) Составим систему уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях получившегося тождества. Число этих уравнений должно быть равно числу неизвестных $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_{\nu_s}, N_{\nu_s}$.

д) Решим эту систему уравнений. Сделав это, мы найдем значения произвольных постоянных $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_{\nu_s}, N_{\nu_s}$ и подставим эти значения в схему разложения.

После разложения рациональной дроби на простейшие интеграл от дроби представится в виде суммы интегралов от элементарных слагаемых дробей.

5.3 Интегрирование дробно-рациональных функций

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}dx$.

Решение: здесь подынтегральная функция представляет собой правильную дробь. Разложим ее на простейшие. Для этого найдем корни многочлена, стоящего в знаменателе: $x^3-6x^2+11x-6=0$; здесь легко угадать первый корень: $x_1=1$. Разделим многочлен, стоящий в знаменателе дроби, на двучлен $x-1$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^3-x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2-5x+6 \\ \cline{1-1}
-\; -5x^2+11x \quad\; & \\
-5x^2-5x \quad\; & \\ \cline{1-1}
-\; 6x-6 & \\
6x-6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$. Чтобы найти остальные корни уравнения, приравняем к нулю квадратный трехчлен: $x^2-5x+6=0$. Используя теорему Виета, заметим, что корни этого квадратного уравнения равны $x_2=2$ и $x_3=3$. Итак, наш многочлен третьей степени имеет три различных однократных действительных корня. Значит, подынтегральную функцию можно разложить на три элементарных слагаемых дроби с неопределенными числителями:

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Здесь нет слагаемых вида $\dfrac{D}{(x-a)^n}$, поскольку корни однократные. Нет и слагаемых вида $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, так как многочлен в знаменателе интегрируемой дроби не имел комплексных корней. Приведем к общему знаменателю дроби в левой и правой частях последнего равенства.

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Избавимся от общего знаменателя, приравняв числители дробей. Раскроем скобки.

$$9-5x=Ax^2-5Ax+6A+Bx^2-3Bx-Bx+3B+Cx^2-2Cx-Cx+2C.$$

Сгруппируем подобные члены.

$$9-5x=(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2C).$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства. При этом получим три уравнения для определения коэффициентов A, B, C.

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=5 \\ 6A+3B+2C=9 \end{cases}.$$

Решим эту систему.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

$$2A=4 \Rightarrow A=2$$

$$\begin{cases} 2+B+C=0 \\ -B-2C=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=-2 \\ -B-2C=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ C=-3 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-3}\right)dx =$$

$$= 2\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\int\frac{d(x-2)}{x-2}-3\int\frac{d(x-3)}{x-3} = 2\ln|x-1|+\ln|x-2|-3\ln|x-3|+C.$$

Ответ: $\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}dx = 2\ln|x-1|+\ln|x-2|-3\ln|x-3|+C$.

Можно написать вместо C $\ln C$ и свойствами логарифмов. Тогда

$$\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \ln\frac{C(x-1)^2|x-2|}{|x-3|^3}.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}dx$.

Решение: дробь $\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}$ – правильная. Разложим ее на простейшие. Корни многочлена, стоящего в знаменателе: $x_1=-2$, $x_2=x_3=1$. Второй корень, $x=1$, имеет кратность 2. Значит, дробь разлагается на слагаемые следующим образом:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2};$$

приводим дроби к общему знаменателю и избавляемся от этого знаменателя.

$x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2)$;

$x^2 = A(x^2-2x+1) + B(x^2-x+2x-2) + C(x+2)$;

$x^2 = Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+2Bx-2B+Cx+2C$;

$x^2 = (A+B)x^2-(2A-B-C)x+A-2B+2C$.

Составляем систему: $\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B+C=0 \\ A-2B+2C=0 \end{cases}.$

Решаем ее: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right).$

$$\begin{cases} 3C = 1 \\ 3B + C = 2 \\ A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{4}{9} \\ B = \dfrac{5}{9} \\ C = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Значит, $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)(x+1)^2}dx = \frac{4}{9}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{5}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$$

Ответ: $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)(x+1)^2}dx = \frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{5}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл: $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+1}dx$.

Решение: многочлен x^3+1 представляет собой сумму кубов. Преобразуем ее по известной формуле: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$; квадратный трехчлен x^2-x+1 не имеет действительных корней, значит, не разлагается на множители. Следовательно, первому множителю соответствует элементарная дробь первого вида, второму – элементарная дробь второго вида.

Разложим дробь на слагаемые: $\dfrac{x}{x^3+1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$; приведем дроби к общему знаменателю и избавимся от него:

$$x = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1);$$

$$x = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Cx + Bx + C;$$

$$x = (A+B)x^2 - (A-B-C)x + A + C.$$

Система: $\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 1 \\ A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ A = -C \\ B = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{1}{3} \\ C = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$

$$\int \frac{x}{x^3+1}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}d\left(x-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}d\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right| + \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{x}{x^3+1}dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

Итак, интегрирование правильной рациональной дроби сводится к отысканию интегралов: $I = \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, & \text{при} \quad n = 1; \\ \int (x-a)^{-n}dx = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C, & \text{при} \quad n = 2,3,\ldots \end{cases}$.

$$I_* = \int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx.$$

Второй интеграл рассматривался пока только при $n=1$. После выделения полного квадрата из квадратного трехчлена он преобразуется в сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left\{\begin{matrix} \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} \\ \int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| \end{matrix}\right\} + \left(\int \frac{t\,dt}{t^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2 \pm a^2\right|\right) + C.$$

При $n = 2,3,\ldots$ требуется применение рекуррентной формулы, которая будет выведена в следующем параграфе.

5.4 Рекуррентная формула для интеграла $I_* = \int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$

Рассмотрим теперь интеграл вида $I_* = \int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$, если $n = 2, 3, 4,\ldots$ Как и всегда, когда подынтегральная функция содержит квадратный трехчлен, следует прежде всего выделить из этого трехчлена полный квадрат:

В рассматриваемом случае квадратный трехчлен не имеет действительных корней; значит, при попытке найти корни мы получили бы следующий вывод: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$, или $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Обозначим $q - \frac{p^2}{4} = a^2$, и тогда $a = \pm\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Введем новую переменную $x + \frac{p}{2} = t$; $x = t - \frac{p}{2}$; $dt = dx$; $x^2 + px + q = t^2 + a^2$;

$$Ax + B = At - \frac{Ap}{2} + B = At + \left(B - \frac{Ap}{2}\right).$$

Вернемся к интегралу I_*:

$$I_* = \int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = A\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = AI + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)I_n.$$

Первый интеграл найти легко: $I = \int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \left| \begin{array}{l} u = t^2 + a^2, \\ du = 2t\,dt, \\ t\,dt = \frac{du}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int u^{-2}du =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1-n}}{1-n} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-n}}{1-n} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+px+q\right)^{1-n}}{1-n} + C.$$

Перейдем к интегралу I_n; к нему применим формулу интегрирования «по частям».

$$I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\left|\begin{array}{l}u=\dfrac{1}{\left(t^2+a^2\right)^n},\\ du=-\dfrac{2nt}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt\\ dv=dt,\, v=t\end{array}\right|=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{t^2+a^2-a^2}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{t^2+a^2}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt-2na^2\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}-2na^2\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}};$$

итак, получается:

$$I_n=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}.$$

Это выражение представляет собой уравнение, из которого можно выразить I_{n+1} через I_n:

$$2na^2I_{n+1}=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+(2n-1)I_n,$$

где

$$I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n};\; I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n. \qquad (1)$$

Такая формула называется **рекуррентной** (от латинского слова «рекурро» – «возвращаться»). Значит, это в некотором смысле «возвратная» формула. Пользуясь ею, можно от интеграла $I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a}+C$ перейти к интегралу

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{t^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{2a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a}+C,\; n=1,\; n+1=2,$$

$$I_3=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^3}=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^2}+\frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{t^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\frac{t}{a}\right)+C,$$

$$n=2,\ n+1=3 \text{ и т.д., } \forall n \in N .$$

Итак, интеграл I_* находится следующим образом:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\frac{A}{2(1-n)}\left(x^2+px+q\right)^{1-n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_n ,$$

где I_n находится n-кратным применением рекуррентной формулы к табличному интегралу $I_1=\int \frac{dt}{t^2+a^2}$ или $I_1=\int \frac{dt}{t^2-a^2}$.

Замечание: рекуррентную формулу можно записать немного иначе, выразив I_n через I_{n-1}:

$$I_n=\frac{1}{(2n-2)a^2}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{(2n-2)a^2}I_{n-1}. \qquad (2)$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x^4+2x^2+4}{\left(1+x^2\right)^3}dx$.

Решение: знаменатель дроби имеет пару комплексно-сопряжённых корней $x=\pm i$ кратности 3. Дробь разлагается в следующую сумму простейших дробей:

$$\frac{x^4+2x+4}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{M_1x+N_1}{1+x^2}+\frac{M_2x+N_2}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{M_3x+N_3}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Приводим дроби к общему знаменателю и приравниваем их числители:

$$x^4+2x+4=M_3x+N_3+\left(M_2x+N_2\right)\left(1+x^2\right)+\left(M_1x+N_1\right)\left(1+x^2\right)^2,$$

$$x^4+2x^2+4=M_1x^5+N_1x^4+\left(2M_1+M_2\right)x^3+\left(2N_1+N_2\right)x^2+$$

$$+\left(M_1+M_2+M_3\right)x+N_1+N_2+N_3.$$

Составляем и решаем систему:

$$\begin{cases} M_1=0; \\ N_1=1; \\ 2M_1+M_2=0; \\ 2N_1+N_2=2; \\ M_1+M_2+M_3=0; \\ N_1+N_2+N_3=4. \end{cases} \qquad \begin{cases} M_1=0; \\ N_1=1; \\ M_2=0; \\ N_2=0; \\ M_3=0; \\ N_3=3. \end{cases}$$

Разложение дроби, таким образом, имеет вид:

$$\frac{x^4+2x^2+4}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{3}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Интегрируем: $\int\frac{x^4+2x^2+4}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}+3\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}=\operatorname{arctg}x+3I_3.$

Используя рекуррентную формулу, получим:

$$I_3=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C.$$

Ответ: $\int\frac{x^4+2x^2+4}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\frac{11}{8}\operatorname{arctg}x+\frac{3}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{9}{8}\frac{x}{(1+x^2)}+C.$

5.5 Примеры решения задач

Задача 1. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx.$

Решение: подынтегральная дробь неправильная, так как степень числителя равна степени знаменателя. Поэтому выделим целую часть

$$\begin{array}{r|l} -\;5x^3+9x^2-22x-8 & x^3-4x \\ \cline{2-2} 5x^3\qquad\quad -20x & 5 \\ \cline{1-1} 9x^2-2x-8 & \end{array}$$

Таким образом, $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx=\int\left(5+\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\right)dx.$

Знаменатель последней дроби разлагается на множители следующим образом

$$x^3-4x=x\left(x^2-4\right)=x(x-2)(x+2).$$

Значит, дробь разлагается на слагаемые так:

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Приводим дроби к общему знаменателю и избавляемся от этого знаменателя.

$$9x^2-2x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2);$$

$$9x^2-2x-8=Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx;$$

$$9x^2-2x-8=x^2(A+B+C)+x(2B-2C)-4A.$$

Составляем систему: $\begin{cases} A+B+C=9; \\ 2B-2C=-2; \\ -4A=-8. \end{cases}$

Решаем ее: $\begin{cases} A=2; \\ B+C=7; \\ B-C=-1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2; \\ B=3; \\ C=4. \end{cases}$

Заменяя под знаком интеграла дробь ее разложением на простейшие дроби (с подставленными в него значениями коэффициентов) и находя получившиеся интегралы, получим:

$$\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx=\int\left(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)dx=5\int dx+2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x-2}+$$

$$+4\int\frac{dx}{x+2}=5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C=5x+\ln\left|x^2(x-2)^3(x+2)^4\right|+C.$$

Ответ: $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx=5x+\ln\left|x^2(x-2)^3(x+2)^4\right|+C$.

Задача 2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{2x^2-5x-13}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$.

Решение: под интегралом стоит правильная рациональная дробь. Знаменатель дроби разложен на простые множители. Разложим подынтегральную дробь на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{2x^2-5x-13}{(x+1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}.$$

Приводим дроби к общему знаменателю и избавляемся от этого знаменателя:

$$2x^2-5x-13=A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2).$$

Здесь можно воспользоваться так называемым методом специальных значений.

Будем поочередно придавать неизвестному x те значения, которые обращают выражения в скобках в нуль. В данном случае это $x=-1$, $x=2$ и $x=-3$.

Полагая последовательно $x=-1, x=2, x=-3$, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & -6=-6\cdot A; \\ x=2 & -15=15\cdot B; \\ x=-3 & 20=10\cdot C. \end{array}$$

Находим искомые коэффициенты: $A=1, B=-1, C=2$.

Заменяя под знаком интеграла дробь ее разложением на простейшие дроби (с подставленными в него значениями коэффициентов) и находя получившиеся интегралы, получим:

$$\int\frac{2x^2-5x-13}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+3}\right)dx=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\ln|x+1|-\ln|x-2|+2\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{(x+1)(x+3)^2}{x-2}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{2x^2-5x-13}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx=\ln\left|\frac{(x+1)(x+3)^2}{x-2}\right|+C$.

Задача 3. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$.

Решение: подынтегральная дробь правильная. Её знаменатель уже представлен в виде произведения двух множителей. Тогда дробь разлагается на простейшие слагаемые дроби таким образом:

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}.$$

Приводя дроби в правой часть к общему знаменателю и приравнивая числители дробей в левой и правой частях равенства, получим

$$3x+2=A(x+1)^3+Bx(x+1)^2+Cx(x+1)+Dx;$$

$$3x+2=Ax^3+3Ax^2+3Ax+A+Bx^3+2Bx^2+Bx+Cx^2+Cx+Dx;$$

$$3x+2=x^3(A+B)+x^2(3A+2B+C)+x(3A+B+C+D)+A.$$

Составляем систему: $\begin{cases} A+B=0; \\ 3A+2B+C=0; \\ 3A+B+C+D=3; \\ A=2. \end{cases}$ Решаем ее: $\begin{cases} A=2; \\ B=-2; \\ C=-2; \\ D=1. \end{cases}$

Поэтому

$$\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x+1} - 2\int\frac{dx}{(x+1)^2} +$$

$$+\int\frac{dx}{(x+1)^3} = 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C = \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx = \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$.

Задача 4. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2}dx$.

Решение: подынтегральная дробь неправильная. Выделим из нее целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2}.$$

Разложим полученную во втором слагаемом правильную дробь на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{1}{x^4 + 3x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3},$$

приведем дроби к общему знаменателю и избавимся от этого знаменателя.

$$1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + x^2(Cx + D),$$

$$1 = Ax^3 + 3Ax + Bx^2 + 3B + Cx^3 + Dx^2,$$

$$1 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 3Ax + 3B.$$

Составляем систему: $\begin{cases} A + C = 0; \\ B + D = 0; \\ 3A = 0; \\ 3B = 1. \end{cases}$ Решаем ее: $\begin{cases} A = 0; \\ B = \dfrac{1}{3}; \\ C = 0; \\ D = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Поэтому $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2}dx = \int\left(2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2}\right)dx = \int\left(2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}\right)dx =$

$$=2\int x\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

Задача 5. Найти неопределенный интеграл: $\displaystyle\int\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$.

Решение: подынтегральная дробь правильная. Её знаменатель уже представлен в виде произведения множителей степени не больше двух. Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби запишется так:

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводя дроби правой части равенства к общему знаменателю и приравнивая числители дробей в обеих частях этого равенства, получим

$$x^3-2x+2=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2;$$

$$x^3-2x+2=Ax^3+Ax-Ax^2-A+Bx^2+B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D;$$

$$x^3-2x+2=x^3(A+C)+x^2(-A+B-2C+D)+x(A+C-2D)+(-A+B+D).$$

Составляем систему: $\begin{cases}A+C=1;\\-A+B-2C+D=0;\\A+C-2D=-2;\\-A+B+D=2.\end{cases}$ Решаем ее: $\begin{cases}A=0;\\B=\frac{1}{2};\\C=1;\\D=\frac{3}{2}.\end{cases}$

Поэтому $\displaystyle\int\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{x+\frac{3}{2}}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{x+\frac{3}{2}}{x^2+1}dx=$

$$=-\frac{1}{2(x-1)}+\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x=$$

$$=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Ответ: $\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x + C$.

Задача 6. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$.

Решение: подынтегральная дробь правильная. Знаменатель последней дроби разлагается на множители следующим образом:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

В соответствии с этим разлагаем дробь на слагаемые:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}=\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

приводим дроби к общему знаменателю и избавляемся от этого знаменателя.

$$2x^2-3x+1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1);$$

$$2x^2-3x+1=Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C;$$

$$2x^2-3x+1=x^2(A+B)+x(-A+B+C)+A+C.$$

Составляем систему: $\begin{cases} A+B=2; \\ -A+B+C=-3; \\ A+C=1. \end{cases}$

Решаем ее: $\begin{cases} B=2-A; \\ C=1-A; \\ -A+2-A+1-A=-3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3A=-6; \\ B=2-A; \\ C=1-A; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2; \\ B=0; \\ C=-1. \end{cases}$

Поэтому

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x^2-x+1}\right)dx=2\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$=2\ln|x+1|-\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=2\ln|x+1|-\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C=2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Ответ: $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx = 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

Задача 7. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$.

Решение: подынтегральная дробь правильная. Знаменатель дроби уже представлен в виде произведения множителей степени не больше двух. Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби запишется в виде:

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и приравнивая числители в левой и правой частях, получим:

$$x^3+3 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1);$$

$$x^3+3 = x^4(A+B) + x^3(B+C) + x^2(2A+B+D) + x(B+C+D+E) + A+C+E.$$

Составляем систему: $\begin{cases} A+B=0; \\ B+C=1; \\ 2A+B+C+D=0; \\ B+C+D+E=0; \\ A+C+E=3. \end{cases}$ Решаем её: $\begin{cases} A=\frac{1}{2}; \\ B=-\frac{1}{2}; \\ C=\frac{3}{2}; \\ D=-2; \\ E=1. \end{cases}$

Таким образом: $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+1}dx + \int \frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} - \int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} +$$

$$+ \frac{3}{2}\operatorname{arctg}x - \int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{x^2+1} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Последний интеграл находится с помощью рекуррентной формулы (2) при $n = 2$:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C;$$

возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int \frac{x^3+3}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}x +$$

$$+\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + 2\operatorname{arctg}x + \frac{x+2}{2\left(x^2+1\right)} + C.$$

Ответ: $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx = = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + 2\operatorname{arctg}x + \frac{x+2}{2\left(x^2+1\right)} + C.$

Задача 8. Найти неопределенный интеграл: $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}dx$.

Решение: подынтегральная дробь правильная. Знаменатель подынтегральной дроби разлагается на множители следующим образом:

$$x^4+10x^2+25 = \left(x^2+5\right)^2.$$

Тогда разложение подынтегральной функции на простейшие дроби запишется в виде:

$$\frac{x^3-3}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+5\right)^2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и приравнивая числители дробей в левой и правой частях равенства, получим:

$$x^3-3 = (Ax+B)\left(x^2+5\right) + Cx + D;$$

$$x^3-3 = Ax^3 + 5Ax + Bx^2 + 5B + Cx + D;$$

$$x^3-3 = Ax^3 + Bx^2 + (5A+C)x + (5B+D).$$

Составляем систему: $\begin{cases} A=1; \\ B=0; \\ 5A+C=0; \\ 5B+D=-3. \end{cases}$ Решаем её: $\begin{cases} A=1; \\ B=0; \\ C=-5; \\ D=-3. \end{cases}$

Получаем: $\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}dx = \int\left(\frac{x}{x^2+5}-\frac{5x+3}{\left(x^2+5\right)^2}\right)dx = \int\frac{x}{x^2+5}dx -$

$-\int\frac{5x+3}{\left(x^2+5\right)^2}dx = \int\frac{x}{x^2+5}dx - 5\int\frac{x}{\left(x^2+5\right)^2}dx - 3\int\frac{dx}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+5\right)}{x^2+5} - \frac{5}{2}\int\frac{d\left(x^2+5\right)}{\left(x^2+5\right)^2} -$

$-3\int\frac{dx}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right) - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{x^2+5}\right) - 3\int\frac{dx}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right) + \frac{5}{2\left(x^2+5\right)} -$

$-3\int\frac{dx}{\left(x^2+5\right)^2}$.

Последний интеграл находится с помощью рекуррентной формулы (2) при $n=2$:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{1}{10}\cdot\frac{x}{x^2+5} + \frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{10}\cdot\frac{x}{x^2+5} + \frac{1}{10\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C;$$

вернувшись к исходному интегралу, получим:

$$\int\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right) + \frac{5}{2\left(x^2+5\right)} -$$

$$-\frac{3}{10}\cdot\frac{x}{x^2+5} - \frac{3}{10\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right) + \frac{25-3x}{10\left(x^2+5\right)} - \frac{3}{10\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Ответ: $\int\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right) + \frac{25-3x}{10\left(x^2+5\right)} - \frac{3}{10\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$.

5.6 Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется дробно-рациональной?
2. Какая рациональная функция называется целой? Как интегрируется такая функция?
3. Когда дробь вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется неправильной? Как выделить из нее целую часть?

4. Когда дробь вида $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется правильной? Изложите порядок представления правильной дроби в виде суммы элементарных слагаемых дробей. Какие два вида элементарных (простейших) дробей Вам известны?

5. Какие формулы называются рекуррентными? Выведите рекуррентную формулу, с помощью которой находится интеграл вида $I_* = \int \dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$.

5.7 Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx$;

2. $\int \dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

3. $\int \dfrac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx$;

4. $\int \dfrac{3x^3+5x^2-25x-1}{(x+2)(x-1)^2}dx$;

5. $\int \dfrac{dx}{x^3(x-1)^2}$;

6. $\int \dfrac{dx}{\left(x^2+2\right)(x-1)^2}$;

7. $\int \dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}dx$;

8. $\int \dfrac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2\left(x^2-4x+13\right)}dx$;

9. $\int \dfrac{4x^2-8x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}dx$;

10. $\int \dfrac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$.

6 Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических. Универсальная тригонометрическая подстановка. Частные тригонометрические подстановки. Интегрирование произведений синусов и косинусов. Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$.

6.1 Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических

Рациональной функцией $R(u;v)$ двух переменных u и v называется функция, представляющая собой частное двух многочленов относительно этих переменных, например: $R(u;v)=\dfrac{5u^2v-3uv+7v+\sqrt{3}}{4u^2-\sqrt{2}v+5}$.

Рассмотрим приемы интегрирования функций вида $R(\sin x;\cos x)$.

6.1.1 Универсальная тригонометрическая подстановка

Подстановка $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$, часто применяющаяся при интегрировании таких функций, называется универсальной тригонометрической подстановкой. Применив ее, мы сведем данный интеграл к интегралу от рациональной дроби с новым аргументом t. Эту дробь уже можно будет интегрировать по правилам, изложенным в предыдущем параграфе, если не получится табличный интеграл.

Итак, пусть $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Пользуясь известными тригонометрическими формулами, найдем: $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; получим: $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\sin x=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}(1+\cos x)=t\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)=t\cdot\dfrac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dt=\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$,

$dx=dt\cdot 2\cos^2\dfrac{x}{2}$, $dx=(1+\cos x)dt=\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)dt$, $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

Пример 1. Найти интеграл: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

Ответ: $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

Пример 2. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Решение: Интеграл $\int \frac{dx}{\cos x}$ можно найти, заменив косинус, как показано выше. Сделайте это самостоятельно. Решим эту задачу другим способом, применив формулу приведения.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Результаты, полученные при решении этих двух примеров, полезно запомнить.

Универсальной подстановкой можно пользоваться, интегрируя любую функцию вида $R(\sin x; \cos x)$. Однако в некоторых случаях более удобными бывают так называемые частные подстановки, которые также приводят к интегралу от рациональной функции новой переменной.

6.1.2 Случай функции, нечетной относительно синуса или косинуса

Если подынтегральная функция нечетна относительно синуса, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применима подстановка $\cos x = t$.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл: $\int \sin x \cdot \cos^5 x\, dx$.

Решение: $\int \sin x \cdot \cos^5 x\, dx = -\int \cos^5 x\, d(\cos x) = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$.

Ответ: $\int \sin x \cdot \cos^5 x\,dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$.

Если подынтегральная функция нечетна относительно косинуса, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применима подстановка $\sin x = t$.

Пример 3. Найти интеграл: $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

Решение: $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cdot \cos x\,dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^4}dt =$

$$= \int t^{-4}dt - \int t^{-2}dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$.

Можно при той же подстановке рассуждать по-другому, учитывая, что $x = \arcsin t$. Решите задачу таким путем самостоятельно.

6.1.3 Случай функции, четной относительно синуса и косинуса

Если подынтегральная функция четна относительно синуса и косинуса, т.е. $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то применима подстановка $\operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Пример 4. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{matrix} \right| =$

$$=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2}-4\dfrac{t}{1+t^2}+\dfrac{5}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2-4t+5}=\int\frac{dt}{(t-2)^2+1}=\operatorname{arctg}(t-2)+C=$$
$$=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x-2)+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x}=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x-2)+C$.

6.2 Интегрирование произведений синусов и косинусов

Эти произведения преобразуются по известным тригонометрическим формулам: $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$,

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta).$$

Пример 5. Найти интеграл: $\int\sin 4x\cdot\sin 6x\,dx$.

Решение: $\displaystyle\int\sin 4x\cdot\sin 6x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 10x)dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx-$

$$-\frac{1}{2}\int\cos 10x\,dx=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{20}\sin 10x+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\sin 4x\cdot\sin 6x\,dx=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{20}\sin 10x+C$.

6.3 Интегралы вида $\int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx$, где m или n – нечетное положительное число

Если показатель степени одной из тригонометрических функций – нечетное положительное число, то, принимая другую функцию за новую переменную t, мы сведем рассматриваемый интеграл к табличному.

Пример 6. Найти интеграл: $\int\sin x\cdot\cos^5 x\,dx$.

Решение: $\int \sin x \cdot \cos^6 x\,dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x\,dx \end{vmatrix} = -\int t^6\,dt = -\frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^7 x}{7} + C$.

Ответ: $\int \sin x \cdot \cos^6 x\,dx = -\frac{\cos^7 x}{7} + C$.

6.4 Интеграл вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$, где $m+n$ – четное отрицательное целое число

Такой интеграл сводится к табличному подстановкой $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 7. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \cdot \sin x}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \cdot \sin x}} = \int \cos^{-\frac{7}{2}} x \cdot \sin^{-\frac{1}{2}} x\,dx = \begin{vmatrix} m+n = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -4 \in Z \\ \operatorname{tg} x = t,\ dt = \frac{dx}{\cos^2 t} \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x \cdot \operatorname{tg} x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \left| \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 \right| = \int \frac{1+t^2}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-\frac{1}{2}}dt + \int t^{\frac{3}{2}}dt = 2t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \cdot \sin x}} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + C$.

6.5 Интеграл вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$, где m и n – четные неотрицательные числа

Повторное применение формул понижения степени синуса и косинуса позволяет свести рассматриваемый интеграл к сумме интегралов от постоянных и от нечетных степеней синуса и косинуса.

Пример 8. Найти неопределенный интеграл: $\int \sin^2 3x\,dx$.

Решение: $\int \sin^2 3x\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}x -$

$$-\frac{1}{12}\int \cos 6x\,d(6x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

Ответ: $\int \sin^2 3x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x + C$.

6.6 Примеры решения задач

Задача 1. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$.

Решение: полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ и заменяя $\sin x$, $\cos x$ и dx указанными выражениями через t, вытекающими из этой подстановки, получим:

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{2(1+t^2)}{(1+t^2)(4t-1+t^2)}dt = 2\int \frac{dt}{t^2+4t-1} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2-1} = 2\int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2-1} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C$.

Задача 2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{5+4\cos ax}$.

Решение: $\int \frac{dx}{5+4\cos ax} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{ax}{2}=t, x=\frac{2}{a}\mathrm{arctg}t, \\ dx=\frac{2dt}{a(1+t^2)}, \cos ax=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{a(1+t^2)}}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$

$$=\frac{2}{a}\int \frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)(5(1+t^2)+4-4t^2)} = \frac{2}{a}\int \frac{dt}{5+t^2+4-4t^2} = \frac{2}{a}\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3a}\mathrm{arctg}\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{2}{3a}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}\frac{ax}{2}\right)+C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{5+4\cos ax} = \frac{2}{3a}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}\frac{ax}{2}\right)+C$.

Задача 3. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Решение: применяя универсальную тригонометрическую подстановку,

получим: $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2}=t, x=2\mathrm{arctg}t, \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$

$$=\int \frac{1}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{\frac{8(1+t^2)-8t+7-7t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2} =$$

$$=2\int \frac{dt}{t^2-8t+15} = 2\int \frac{dt}{(t-3)(t-5)} = \int \frac{(t-3)-(t-5)}{(t-3)(t-5)}dt = \int \frac{dt}{t-5} - \int \frac{dt}{t-3} =$$

$$=\ln|t-5| - \ln|t-3| + C = \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C = \ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-5}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3}\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-5}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3}\right| + C$.

Задача 4. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$.

Решение: применив универсальную тригонометрическую подстановку, получим:

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}=\left|\begin{aligned}&\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t, x=2\,\mathrm{arctg}t,\\&dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\\&\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{1+t^2}{t\left(2\left(1+t^2\right)+1-t^2-4t\right)}dt=\int\frac{1+t^2}{t\left(2+2t^2+1-t^2-4t\right)}dt=\int\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}dt\,.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие. Корни многочлена, стоящего в знаменателе: $t_1=0$, $t_2=3$, $t_3=1$. Значит, дробь разлагается на слагаемые следующим образом:

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{C}{t-1};$$

приводим дроби к общему знаменателю и избавляемся от этого знаменателя.

$1+t^2=A\left(t^2-4t+3\right)+Bt(t-1)+Ct(t-3)$;

$1+t^2=At^2-4At+3A+Bt^2-Bt+Ct^2-3Ct$;

$1+t^2=(A+B+C)t^2+(-4A-B-3C)t+3A$.

Составляем систему: $\begin{cases}A+B+C=1\\-4A-B-3C=0\\3A=1\end{cases}.$

Решаем ее: $\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B+C=\frac{2}{3}\\-B-3C=-\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=\frac{5}{3}\\C=-1\end{cases}.$

$$\int\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}dt=\int\left(\frac{1}{3t}+\frac{5}{3(t-3)}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}-\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C$.

Задача 5. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$.

Решение: $\int\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx=\begin{vmatrix}\cos x=t\\ \sin x dx=-dt\end{vmatrix}=-\int\frac{dt}{(1-t)^2}=-\int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2}=\frac{1}{t-1}+C=$

$$=\frac{1}{\cos x-1}+C.$$

Ответ: $\int\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx=\frac{1}{\cos x-1}+C$.

Задача 6. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx$.

Решение: $\int\frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx=\begin{vmatrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{5+t^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{5}}+C.$$

Ответ: $\int\frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{5}}+C$.

Задача 7. Найти интеграл: $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx$.

Решение: $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx=\begin{vmatrix}\cos x=t\\ dt=-\sin x dx\end{vmatrix}=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x-3}\sin x\,dx=$

$$=\int\frac{(1-\cos^2 x)}{\cos x-3}\sin x\,dx=-\int\frac{(1-t^2)}{t-3}dt=-\int\frac{dt}{t-3}+\int\frac{t^2}{t-3}dt=-\ln|t-3|+\int\frac{t^2-9+9}{t-3}dt=$$

$$=-\ln|t-3|+\int\frac{t^2-9}{t-3}dt+\int\frac{9}{t-3}dt=-\ln|t-3|+\int\frac{(t-3)(t+3)}{t-3}dt+9\ln|t-3|=$$

$$=8\ln|t-3|+\int(t+3)dt=8\ln|t-3|+\frac{t^2}{2}+3t+C=8\ln|\cos x-3|+\frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+C.$$

Ответ: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx = 8\ln|\cos x - 3| + \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + C$.

Задача 8. Найти неопределенный интеграл: $\int \sin^5 x\, dx$.

Решение: $\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) =$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d(\cos x) = -\left(\cos x - 2\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}\right) + C =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C = \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x - \cos x + C.$$

Ответ: $\int \sin^5 x\, dx = \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x - \cos x + C$.

Задача 9. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 3\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 3t - 1} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{13}}{2}} \ln\left| \frac{t + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}}{t + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left| \frac{2t + 3 - \sqrt{13}}{2t + 3 + \sqrt{13}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left| \frac{2\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left| \frac{2\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C$.

Задача 10. Найти неопределенный интеграл: $\int \operatorname{tg}^7 x\, dx$.

Решение: $\int \operatorname{tg}^7 x\, dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int t^7 \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(t^5 - t^3 + t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt =$

$$=\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+C=\frac{1}{6}\mathrm{tg}^6x-\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4x+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x-\frac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{tg}^2x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{tg}^6x-\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4x+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x+\ln\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}+C=\frac{1}{6}\mathrm{tg}^6x-\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4x+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x+\ln\left|\cos x\right|+C.$$

Ответ: $\int \mathrm{tg}^7x\,dx=\frac{1}{6}\mathrm{tg}^6x-\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4x+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x+\ln\left|\cos x\right|+C$.

Задача 11. Найти неопределенный интеграл: $\int\cos 3x\cdot\cos 7x\,dx$.

Решение: $\int\cos 3x\cdot\cos 7x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos 4x+\cos 10x\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\cos 4x\,dx+\int\cos 10x\,dx\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\sin 10x+C=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{20}\sin 10x+C.$$

Ответ: $\int\cos 3x\cdot\cos 7x\,dx=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{20}\sin 10x+C$.

Задача 12. Найти неопределенный интеграл: $\int\sin 3x\cdot\cos 5x\,dx$.

Решение: $\int\sin 3x\cdot\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 8x+\sin(-2x)\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 8x-\sin 2x\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 8x\,dx-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=\frac{1}{16}\int\sin 8x\,d(8x)-\frac{1}{4}\int\sin 2x\,d(2x)=$$

$$=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C.$$

Ответ: $\int\sin 3x\cdot\cos 5x\,dx=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C$.

Задача 13. Найти неопределенный интеграл: $\int\cos 2x\cdot\sin 3x\cdot\sin 4x dx$.

Решение: $\int\cos 2x\cdot\sin 3x\cdot\sin 4x dx=\int\left(\cos 2x\cdot\sin 3x\right)\cdot\sin 4x dx=$

$$=\int\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin 5x\right)\cdot\sin 4x\,dx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x\right)\cdot\sin 4x\,dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}\sin 5x\cdot\sin 4x+\frac{1}{2}\sin x\cdot\sin 4x\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin 5x\cdot\sin 4x\,dx+\frac{1}{2}\int\sin x\cdot\sin 4x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos 9x\right)dx+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\cos(-3x)-\frac{1}{2}\cos 5x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(\cos x-\cos 9x)dx+\frac{1}{4}\int(\cos 3x-\cos 5x)dx=\frac{1}{4}\int\cos x\,dx-\frac{1}{4}\int\cos 9x\,dx+\frac{1}{4}\int\cos 3x\,dx-$$

$$-\frac{1}{4}\int\cos 5x\,dx=\frac{1}{4}\left(\sin x-\frac{1}{9}\sin 9x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)+C.$$

Ответ: $\int\cos 2x\cdot\sin 3x\cdot\sin 4xdx=\frac{1}{4}\left(\sin x-\frac{1}{9}\sin 9x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)+C.$

Задача 14. Найти неопределенный интеграл: $\int\sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^3 x\,dx.$

Решение: $\int\sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^3 x\,dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t,\ dt=\cos x\,dx,\\ \cos^2 t=1-\sin^2 t\end{array}\right|=\int t^{\frac{2}{3}}\left(1-t^2\right)dt=$

$$=\int t^{\frac{2}{3}}dt-\int t^{\frac{8}{3}}dt=\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{11}t^{\frac{11}{3}}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x}-\frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x}+C.$$

Ответ: $\int\sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^3 x\,dx=\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x}-\frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x}+C.$

Задача 15. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

Решение: $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^4 x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=t\\ x=\operatorname{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int t^2\left(1+t^2\right)\frac{dt}{1+t^2}=$

$$=\int t^2\left(1+t^2\right)dt=\int\left(t^2+t^4\right)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C.$$

Ответ: $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C.$

Задача 16. Найти неопределенный интеграл: $\int\sin^4 x\,dx.$

Решение: применим формулу понижения степени дважды:

$$\int\sin^4 x\,dx=\int\left(\sin^2 x\right)^2dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x\,dx=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{4}(x-\sin 2x)+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{4}(x-\sin 2x)+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

Ответ: $\int\sin^4 x\,dx=\frac{1}{4}(x-\sin 2x)+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$.

Задача 17. Найти неопределенный интеграл: $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx$.

Решение: $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot(\sin x\cdot\cos x)^2\,dx=$

$$=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{\sin^2 2x}{4}dx=\frac{1}{8}\int\left(\sin^2 2x-\sin^2 2x\cdot\cos 2x\right)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\,dx-$$
$$-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\cos 2x\,dx=$$

Теперь в первом из этих интегралов понизим степень $\sin 2x$, а во втором будем рассматривать $\sin 2x$ как новую переменную, и тогда $\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}d(\sin 2x)$.

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx-\frac{1}{16}\int\sin^2 2x\,d(\sin 2x)=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 4x\,dx-\frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3}=$$
$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

При отыскании этого интеграла, конечно, можно было бы сразу понизить степень и у $\cos^2 x$ и у $\sin^2 x$, заметив, что $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2$. Но в данном случае применение формулы $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ сделало решение задачи короче и рациональнее.

Ответ: $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

6.7 Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите важнейшие случаи интегрирования алгебраических иррациональностей.

2. Какая подстановка называется универсальной тригонометрической? Когда она применяется?

3. Что представляют собой и когда применяются частные тригонометрические подстановки?

4. Как интегрируются функции $\sin ax \cdot \sin bx$, $\sin ax \cdot \cos bx$, $\cos ax \cdot \cos bx$?

5. Перечислите случаи, возможные при интегрировании функции $\sin^m x \cdot \cos^n x$. Какие приемы интегрирования применяются в каждом из этих случаев?

6.8 Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$;
2. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$;
3. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$;
4. $\int \frac{dx}{4 - \cos^2 x + 5\sin^2 x}$;
5. $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x\, dx$;
6. $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$;
7. $\int \sin\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{4} dx$;
8. $\int \cos 4x \cdot \cos 7x\, dx$;
9. $\int \sin 3x \cdot \sin 10x\, dx$;
10. $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x\, dx$;
11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$;
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cdot \cos^3 x}}$;
13. $\int \cos^4 x\, dx$;
14. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx$.

7 Интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей

Интегрирование функций, рационально зависящих от $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $\sqrt{px^2 + qx + r}$. *Интеграл вида* $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$, *где* m, n, p *– рациональные числа.*

7.1 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx$

Здесь R − дробно-рациональная функция от аргумента x и корней (радикалов) из x. Таких корней может быть несколько; n − натуральное число, представляющее собой наименьшее общее кратное показателей всех радикалов, под которыми x входит в подынтегральную функцию. Заметим, что интегралы вида $\int R\left(x, x^r, x^s, \ldots\right)dx$, где $r, s, \ldots$ – рациональные числа, относятся к рассматриваемому типу, так как, если n – общий знаменатель дробей $r, s, \ldots$, то подынтегральная функция оказывается рациональной функцией от x и $x^{\frac{1}{n}}$.

Например: $\dfrac{3x - \sqrt[3]{x}}{x^2 + \sqrt[4]{x}} = \dfrac{3x - \left(\sqrt[12]{x}\right)^4}{x^2 + \left(\sqrt[12]{x}\right)^3} = R\left(x, \sqrt[12]{x}\right)$.

Такие интегралы с помощью подстановки $x = t^n$ сводятся к интегралам от рациональных функций (дробей).

Пример 1. Найти неопределенный интеграл: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx$.

$$\textit{Решение:}\ \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} n = 6 \quad (\text{НОК чисел 2 и 3}); \\ x = t^6;\ dx = 6t^5 dt; \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = 6\int \frac{t^8}{t^6 - t^4}dt = 6\int \frac{t^4}{t^2 - 1}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1}dt = 6\int \left(t^2 + 1\right)dt + 6\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{6t^3}{3} + 6t + 3\ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt[2]{x^3} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C.$$

$$\textit{Ответ:}\ \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C.$$

7.2 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Здесь R – вновь дробно-рациональная функция, но теперь это дробь, в которую входят x, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где радикалов вновь может быть несколько; n – натуральное число, представляющее собой наименьшее общее кратное всех радикалов, под которыми в подынтегральную функцию входит теперь уже дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Заметим, что к рассматриваемому типу относятся и интегралы вида $\int R\left(x, \left(-\right), \ldots\right)dx$, где $r, s, \ldots$ – рациональные числа, относятся, так как, если n – общий знаменатель дробей $r, s, \ldots$, то подынтегральная функция оказывается рациональной функцией от x и $x^{\frac{1}{n}}$.

Здесь мы сможем избавиться от иррациональности, применив подстановку $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Решение:
$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left|\begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x} = t^2, 1-x = t^2(1+x) \\ 1-x = t^2 + t^2x, 1-t^2 = x(1+t^2) \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt \\ 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2} \end{array}\right| =$$

$$= -\int \frac{(1+t^2)^2}{4t^2} \cdot t \cdot \frac{4tdt}{(1+t^2)^2} = -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2}dt = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$.

При отыскании таких интегралов основная трудность состоит в проведении выкладок, необходимых при осуществлении подстановки.

7.3 Интегралы, в которых подынтегральная функция представляет собой рациональную функцию от независимой переменной *x* и корня из квадратного трехчлена

7.3.1 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{px^2+qx+r}\right)dx$

Для отыскания таких интегралов существует немало различных приемов. Прежде всего, выделим из квадратного трехчлена под корнем полный квадрат. После этого у нас получится интеграл одного из следующих трех видов:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx; \qquad \int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx; \qquad \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx.$$

Для отыскания этих интегралов наиболее удобными являются тригонометрические подстановки:

в первом случае − подстановка $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$;

во втором случае − $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$;

в третьем случае − $x = \dfrac{a}{\cos t}$ или $x = \dfrac{a}{\sin t}$.

Такие подстановки сводят интегралы этих трех видов к интегралам от функций, рационально зависящих от синуса и косинуса (см. п. 5.1).

Пример 3. Найти неопределенный интеграл: $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}$.

Решение: $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}} = \left|\begin{matrix} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t dt \end{matrix}\right| = \int \frac{3\cos t dt}{\left(9\sin^2 t+16\right)3\cos t} =$

$$= \int \frac{dt}{9\sin^2 t + 16\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = \int \frac{dt}{25\sin^2 t + 16\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t\left(25\,\mathrm{tg}^2 t + 16\right)} =$$

$$= \int \frac{d(\mathrm{tg}x)}{25\,\mathrm{tg}^2 x + 16} = \frac{1}{25}\int \frac{d(\mathrm{tg}t)}{\mathrm{tg}^2 t + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1\cdot 5}{25\cdot 4}\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{4}\mathrm{tg}t\right) + C =$$

$$=\left|\operatorname{tg}t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right|=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}+C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}+C.$

7.3.2 Интеграл вида $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{v(x)}}dx$, где $P_n(x)$ − многочлен степени n, а $v(x)$ − квадратный трехчлен

Этот интеграл можно найти по формуле:

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{v(x)}}dx=\left(A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n\right)\sqrt{v}+B\int\frac{dx}{\sqrt{v}},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ − постоянные, определяемые путем дифференцирования этого равенства, умножения его на $\sqrt{v}$ и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x.

Подобным путем можно найти и интеграл $\int P_n(x)\sqrt{v}\,dx=\int\frac{v\,P_n(x)}{\sqrt{v}}dx.$ Применим формулу, аналогичную приведенной выше:

$$\int\frac{v\,P_n(x)}{\sqrt{v}}dx=\left(A_1x^{n+1}+A_2x^{n}+\ldots+A_{n+2}\right)\sqrt{v}+B\int\frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-x}}dx$.

Решение: $\int\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-x}}dx=(Ax+B)\sqrt{x^2-2x}+D\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Для определения постоянных A, B, D продифференцируем обе части равенства, а затем умножим их на $\sqrt{x^2-2x}$.

$$\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}=A\sqrt{x^2-2x}+(Ax+B)\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}+\frac{D}{\sqrt{x^2-2x}};$$

$$2x^2 - x - 5 = A\left(x^2 - 2x\right) + \left(Ax + B\right)\cdot\left(x - 1\right) + D;$$

$$2x^2 - x - 5 = Ax^2 - 2Ax + Ax^2 + Bx - Ax - B + D;$$

$$2x^2 - x = 2Ax^2 + \left(B - 3A\right)x + \left(D - B\right).$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 2; \\ B - 2A = -1; \\ D - B = -5. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $A = 1, B = 2, D = -3.$

Подставим значения A, B и D в схему интегрирования:

$$I = \left(x + 2\right)\cdot\sqrt{x^2 - 2x} - 3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Выпишем отдельно последний интеграл: $I_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$; выделим полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$I_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \int\frac{dx}{\sqrt{\left(x - 1\right)^2 - 1}} = \ln\left|x - 1 + \sqrt{\left(x - 1\right)^2 - 1}\right| = \ln\left|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}\right| + C.$$

Тогда $\int\frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - x}}dx = \left(x + 2\right)\cdot\sqrt{x^2 - 2x} - 3\ln\left|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}\right| + C.$

Ответ: $\int\frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - x}}dx = \left(x + 2\right)\cdot\sqrt{x^2 - 2x} - 3\ln\left|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}\right| + C.$

7.4 Интегралы вида $\int x^m\left(a + bx^n\right)^p dx$, где m, n, p − рациональные числа

Такие интегралы называют интегралами биномиальных дифференциалов или интегралами дифференциальных биномов. Русский математик **П.Л. Чебышёв (1821-1894)** в 1853 г. показал, что такие интегралы выражаются через элементарные функции только в трех случаях, когда одно из трех чисел:

p, $\dfrac{m+1}{n}$ или $\dfrac{m+1}{n}+p$ является целым. Тогда эти интегралы сводятся к рассмотренным ранее с помощью следующих подстановок:

I. Если число p – целое, $m=\dfrac{m_1}{m_2}, n=\dfrac{n_1}{n_2}$, то делается подстановка $x=t^s$, где S – наименьшее общее кратное чисел m_2 и n_2.

II. Если $\dfrac{m+1}{n}$ – целое, а p – нецелое, то используем в подстановке знаменатель этой дроби: пусть $p=\dfrac{p_1}{p_2}$. Сделаем подстановку $a+bx^n=t^{p_2}$ или $a+bx^n=t^2$, если $n=p=2$.

III. Если $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое, а p и $\dfrac{m+1}{n}$ – нецелое, то делается подстановка $a+bx^n=x^n\cdot t^{p_2}$ или, что то же самое, $ax^{-n}+b=t^{p_2}$.

Пример 4. Найти неопределенный интеграл: $\int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$.

$$\textit{Решение:}\ \int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx=\left|\begin{array}{l} m=3, n=2, p=-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{m+1}{n}=2,\ n=p_2=2 \\ 1-x^2=t, x^2=1-t \\ xdx=-\dfrac{1}{2}dt \end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int(1-t)\,t^{-\frac{3}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}dt=t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+C=\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

$$\textit{Ответ:}\ \int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл: $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$.

Решение: $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}} = \int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{-\frac{5}{3}}dx = \left| \begin{array}{l} m=-2, n=3, p=-\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{m+1}{n}+p=-2, p_2=3 \\ 1+x^3=x^3\cdot t^3, \\ t^3=\dfrac{1+x^3}{x^3}, x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}} \\ dx=-\dfrac{t^2\,dt}{\left(t^3-1\right)^{\frac{4}{3}}} \end{array} \right| =$$

$$= -\int\left(t^3-1\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{t^3}{t^3-1}\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot\frac{t^2dt}{\left(t^3-1\right)^{\frac{4}{3}}} = -\int\frac{t^3-1}{t^3}dt = \int t^{-3}dt-\int dt = -\frac{t^{-2}}{2}-t+C =$$

$$= C-\frac{\left(1+2t^3\right)}{2t^2} = C-\frac{2+3x^2}{2x\cdot\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}.$$

Ответ: $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}} = C-\frac{2+3x^2}{2x\cdot\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}.$$

7.5 Примеры решения задач

Задача 1. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

Решение: $$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx = \left| \begin{array}{l} n=6 \quad (\text{НОК чисел 2 и 3}) \\ x=t^6,\ dx=6t^5dt,\ t=\sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int\frac{t^6+t^4+t}{t^6\left(1+t^2\right)}6t^5dt =$$

$$=6\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt = 6\int\left(t^3+\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6\cdot\frac{t^4}{4}+6\cdot\operatorname{arctg}t+C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\cdot\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Ответ: $$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\cdot\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Задача 2. Найти неопределенный интеграл: $\int x\sqrt{3-x}\,dx$.

Решение: $\int x\sqrt{3-x}\,dx = \left|\begin{array}{l} t^2 = 3-x \\ x = 3-t^2 \\ dx = -2t\,dt \\ t = \sqrt{3-x} \end{array}\right| = \int\left(3-t^2\right)\cdot t\cdot(-2t)dt = -2\int\left(3-t^2\right)\cdot t^2\,dt =$

$$= -2\int\left(3t^2 - t^4\right)dt = -2\left(3\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C = -2\left(\sqrt{(3-x)^3} - \frac{1}{5}\sqrt{(3-x)^5}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(3-x)^5} - 2\sqrt{(3-x)^3} + C.$$

Ответ: $\int x\sqrt{3-x}\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{(3-x)^5} - 2\sqrt{(3-x)^3} + C$.

Задача 3. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

Решение: $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \left|\begin{array}{l} n = 4 \quad (\text{НОК чисел 2 и 4}) \\ 2x-1 = t^4,\ x = \frac{t^4+1}{2} \\ dx = 2t^3dt,\ t = \sqrt[4]{2x-1} \end{array}\right| = \int\frac{2t^3\,dt}{t^2 - t} = 2\int\frac{t^2}{t-1}dt =$

$$= 2\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t-1}dt = 2\int\left(\frac{t^2-1}{t-1} + \frac{1}{t-1}\right)dt = 2\int\left(\frac{(t-1)(t+1)}{t-1} + \frac{1}{t-1}\right)dt = 2\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C = 2\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{2} + \sqrt[4]{2x-1} + \ln\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right|\right) + C =$$

$$= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right| + C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right| + C$.

Задача 4. Найти неопределенный интеграл: $\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\,dx$.

Решение: $\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} \frac{5-3x}{4+7x} = t^2,\ x = \frac{5-4t^2}{7t^2+3} \\ dx = \frac{-94t}{\left(7t^2+3\right)^2}dt,\ t = \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}} \end{array}\right| = \int t\frac{-94t}{\left(7t^2+3\right)^2}dt =$

$$=-94\int\frac{t^2}{\left(7t^2+3\right)^2}dt=\left|\begin{array}{l} u=t, \qquad du=dt \\ dv=\dfrac{t}{\left(7t^2+3\right)^2}dt \\ v=-\dfrac{1}{14}\cdot\dfrac{1}{7t^2+3}\end{array}\right|=-94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{t}{7t^2+3}+\frac{1}{14}\int\frac{dt}{7t^2+3}\right)=$$

$$=-94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{t}{7t^2+3}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{7}}}\right)+C=\frac{94}{14}\cdot\frac{t}{7t^2+3}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}t+C=$$

$$=\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}+C.$$

Ответ: $\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx=\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}+C$.

Задача 5. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

Решение: $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}, t^2=\dfrac{x+1}{x-1} \\ x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}, dx=-\dfrac{4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\end{array}\right|=\int\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot t\cdot\left(-\frac{4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\right)=$

$$=-4\int\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)^2}=-4\int\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)\left(t^2-1\right)}dt=-4\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=-2\left(\int\frac{dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2-1}\right)=-2\left(\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{1+1}\right|\right)+C=$$

$$=-\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left|x-\sqrt{x^2+1}\right|\right)+C.$$

Ответ: $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=-\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left|x-\sqrt{x^2+1}\right|\right)+C$.

Задача 6. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Решение: умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{1+x}-\left(1+\sqrt{x}\right)$, тогда получим: $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=\int\frac{\sqrt{1+x}-1-\sqrt{x}}{1+x-\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx=$

$$=\int\frac{\sqrt{1+x}-1-\sqrt{x}}{-2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$$

Рассмотрим интеграл $I=\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$ отдельно. Сделаем замену переменного:

$$I=\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\left|\begin{array}{l} t^2=\frac{1+x}{x},t=\sqrt{\frac{1+x}{x}} \\ x=\frac{1}{t^2-1},dx=-\frac{2t\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}\end{array}\right|=\int t\cdot\left(-\frac{2t\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}\right)=-2\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}=$$

$$=-2\int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{(t-1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{(t+1)^2}\right)dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t}{(t-1)^2}dt+\frac{1}{2}\int\frac{t}{(t+1)^2}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{(t-1)+1}{(t-1)^2}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)-1}{(t+1)^2}dt=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)+C=-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}\ln|t+1|+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+C=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{|t-1|}+\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2-1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{t}{t^2-1}+C=\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right|+\sqrt{x(1+x)}+C.$$

Таким образом, окончательно получаем: $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=$

$$=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\left(\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right|+\sqrt{x(1+x)}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+2\sqrt{x}-\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right|-\sqrt{x(1+x)}\right)+C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}==\frac{1}{2}\left(x+2\sqrt{x}-\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right|-\sqrt{x(1+x)}\right)+C$.

Задача 7. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2} = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-2} dx = \left| \begin{array}{l} p=-2 \in Z \\ m_2 = 2, n_2 = 4 \\ x = t^4 (\text{НОК } 2 \text{ и } 4) \\ dx = 4t^3 dt, t = \sqrt[4]{x} \end{array} \right| =$

$$= \int \left(t^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\left(t^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-2} 4t^3\, dt = 4\int \frac{t^3\, dt}{t^2(1+t)^2} = 4\int \frac{t\, dt}{(1+t)^2} = 4\int \frac{(t+1)-1}{(1+t)^2} dt =$$

$$= 4\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt = 4\left(\ln|t+1| + \frac{1}{t+1} \right) + C = 4\left(\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + \frac{1}{\sqrt[4]{x}+1} \right) + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2} = 4\left(\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + \frac{1}{\sqrt[4]{x}+1} \right) + C$.

Задача 8. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Решение: $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} p = \frac{1}{2} \notin Z, m = -\frac{2}{3}, n = \frac{1}{3} \\ \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = 1 \in Z \\ 1+x^{\frac{1}{3}} = t^2, \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = 2t\,dt \end{array} \right| =$

$$= \int \left(t^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot 2t\, dt = 6\int t^2 dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = 2t^3 + C = 2\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C = 2\cdot\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2\cdot\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3} + C$.

Задача 9. Найти неопределенный интеграл: $\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}} dx$.

Решение: $\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \left| \begin{array}{l} p=-\frac{1}{2}\notin Z,\ m=-11,\ n=4 \\ \frac{m+1}{n}=\frac{-11+1}{4}=-\frac{5}{2}\notin Z \\ \frac{m+1}{n}+p=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-3\in Z \\ 1+x^4=x^4t^2,\ x=\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}}} \\ dx=-\frac{t\,dt}{2\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{4}}},\ t=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} \end{array} \right| =$

$$=\int\left(\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}}}\right)^{-11}\left(\left(\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}}}\right)^4\cdot t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{t\,dt}{2\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{4}}}\right)=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{t\,dt}{2\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{4}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt=-\frac{1}{2}\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}+t\right)+C=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+C=$$

$$=-\frac{1}{10}\left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)^5+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)^3-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{\left(1+x^4\right)^5}}{10x^{10}}+\frac{\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}}{3x^6}-\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2}+C.$$

Ответ: $\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx=-\frac{\sqrt{\left(1+x^4\right)^5}}{10x^{10}}+\frac{\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}}{3x^6}-\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2}+C.$

Задача 10. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx.$

Решение: $\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx=\int\frac{x+3}{\sqrt{(2x+1)^2-4}}dx=\left| \begin{array}{l} 2x+1=t,\ x=\frac{t-1}{2} \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| =$

$$=\int\frac{\frac{t-1}{2}+3}{\sqrt{t^2-4}}\frac{dt}{2}=\int\frac{t+5}{4\sqrt{t^2-4}}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t+5}{\sqrt{t^2-4}}dt=\frac{1}{4}\left(\int\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}dt+5\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-4}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2-4\right)}{\sqrt{t^2-4}}+5\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|\right)=\frac{1}{4}\sqrt{t^2-4}+\frac{5}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C$.

Задача 11. Найти неопределенный интеграл: $I=\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

Решение: применим формулу

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{v(x)}}dx=\left(A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n\right)\sqrt{v}+B\int\frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

Здесь $P_n(x)=x^3-x-1$. Следовательно, $P_{n-1}(x)=A_1x^2+A_2x+A_3$.

Будем искать интеграл в виде

$$I=\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)\sqrt{x^2+2x+2}+B\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Дифференцируя последнее равенство, получим

$$I'=\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\left(2A_1x+A_2\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+$$

$$+\frac{B}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители

$$x^3-x-1=\left(2A_1+A_2\right)\left(x^2+2x+2\right)+\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)\left(x+1\right)+B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений: $\begin{cases}2A_1+A_1=1;\\A_2+4A_1+A_2+A_1=0;\\2A_2+4A_1+A_3+A_2=-1;\\2A_2+A_3+B=-1.\end{cases}$

Решая систему, получим: $A_1 = \frac{1}{3}$, $A_2 = -\frac{5}{6}$, $A_3 = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$.

Таким образом, $I = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C.$$

Ответ: $\int \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} +$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C.$$

7.6 Вопросы для самоконтроля

1. Расскажите об основных приемах интегрирования функций рационально зависящих от $\sqrt[n]{x}$ и $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Приведите примеры нужных подстановок.

2. В каких случаях применяются тригонометрические подстановки $x = a\sin t$, $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $x = \frac{a}{\sin t}$?

3. Какие три случая выражения интеграла вида $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ через элементарные функции выделил П.Л. Чебышёв? Какие подстановки следует применять в этих случаях?

4. Расскажите о применении метода неопределенных коэффициентов к отысканию интегралов вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{px^2+qx+r}}dx$.

7.7 Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$;

2. $\int \sqrt{\frac{3x-6}{x+2}}\,dx$;

3. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$;

4. $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$;

5. $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$;

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$;

7. $\int x^5\left(1+x^2\right)^{\frac{2}{3}}dx$;

8. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;

9. $\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$;

10. $\int \frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$.

8 Некоторые сведения о гиперболических функциях

Гиперболические функции, их свойства и графики. Интегрирование гиперболических функций. «Неберущиеся» интегралы.

8.1 Гиперболические функции

Определение. **Гиперболическими функциями** называются функции, определяемые следующими равенствами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ – гиперболический синус;

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ – гиперболический косинус;

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ – гиперболический тангенс;

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$ – гиперболический котангенс.

Гиперболические функции были введены итальянским математиком **Винченцо Риккати (1707-1775)** в 1757 году («Opusculorum», том I). Он получил их из рассмотрения единичной гиперболы $x^2 - y^2 = 1$. Дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено немецким математиком **Иоганном Генрихом Ламбертом (1728-1777)**.

Риккати применял для гиперболических функций обозначения Sh и Ch. В дальнейшем в обозначениях гиперболических функций наблюдался некоторый разнобой. Например, в Энциклопедии Брокгауза и Эфрона используются обозначения sinhyp, coshyp, в русскоязычной литературе закрепились обозначения $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$, в англоязычной – $\sinh$, $\cosh$.

Функции $y = \mathrm{sh}\,x$, $y = \mathrm{ch}\,x$, $y = \mathrm{th}\,x$ определены и непрерывны на множестве $\boldsymbol{R}$, а функция $y = \mathrm{cth}\,x$ определена и непрерывна на множестве $R \setminus \{0\}$. Гиперболический косинус является чётной функцией, а гиперболический синус, тангенс и котангенс являются нечётными функциями:

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}\,x;$$

$$\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}\,x;$$

$$\mathrm{th}(-x) = -\mathrm{th}\,x;$$

$$\mathrm{cth}(-x) = -\mathrm{cth}\,x.$$

График гиперболического косинуса называется ***цепной линией***. Цепная линия является линией провисания тяжёлой нити, подвешенной в двух точках. Это обстоятельство используется при проектировании арок, поскольку форма арки в виде перевёрнутой цепной линии наиболее удачно распределяет нагрузку на эту арку.

Графики гиперболических функций изображены на рисунках 2-5.

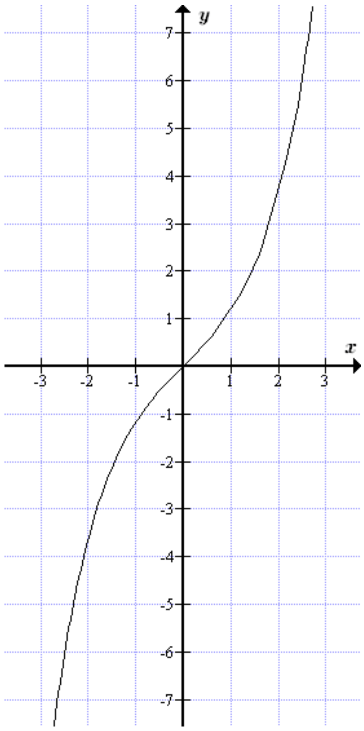

Рисунок 2 – Гиперболический синус, $y = \text{sh}\, x$

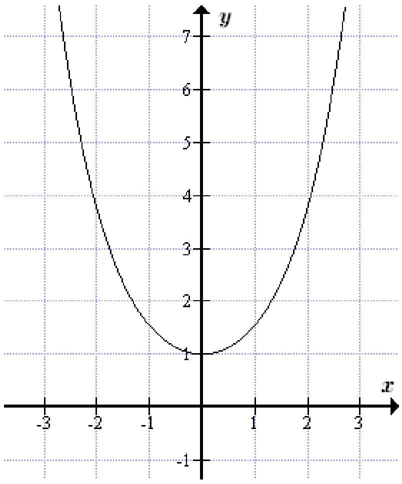

Рисунок 3 – Гиперболический косинус, $y = \text{ch}\, x$

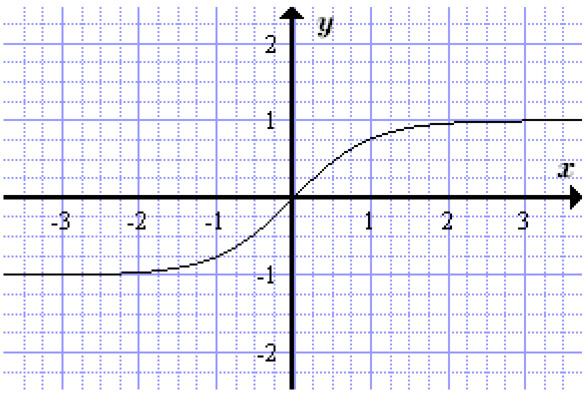

Рисунок 4 – Гиперболический тангенс, $y = \text{th}\, x$

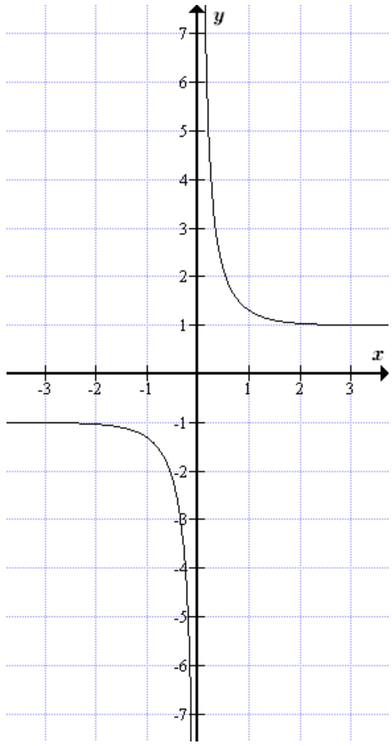

Рисунок 5 – Гиперболический котангенс, $y = \operatorname{cth} x$

Название «гиперболические функции» объясняется тем, что уравнения $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}$ можно рассматривать как параметрические уравнения гиперболы $x^2 - y^2 = 1$. Параметр t в уравнениях гиперболы равен удвоенной площади гиперболического сектора (см. рисунок 6).

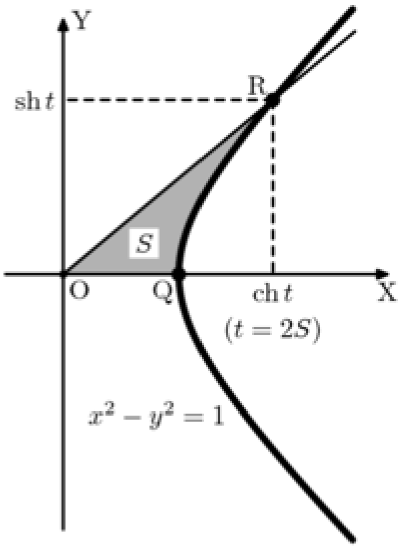

Рисунок 6

Из определения гиперболических функций $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{ch} x$ следуют формулы:

$\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x=1;$

$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1;$

$\operatorname{ch}2x=1+2\operatorname{sh}^2x;$

$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x;$

$\operatorname{ch}^2x=\dfrac{\operatorname{ch}2x+1}{2};$

$\operatorname{sh}^2x=\dfrac{\operatorname{ch}2x-1}{2};$

$\operatorname{th}2x=\dfrac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}.$

Производные гиперболических функций находятся по формулам

$$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x,\ (\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x,\ (\operatorname{th}x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},\ (\operatorname{cth}x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}.$$

При интегрировании гиперболических функций используются формулы

$$\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C,\ \int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}=\operatorname{th}x+C,\ \int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=-\operatorname{cth}x+C.$$

8.2 Примеры решения задач

Задача 1. Доказать справедливость равенства $\operatorname{sh}(x+a)=\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a$.

Решение: по определению гиперболического синуса имеем

$$\operatorname{sh}(x+a)=\frac{e^{x+a}-e^{-(x+a)}}{2}=\frac{e^x\cdot e^a-e^{-x}\cdot e^{-a}}{2}.$$

Так как $e^x=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x$, $e^{-x}=\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$, $e^a=\operatorname{ch}a+\operatorname{sh}a$, $e^{-a}=\operatorname{ch}a-\operatorname{sh}a$, то

$$\operatorname{sh}(x+a)=\frac{(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)\cdot(\operatorname{ch}a+\operatorname{sh}a)-(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)\cdot(\operatorname{ch}a-\operatorname{sh}a)}{2}=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}a}{2}-$$

$$-\frac{(\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}a-\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a-\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}a)}{2}=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}a-\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a-\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}a}{2}=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a}{2}=\frac{2(\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a)+2(\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a)}{2}=\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a.$$

Ответ: $\operatorname{sh}(x+a)=\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}a$.

Задача 2. Выразить $\mathrm{ch}(x+a)$ через гиперболические функции аргументов x и a.

Решение: продифференцировав по x равенство $\mathrm{sh}(x+a)=\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}a+\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{sh}a$, получаем $(\mathrm{sh}(x+a))'_x=(\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}a+\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{sh}a)'_x$, $\mathrm{ch}(x+a)=\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}a+\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{sh}a$.

Ответ: $\mathrm{ch}(x+a)=\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}a+\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{sh}a$.

Задача 3. Найти неопределенный интеграл: $\int\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}3x\,dx$.

Решение: для начала упростим подынтегральную функцию, представив ее в виде суммы.

$$\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}3x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cdot\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)}{4}=$$

$$=\frac{e^{x}\cdot e^{3x}+e^{x}\cdot e^{-3x}+e^{-x}\cdot e^{3x}+e^{-x}\cdot e^{-3x}}{4}=\frac{e^{4x}+e^{-2x}+e^{2x}+e^{-4x}}{4}=$$

$$=\frac{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)+\left(e^{4x}+e^{-4x}\right)}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+\frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right)=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x+\mathrm{ch}4x).$$

В общем случае имеет место формула $\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}y=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y))$.

$$\int\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\mathrm{ch}2x+\mathrm{ch}4x)dx=\frac{1}{2}\int\mathrm{ch}2x\,dx+\frac{1}{2}\int\mathrm{ch}4x\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}2x\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}4x\right)+C=\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+\frac{1}{8}\mathrm{sh}4x+C.$$

Ответ: $\int\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}3x\,dx=\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+\frac{1}{8}\mathrm{sh}4x+C$

Задача 4. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{dx}{\mathrm{sh}x}$.

Решение: $\int\frac{dx}{\mathrm{sh}x}=\int\frac{dx}{2\mathrm{sh}\frac{x}{2}\cdot\mathrm{ch}\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2\,\mathrm{th}\frac{x}{2}\cdot\mathrm{ch}^{2}\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{th}\frac{x}{2}}=\ln\left|\mathrm{th}\frac{x}{2}\right|+C$.

Ответ: $\int\frac{dx}{\mathrm{sh}x}=\ln\left|\mathrm{th}\frac{x}{2}\right|+C$.

Задача 5. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\, dx$.

Решение: $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\, dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\operatorname{ch} x\right)^2 - 1}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}\operatorname{ch} x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\operatorname{ch} x\right)^2 - 1}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}\operatorname{ch} x + \sqrt{\left(\sqrt{2}\operatorname{ch} x\right)^2 - 1}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x}\right) + C$.

Ответ: $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x}\right) + C$.

Задача 6. Найти неопределенный интеграл: $\int \operatorname{sh}^2 2x\, dx$.

Решение: воспользуемся формулой понижения степени: $\operatorname{sh}^2 2x = \frac{\operatorname{ch} 4x - 1}{2}$.

$\int \operatorname{sh}^2 2x\, dx = \int \frac{\operatorname{ch} 4x - 1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 4x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4x - x\right) + C$.

Ответ: $\int \operatorname{sh}^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4x - x\right) + C$.

Задача 7. Найти неопределенный интеграл: $\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^3 x\, dx$.

Решение: внесем $\operatorname{ch} x$ под знак дифференциала.

$\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^3 x\, dx = \int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x\, d(\operatorname{sh} x) = \int \operatorname{sh}^2 x \cdot \left(1 + \operatorname{sh}^2 x\right) d(\operatorname{sh} x) = \int \left(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^4 x\right) d(\operatorname{sh} x) =$

$= \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + C$.

Ответ: $\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^3 x\, dx = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + C$.

Задача 8. Найти неопределенный интеграл: $\int \operatorname{th}^4 x\, dx$.

Решение: $\int \operatorname{th}^4 x\, dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{th} x = t,\ dt = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} \\ dx = \frac{1}{1 - t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^4}{1 - t^2}\, dt = -\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt =$

$= -\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C = -\left(\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x + \operatorname{th} x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x - 1}{\operatorname{th} x + 1}\right|\right) + C$.

Ответ: $\int \operatorname{th}^4 x\,dx = -\left(\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x + \operatorname{th} x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x - 1}{\operatorname{th} x + 1}\right|\right) + C$.

Задача 9. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1} = \int \frac{dx}{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{th}\frac{x}{2} + C$.

Ответ: $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1} = \operatorname{th}\frac{x}{2} + C$.

Задача 10. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int \frac{d(\operatorname{th} x)}{\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int (\operatorname{th} x)^{-\frac{2}{3}} d(\operatorname{th} x) = \frac{(\operatorname{th} x)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C =$

$= 3(\operatorname{th} x)^{\frac{1}{3}} + C = 3\cdot\sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C$.

Ответ: $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = 3\cdot\sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C$.

Задача 11. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x}\,dx$.

Решение: воспользуемся формулой интегрирования «по частям».

$$\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x}\,dx = \left|\begin{array}{l} u = \operatorname{ch} x,\ dv = \dfrac{\operatorname{ch} x\,dx}{\operatorname{sh}^3 x} \\ du = \operatorname{sh} x\,dx,\ v = \displaystyle\int \frac{d(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh}^3 x} = -\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 x} \end{array}\right| = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{2\cdot\operatorname{sh}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{2}} = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x}\,dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C$.

Задача 12. Найти неопределенный интеграл: $\int x^2 \operatorname{sh} x\,dx$.

Решение: воспользуемся формулой интегрирования «по частям» дважды.

$$\int x^2 \operatorname{sh} x\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2,\, dv = \operatorname{sh} x\, dx \\ du = 2x\, dx,\, v = \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = x^2 \cdot \operatorname{ch} x - 2\int x \cdot \operatorname{ch} x\, dx = \begin{vmatrix} u = x,\, dv = \operatorname{ch} x\, dx \\ du = dx,\, v = \operatorname{sh} x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 \cdot \operatorname{ch} x - 2\left(x \cdot \operatorname{sh} x - \int \operatorname{sh} x\, dx\right) = x^2 \cdot \operatorname{ch} x - 2\left(x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\right) + C.$$

Ответ: $\int x^2 \operatorname{sh} x\, dx = x^2 \cdot \operatorname{ch} x - 2\left(x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\right) + C$.

8.3 Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение гиперболических функций.
2. Какими основными свойствами обладают гиперболические функции?
3. Каков геометрический смысл гиперболических функций?
4. Запишите производные и неопределенные интегралы от гиперболических функций.

8.4 Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch} x}$;
2. $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 7x\, dx$;
3. $\int \operatorname{sh}^3 x\, dx$;
4. $\int \operatorname{ch}^2 x\, dx$;
5. $\int \operatorname{ch}^3 x \cdot \operatorname{sh} x\, dx$;
6. $\int \operatorname{ch} \dfrac{x}{2} \cdot \operatorname{sh}^4 x\, dx$;
7. $\int \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x\, dx$;
8. $\int \dfrac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^6 x} dx$;
9. $\int \operatorname{th}^3 x\, dx$;
10. $\int \operatorname{ch}^3 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 x}\, dx$;
11. $\int \left(x^2 - 1\right) \cdot \operatorname{ch} 2x\, dx$;
12. $\int \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}{\operatorname{ch}^4 x} dx$.

8.5 «Неберущиеся» интегралы

Как известно, всякая непрерывная функция имеет первообразную. В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ является также элементарной функцией, говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ выражается через элементарные функции или что этот интеграл «берется». Изученные нами выше методы и приемы интегрирования во многих случаях позволяют «взять» неопределенный интеграл, т.е. найти первообразную функцию для подынтегральной функции.

Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл «не берется» (или что «взять», т.е. найти его невозможно).

Так, например, нельзя взять интеграл $\int \sqrt{x}\cdot\cos x\,dx$, так как элементарной функции, производная от которой была бы равна $\sqrt{x}\cdot\cos x$, не существует. Приведем еще некоторые примеры «неберущихся» интегралов, которые имеют большое значение в приложениях:

$\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона (теория вероятностей),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм (теория чисел);

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ – интегралы Френеля (физика);

$\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегральные синус и косинус;

$\int \frac{e^x}{x}dx$ – интегральная показательная функция.

Первообразные от функций e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\frac{1}{\ln x}$ и других хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений, зависящих от изменения аргумента x.

9 Обзор методов и приемов интегрирования основных видов интегралов

Все рассмотренные нами методы и приемы интегрирования будут отражены в таблице, заимствованной нами из задачника по высшей математике под редакцией П.Е. Дюбюка [30] и И.А. Марон [23].

9.1 Основные методы и приемы интегрирования

№	Вид интеграла	Метод (прием) интегрирования
1.	$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$.	Подстановка $\varphi(x)=t$, $dt=\varphi'(x)dx$.
2.	$\int udv$. Подынтегральное выражение представляется в виде произведения одной функции на дифференциал другой. В качестве u выбираем функцию, упрощающуюся при дифференцировании. Выражение dv должно легко интегрироваться.	Интегрирование «по частям» по формуле $\int udv=uv-\int vdu$. Метод интегрирования «по частям» применяется, например, к интегралам вида $\int P(x)\cdot f(x)dx$, где $P(x)$ – многочлен, а $f(x)$ одна из следующих функций: e^{ax}; $\cos\alpha x$; $\sin\alpha x$; $\ln x$; $\operatorname{arctg} x$; $\arcsin x$, а также к интегралам от произведений показательной функции на косинус и синус.
3.	$\int f(x)\cdot\varphi^{(n)}(x)dx$.	Сводится к интегрированию произведения $f^{(n)}(x)\varphi(x)$ с помощью формулы кратного интегрирования «по частям»: $\int f(x)\cdot\varphi^{(n)}(x)dx=f(x)\varphi^{(n-1)}(x)-$ $-f'(x)\varphi^{(n-2)}(x)+f''(x)\varphi^{(n-3)}(x)-\ldots+$ $+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\varphi(x)+(-1)^n\int f^{(n)}(x)\varphi(x)dx$.
4.	$\int e^{ax}\cdot P_n(x)dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.	Применяя формулу кратного интегрирования «по частям» (см. п.3), получим $\int e^{ax}\cdot P_n(x)dx=e^{ax}\left[\frac{P_n(x)}{a}-\frac{P_n'(x)}{a^2}+\frac{P_n''(x)}{a^3}-\ldots+\right.$ $\left.+(-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C$.

№	Вид интеграла	Метод (прием) интегрирования
5.	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,$ $p^2-4q<0.$	Выделение полного квадрата в знаменателе: $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$ Далее подстановка: $x+\frac{p}{2}=t\cdot\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$
6.	$I_n=\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}.$	Рекуррентная формула: $I_n=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+(2n-1)\cdot I_{n-1}\right).$
7.	$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx,$ $p^2-4q<0.$	То же, что в п. 5. После выделения полного квадрата из квадратного трехчлена получается интеграл п. 6.
8.	$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, $Q(x)=(x-x_1)^l(x-x_2)^m\ldots$ $\ldots\left(x^2+px+q\right)^k\ldots.$	Подынтегральную дробь представляют в виде суммы дробей $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_l}{(x-x_1)^l}+\ldots+$ $+\frac{B_1}{(x-x_2)}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-x_2)^m}+\cdots+$ $+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+$ $+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\ldots.$
9.	$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$	Выделение целой части, разложение $Q(x)$ на множители $(x-a)^n$ и $\left(x^2+px+q\right)^n$. Затем разложение правильной дроби на простейшие.
10.	$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx,$ где R – рациональная функция своих аргументов.	Приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $x=t^k$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}.$
11.	$\int R\left(x, \sqrt[n]{x-a}\right)dx.$	Подстановка $\sqrt[n]{x-a}=t,\ x-a=t^n$, где n – наименьшее общее кратное всех радикалов, под которыми разность $(x-a)$ входит в подынтегральную функцию.

12.	$\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx.$	Подстановка $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$, $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$, где n – наименьшее общее кратное показателей всех радикалов, под которыми дробь $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ входит в подынтегральную функцию.
13.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$	Выделение полного квадрата под радикалом; линейная подстановка $(x-a)=t.$
14.	$\int \dfrac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$	Подстановкой $x+\dfrac{b}{2a}=t$ интеграл приводится к сумме двух интегралов: $$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = M_1\int\frac{t\,dt}{\sqrt{at^2+m}} + N_1\int\frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}.$$ Первый интеграл сводится к интегралу от степенной функции, а второй интеграл является табличным.
15.	$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где R – рациональная функция от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$.	Приводится к интегралу от рациональной дроби подстановками Эйлера: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$ $(a>0)$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ $(c>0)$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$ $(4ac-b^2<0)$, где x_1 – корень трехчлена ax^2+bx+c. Для вычисления указанного интеграла применяются также тригонометрические подстановки: $$x+\frac{b}{2a} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sin t \\ \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos t \end{cases} \quad (a<0,\ 4ac-b^2<0)$$ $$x+\frac{b}{2a} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\dfrac{1}{\sin t} \\ \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\dfrac{1}{\cos t} \end{cases} \quad (a>0,\ 4ac-b^2<0)$$

№	Вид интеграла	Метод (прием) интегрирования
		$x+\dfrac{b}{2a}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{tg}t & (a>0,\\ \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{ctg}t & 4ac-b^2>0)\end{cases}$
16.	$\int\dfrac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.	Записываем равенство $$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+ +k\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$ где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$. Дифференцируя обе части этого равенства и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим тождество $$P_n(x)\equiv Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c)+ +\frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+k,$$ которое дает систему $n+1$ линейных уравнений для определения коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и множителя k. Интеграл же $\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ находится с помощью метода указанного в п. 14 $(M=0,\ N=1)$.
17.	$\int\dfrac{dx}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$.	Этот интеграл приводится обратной подстановкой $x-x_1=\dfrac{1}{t}$ к интегралу, рассмотренному выше.
18.	$\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n, p – рациональные числа.	Интеграл от дифференциального бинома выражается через элементарные функции только при выполнении одного из следующих условий: 1) если p – целое число, 2) если $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, 3) если $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число. 1-й случай а) если p – целое положительное число, то нужно раскрыть скобки $(a+bx^n)^p$ по

№	Вид интеграла	Метод (прием) интегрирования
		биному Ньютона и вычислить интегралы от степеней; б) если p – целое отрицательное число, то подстановка $x=t^k$, где k – общий знаменатель дробей m и n, приводит к интегралу от рациональной дроби; 2-й случай если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то применяется подстановка $a+bx^n=t^k$, где k – знаменатель дроби p; 3-й случай если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, то применяется подстановка $a+bx^n=x^n\cdot t^k$, где k – знаменатель дроби p.
19.	$\int R(\sin x,\cos x)dx$.	Универсальная тригонометрическая подстановка $tg\frac{x}{2}=t,\ x=2arctg\,t,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$. Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то применяется подстановка $\cos x=t$. Если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то применяется подстановка $\sin x=t$. Если $R(-\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x=t$.
20	$\int R(\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)dx$.	Применяется подстановка $\operatorname{th}\frac{x}{2}=t$: $\operatorname{sh} x=\frac{2t}{1-t^2};\ \operatorname{ch} x=\frac{1+t^2}{1-t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.
21.	$\int \sin ax\cdot\sin bx\,dx$; $\int \sin ax\cdot\cos bx\,dx$; $\int \cos ax\cdot\cos bx\,dx$.	Необходимо преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму или разность, пользуясь одной из следующих формул: $\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]$; $\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]$;

№	Вид интеграла	Метод (прием) интегрирования
		$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a-b\right)x+\sin\left(a+b\right)x\right].$
22.	$\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$, где m и n – целые числа.	Если m – нечетное и положительное, то применяется подстановка $\cos x=t$. Если n – нечетное и положительное, то применяется подстановка $\sin x=t$. Если $m+n$ – четное отрицательное, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x=t$, при этом $x=arctgt$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ и $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Если m и n – четные неотрицательные, то применяют формулы понижения степени: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.
23.	$\int\sin^p x\cdot\cos^q xdx$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, где p и q – рациональные числа.	Подстановкой $\sin x=t$ приводится к интегралу от дифференциального бинома $\int\sin^p x\cdot\cos^q xdx=\int t^p\left(1-t^2\right)^{q-1}dt$ (см. п. 18).
24.	$\int R\left(e^{ax}\right)dx$.	Подстановкой $e^{ax}=t$ преобразуется в интеграл от рациональной функции.

9.2 Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл»

1 уровень

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\left(\sqrt[9]{x^5}+\frac{4}{x^7}-62+\frac{13}{\sin^2 x}+\frac{7}{1+x^2}\right)dx$;

2. $\int\frac{dx}{\cos^2 4x}$;

3. $\int\frac{7dx}{x-4}$;

4. $\int\frac{5dx}{(x+2)^6}$;

5. $\int\frac{2x-3}{(x-3)^2\left(x^2+2\right)}dx$.

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\left(\sqrt[7]{x^5}+\frac{2}{x}-42+\frac{8}{\cos x}+\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$;

2. $\int e^{5x-2}dx$;

3. $\int\frac{6dx}{x-3}$;

4. $\int\frac{4dx}{(x-1)^5}$;

5. $\int\frac{x-1}{(x+1)^2\left(x^2+7\right)}dx$.

2 уровень

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{e^{\sqrt{2x+1}}+3}{\sqrt{2x+1}}dx$;

2. $\int(4-3x)\cdot e^{-3x}dx$;

3. $\int\frac{x^3+1}{x^2-x}dx$;

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$;

5. $\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$.

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{\sqrt{\arcsin x}+3x}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

2. $\int arctg\sqrt{4x-1}dx$,

3. $\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$,

4. $\int\sqrt{2^x-1}dx$,

5. $\int\frac{\cos x}{2+\cos x}dx$.

10 Вопросы к коллоквиуму по теме «Неопределенный интеграл»

1 Первообразная функция. Две теоремы о первообразных. Неопределенный интеграл.

2 Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла (с доказательствами).

3 Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования. Непосредственное (табличное) интегрирование.

4 Основные методы интегрирования. Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки).

5 Основные методы интегрирования. Формула интегрирования «по частям». Вывод формулы. Примеры интегралов, находящихся с помощью этой формулы.

6 Интегрирование простейших рациональных дробей.

7 Алгоритм интегрирования дробно-рациональных функций.

8 Интегрирование основных иррациональностей.

9 Интегрирование функций, содержащих тригонометрические функции.

Список использованных источников

1 Боголюбов, А.Н. Математики. Механики. Биографический справочник / А.Н. Боголюбов – Киев: Наукова думка, 1983. – 168 с.

2 Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский – М.: Наука, 1984. – 431 с.

3 Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин – М.: Физматлит, 2001. – 480 с.

4 Гусак, А.А. Пособие к решению задач по высшей математике / А.А. Гусак – Минск: Изд. БГУ, 1973. – 532 с.

5 Гусак, А.А. Справочное пособие к решению задач. Математический анализ и дифференциальные уравнения / А.А. Гусак– Минск: НТООО «ТетраСистемс», 2003. – 414 с.

6 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч.: учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Д. Кожевникова – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»; Мир и Образование, 2003. – Ч. 1.

7 Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович – М.: Наука, 1990. – 516 с.

8 Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб. пособие для студентов высших технических учебных заведений /Г.С. Бараненков, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002.

9 Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И.Запорожец – М.: Высшая школа, 1965.

10 Зубова, И.К. Исследование функции методами дифференциального исчисления: методические указания / И.К. Зубова, О.В. Острая; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2003 – 24 с.

11 Зубова, И.К. Основы математического анализа (модуль «Введение в математический анализ»): самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н. Павленко; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2011 – 149 с.

12 Зубова, И.К. Основы математического анализа (модуль «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»): самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н. Павленко; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2011 – 170 с.

13 Иванова, Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного / Е.Е. Иванова – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. – 407 с.

14 Ильин, В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, И.Г. Позняк – М.: Наука, 1982. – 616 с.

15 Ким, В.С. Исследование функций: методические указания / В.С. Ким – Оренбург: Политехнический институт, 1988. – 15 с.

16 Каплан, И.А. Практикум по высшей математике: в 2 т.: учебное пособие / И.А. Каплан, В.И. Пустынников – М.: Эксмо, 2006. – Т.1. –576 с.

17 Козлова, В.А. Саморепетитор по математике / В.А. Козлова, Г.Г. Левитас – М.: Школа – Пресс, 1996. – 272 с.

18 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев – М.: Наука, 1989.

19 Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: сборник задач по математическому анализу : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабулин ;под ред. Л.Д. Кудрявцева – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т.1.

20 Кузнецов, Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л.А. Кузнецов – СПб.: Издательство «Лань», 2005.

21 Лихолетов, И.И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И.И. Лихолетов, И.П. Мацкевич – Минск: «Вышэйшая школа», 1969. – 454 с.

22 Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко – М.: Рольф, 2001. – 576 с.

23 Марон, И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной) / И.А. Марон – М.: Издательство «Наука», 1970. – 400 с.

24 Острая, О.В. Интегральное исчисление функции одной переменной (неопределённый интеграл): методические указания / О.В. Острая, Н.В. Максименко − Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009 – 29 с.

25 Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов – М.: Физматгиз, 1961. – 748 с.

26 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2004. – Ч.1.– 288 с.

27 Понтрягин, Л.С. Математический анализ для школьников / Л.С. Понтрягин – М.: Наука, 1983. – 96 с.

28 Рассоха, Е.Н. Неопределенный интеграл: методические указания / Е.Н. Рассоха; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ООО "Экспресс-печать", 2012. – 42 с.

29 Садовничий, В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 т. / В.А. Садовничий – М.: Высшая школа, 2002. – Т.1. – 725 с.

30 Сборник задач по курсу высшей математики: учеб. пособие / П.Е. Дюбюк [и др.]; под ред. П.Е. Дюбюка, Г.И. Кручковича. – 2-е изд. – М.: Высш. Шк., 1965. – 591 с.

31 Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц – М.: Наука, 1970. – Т.1. – 440 с.

32 Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. В 3 т.: учебное пособие для вузов / В.Д. Черненко – СПб.: Политехника, 2003. – Т. 1. – 703 с.

33 Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998.

Учебное пособие

Инна Каримовна Зубова
Ольга Викторовна Острая
Лариса Михайловна Анциферова
Елена Николаевна Рассоха

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (МОДУЛЬ «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»)

ISBN 978-5-7410-1794-4
9 785741 017944